Верификация программ на моделях

Лекция №3

Системы переходов (LTS). Корректность и адекватность LTS модели.

Константин Савенков (лектор)

Контрольная работа

- 15 минут
- 3 вопроса: 1 сложный (10 баллов) + 2 простых (по 5 баллов)
- Эти баллы не связаны с баллами практикума
- Оценка
  - 0..9 баллов – не засчитывается, доп. вопросы по теме на экзамене; если так по большинству контрольных, то -1 балл к оценке за курс,
  - 10..19 баллов (формально правильные краткие ответы) – ОК,
  - 20 баллов (развёрнутый ответ, демонстрирующий понимание) +1 балл; если таких много, то +1 к оценке за курс => автомат

План лекции

- Система понятий, используемых в курсе
- Размеченные системы переходов (LTS)
- Недетерминизм систем переходов
- Пути, вычисления, трассы
- Свойства линейного времени
- Корректность модели
- Адекватность модели

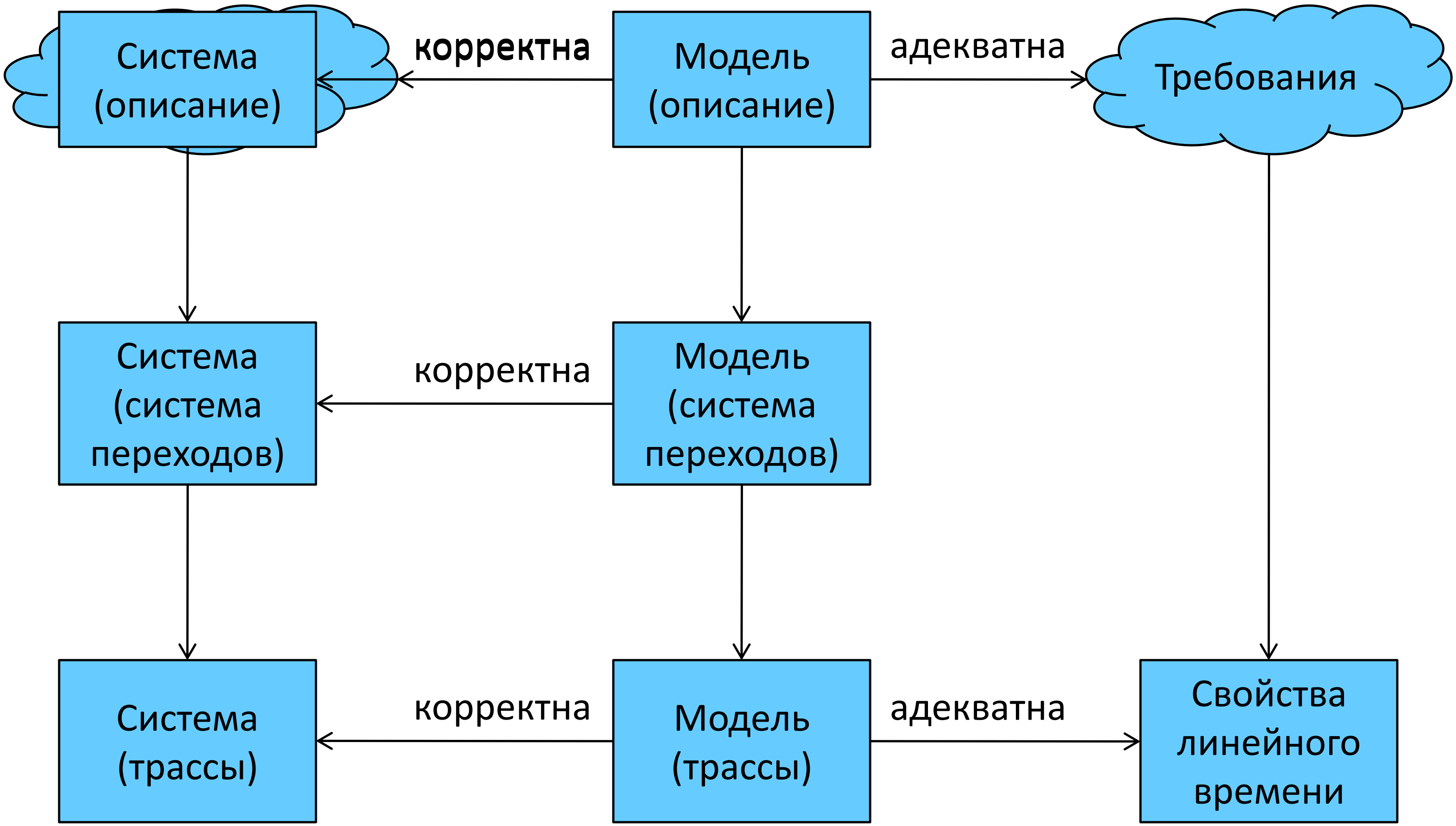
Итоги прошлой лекции

- Свойства проверяются на состояниях и их последовательностях
- Чтобы перебирать меньше состояний, исследуется не исходная система, а её модель
- Модель должна быть простой, корректной и адекватной
- В этом случае из правильности модели следует правильность программы

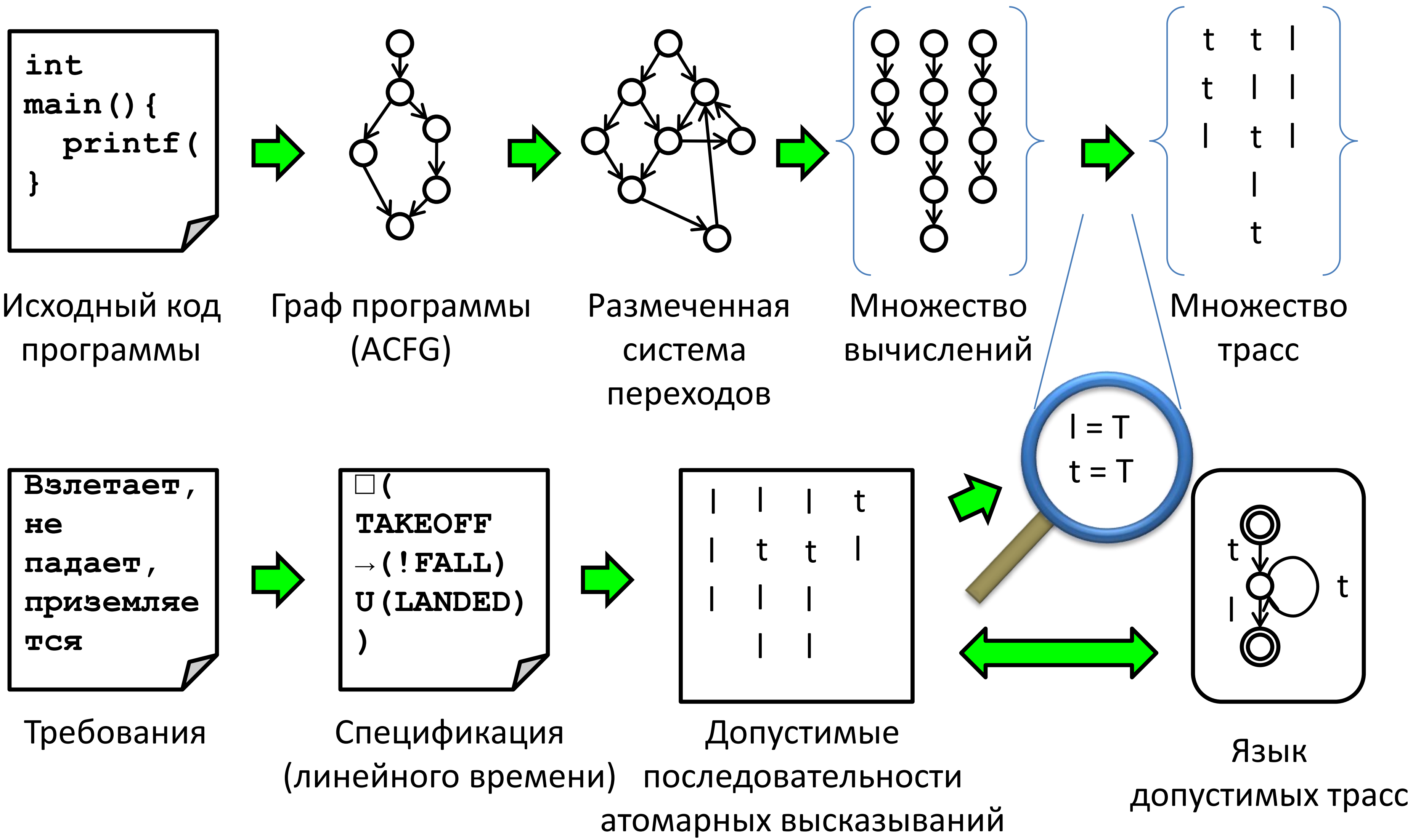
Строго говоря…

Если мы хотим доказать, что после проверки правильности на модели в программе нет ошибок, то все эти понятия стоит сформулировать более строго

Строго говоря, всё должно быть так:



Различные представления программы



Размеченные системы переходов (LTS)

$$TS = \left\langle S, Act, \xrightarrow{a}, I, AP, L \right\rangle$$

- S – множество состояний,
- Act – множество действий, τ – невидимое действие,
- $\xrightarrow{a} \subseteq S \times Act \times S$ – **тотальное** отношение

переходов,

- $I \subseteq S$ – **множество** начальных состояний,
- AP – множество атомарных высказываний,
- $L : S \to 2^{AP}$ – функция разметки.

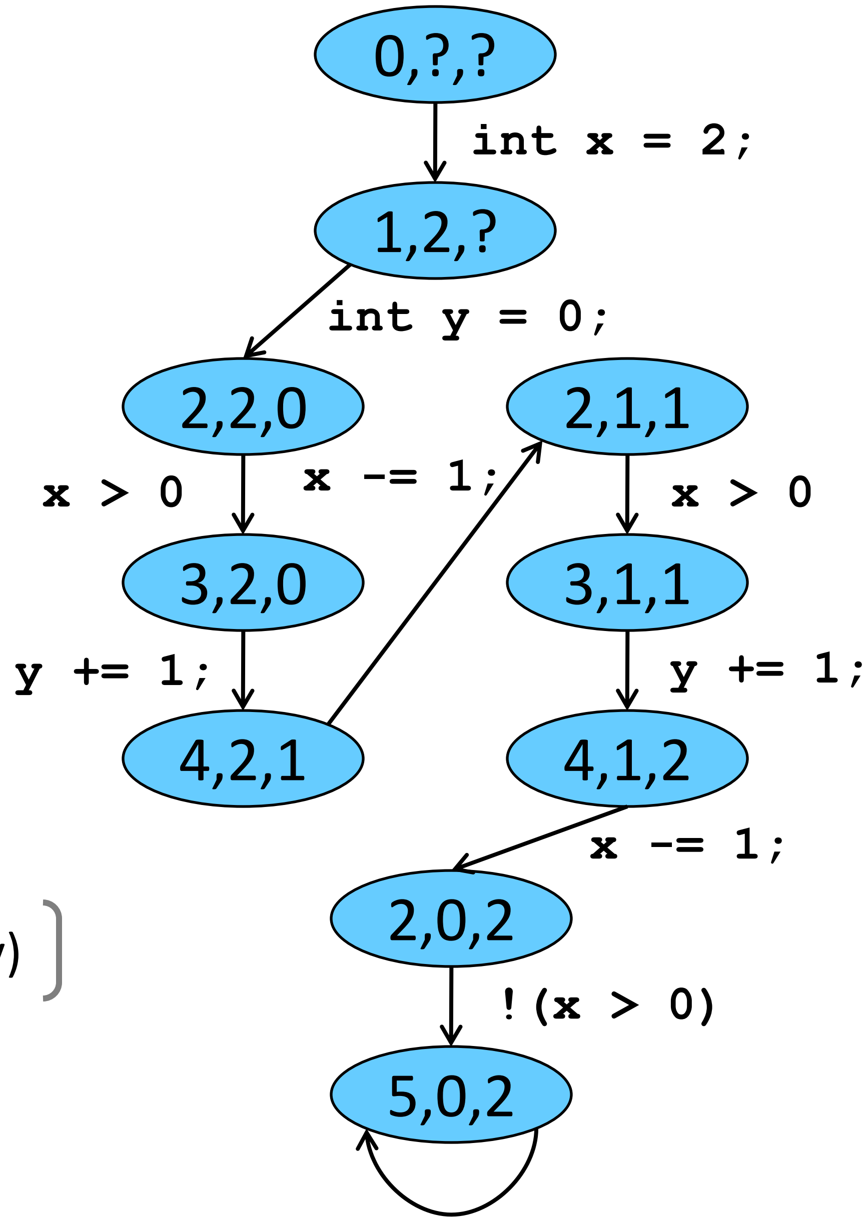
S – конечное или счётное множество, Act – конечное

Нотация: $\left\langle s, a_0, s' \right\rangle \in \xrightarrow{a} \equiv s \xrightarrow{a_0} s'$

Пример LTS

```
0: int x = 2;
1: int y = 0;
2: while (x>0)
   {
3:   y += 1;
4:   x -= 1;
   }
5:
```

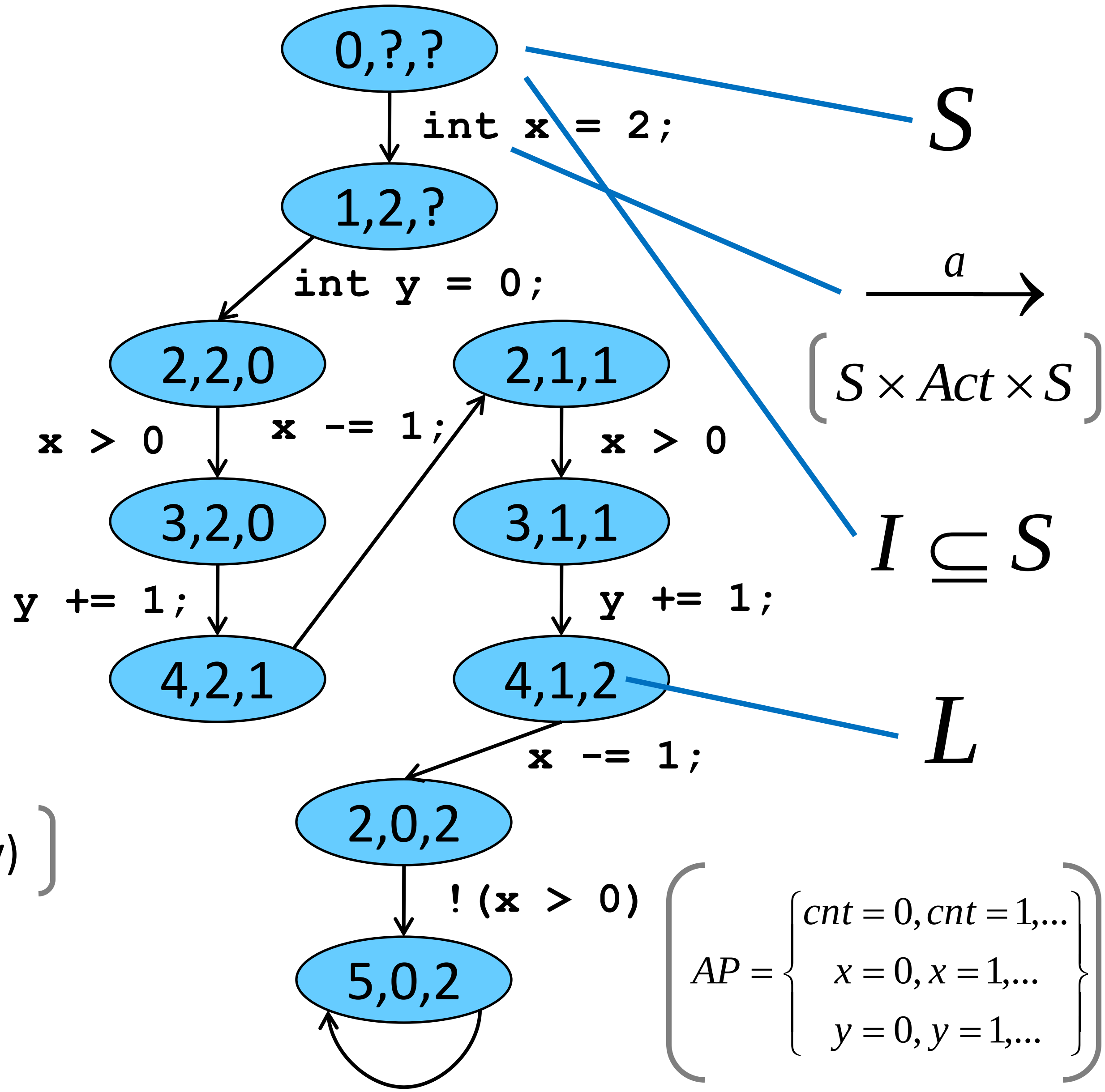
Состояние: (счётчик, x, y)



Пример LTS

```
0: int x = 2;
1: int y = 0;
2: while (x>0)
   {
3:    y += 1;
4:    x -= 1;
   }
5:
```

Состояние: (счётчик, x, y)



$$AP = \left\{ \begin{array}{c} cnt = 0, cnt = 1, \ldots \\ x = 0, x = 1, \ldots \\ y = 0, y = 1, \ldots \end{array} \right\}$$

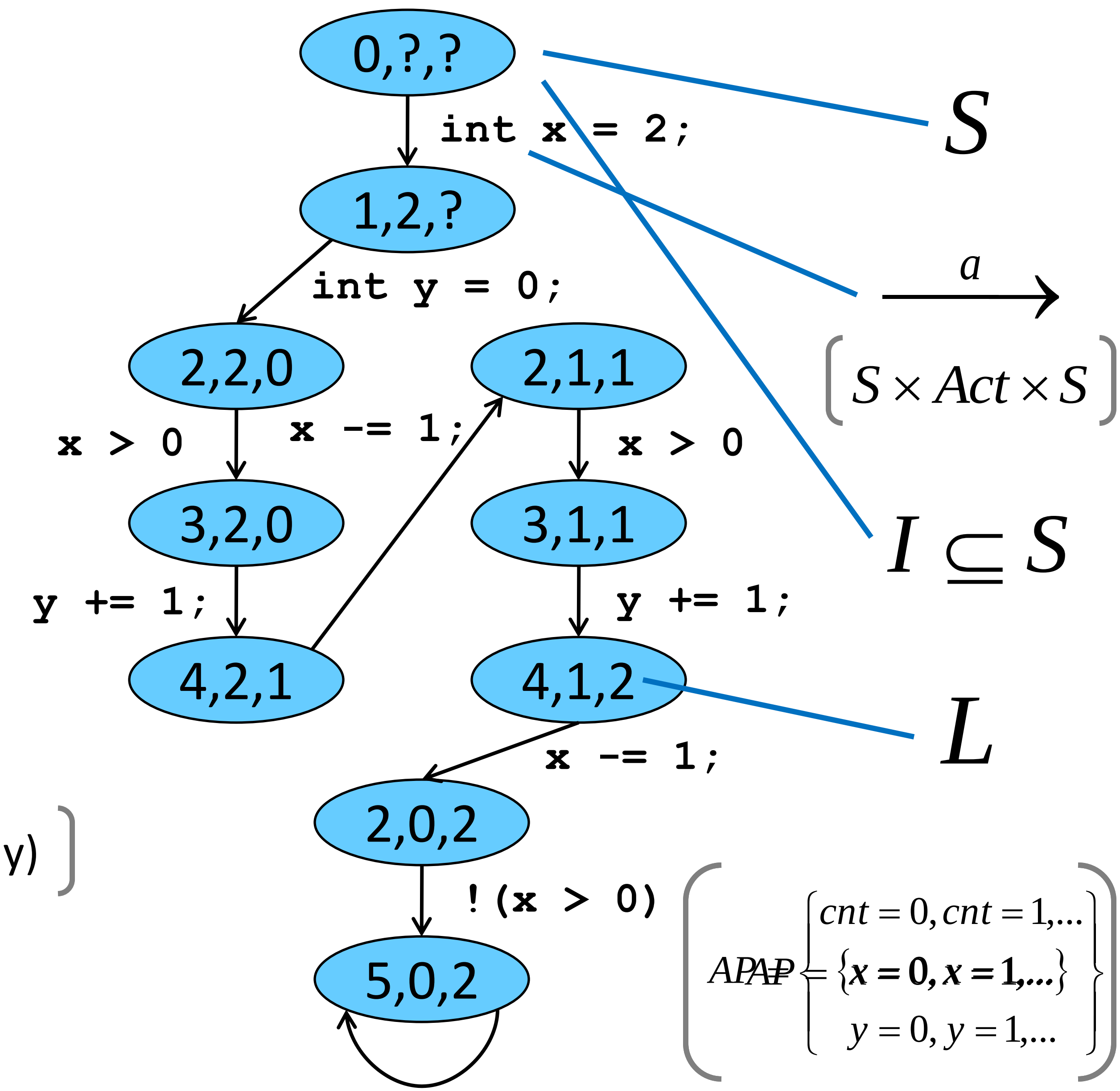
Что включать в состояние

- Набор атомарных высказываний AP определяется свойствами, которые нужно проверить
- Изменение состояния связано с изменением выполнимости хотя бы одного атомарного высказывания
- Исходя из этого мы определяем, что включать в состояние программы
- Главное – не «потерять» ни одного изменения атомарных состояний

Пример LTS

```
0: int x = 2;
1: int y = 0;
2: while (x>0)
   {
3:    y += 1;
4:    x -= 1;
   }
5:
```

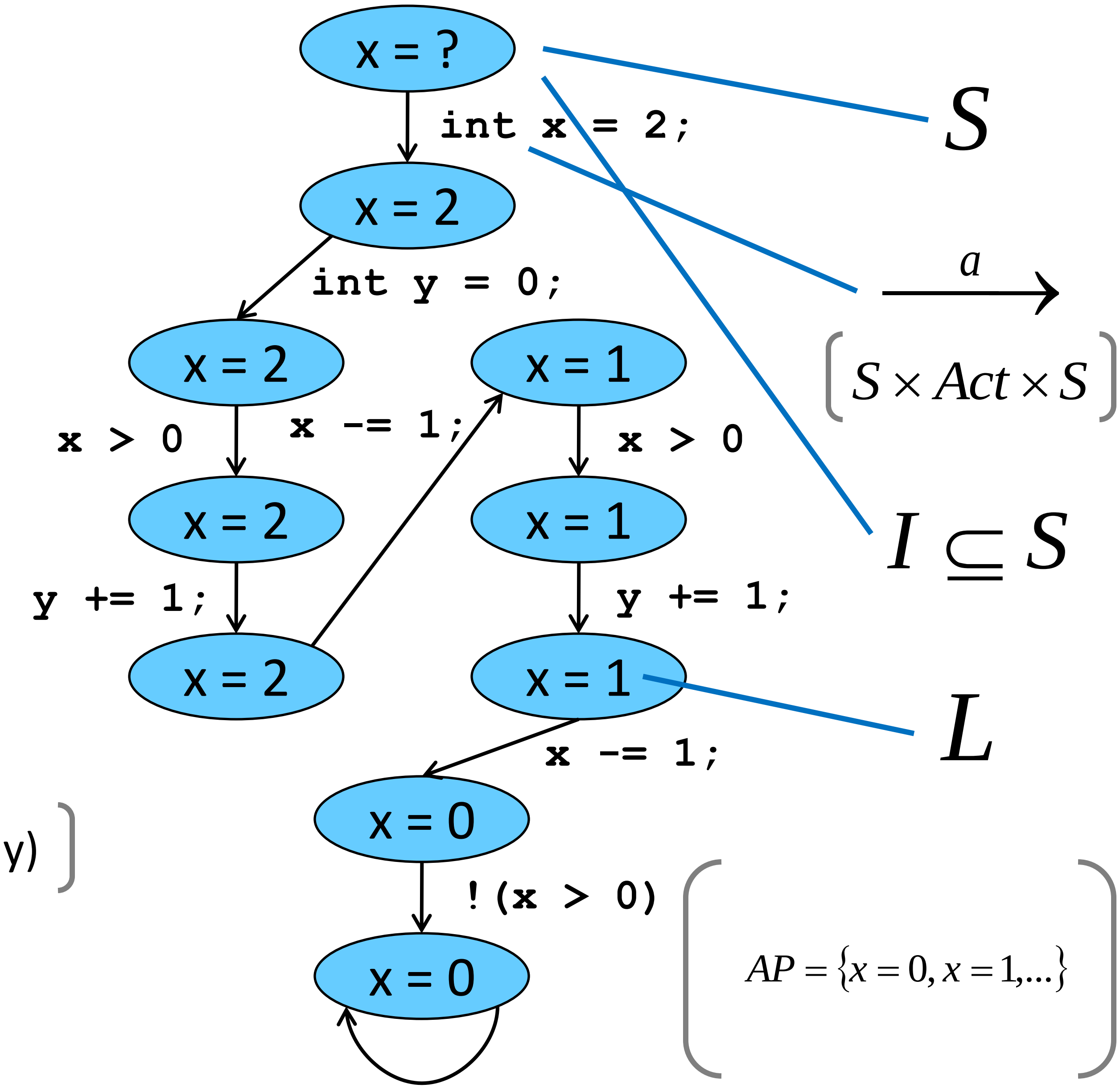
Состояние: (счётчик, x, y)



Пример LTS

```
0: int x = 2;
1: int y = 0;
2: while (x>0)
   {
3:   y += 1;
4:   x -= 1;
   }
5:
```

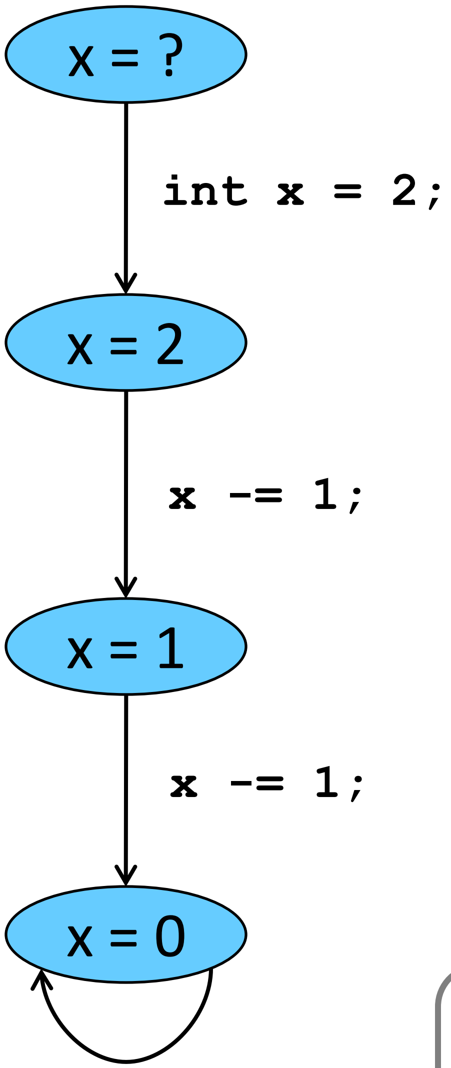
Состояние: (счётчик, x, y)



Пример LTS

```
0: int x = 2;
1: int y = 0;
2: while (x>0)
   {
3:    y += 1;
4:    x -= 1;
   }
5:
```

Состояние: (счётчик, x, y)



$$AP = \{x = 0, x = 1, \ldots\}$$

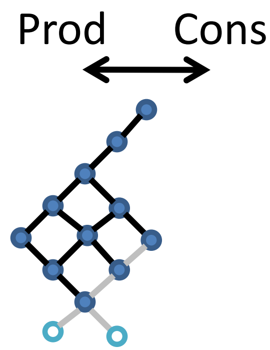
Что включать в состояние?

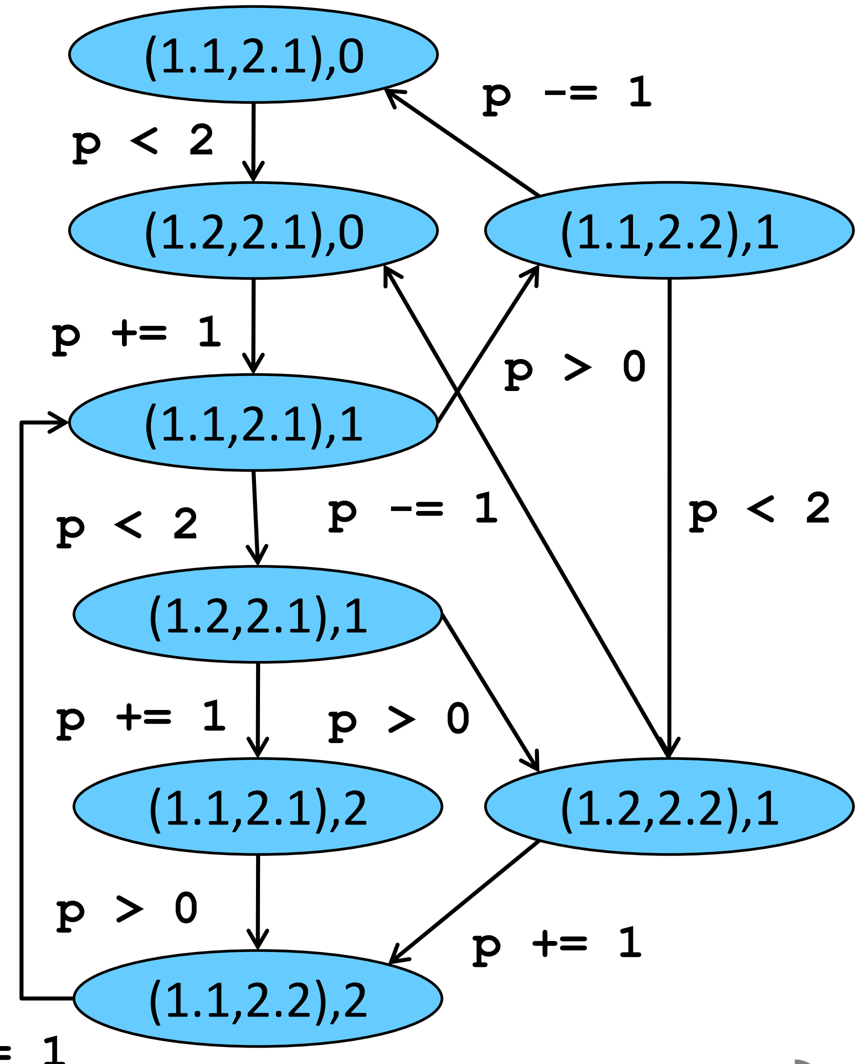
В дальнейшем мы будем рассматривать «универсальное» определение состояния, достаточное для проверки свойств линейного времени и локализации их нарушения в описании программы

Совокупность значения счётчиков управления последовательных процессов и переменных программы

Пример LTS

```
     int p;
     process Prod() {
       while(1)
1.1:     if(p < 2)
1.2:       p += 1;
     }
     process Cons() {
       while(1)
2.1:     if(p > 0)
2.2:       p -= 1;
     }
```





Состояние: (счётчик Prod, счётчик Cons, p)

Часть состояний не показана (оператор беск. цикла, стартовые состояния)

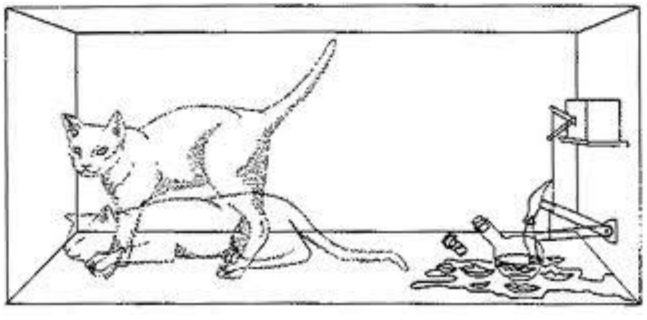
Бесконечное количество вычислений, однако размеченная система переходов конечна

Недетерминизм

- В ряде ситуаций шаг может сделать любой из двух процессов, порядок действий не определён
- **Недетерминизм** **= неопределённость**
- При построении LTS рассматриваются все возможные варианты последовательности действий

Недетерминизм

- Вообще-то в природе довольно мало недетерминированных процессов
- Да и те считаются недетерминированными, поскольку физические законы, по которым выбирается действие, нам не известны
- Недетерминизм появляется, как только мы не знаем причин выбора действия или считаем их несущественными



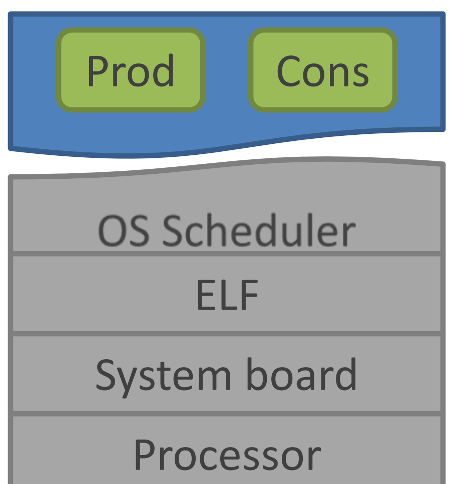
Недетерминизм

- Порядок выполнения Prod и Cond на конкретном компьютере детерминирован и определяется алгоритмом диспетчера операционной системы и состоянием ресурсов
- Для проверки правильности программы мы решили абстрагироваться от всего, кроме описания двух процессов
- Итог – недетерминизм очерёдности выполнения процессов

Подробнее про разные виды недетерминизма – ниже

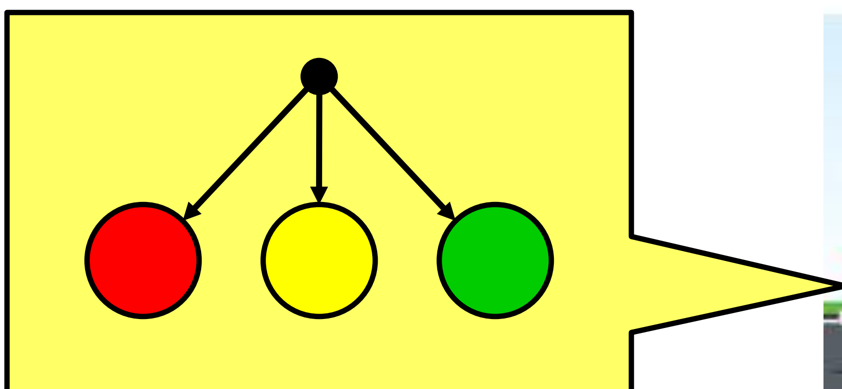
Недетерминизм – это фича!

- Используется для:
  - моделирования параллельного выполнения процессов в режиме чередования (интерливинга)
    - позволяет абстрагироваться от алгоритма диспетчеризации и скорости выполнения процессов



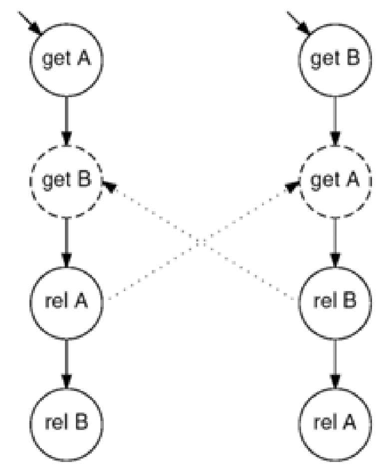
Недетерминизм – это фича!

- Используется для:
  - моделирования прототипа системы
    - не ограничивает будущую реализацию заданным порядком выполнения операторов или конкретными входными данными



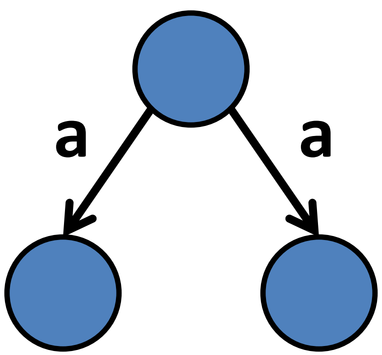

Недетерминизм – это фича!

- Используется для:
  - построения абстракции реальной системы
    - для абстрагирования от деталей, несущественных для проверки свойств и для построения модели по неполной информации



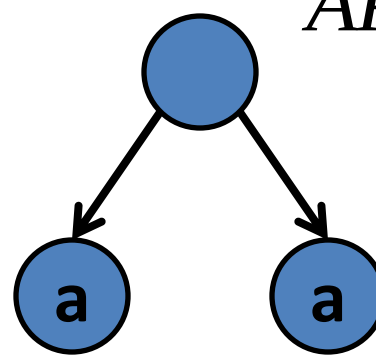
Недетерминизм в LTS

- В LTS недетерминизм проявляется в виде состояний, из которых можно перейти более чем в одно состояние



недетерминизм
действий

$$AP = \{a\}$$

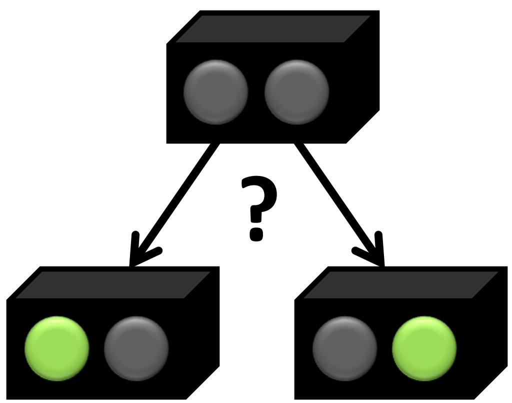


недетерминизм
атомарных высказываний

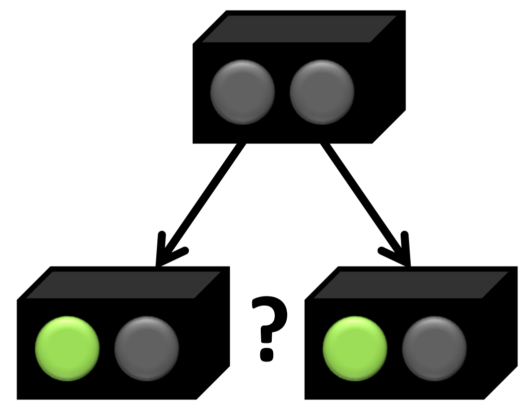
[строгие определения – далее]

Недетерминизм в LTS

- В LTS недетерминизм проявляется в виде состояний, из которых можно перейти более чем в одно состояние



может произойти одно из нескольких действий



наблюдатель не может отличить два состояния

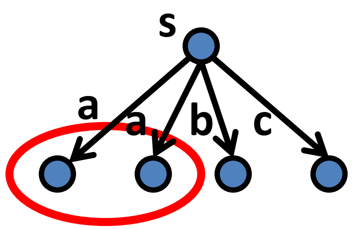
(строгие определения – далее)

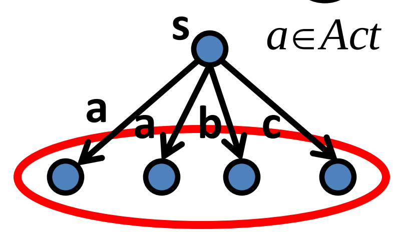
Вспомогательные определения

Прямые потомки вершины s

по действию *a* — по всем действиям

$$Post(s,a)=\{s'\in S \mid s\xrightarrow{a}s'\},\quad Post(s)=\bigcup_{a\in Act}Post(s,a)$$

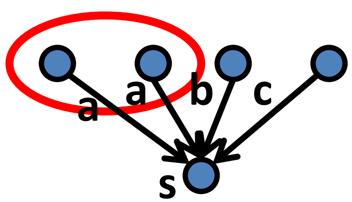


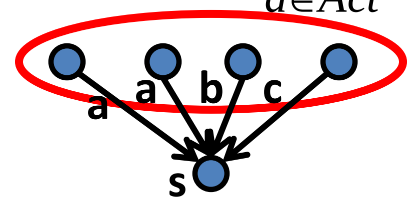


Прямые предки вершины s

по действию *a* — по всем действиям

$$Pre(s,a)=\{s'\in S \mid s'\xrightarrow{a}s\},\quad Pre(s)=\bigcup_{a\in Act}Pre(s,a)$$





Детерминизм

- Система $TS = \left\langle S, Act, \xrightarrow{a}, I, AP, L \right\rangle$ детерминирована
  – по действиям, тогда и только тогда:

$$|I| \leq 1 \quad и \quad |Post(s,a)| \leq 1, \forall s \in S, a \in Act$$

  – по атомарным высказываниям, тогда и только тогда:

$$|I| \leq 1 \quad и \quad \Big|\underbrace{Post(s) \cap \{s' \in S \mid L(s') = A\}}_{\text{одинаково размеченные потомки } s}\Big| \leq 1, \forall s \in S, A \in 2^{AP}$$

Путь

- *Конечным путём σ* системы переходов TS называется такая последовательность чередующихся состояний и действий, заканчивающаяся состоянием:

$$\sigma = s_0 a_1 s_1 a_2 s_2 \ldots a_n s_n, \textit{ что } s_i \xrightarrow{a_{i+1}} s_{i+1} \ \forall 0 \le i < n.$$

- *Бесконечным путём σ* системы переходов TS называется такая бесконечная последовательность чередующихся состояний и действий:

$$\sigma = s_0 a_1 s_1 a_2 s_2 a_3 \ldots, \textit{ что } s_i \xrightarrow{a_{i+1}} s_{i+1} \ \forall 0 \le i.$$

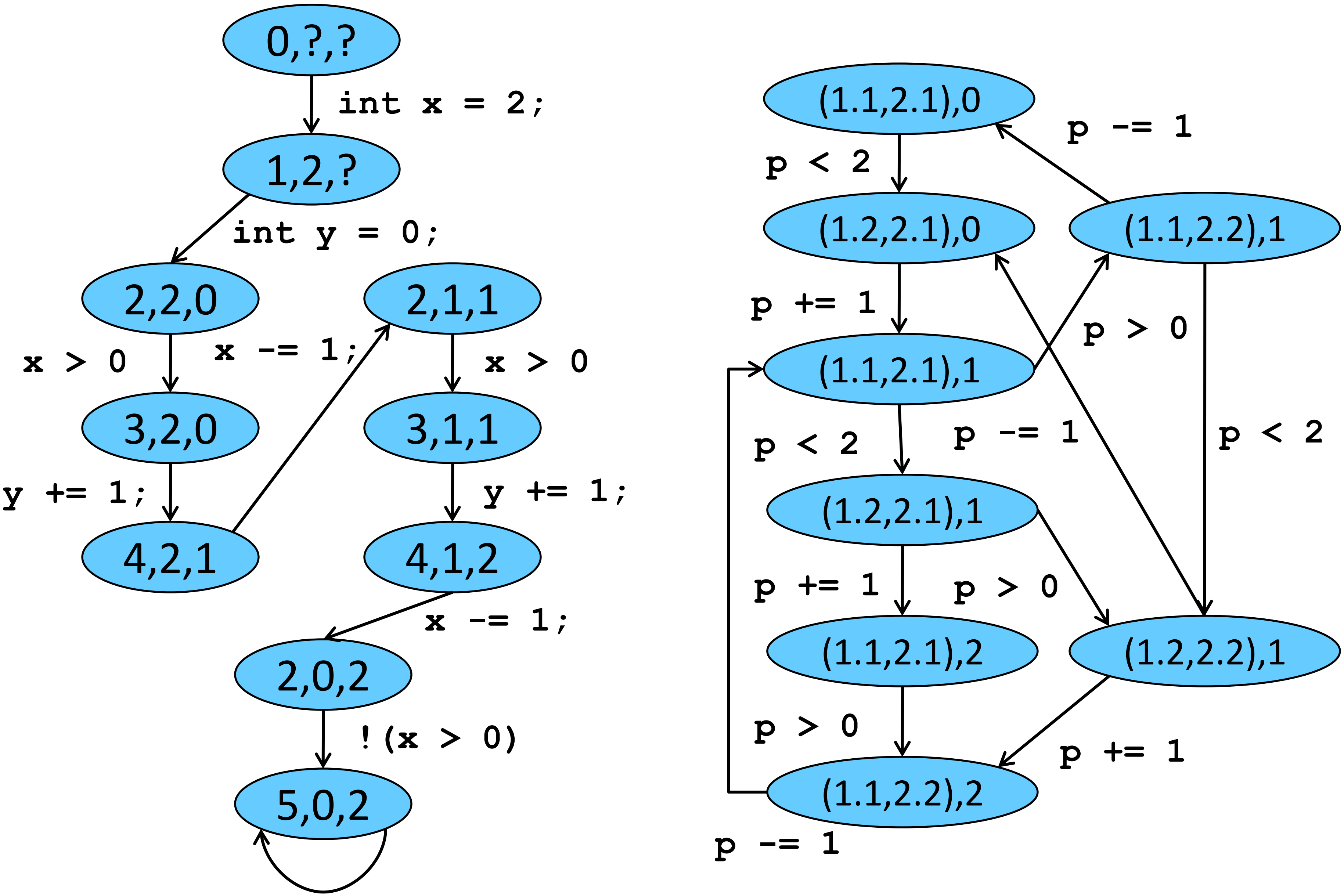
- Путь называется *начальным*, если $s_0 \in I$

Вычисление

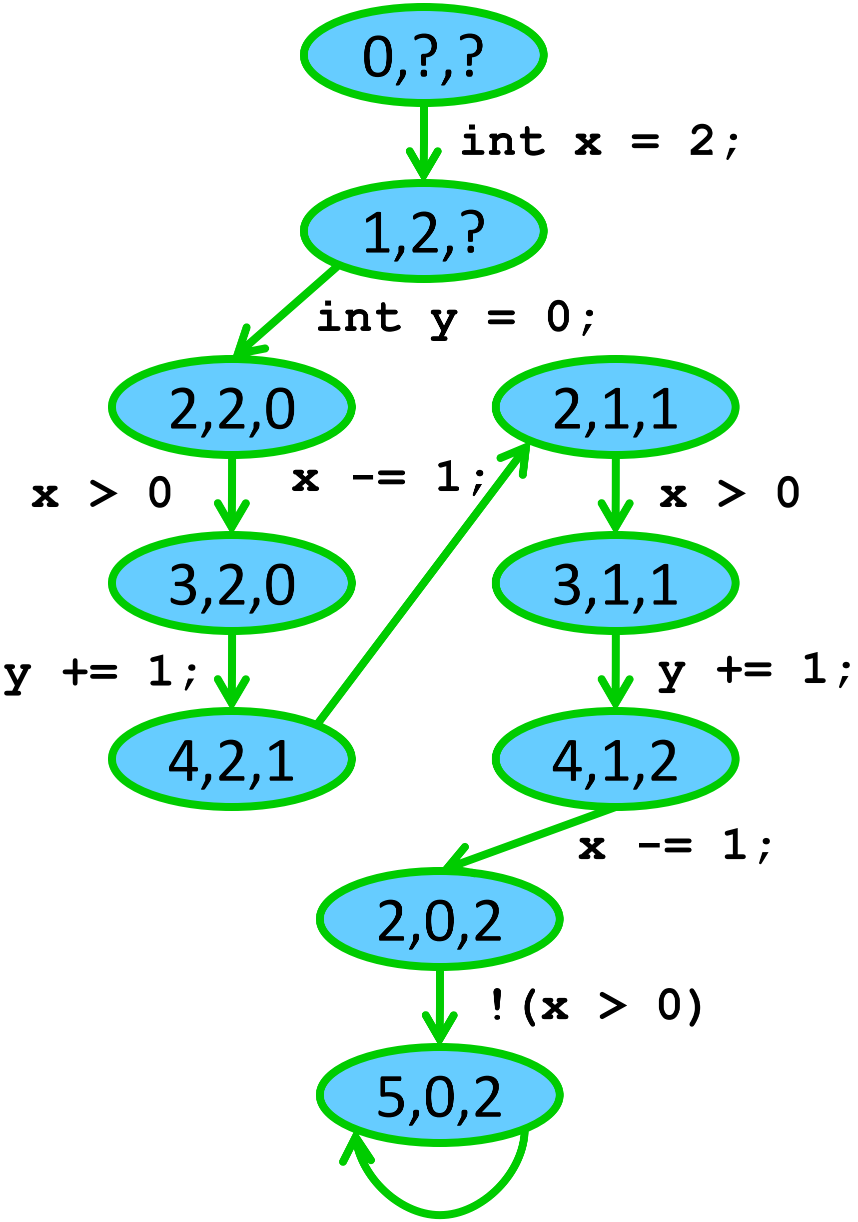
- Путь называется *максимальным*, если он бесконечен.

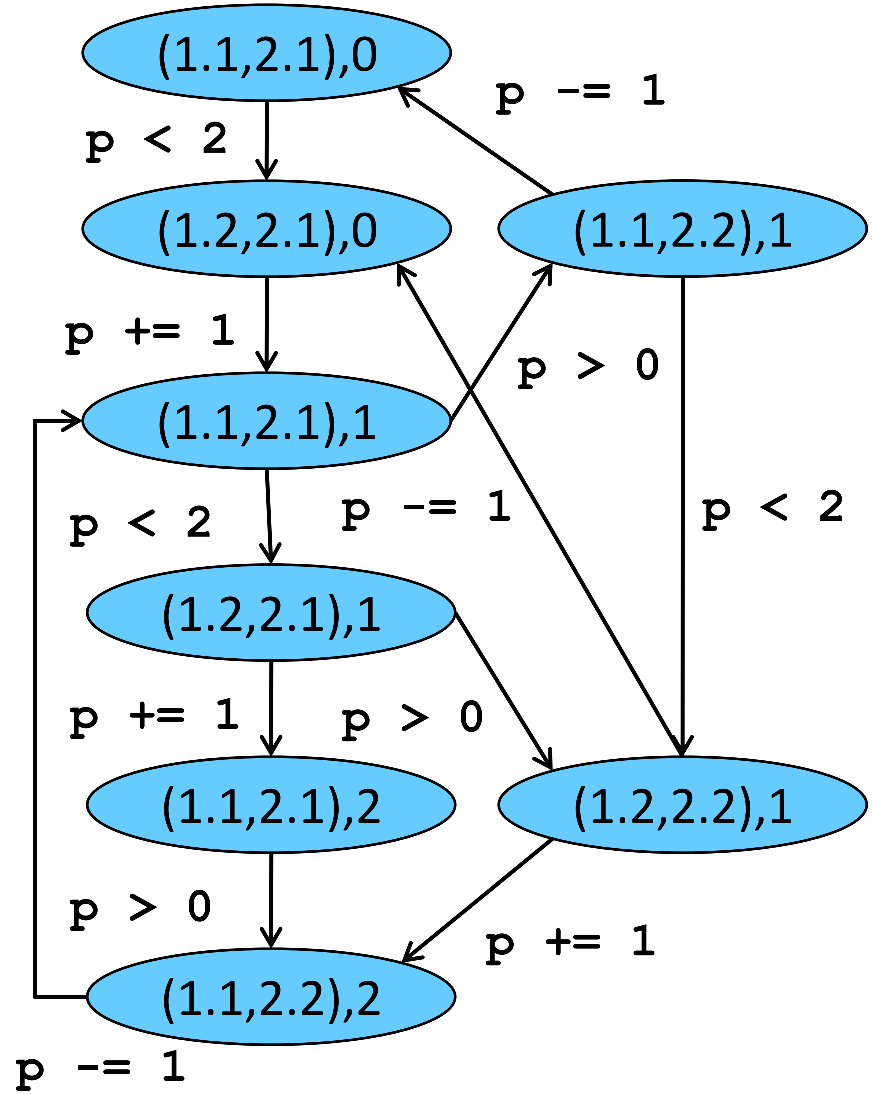
- *Вычислением* системы переходов TS называется начальный максимальный путь.

Примеры вычислений

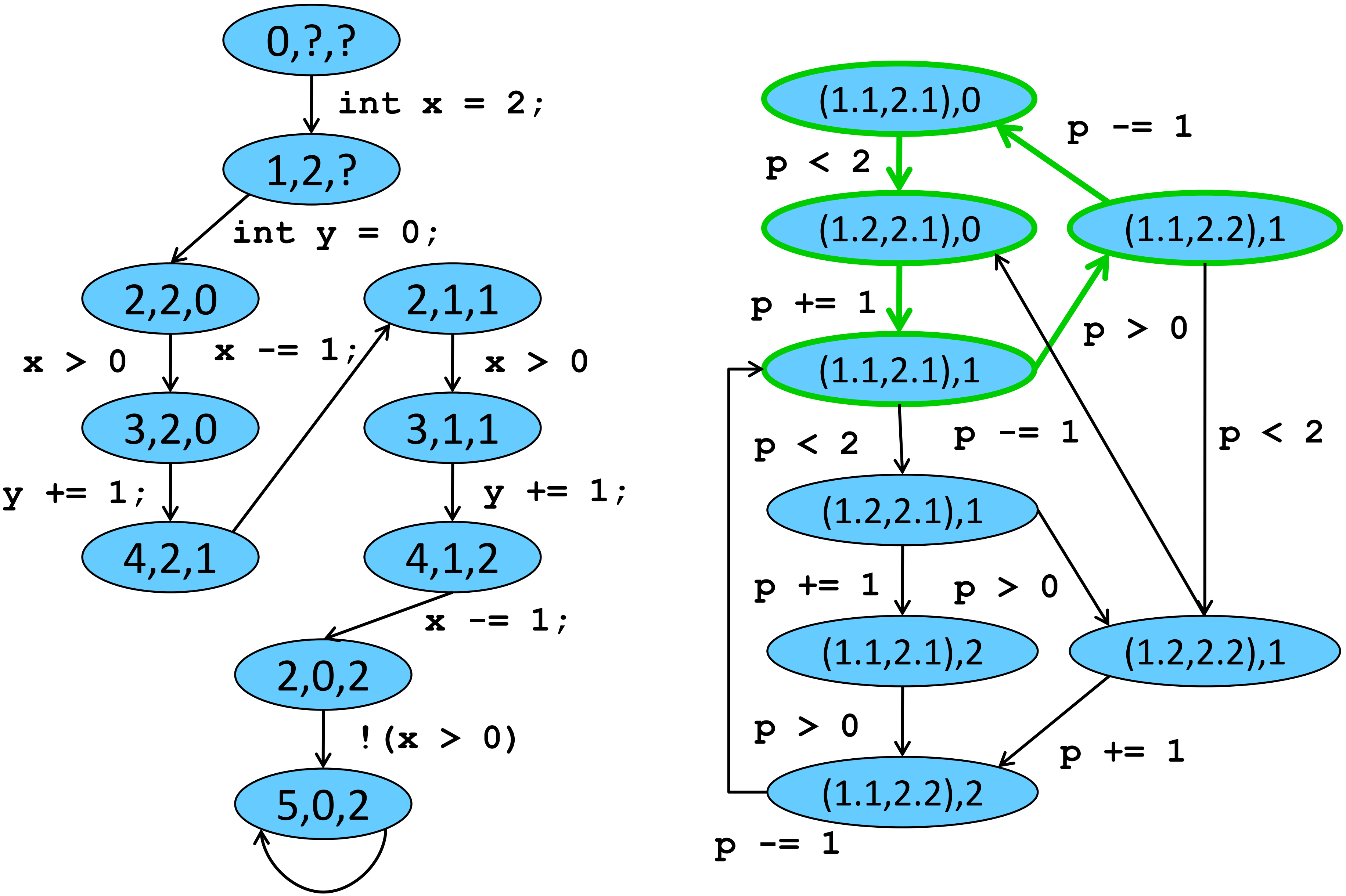


Примеры вычислений

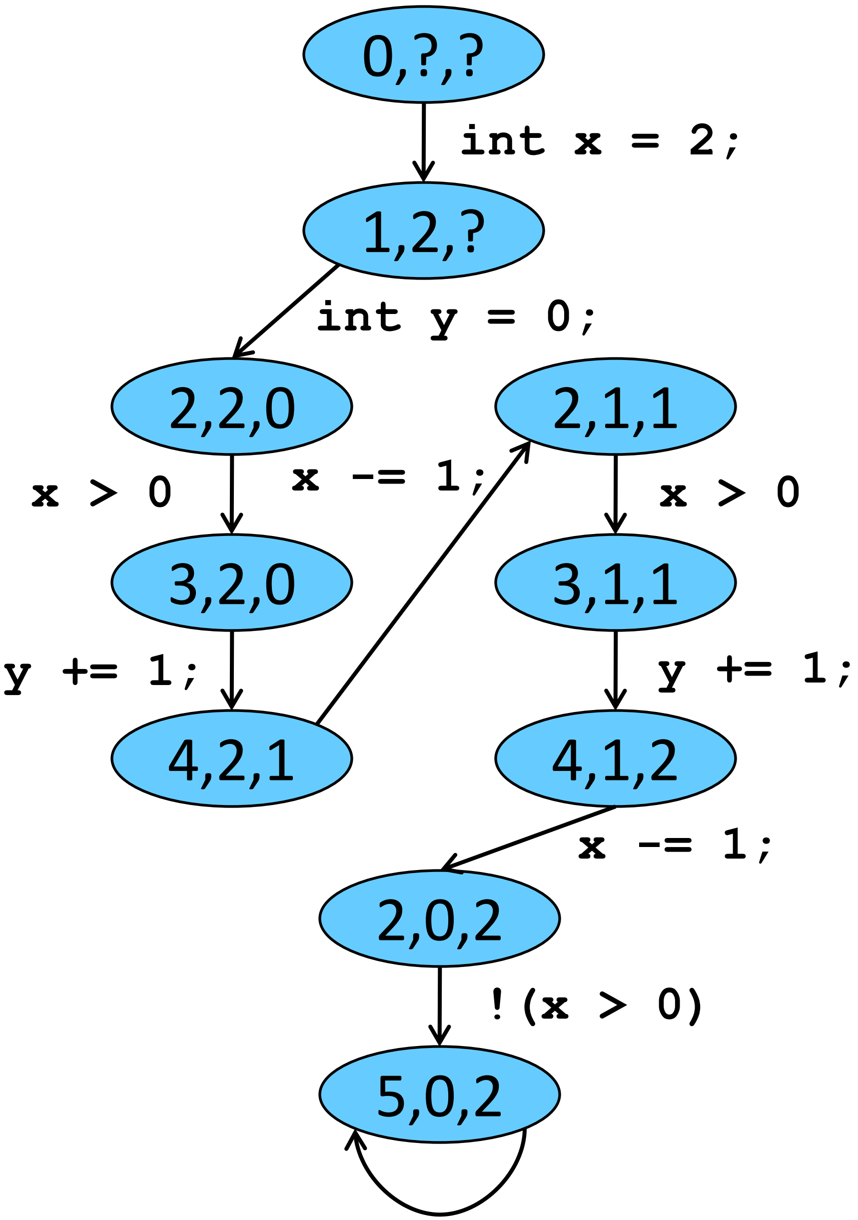


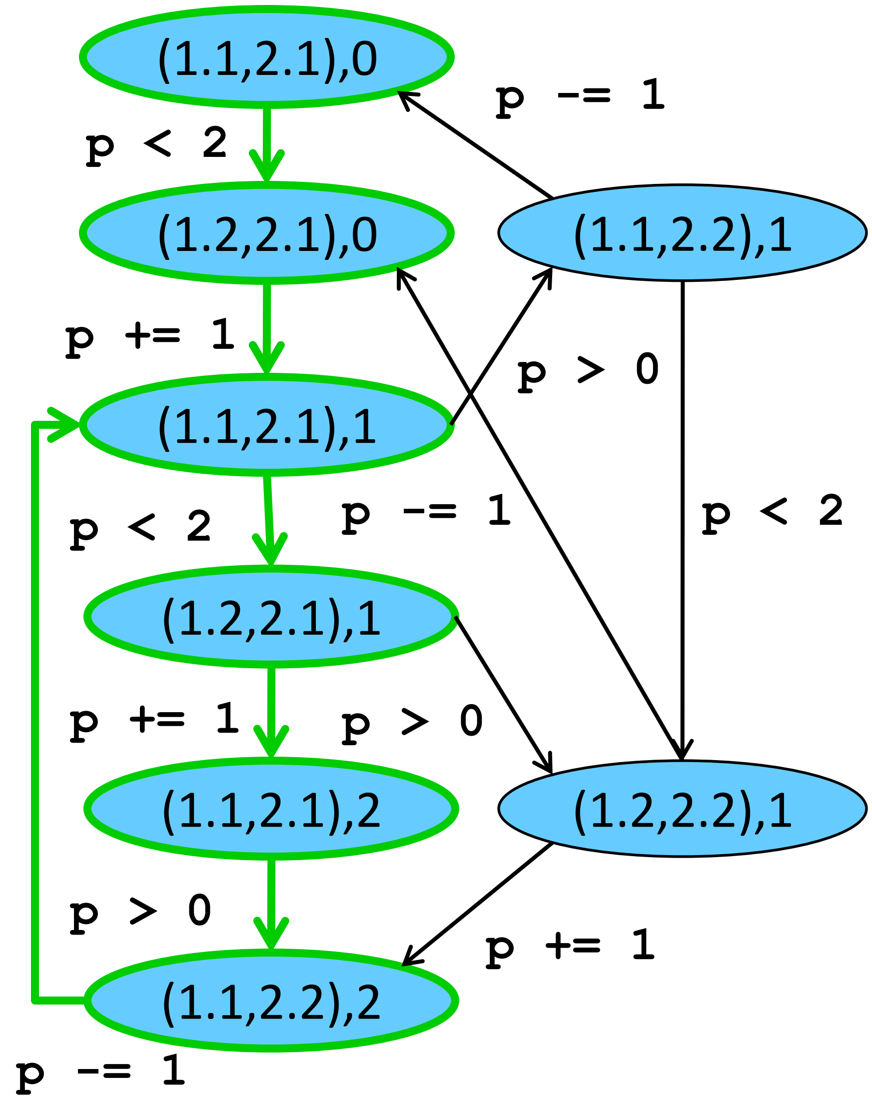


Примеры вычислений

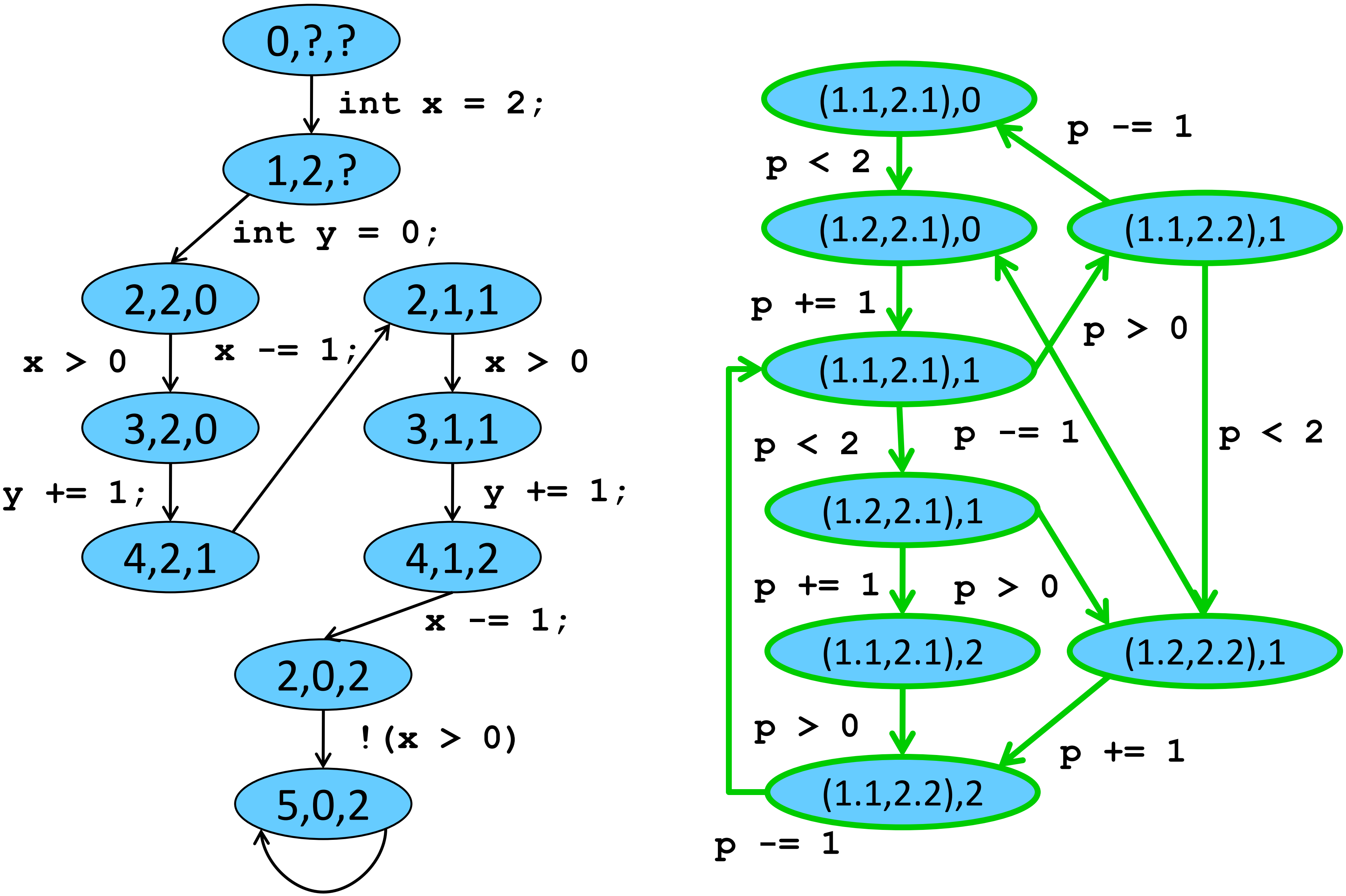


Примеры вычислений





Примеры вычислений



Достижимость состояний

- Состояние $s \in S$ называется достижимым (из начального) в системе переходов TS, если существует начальный, конечный путь

$$s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} s_n = s.$$

- *Reach(TS)* обозначает множество всех состояний, достижимых в TS.

Трассы

- Вычисление описывает последовательность состояний и действий; что происходит в системе. Требуется для описания семантики программы (позже).
- Свойства корректности формулируются в терминах последовательностей значений атомарных высказываний в состояниях модели.

Трассы

- Система переходов:

$$TS = \left\langle S, Act, \xrightarrow{a}, I, AP, L \right\rangle$$

- Путь (фрагмент вычисления):

$$\sigma = s_0 a_1 s_1 a_2 s_2 a_3 ...$$

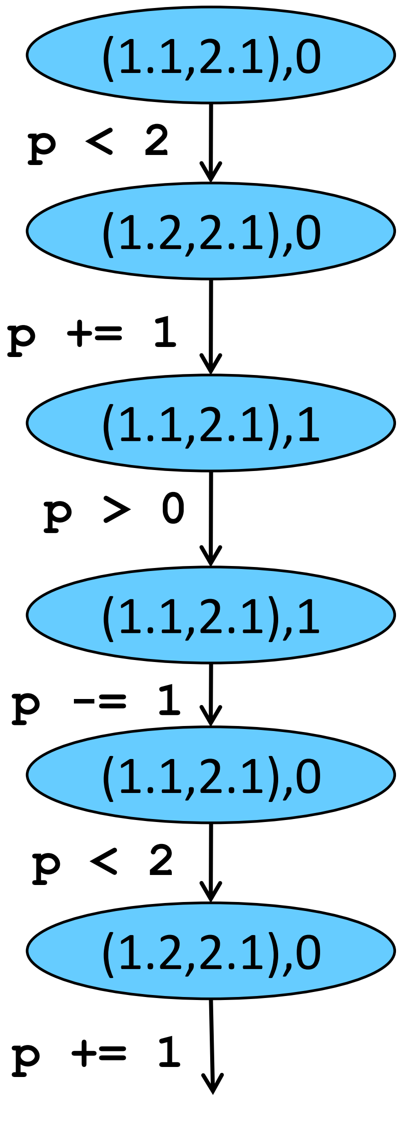
- Трасса:

$$tr = L(s_0)L(s_1)L(s_2)... \in (2^{AP})^{\omega}$$

фокусируемся на «наблюдаемом» поведении

Примеры трасс

вычисление



трасса $\{a \equiv p = 0\}$

a
a
!a
!a
a
a

трасса 2 $\left\{\begin{matrix} a \equiv p \neq 0 \\ b \equiv p = 1 \end{matrix}\right\}$

!a	!b
!a	!b
a	b
a	b
!a	!b
!a	!b

Свойства линейного времени

- Атомарные высказывания:

$$\left\{\begin{array}{l}\textbf{a} \text{ - «находимся в точке отправки запроса»}\\ \textbf{b} \text{ - «находимся в точке приёма ответа»}\end{array}\right\}$$

- Свойство:

  «после отправки запроса рано или поздно получим ответ»

- Пример допустимых трасс:

  a ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ b ∅ …

  ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ …

- Пример недопустимых трасс:

  a ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ …

  a ∅ ∅ ∅ ∅ b a ∅ …

Свойства линейного времени

- Свойство φ определяет набор допустимых трасс,

$$\varphi \subseteq (2^{AP})^{\omega}$$

- Свойство φ выполнимо на трассе σ:

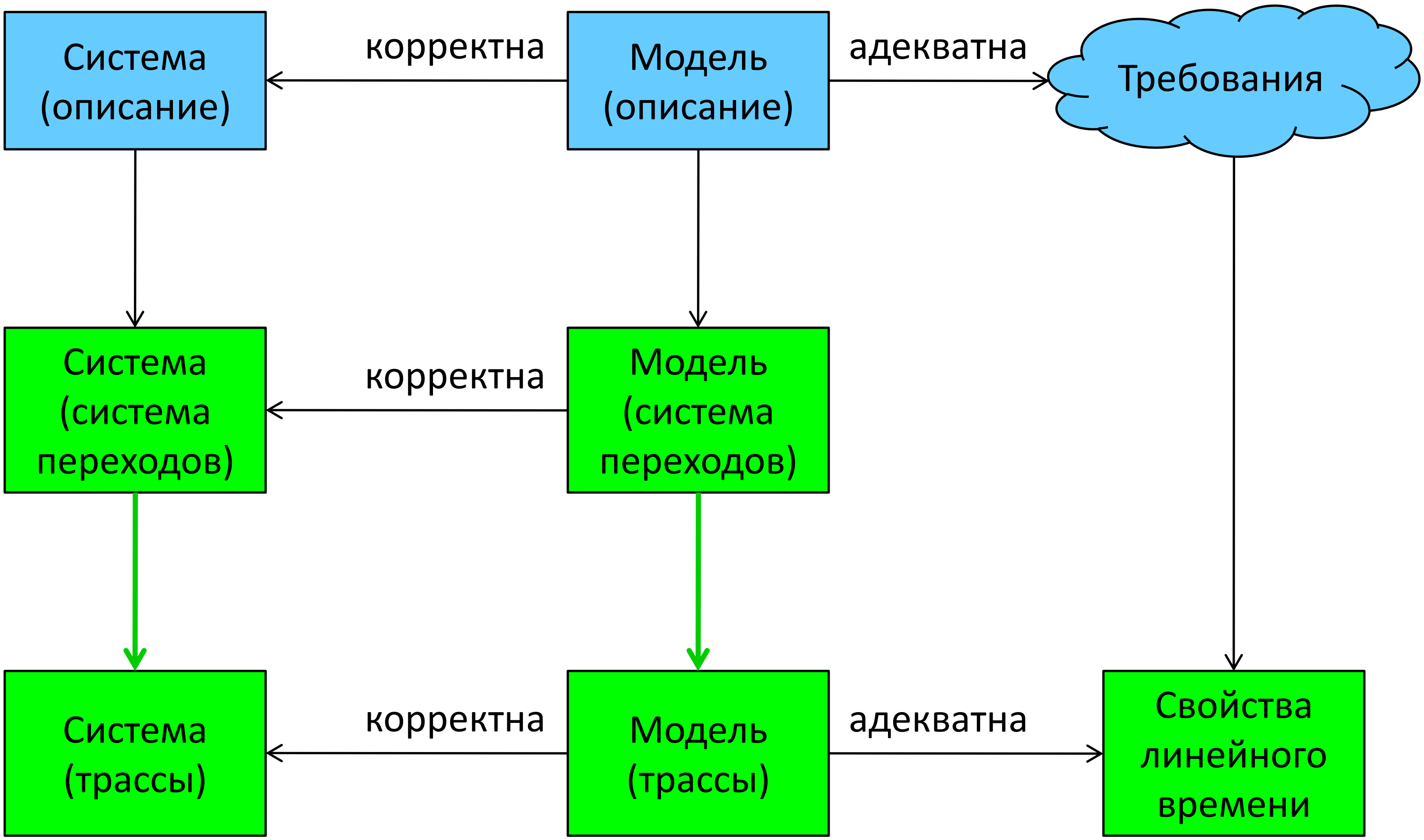
$$\sigma \models \varphi \Leftrightarrow \sigma \in \varphi$$

- Система переходов TS удовлетворяет свойству линейного времени φ:

$$TS \models \varphi \Leftrightarrow Traces(TS) \subseteq \varphi$$

$$TS(P) \models \varphi \equiv P \models \varphi$$

Схема понятий



Абстракция трасс

- Представим трассу в форме интерпретации I:

$$I(tr) = \langle \mathrm{N}, \leq, \xi \rangle$$

где N – множество натуральных чисел,

$\leq$ – отношение порядка на N, а

$\xi : \mathrm{N} \times AP \to \{\mathrm{T}, \perp\}$, и при этом

$$\forall n > 0, p \in AP$$

$$\xi(n, p) = \mathrm{T} \Leftrightarrow p \in L(s)$$

Абстракция трасс

- Рассмотрим трассы tr и tr’ такие, что:

$$I(tr) = \langle \mathrm{N}, \leq, \xi \rangle \qquad I(tr') = \langle \mathrm{N}, \leq, \xi' \rangle$$

$$\xi : \mathrm{N} \times AP \to \{\mathrm{T}, \perp\} \quad \xi' : \mathrm{N} \times AP' \to \{\mathrm{T}, \perp\}$$

- Будем говорить, что tr’ является *(корректной) абстракцией* tr ($tr \prec tr'$), если

$$AP' \subseteq AP$$

$$\exists \alpha : N \to N : \forall n, k \in N \big(n \leq k \Rightarrow \alpha(n) \leq \alpha(k) \big)$$

$$\forall n \in N, p \in AP' \big(\xi(n, p) = \xi'(\alpha(n), p) \big)$$

Пример абстракции трасс

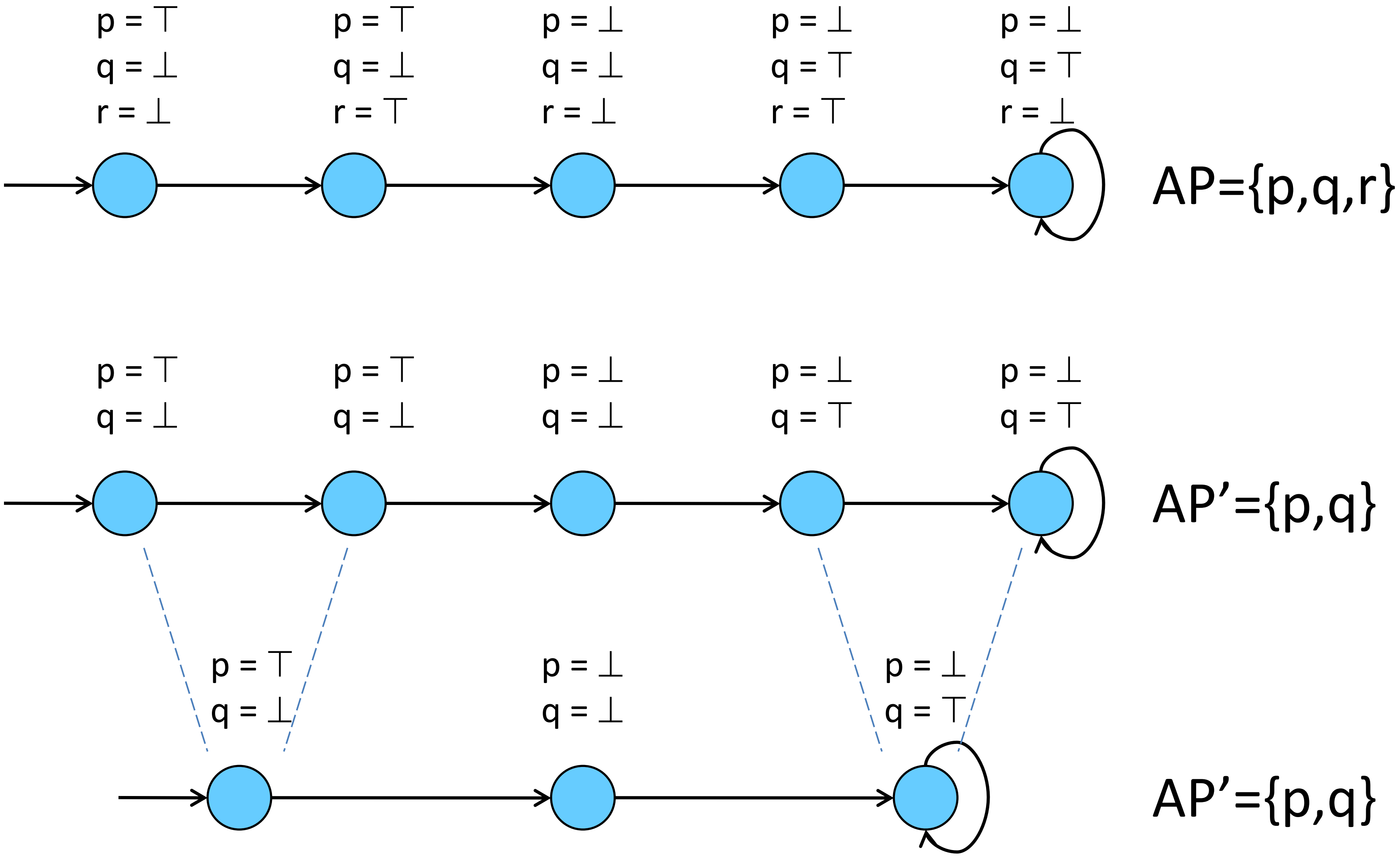
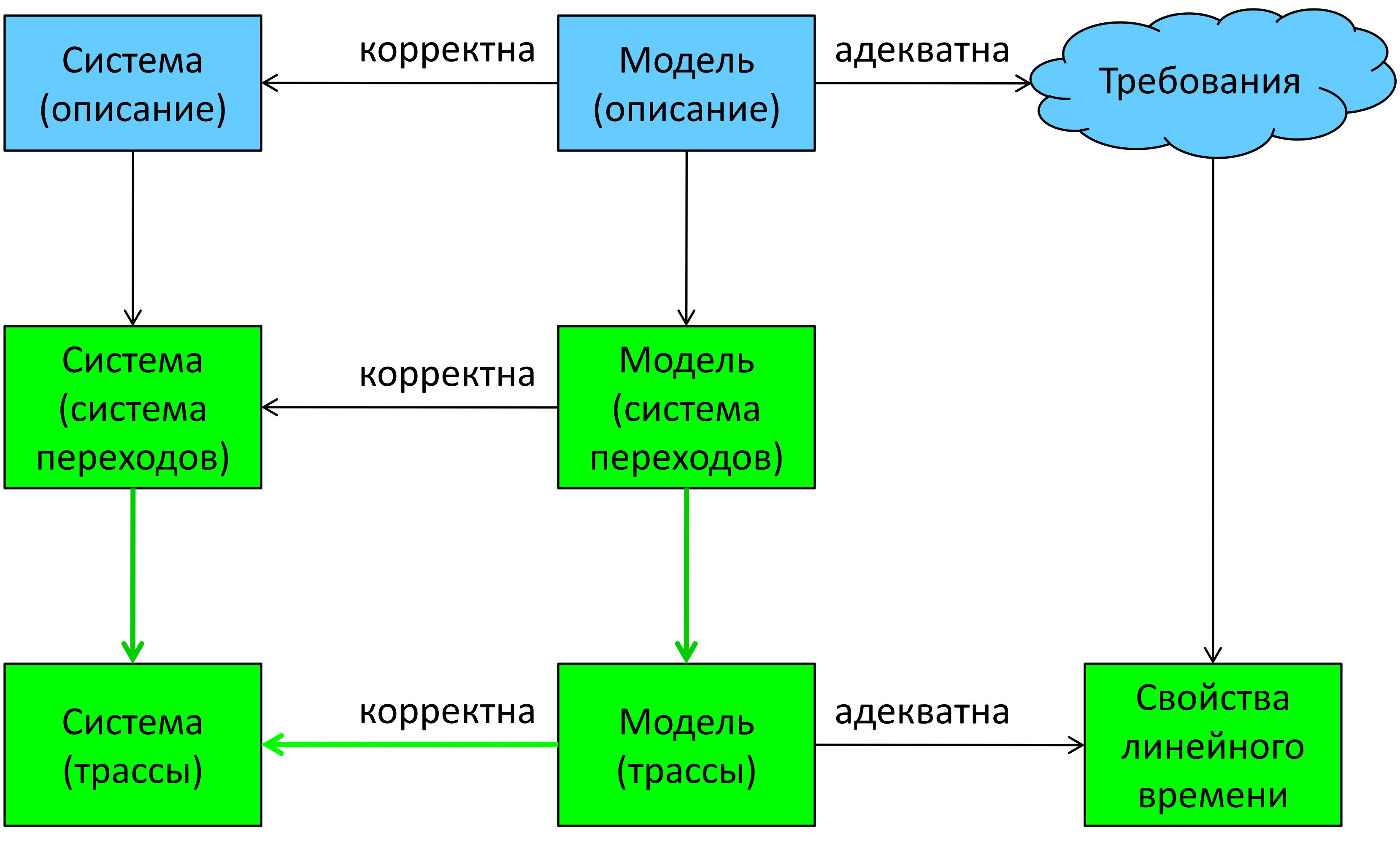


Схема понятий



Условие корректности модели

- Пусть P – система, φ – произвольное свойство линейного времени. (Корректной) моделью P называется такое M, что:

  (если свойство выполняется на модели, то оно выполняется и на системе)

- Это выполняется тогда и только тогда, когда:

  (для любой трассы исходной системы в модели найдётся её корректная абстракция)

Условие корректности модели

- Пусть P – система, φ – произвольное свойство линейного времени. (Корректной) моделью P называется такое M, что:

$$M \models \varphi \Rightarrow P \models \varphi$$

позволяет проверять свойства программы на её модели

определение

- Это выполняется тогда и только тогда, когда:

$$\forall tr \in Traces(TS(P)) \exists tr' \in Traces(TS(M)):$$

$$tr \prec tr'$$

для проверки такого условия нужно рассмотреть все трассы исходной системы

допускает, что в модели больше состояний

необходимое и достаточное условие

Достаточное условие корректности

- Какими же свойствами должна обладать TS модели, чтобы быть корректной?
  - действиям и атомарным высказываниям модели должны быть сопоставлены действия и атомарные высказывания системы,
  - каждому состоянию системы должно быть сопоставлено состояние модели,
  - модель должна корректно сохранять множество начальных состояний,
  - если в системе есть переход между двумя состояниями, в модели должен быть переход по между соотв. состояниями по соотв. действию,
  - соотв. состояния в модели и системе должны быть размечены атомарными высказываниями модели одинаково.

Достаточное условие корректности

- Какими же свойствами должна обладать TS модели, чтобы быть корректной?

$$TS = \left\langle S, Act, \xrightarrow{a}, I, AP, L \right\rangle$$

$$TS' = \left\langle S', Act', \xrightarrow{a}', I', AP', L' \right\rangle$$

$$Act' \subseteq Act$$

$$AP' \subseteq AP$$

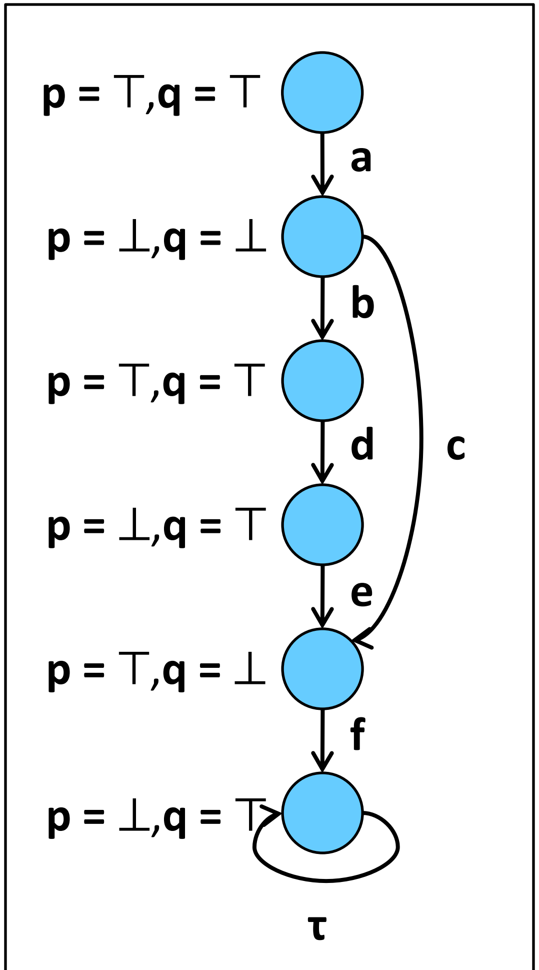
$$\exists \alpha : S \to S', s_0' = \alpha(s_0)$$

$$s_1 \xrightarrow{a} s_2 \Rightarrow \alpha(s_1) \xrightarrow{a} \alpha(s_2)$$

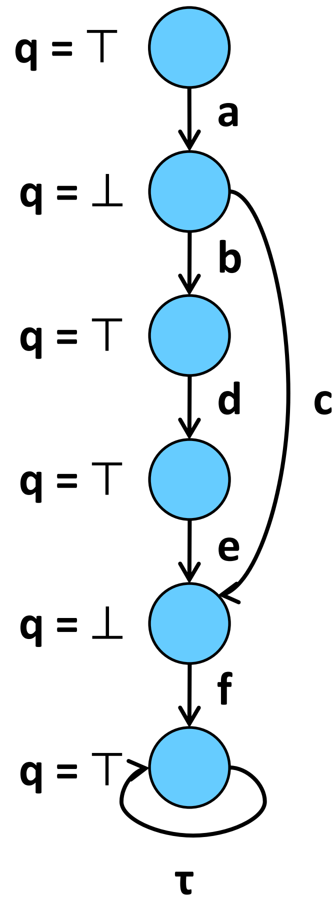
$$\forall s \in S, L'(\alpha(s)) = L(s) \cap AP'$$

достаточное условие

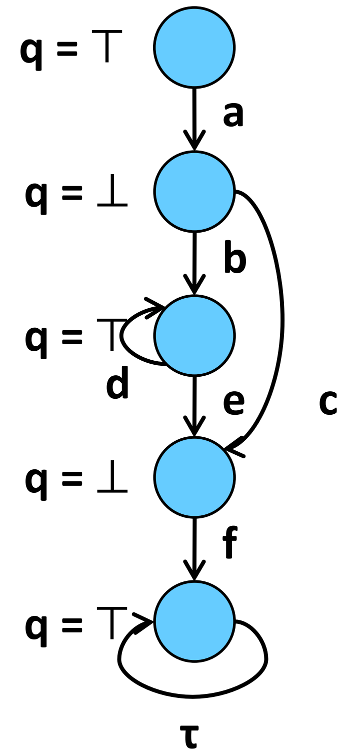
Пример корректной абстракции системы переходов



(P)

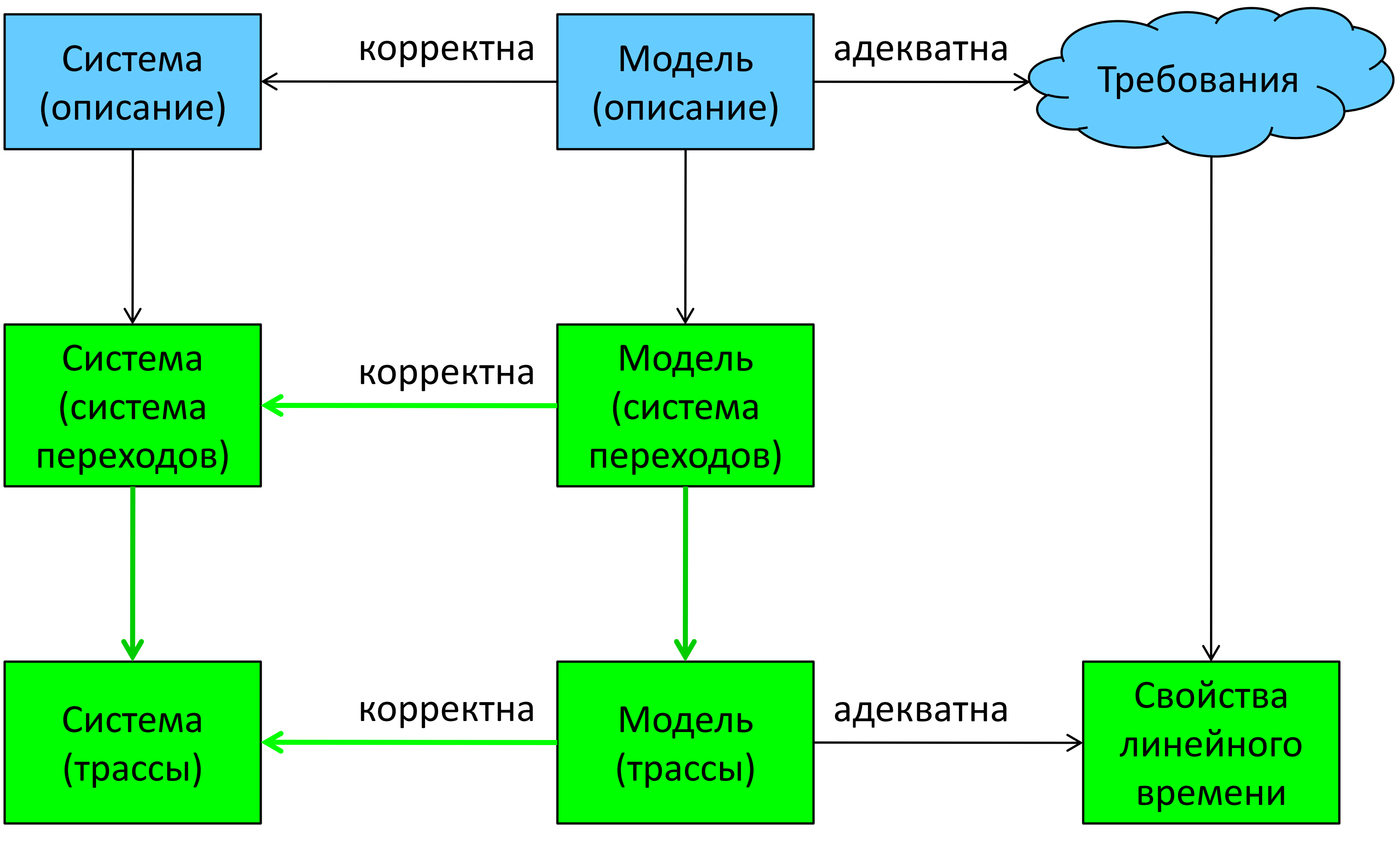


(M_1)



(M_2)

Схема понятий



Адекватность модели

- Модель называется адекватной, если:
  1. Атомарные высказывания, в терминах которых задаются свойства, присутствуют в разметке модели
  2. Из нарушения свойства на модели следует, что оно нарушается и на исходной системе

Адекватность модели

- Модель называется адекватной, если:

1. $$AP_{\varphi} \subseteq AP_M$$

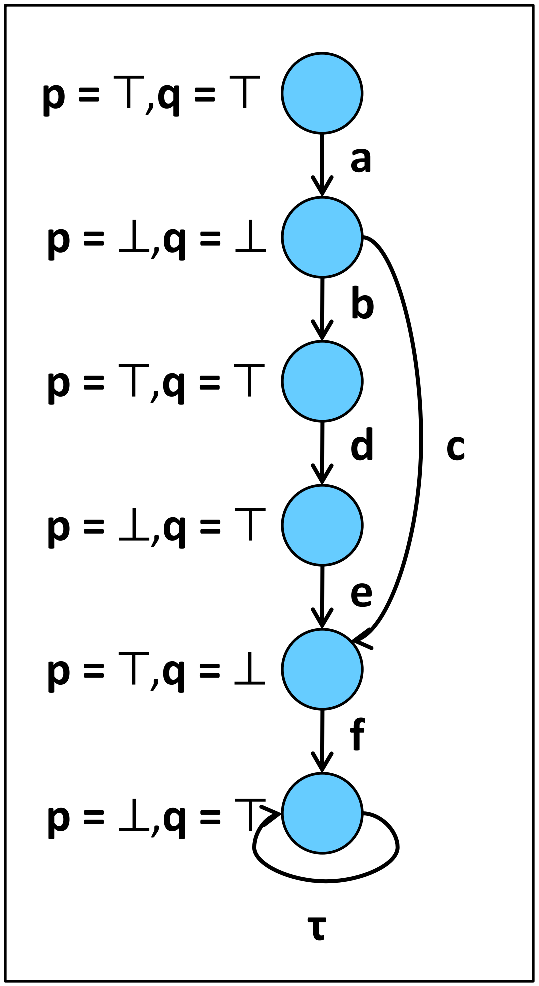
необходимое условие (можно вычислить)

2. $$M \not\models \varphi \Rightarrow P \not\models \varphi$$

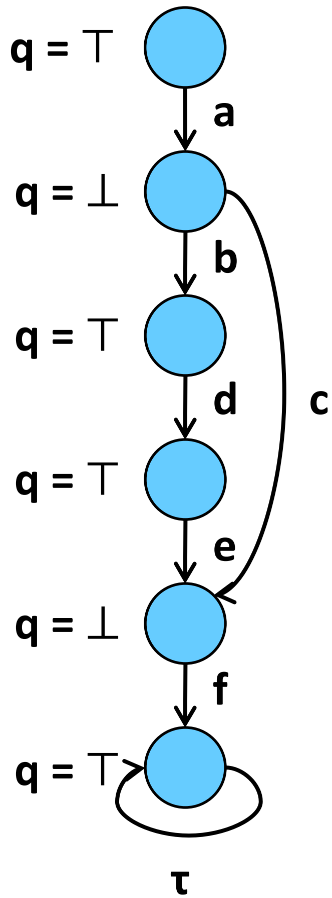
достаточное условие (нельзя вычислить)

- Определить адекватность при построении нельзя, можно лишь обнаружить несоответствие и исправить модель

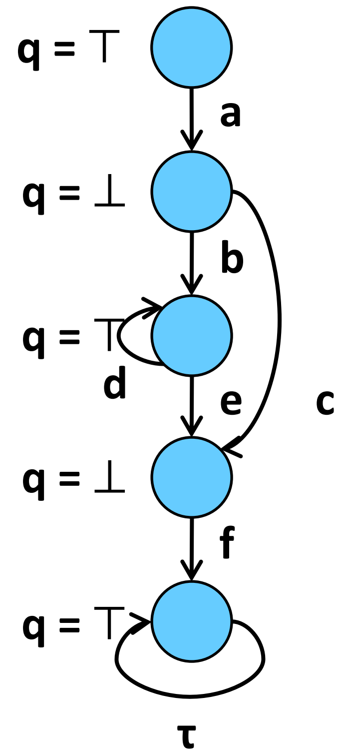
Пример корректной абстракции системы переходов



(P)



(M_1)

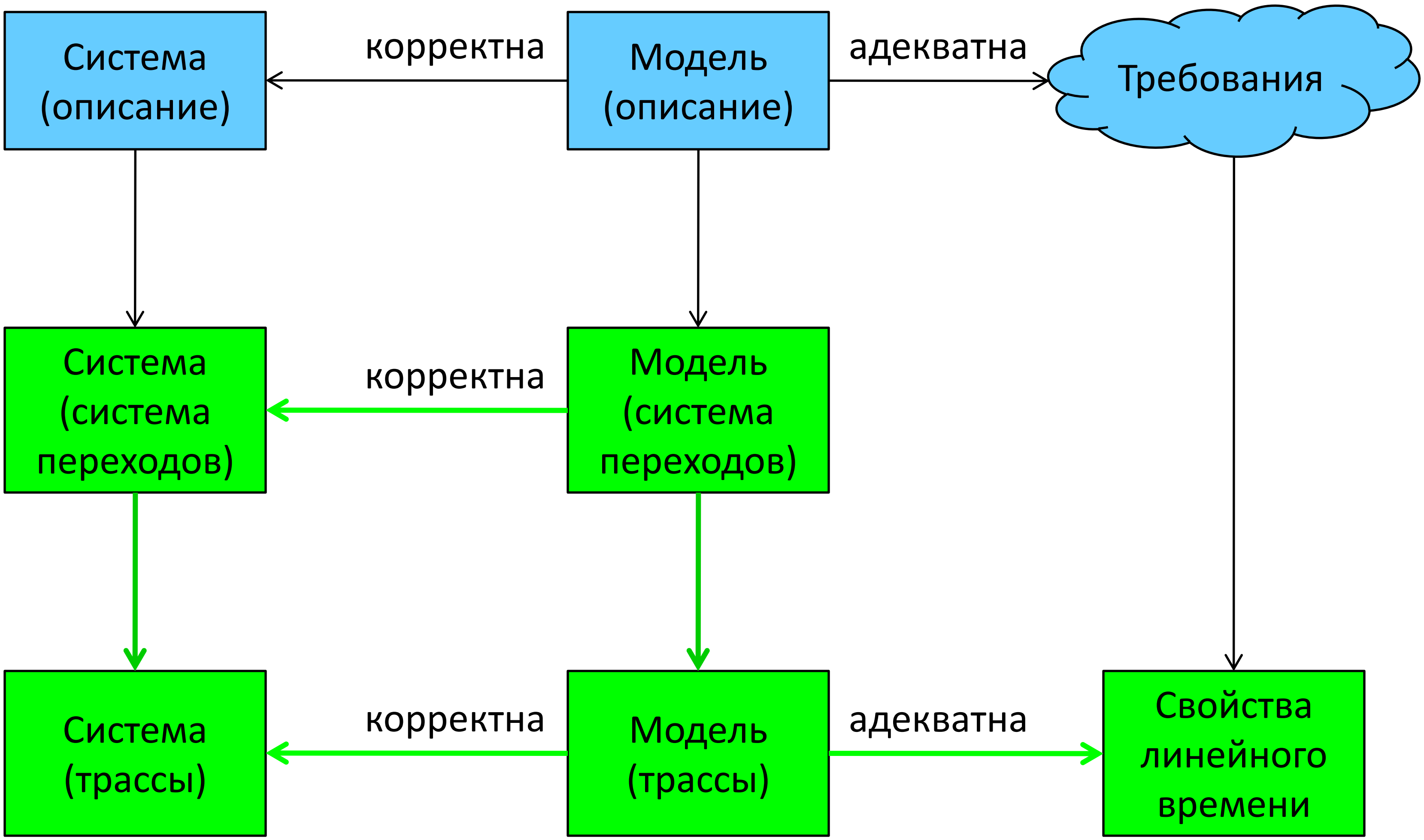


(M_2)

Пример – проверяемые свойства

- В любом вычислении встречается состояние, когда $p=\top \wedge q=\top$ – *ни одна из моделей не адекватна*,
- Для любого пути верно, что за любым $q=\bot$ рано или поздно встретится $q=\top$ – *все модели адекватны*,
- Между двумя состояниями с $q=\bot$ встречается не более чем 3 состояния с $q=\top$ – *модель M_1 адекватна, M_2 – нет*.

Схема понятий



Спасибо за внимание!
Вопросы?