Верификация программ на моделях

Лекция №9

Выразительная мощность LTL.

Корректная абстракция графов программ.

Отношение моделирования (симуляции).

Константин Савенков (лектор)

План лекции

- Выразительная мощность LTL:
  - сравнение с автоматами Бюхи,
  - сравнение с CTL*, CTL,
  - Общая картина.
- Корректная абстракция графов программ:
  - Отношение слабого моделирования,
  - Сильное моделирование.

Выразительная мощность LTL по сравнению с конструкциями never

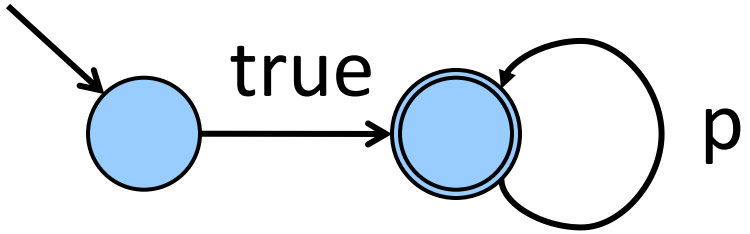
- Автомат Бюхи описывает ω-регулярный язык:
  - A^{ω}, где A – регулярный язык,
  - AB, где A – регулярный, а B – ω-регулярный язык,
  - AUB, где A и B – ω-регулярные языки;
- при помощи never можно описать любой ω-регулярный автомат над словами.

Выразительная мощность LTL по сравнению с конструкциями never

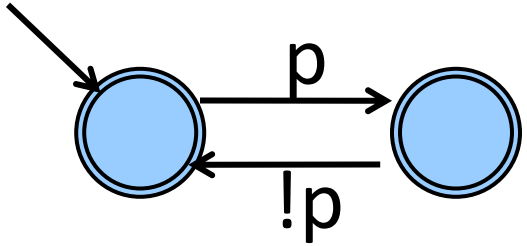
- LTL описывает подмножество этого языка:
  - всё, выразимое в LTL, может быть описано при помощи never,
  - при помощи never можно описать свойства, невыразимые на LTL.
- **Теорема:** Добавление одного квантора существования над одним пропозициональным символом расширяет выразительные способности LTL до всех ω-регулярных автоматов над словами.

Пример свойства, не выразимого на LTL

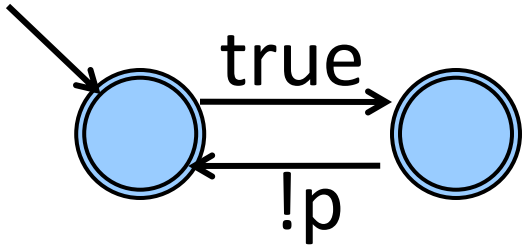
- (p) **может** быть истинным после выполнения системой чётного числа шагов, но **никогда не истинно** после **нечётного**.
- `[]X(p)` не подходит



- `p && [](p -> X!p) && [](!p -> Xp)` – также не подходит (здесь p **всегда** истинно после чётных шагов)



- `∃t.t&&[](t->X!t)&&[](!t->Xt)&&[](!t->!p)` – то, что надо:



Сравнение LTL с другими логиками

- LTL-формула описывает свойство, которое должно выполняться на **всех** вычислениях, начинающихся из исходного состояния системы

Операторы:

!	логическое отрицание
&&	логическое И
||	логическое ИЛИ
X	в следующем состоянии
U	сильный until
U	слабый until
<>	рано или поздно
[]	всегда

Серым отмечены операторы, которые можно вывести из других:

φ_1 || φ_2	==	!(! φ_1 && ! φ_2)
<> φ	==	true U φ
[] φ	==	!<> !φ
φ_1 *U* fi2	==	[] φ_1 || (φ_1 U φ_2)

грамматика:

пропозициональные формулы:

p

!f

(f)

f && f

f || f

темпоральные формулы:

f

! φ

(φ)

φ && φ

φ || φ

X φ

φ U φ

<> φ

[] φ

p – некоторый пропозициональный символ

f – некоторая пропозициональная формула

φ – некоторая темпоральная формула

Логика CTL*

- Логика ветвящегося времени:
  - использует кванторы ∀ и ∃,
  - использует F вместо <> и G вместо [].

Операторы:

!	логическое отрицание
&&	логическое И
||	логическое ИЛИ
E	существует путь
A	для всех путей
X	в следующем состоянии
U	until (сильный)
F	рано или поздно
G	всегда

Серым отмечены операторы, которые можно вывести из других:

φ_1 || φ_2	==	!(! φ_1 && ! φ_2)
A φ	==	!E ! φ
F φ	==	true U φ
G φ	==	!F! φ

формулы состояния:	p
	!f
	(f)
	f && f
	f || f
	A φ
	E φ
формулы пути:	f
	! φ
	(φ)
	φ && φ
	φ || φ
	X φ
	φ U φ
	F φ
	G φ

p – некоторый пропозициональный символ
f – некоторая формула состояния
φ – некоторая формула пути

Логика CTL

- Логика CTL – фрагмент логики CTL*, в котором под управлением квантора пути (E или A) может находиться не более одного оператора X или U.

Корректная CTL формула:

p
! φ
φ && φ
φ || φ
E X φ
E (φ U φ)
A (φ U φ)

p – некоторый пропозициональный символ
f – некоторая формула состояния
φ – некоторая формула пути

Можно вывести:

EF f	==	E(true U f)
AF f	==	A(true U f)
EG f	==	!AF !f
AG f	==	!EF !f
AX f	==	!EX !f

Пример

В LTL **<>p** означает:

A<>p **для всех** вычислений, начинающихся в исходном состоянии s_0, выполняется **<>p**

В CTL можно выразить:

EF(p) **существует** вычисление, для которого выполняется **<>p**

AF(p) **для всех** вычислений выполняется **<>p**

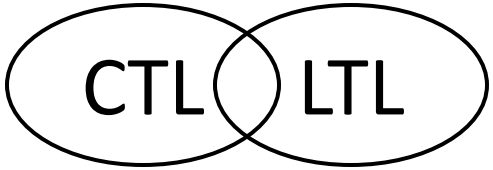
AG(p) **для всех** вычислений **p** – инвариант

EG(p) **существует** вычисление, для которого выполняется **p** – инвариант

итд.

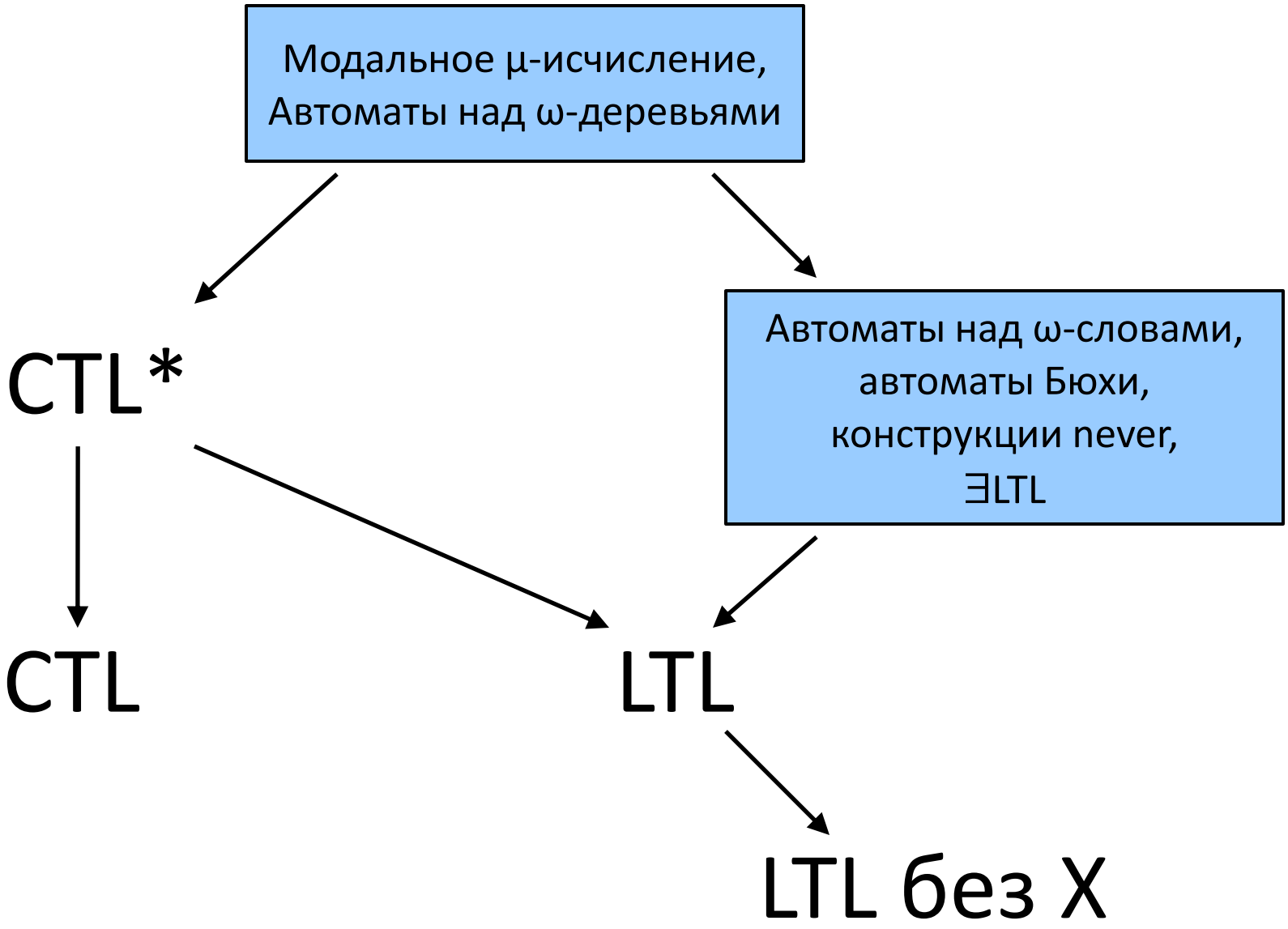
Выразительные возможности CTL* и CTL

- CTL* и CTL описывают подмножества ω-регулярных автоматов над *деревьями*
  - автоматы над деревьями более выразительны, чем автоматы над словами (CTL-формула выполнима на дереве трасс, а не на одной трассе);
  - CTL и LTL являются подмножествами CTL*;
  - CTL и LTL не сравнимы по выразительной мощности (пересекаются, но не включают);
  - на LTL можно описать свойства, не выразимые на CTL:
    - CTL не позволяет описать свойства вида []<>(p),
    - при помощи []<>(p) в LTL задаются ограничения справедливости;



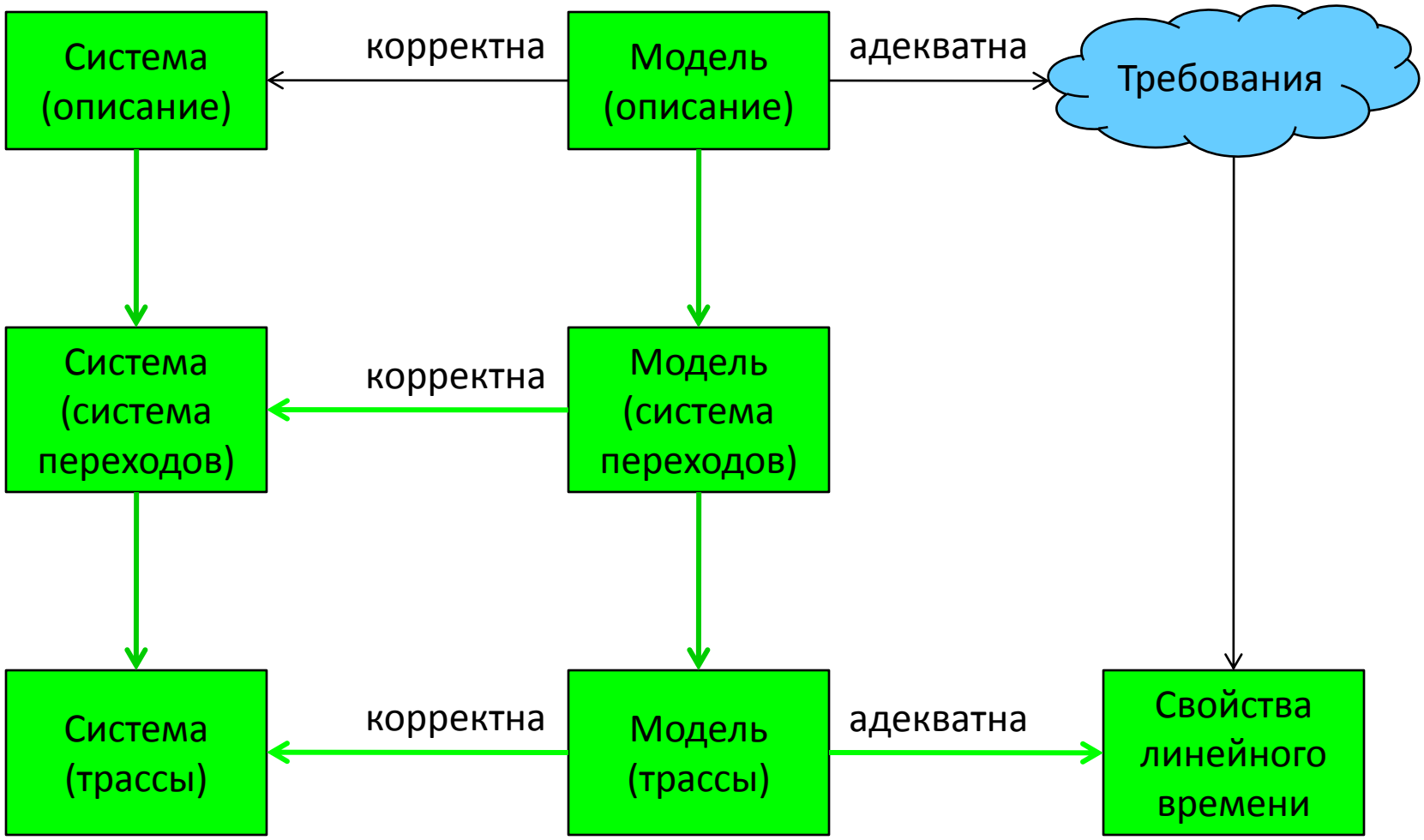
  - на CTL можно описать свойства, не выразимые на LTL:
    - на LTL нельзя описать свойства вида AGEF(p),
    - AGEF(p) используется для описания свойства reset: из любого состояния система может перейти в нормальное.

Выразительная мощность

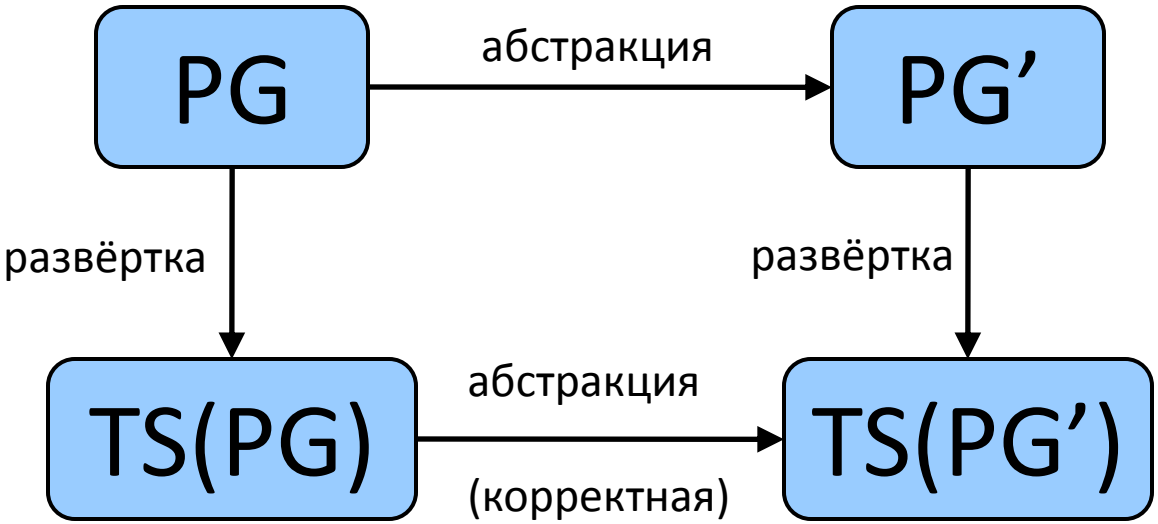


Корректность абстракции графов программ

Схема понятий



Корректность моделирования графов программ



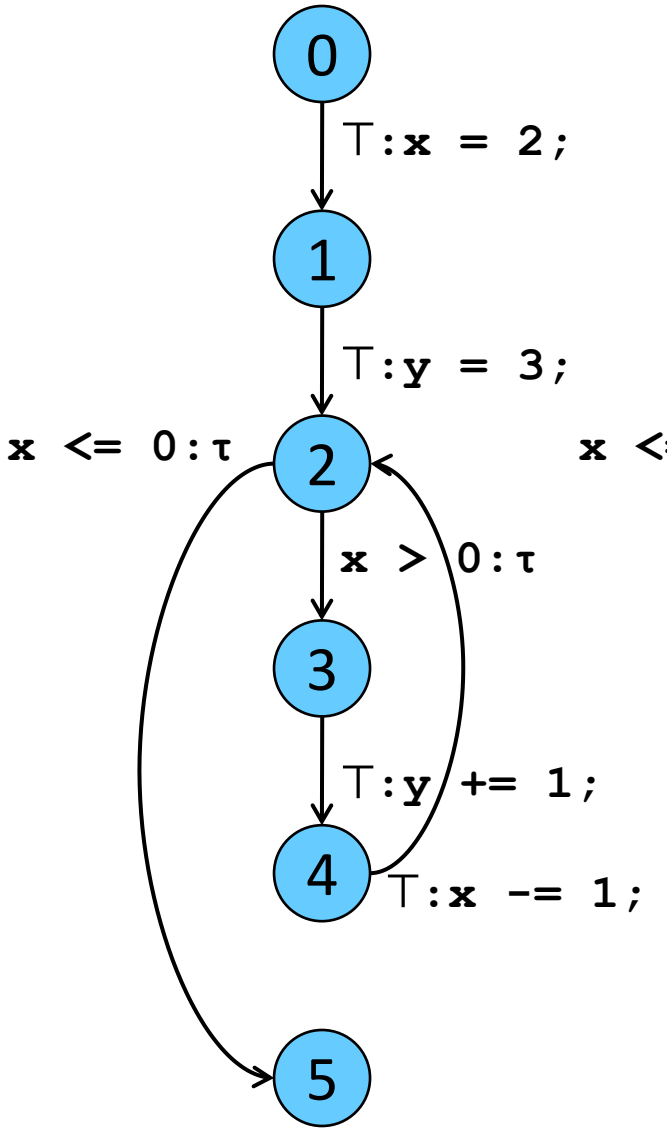
- **Необходимое и достаточное условие:**
  - Программа PG’ корректно моделирует программу PG тогда и только тогда, когда система переходов TS(PG’) корректно моделирует систему переходов TS(PG).

Абстракция графов программ
Пример корректной абстракции

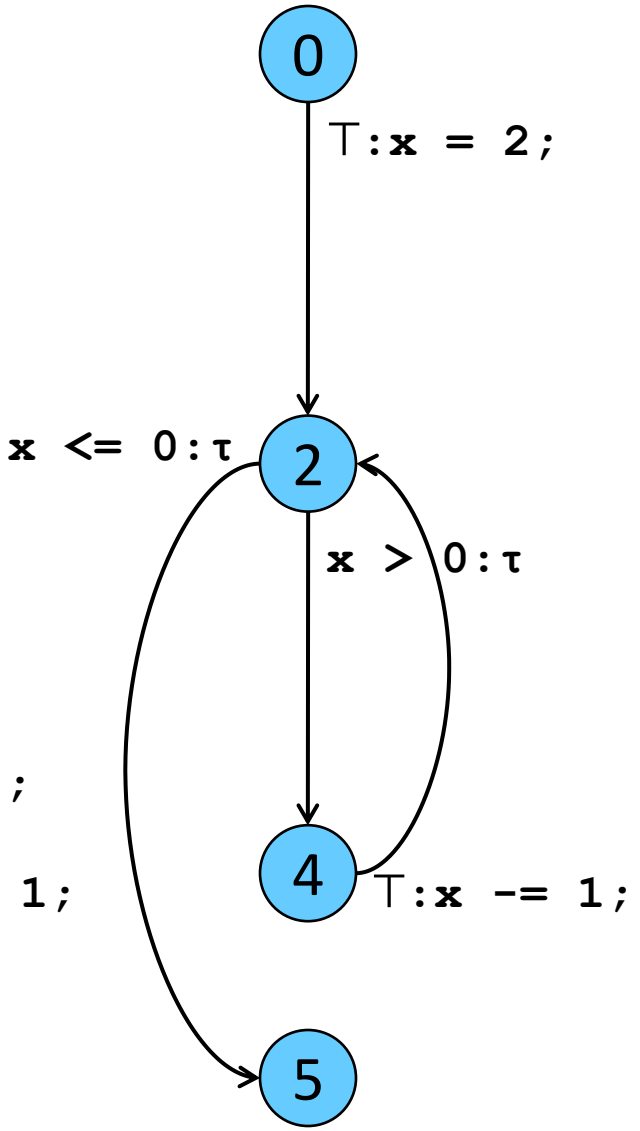
Программа:

```
int x,y;
0: x = 2;
1: y = 3;
2: while (x > 0)
   {
3:   y += 1;
4:   x -= 1;
   }
5:
```

PG:

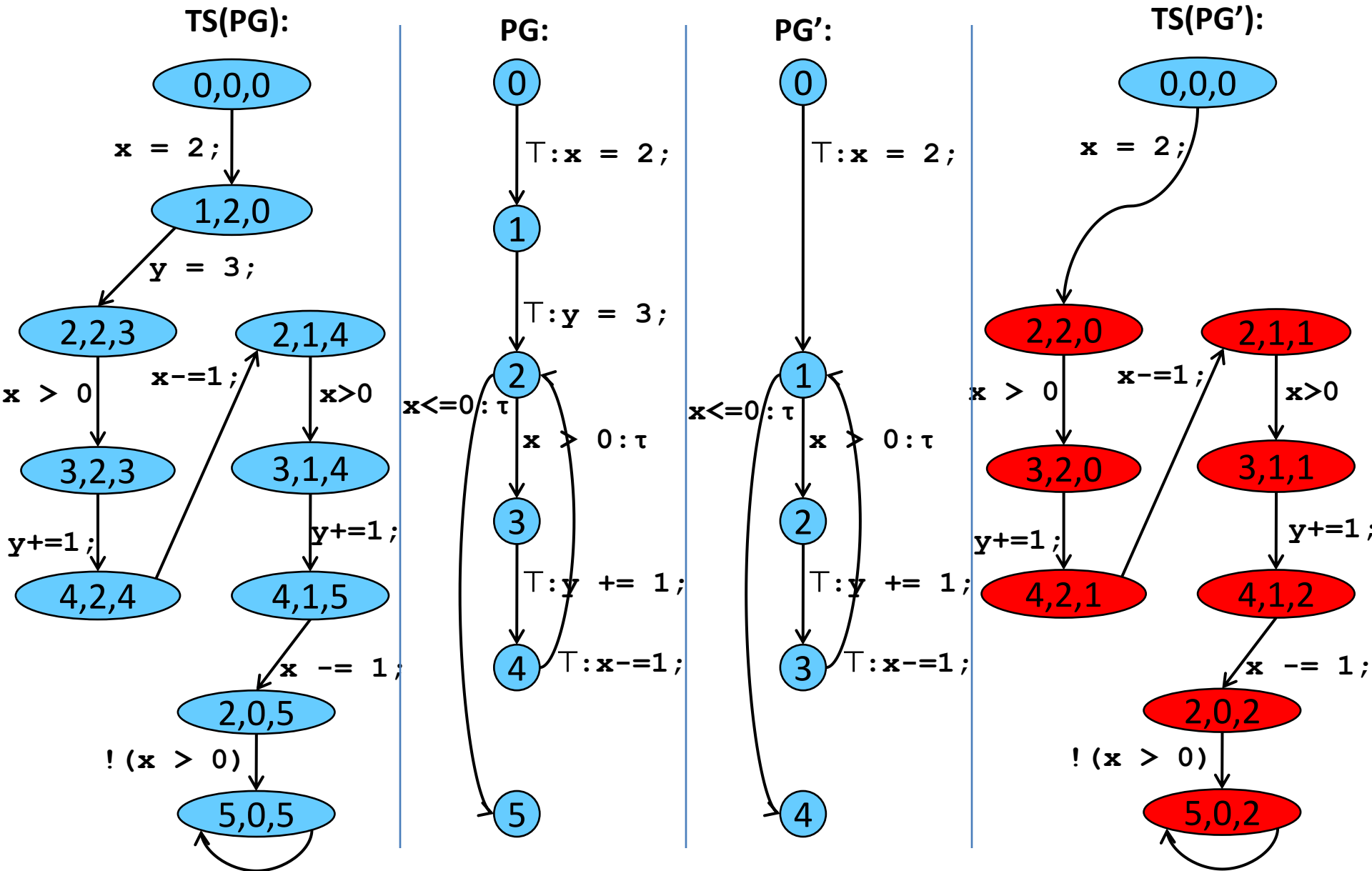


PG':



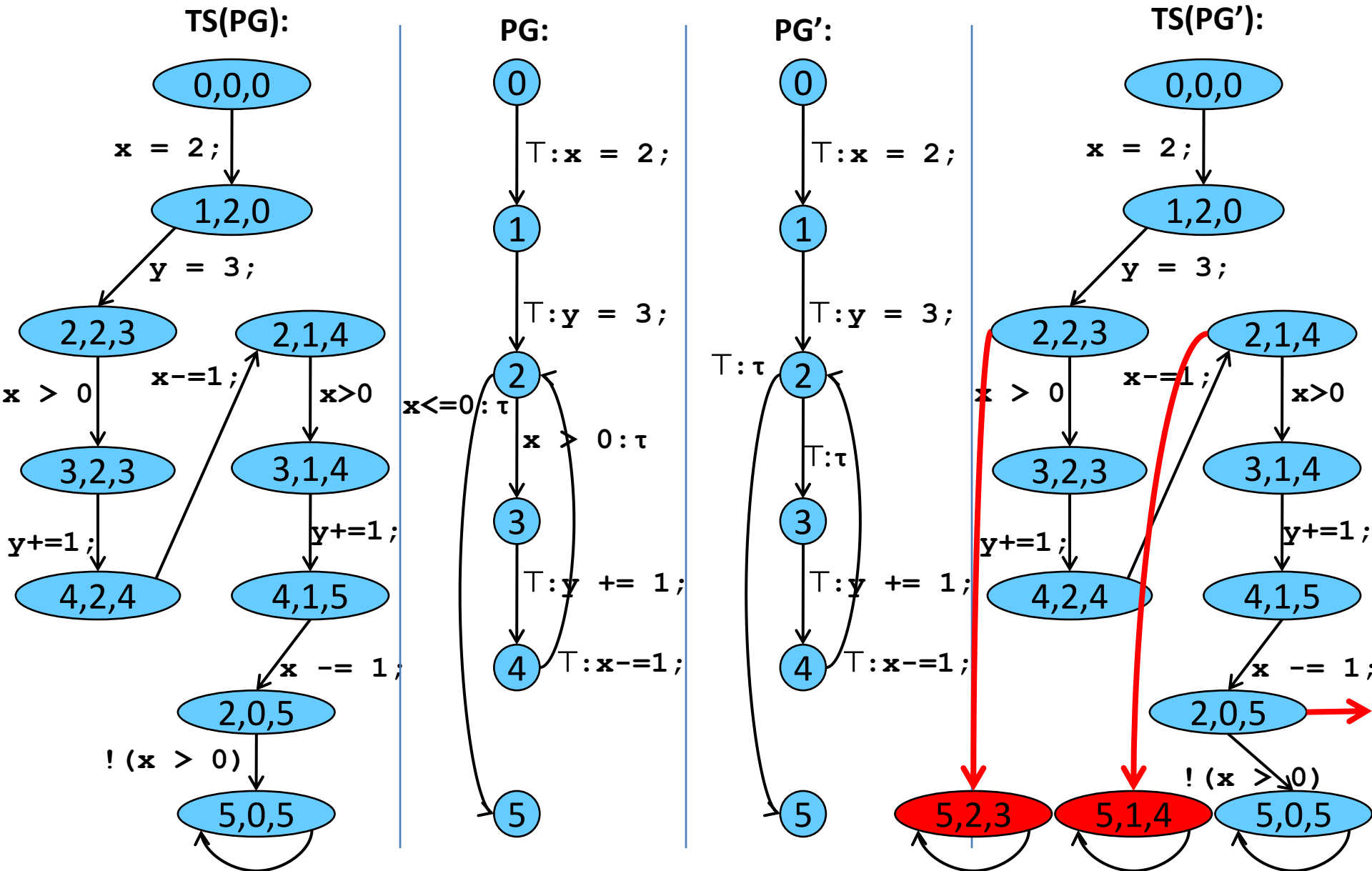
Абстракция графов программ

Пример некорректной абстракции



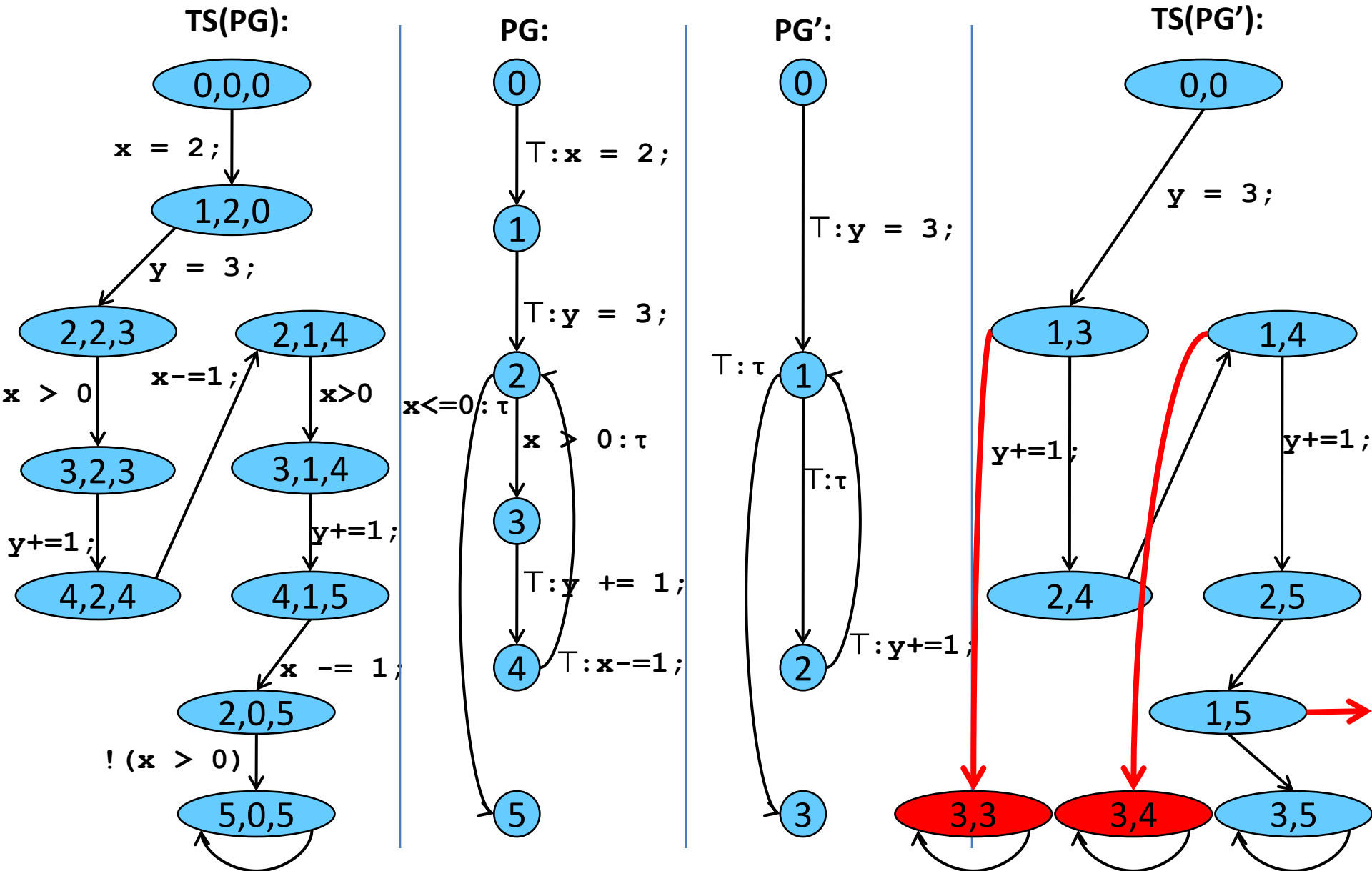
Абстракция графов программ

Пример корректной абстракции



Абстракция графов программ

Пример корректной абстракции



Неформальное определение

$$PG = \langle Loc, Act, Effect, \rightarrow, Loc_0, g_0 \rangle$$

$$PG' = \langle Loc', Act', Effect', \rightarrow', Loc_0', g_0' \rangle$$

Будем говорить, что **PG' моделирует PG**, если

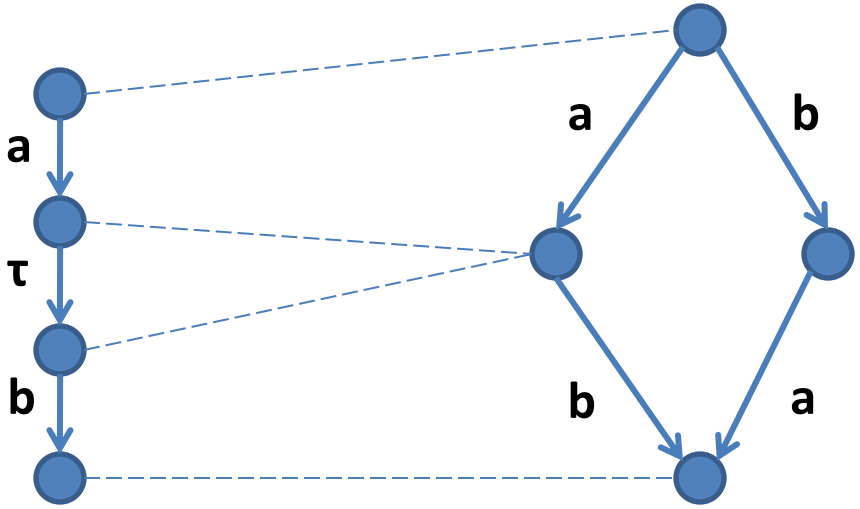
1. В PG' присутствуют переменные, соответствующие наблюдаемым переменным PG,
2. Все действия PG, влияющие на наблюдаемые переменные, отражены в модели,
3. Модель корректно воспроизводит возможные последовательности изменения значений наблюдаемых переменных PG.

Отношение (слабого) моделирования
(слабой симуляции)

- Будем говорить, что точки l_0 и l'_0 связаны отношением слабого моделирования S ($(l_0, l_0') \in S$) тогда и только тогда:

$$\forall l_0 \xrightarrow{g:a} l_1 : \left((a \neq \tau) \Rightarrow \left(\exists l_1', l_0' \xrightarrow{g:a} l_1' \right) \right) \wedge (l_1, l_1') \in S$$

Слабая симуляция!



Достаточное условие корректности

- Будем говорить, что PG’ моделирует PG, если

$$\exists \alpha_{Loc} : Loc \to Loc', Loc_0' = \alpha(Loc_0)$$

$$g_0' = g_0 \mid_{Var_{PG'}}$$

$$\exists \alpha_{Act} : Act \to Act' \cup \{\tau\}$$

$$\exists \alpha_{Var} : Var_{PG} \to Var_{PG'} \cup \{\varepsilon\}$$

$$\forall a \in Act, v \in Var_{PG}, (\alpha_{Act}(a) = \tau \wedge \alpha_{Var}(v) \neq \varepsilon) \Rightarrow Effect(a,v) = v$$

$$\forall a \in Act, v \in Var_{PG}, (\alpha_{Act}(a) \neq \tau \wedge \alpha_{Var}(v) \neq \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Effect'(\alpha_{Act}(a), \alpha_{Var}(v)) = Effect(a,v)$$

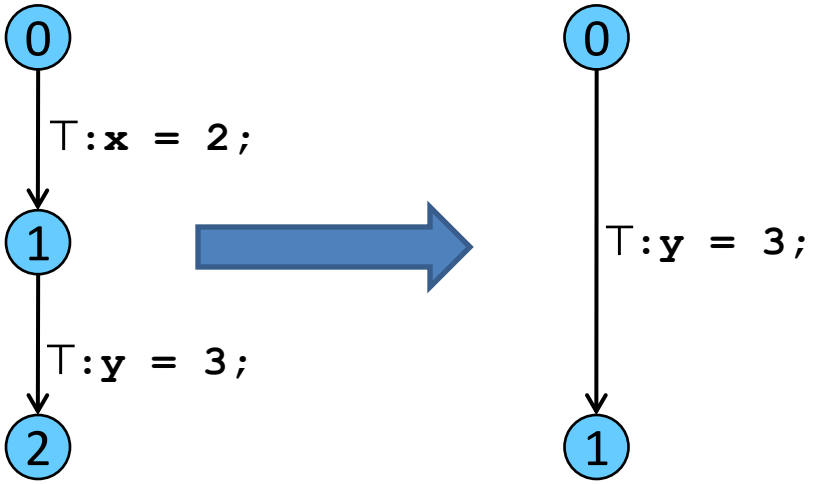
$$\forall a \in Act' \setminus Act, v \in Var_{PG} \cap Var_{PG'}, (Effect'(a,v) = v)$$

а точки Loc_0 и $\alpha(Loc_0')$ связаны отношением слабой симуляции S:

$$\forall l_0 \xrightarrow{g:a} l_1 : \left((\alpha_{Act}(a) \neq \tau) \Rightarrow \left(\exists l_1', l_0' \xrightarrow{g:a} l_1'\right)\right) \wedge (l_1, \alpha_{Loc}(l')) \in S$$

Слабое моделирование

- Отношение слабого моделирования не сохраняет количество шагов между состояниями:

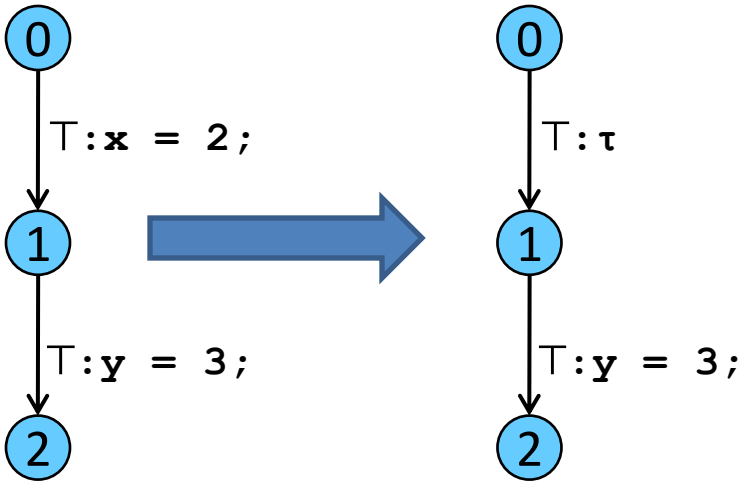


- Не сохраняются свойства, не инвариантные к прореживанию

(LTL: оператор ne**X**t)

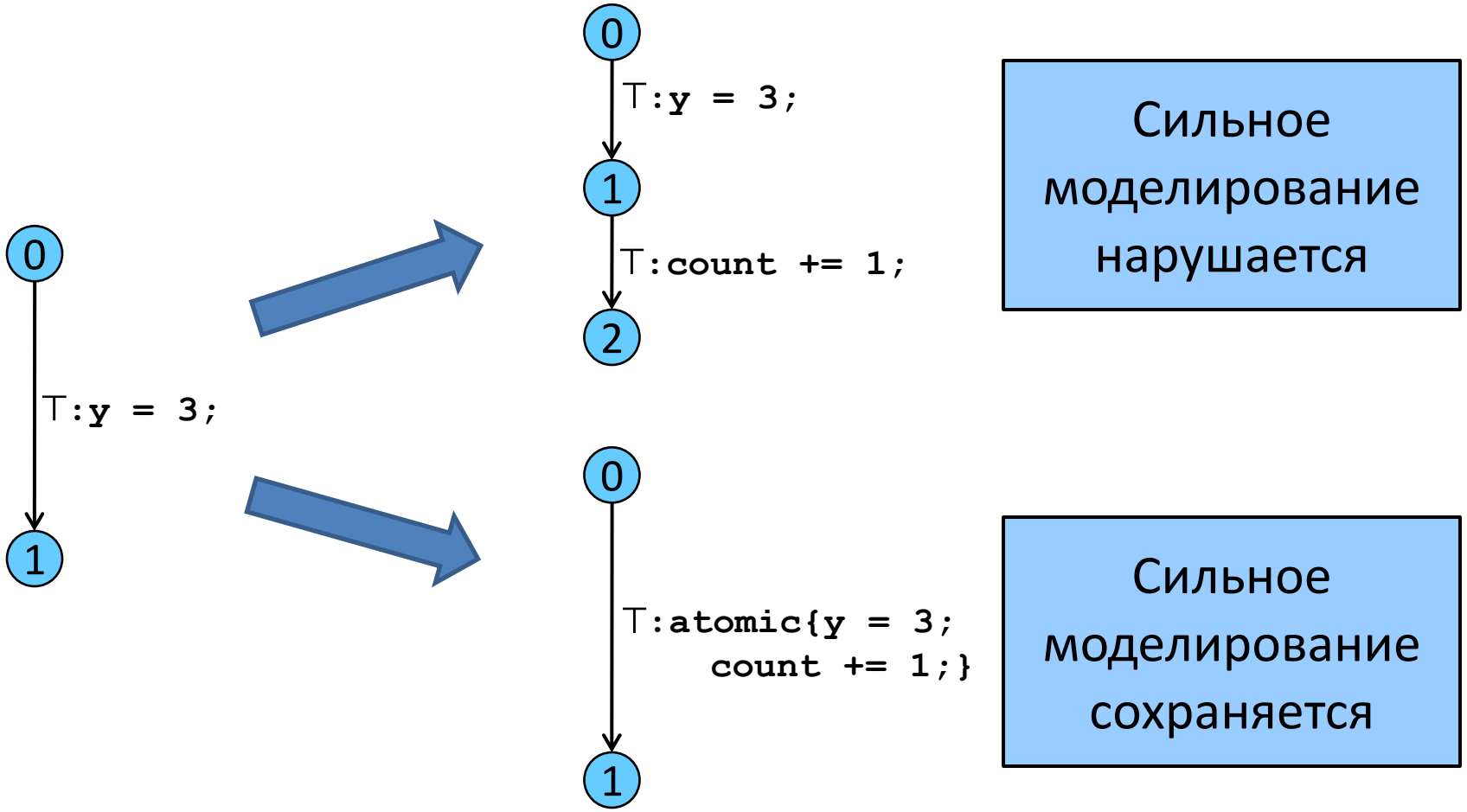
Сильное моделирование

- Для сохранения отношения сильного моделирования необходимо сохранять количество шагов программы между изменением состояния (наблюдаемых переменных)



Сильное моделирование

- С добавлением переменных и операторов в модели тоже не всё просто:



Практикум

- Сегодня (18 апреля) было выслано 4-е задание практикума
  - дедлайн 4 мая.
- 5-е задание будет выслано 25 апреля
  - проверка свойств модели из задания №3,
  - дедлайн 11 мая + день приёма в зачетную сессию.

Спасибо за внимание!
Вопросы?