Задачи МОТП v 0.1

by Александра Астахова, Юрий Бердников, Николай Леонов, Михаил Нокель, Данила Потапов

Задача 1

Вывести формулы векторного дифференцирования:

$$\nabla_x a^T x = a$$

$$\nabla_x \|Ax - b\|^2 = 2A^T Ax - 2A^T b$$

$$\nabla_x^2 \|Ax - b\|^2 = 2A^T A$$

Решение:

Будем считать все матрицы и векторы вещественнозначными. Тогда:

1. $\nabla_x a^T x = \nabla_x (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) = \left(\frac{\partial \sum a_i x_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \sum a_i x_i}{\partial x_n}\right) = (a_1, \dots, a_n) = a$
   Заметим также, что $a^T x = \langle a, x \rangle$.
2. $\nabla_x \|Ax - b\|^2 = \nabla_x \langle Ax - b, Ax - b \rangle = \nabla_x \langle Ax, Ax \rangle - \nabla_x \langle Ax, b \rangle - \nabla_x \langle b, Ax \rangle + \nabla_x \langle b, b \rangle =$
   $\nabla_x \langle A^T Ax, x \rangle - 2\nabla_x \langle A^T b, x \rangle + \nabla_x \langle b, b \rangle = \nabla_x \langle A^T Ax, x \rangle - 2A^T b$
   Рассмотрим подробнее член $\nabla_x \langle A^T Ax, x \rangle$:
   $$\nabla_x \langle A^T Ax, x \rangle = \nabla_x ((A^T Ax)^T x) = \nabla_x ((Ax)^T Ax) = \nabla_x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j A_i^T A_j \Rightarrow \frac{\partial (Ax)^T Ax}{\partial x_i}$$
   $$= 2 \sum_{j=1}^n x_j A_i^T A_j \Rightarrow \nabla_x \langle A^T Ax, x \rangle = 2A^T Ax$$
   где A_k - k-й столбец матрицы A.
   Таким образом:
   $$\nabla_x \langle A^T Ax, x \rangle = 2A^T Ax \Rightarrow \nabla_x \|Ax - b\|^2 = 2A^T Ax - 2A^T b$$
3. $\nabla_x^2 \|Ax - b\|^2 = \nabla_x \left(\nabla_x \|Ax - b\|^2\right) = \nabla_x (2A^T Ax - 2A^T b) = 2A^T A.$

Задача 2

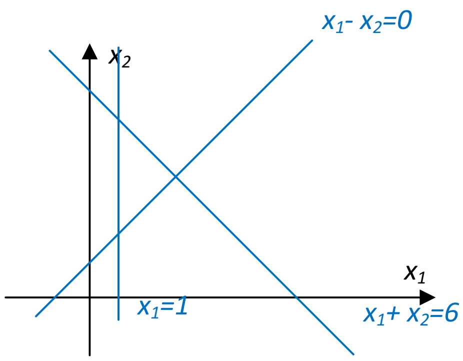
Найти нормальное псевдорешение для системы линейных уравнений.

Решение:

Рассмотрим переопределенную нерешаемую систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Данная система задает в двухмерном пространстве три прямые, не пересекающиеся в одной точке:



Таким образом она не решаема. Найдем ее псевдорешение, для этого воспользуемся формулой для его нахождения:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Вычислим соответствующее произведение по порядку:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Заметим, что полученное решение соответствует центру треугольника, образованного прямыми.

Задача 3

Даны N точек в двухмерном пространстве. Найти с помощью метода главных компонент первую главную компоненту и проекцию выборки на одномерное пространство.

Решение:

Рассмотрим 4 точки в двухмерном пространстве ($N = 4$):

$$x_1 = (1,2),\ x_2 = (2,1),\ x_3 = (4,2),\ x_4 = (6,3)$$

Вычислим выборочное среднее $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{4}(13,8) = \left(3\frac{1}{4}, 2\right)$$

Затем вычислим выборочную матрицу ковариаций S как:

$$S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^T\,(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}\frac{81}{16} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{25}{16} & \frac{5}{4}\\ \frac{5}{4} & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{9}{16} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{121}{16} & \frac{11}{4}\\ \frac{11}{4} & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}14\frac{3}{4} & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

Найдем собственные вектора матрицы S, решая характеристическое уравнение $\det(S - \lambda I) = 0$:

$$det\begin{pmatrix}\frac{59}{16} - \lambda & 1\\ 1 & \frac{1}{2} - \lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{67}{16}\lambda + \frac{59}{32} = 0$$

Получаем $\lambda_{1,2} = \frac{\frac{67}{16} \pm \frac{51}{16}}{2} = \left[\begin{matrix}59\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$. Вектор, соответствующий главной компоненте, отвечает максимальному собственному значению выборочной матрицы ковариации. Получим его, решая однородную систему уравнений $(S - \lambda_{max} I)\hat{d} = 0$ и нормируя:

$$\hat{d} = (0.99, 0.018)^T, \|\hat{d}\| = 1$$

Спроецируем точки выборки на полученную прямую:

$$T = XW = X\hat{d}$$

где W-матрица из собственных векторов, X-матрица из точек выборки, центрированных относительно выборочного среднего, а T-матрица проекций:

$$\begin{pmatrix}-2\frac{1}{4} & 0\\ -1\frac{1}{4} & -1\\ \frac{3}{4} & 0\\ 2\frac{3}{4} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.99\\ 0.018\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2.22\\ -1.25\\ 0.74\\ 2.74\end{pmatrix}$$

Задача 4

Дана выборка $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ из некоторого распределения $p(x)$. Требуется оценить по выборке с помощью метода максимального правдоподобия значения параметров этого распределения.

Например, у распределения Лапласа вида $p(x) = \frac{1}{2b}\mathrm{e}^{-\frac{|x-\mu|}{2b}}$ оценить мат. ожидание μ при известном b или оценить b при известном μ.

Решение:

Запишем логарифм функции правдоподобия:

$$L(X|b,\mu) = log\frac{1}{2b} - \sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i - \mu|}{2b},$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} sgn(x_i - \mu).$$

Таким образом, μ_{ML} должно удовлетворять уравнению $\sum_{i=1}^{n} sgn(x_i - \mu_{ML}) = 0$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} sgn(x_i - \mu)$ обращается в 0, когда $\mu = med(x_1, \dots, x_n)$, Так как тогда количество положительных слагаемых будет совпадать с количеством отрицательных.

Обозначим $\lambda = \frac{1}{b}$ и перепишем логарифм функции правдоподобия:

$$L(X|b,\lambda) = nlog\lambda - \frac{1}{2}\lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i - \mu| - nlog2.$$

Требуется найти такое λ, что:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \mu| = 0.$$

Следовательно, ответ:

$$b_{ML} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \mu|$$

$$\mu_{ML} = med(x_1, \dots, x_n).$$

Задача 5

Дана выборка из N точек в двухмерном пространстве. Первая координата – это x, вторая – t. С помощью метода наименьших квадратов построить линейную регрессию вида $\hat{t} = kx + b$, т.е. найти коэффициенты k и b.

Решение

Метод наименьших квадратов состоит в нахождении коэффициентов регрессии путем минимизации квадратичной функции потерь $S(t, \hat{t}) = (t - \hat{t})^2$. Для выборки из N точек $\{(x_1, t_1), \dots, (x_N, t_{N1})\}$ и заданного вида регрессии функция потерь будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{N} (t_i - kx_i - b)^2 \to \min_{k,b}$$

Условия минимума на S будут:

$$\frac{\partial S}{\partial k} = -2 \sum_{i=1}^{N} (t_i - kx_i - b) x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{N} (t_i - kx_i - b) = 0$$

Их можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{N} t_i x_i = k \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} t_i = k \sum_{i=1}^{N} x_i \;\; + Nb$$

Таким образом, выражая k и b по заданной выборке, получаем коэффициенты линейной регрессии.

Задача 6

Решить задачу условной оптимизации выпуклой функции при выпуклых ограничениях, например:

$$-5x^2 + 2xy - 3y^2 \to \max_{x,y}$$

$$x = y - 1$$

Решение:

Для решения задачи оптимизации воспользуемся правилом множителей Лагранжа. Для этого приведем ограничение к стандартному виду и запишем функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda)$:

$$x = y - 1 \Leftrightarrow g(x, y) = x - y + 1 = 0$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = -5x^2 + 2xy - 3y^2 + \lambda(x - y + 1)$$

Условия экстремума функции $f(x, y)$ тогда примут вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -10x + 2y + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x - 6y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x - y + 1 = 0$$

Для нахождения экстремума функции необходимо решить систему:

$$\begin{pmatrix} -10 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

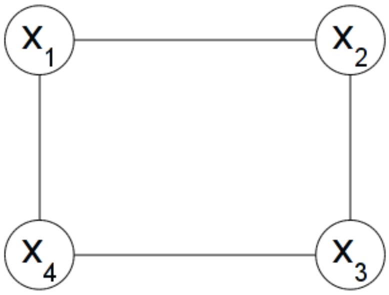
Решением данной системы будет вектор:

$$(x_0, y_0, z_0)^T = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{14}{3})$$

Значит, максимум искомой функции достигается в точке $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Задача 7

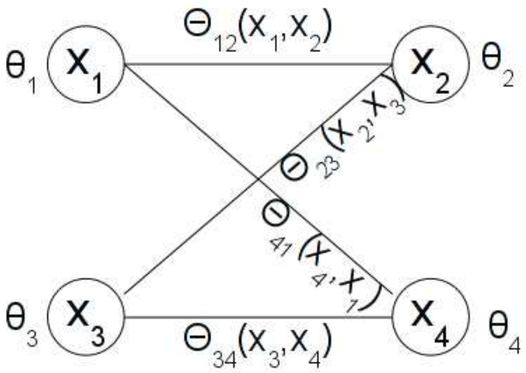
Дана марковская сеть вида:



с бинарными переменными x_1, x_2, x_3, x_4. Для этой модели заданы все значения унарных функций $\theta_1(x_1), \theta_2(x_2), \theta_3(x_3), \theta_4(x_4)$ и бинарных функций $\theta_{12}(x_1, x_2), \theta_{23}(x_2, x_3), \theta_{34}(x_3, x_4), \theta_{41}(x_4, x_1)$. С помощью репараметризации построить граф, минимальный разрез которого соответствует минимуму энергии вида $\sum_{i=1}^{4} \theta_i(x_i) + \sum_{(i,j)\in E} \theta_{ij}(x_i, x_j)$.

Решение:

Приведём марковскую сеть к стандартному виду:



Теперь проведём репараметризацию данной сети, сделав веса горизонтальных рёбер нулевыми, а веса диагональных рёбер - равными. Получим следующую систему уравнений (обозначив через a_i - величину, вычитаемую из рёбер соответствующей вершины x_i и прибавляемую к весу этой вершины):

$$\begin{cases} \theta_{12} - a_1 - a_2 & = & 0 \\ \theta_{34} - a_3 - a_4 & = & 0 \\ \theta_{41} - a_1 - a_4 & = & \theta_{23} - a_2 - a_3 \end{cases}$$

Решая данную систему, придём к следующей:

$$\begin{cases} a_2 & = & \theta_{12} - a_1 \\ a_4 & = & \theta_{34} - a_3 \\ a_3 & = & a_1 + \dfrac{-\theta_{41} + \theta_{34} + \theta_{23} - \theta_{12}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 &= \theta_{12} - a_1 \\ a_3 &= a_1 + \dfrac{-\theta_{41} + \theta_{34} + \theta_{23} - \theta_{12}}{2} \\ a_4 &= \dfrac{\theta_{34} - \theta_{23} + \theta_{12} + \theta_{41}}{2} - a_1 \end{cases}$$

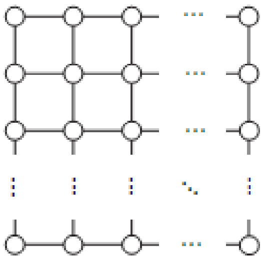
Отсюда веса диагональных рёбер будут

$$\theta_{41} - a_1 - a_4 = \frac{\theta_{41} - \theta_{34} - \theta_{12} + \theta_{23}}{2}$$

Веса горизонтальных же рёбер равны 0 (по определению репараметризации). Веса же самих вершин определены с точностью до неизвестной. Важно лишь, чтобы эти веса были неотрицательны.

Задача 8

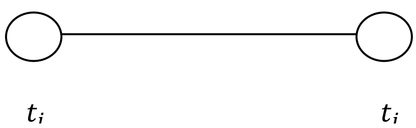
Дана марковская сеть с бинарными переменными вида “решетка”:



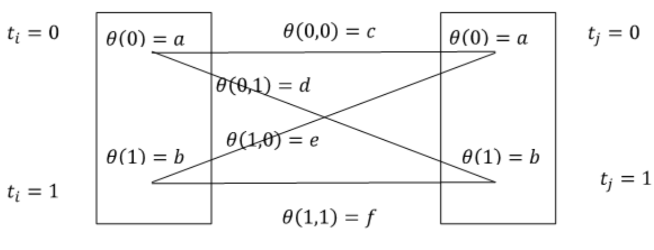
Пусть все унарные энергии совпадают для всех вершин $\theta_i(x_i) = \theta(x)$ и равны $\theta(0) = a, \theta(1) = b$. Аналогично все бинарные энергии совпадают между собой $\theta_{ij}(x_i, x_j) = \theta(x, y)$ и равны $\theta(0,0) = c, \theta(0,1) = d, \theta(1,0) = e, \theta(1,1) = f$. Требуется выполнить репараметризацию в этом графе так, чтобы все энергии $\theta_{ij}(0,0) = \theta_{ij}(1,1) = 0$.

Решение:

Рассмотрим две соседние вершины t_i и t_j:

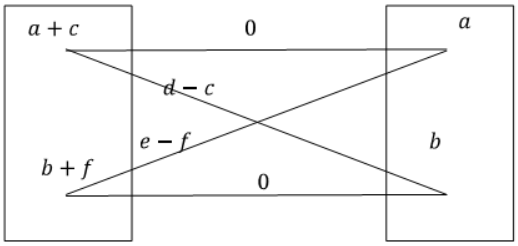


Для них:



Вычитая одинаковые значения из двух ребер, сходящихся в одну вершину и прибавляя это значение к весу самой вершины, мы получаем эквивалентный функционал энергии.

Таким образом, вычитая из ребер, сходящихся в левой нижней вершине f и прибавляя к ее весу f, получим $\theta'(1,1) = 0$. Аналогично с левой верхней вершиной. Получим:



В случае если требуется, чтобы так же были равными диагональные энергии $\theta'(0,1) = \theta'(1,0)$, решим систему:

$$c - \delta_1 - \delta_2 = 0$$

$$f - \delta_3 - \delta_4 = 0$$

$$d - \delta_1 - \delta_4 = e - \delta_2 - \delta_3$$

Где δ_1 прибавляем к левой верхней вершине и вычитаем из входящих в нее ребер,аналогично δ_2 прибавляем к правой верхней, δ_3 соответствует левой нижней, а δ_4 - правой нижней.

В итоге получим:

$$\delta_1 = \delta_3 + \frac{d - e + c - f}{2}.$$

Положив, например, $\delta_3 = 0$, получим

$$\delta_1 = \frac{d - e + c - f}{2}$$

$$\delta_2 = \frac{c - d + e + f}{2}$$

$$\delta_4 = f$$

Тогда после репараметризации энергии будут равны:

$$\theta'(0,1) = d - \delta_1 - \delta_4 = \frac{d + e - c - f}{2}$$

$$\theta'(1,0) = e - \delta_2 - \delta_3 = \frac{d + e - c - f}{2}$$

$$\theta'(0,0) = c - \delta_1 - \delta_2 = 0$$

$$\theta'(1,1) = f - f = 0$$

Таким образом, получили репараметризацию, при которой горизонтальные ребра графа имеют нулевые веса, а веса диагональных ребер совпадают.

Задача 9

Дана следующая вероятностная модель:

$$p(X,T\,|\,\mu,a_0,b_0)=\prod_{n=1}^{N}p(x_n,t_n\,|\,\mu,a_0,b_0)=\prod_{n=1}^{N}p(x_n\,|\,t_n,\mu)\,p(t_n\,|\,a_0,b_0),$$

$$p(x_n\,|\,t_n,\mu)=N(x_n\,|\,\mu,t_n^{-1})=\sqrt{\frac{t_n}{2\pi}}e^{-\frac{t_n}{2}(x_n-\mu)^2},$$

$$p(t_n\,|\,a_0,b_0)=G(t_n\,|\,a_0,b_0)=\frac{b_0^{a_0}}{\Gamma(a_0)}t_n^{a_0-1}e^{-b_0t_n},\ Et_n=\frac{a_0}{b_0}.$$

Требуется выписать формулы ЕМ-алгоритма для максимизации правдоподобия:

$$p(X\,|\,\mu,a_0,b_0)\to\max_{\mu}$$

при фиксированных a_0,b_0.

Решение:

Выписываем Е-шаг.

На Е-шаге необходимо вычислить $\log(p(X,T\,|\,\theta_{old}))$ и найти условное математическое ожидание $E_{T|X,\theta_{old}}\log(p(X,T\,|\,\theta_{old}))$. Вычислим их:

$$\log(p(X,T\,|\,\theta_{old}))=\sum_{n=1}^{N}\log(p(x_n\,|\,t_n,\mu))+\sum_{n=1}^{N}\log(p(t_n\,|\,a_0,b_0))=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}(\log(\sqrt{\frac{t_n}{2\pi}})-\frac{t_n}{2}(x_n-\mu)^2+\log(\frac{b_0^{a_0}}{\Gamma(a_0)})+(a_0-1)\log(t_n)-b_0t_n)$$

Учитывая, что максимизация правдоподобия будет проводиться только лишь по μ, перепишем найденную величину следующим образом:

$$\log(p(X,T\,|\,\mu_{old}))=-\sum_{n=1}^{N}\frac{t_n}{2}(x_n-\mu)^2+f(t_n)$$

Тогда вычислим условное математическое ожидание, учитывая, что $Et_n=\frac{a_0}{b_0}$:

$$E_{T|X,\theta_{old}}\log(p(X,T\,|\,\theta_{old}))=\frac{Na_0}{2b_0}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2+Ef(t_n)$$

Выписываем М-шаг.

На М-шаге максимизируется условное математическое ожидание, найденное на Е-шаге:

$$\frac{\delta E_{T|X,\theta_{old}} \log(p(X,T\,|\,\theta_{old}))}{\delta \mu} = -\frac{2Na_0}{2b_0}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu) = 0$$

Отсюда следует:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$$

Задача 10

Рассматривается вероятностная смесь двух дискретных распределений вида:

$$p(x) = \gamma p_1(x) + (1-\gamma) p_2(x).$$

Величина x может принимать значения (1,2,3). При этом параметры распределений равны:

$$p1: \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \end{array} \qquad p2: \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\beta & \beta \end{array}$$

Выборка X состоит из 30 единиц, 20 двоек и 60 троек. Требуется провести первые две итерации ЕМ-алгоритма для восстановления параметров смеси (α, β, γ) для начального приближения $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0.5$.

Решение:

Первая итерация

Е-шаг

Вычисляем значения $g_{ij} = \dfrac{w_j * p_j(x_i)}{\sum_j w_j * p_j(x_i)}$:

$$g_{11} = \frac{0.5*0.5}{0.5*0.5+0*0.5} = 1, \quad g_{12} = \frac{0*0.5}{0.5*0.5+0*0.5} = 0,$$

$$g_{21} = \frac{0.5*0.5}{0.5*0.5+0.5*0.5} = 0.5, \quad g_{22} = \frac{0.5*0.5}{0.5*0.5+0.5*0.5} = 0.5,$$

$$g_{31} = \frac{0*0.5}{0.5*0.5+0*0.5} = 0, \quad g_{32} = \frac{0.5*0.5}{0.5*0.5+0*0.5} = 1.$$

М-шаг

Вычисляем новые значения параметров, максимизируя "взвешенное" правдоподобие:

$$30 g_{11} \log(p_1(x=1)) + 20 g_{21} \log(p_1(x=2)) \to \max_\alpha,$$

$$60 g_{32} \log(p_2(x=3)) + 20 g_{22} \log(p_2(x=2)) \to \max_\beta$$

Отсюда, подставив значения:

$$30\log(\alpha) + 10\log(1-\alpha) \to \max_\alpha,$$

$$60\log(\beta) + 10\log(1-\beta) \to \max_\beta$$

Взяв логарифм и продифференцировав первое выражение по α, второе - по β, получим:

$$\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{6}{7}$$

Пересчитаем γ:

$$\gamma = \frac{30g_{11} + 20g_{21}}{60 + 30 + 20} = \frac{4}{11}$$

Вторая итерация

Е-шаг

Вычисляем значения $g_{ij} = \dfrac{w_j * p_j(x_i)}{\sum\limits_j w_j * p_j(x_i)}$:

$$g_{11} = \frac{\frac{4}{11} * \frac{3}{4}}{\frac{4}{11} * \frac{3}{4} + 0 * \frac{7}{11}} = 1, \quad g_{12} = \frac{\frac{7}{11} * 0}{\frac{4}{11} * \frac{3}{4} + 0 * \frac{7}{11}} = 0,$$

$$g_{21} = \frac{\frac{4}{11} * \frac{1}{4}}{\frac{4}{11} * \frac{1}{4} + \frac{7}{11} * \frac{1}{7}} = 0.5, \quad g_{22} = \frac{\frac{7}{11} * \frac{1}{7}}{\frac{4}{11} * \frac{1}{4} + \frac{7}{11} * \frac{1}{7}} = 0.5,$$

$$g_{31} = \frac{\frac{4}{11} * 0}{\frac{4}{11} * 0 + \frac{7}{11} * \frac{6}{7}} = 0, \quad g_{32} = \frac{\frac{7}{11} * \frac{6}{7}}{\frac{7}{11} * \frac{6}{7} + 0 * \frac{7}{11}} = 1.$$

Заметим, что значения g_{ij} не поменялись. А значит, не поменяются и значения параметров на М-шаге.

М-шаг

Действительно в формулах для "взвешенного" правдоподобия ничего не изменилось:

$$30g_{11}\log(p_1(x=1)) + 20g_{21}\log(p_1(x=2)) \to \max_{\alpha},$$

$$60g_{32}\log(p_2(x=3)) + 20g_{22}\log(p_2(x=2)) \to \max_{\beta}$$

Следовательно:

$$\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{6}{7}$$

Аналогично и для γ:

$$\gamma = \frac{30g_{11} + 20g_{21}}{60 + 30 + 20} = \frac{4}{11}$$

Как видим, значения параметров на второй итерации не изменились.

Задача 11

Пусть имеется три бинарных переменных $a, b, c \in 0,1$, совместное распределение которых задаётся следующей таблицей:

a	b	c	$p(a,b,c)$
0	0	0	0.192
0	0	1	0.144
0	1	0	0.048
0	1	1	0.216
1	0	0	0.192
1	0	1	0.064
1	1	0	0.048
1	1	1	0.096

Требуется показать, что переменные a и b не являются независимыми, но при этом являются условно независимыми как при $c = 0$, так и при $c = 1$.

Решение:

Вначале покажем зависимость этих переменных. Покажем, например, что $p(a = 0, b = 0) \neq p(a = 0)\, p(b = 0)$: Имеем:

$$p(a = 0) = \sum_{a=0} p(a,b,c) = 0.192 + 0.144 + 0.048 + 0.216 = 0.6,$$

$$p(b = 0) = \sum_{b=0} p(a,b,c) = 0.192 + 0.144 + 0.192 + 0.064 = 0.592,$$

$$p(a = 0, b = 0) = \sum_{a=0,b=0} p(a,b,c) = 0.192 + 0.144 = 0.336$$

Очевидно:

$$0.336 \neq 0.592 * 0.6 = 0.3552$$

Значит, переменные зависимые.

Далее покажем условную независимость. Для этого составим таблички, в которые занесём необходимые вероятности: $p(a,c), p(b,c), p(c)$:

a	c	$p(a,c)$
0	0	0.24
0	1	0.36
1	0	0.24
1	1	0.16

b	c	$p(b,c)$
0	0	0.384
0	1	0.208
1	0	0.096
1	1	0.312

c	$p(c)$
0	0.48
1	0.52

Теперь проверим условную независимость переменных a и b при условии c, воспользовавшись следующей формулой, вытекающей из определения условной независимости двух величин: $\frac{p(a,b,c)}{p(c)} = \frac{p(a,c)}{p(c)} * \frac{p(b,c)}{p(c)}$.

- **При** $c = 0$.

При $a = 0, b = 0$: $\frac{0.192}{0.48} = \frac{0.24}{0.48} * \frac{0.384}{0.48}$ - верно.

При $a = 0, b = 1$: $\frac{0.048}{0.48} = \frac{0.24}{0.48} * \frac{0.096}{0.48}$ - верно.

При $a = 1, b = 0$: $\frac{0.192}{0.48} = \frac{0.24}{0.48} * \frac{0.384}{0.48}$ - верно.

При $a = 1, b = 1$: $\frac{0.048}{0.48} = \frac{0.24}{0.48} * \frac{0.096}{0.48}$ - верно.

- **При** $c = 1$.

При $a = 0, b = 0$: $\frac{0.144}{0.52} = \frac{0.36}{0.52} * \frac{0.208}{0.52}$ - верно.

При $a = 0, b = 1$: $\frac{0.216}{0.52} = \frac{0.36}{0.52} * \frac{0.312}{0.52}$ - верно.

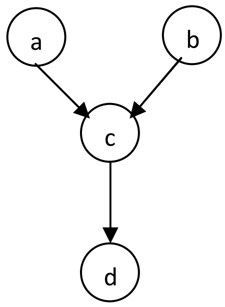
При $a = 1, b = 0$: $\frac{0.064}{0.52} = \frac{0.16}{0.52} * \frac{0.208}{0.52}$ - верно.

При $a = 1, b = 1$: $\frac{0.096}{0.52} = \frac{0.16}{0.52} * \frac{0.312}{0.52}$ - верно.

Отсюда следует, что данное равенство: $p(a,b \mid c) = p(a \mid c) p(b \mid c)$ и переменные условно независимы.

Задача 12

Пусть имеется байесовская сеть с графом следующего вида:



Требуется показать, что переменные a и b являются независимыми, но при этом не являются условно независимыми от d.

Решение:

Покажем, что a и b – независимы:

$p(a,b) = \int\int p(a,b,c,d)\boldsymbol{d}c\ \boldsymbol{d}d\ = \int\int p(d|c) * p(c|a,b) * p(a) * p(b)\ \boldsymbol{d}c\ \boldsymbol{d}d = p(a) * p(b) * \int p(c|a,b) \int p(d|c)\boldsymbol{d}d\ \boldsymbol{d}c = p(a) * p(b) * \int p(c|a,b)\boldsymbol{d}c = p(a) * p(b)$. Значит случайные величины a и b независимы по определению.

Докажем отсутствие условной независимости случайных величин a и b от d.

$$p(a|d) = \frac{p(a,d)}{p(d)} = \frac{p(a)p(d|c)}{\int p(d|c)p(c)dc}$$

$$p(b|d) = \frac{p(b,d)}{p(d)} = \frac{p(b)p(d|c)}{\int p(d|c)p(c)dc}$$

В то время как

$$p(a,b|d) = \frac{p(a,b,d)}{p(d)} = \frac{p(a)p(b)p(d|c)}{\int p(d|c)p(c)dc}$$

Следовательно $p(a,b|d) \neq p(a|d)p(a,b|d)$, что означает отсутствие условной независимости по d.

Задача 13

Имеется скрытая марковская модель с двумя скрытыми состояниями и бинарными наблюдаемыми переменными. Пусть наблюдаемая последовательность имеет вид $X = (1011001110001 \dots)$, т.е. идет группа из n единиц, потом группа из n нулей, потом группа из $n+1$ единиц, $n+1$ нулей и так далее. При этом наблюдаемая последовательность состояний $T = (1111222211112222 \dots)$. С помощью метода максимального правдоподобия требуется оценить вектор априорных вероятностей π и матрицу перехода A, если длина последовательности равна 200.

Решение:

Воспользуемся формулами, полученными для оценки параметров методом максимального правдоподобия:

$$\pi_j = t_{1j}\,, \qquad j = 1, \dots K$$

$$A_{ij} = \frac{\sum_{n=2}^{N} t_{n-1,i} t_{nj}}{\sum_{n=2}^{N} t_{n-1,i}}, \qquad i,j = 1, \dots K$$

Где $K = 2, N = 200$. Тогда $\pi = (1,0)$, так как $t_1 = (1,0)$, так как в первый момент модель находится в первом состоянии. Для матрицы перехода A получим:

$$A_{11} = \frac{\sum_{n=2}^{N} t_{n-1,1} t_{n1}}{\sum_{n=2}^{N} t_{n-1,1}} = \frac{25 * 3}{25 * 4} = 0.75$$

Числитель дроби соответсвует количеству переходов из первого состояния во второе, а знаменатель обозначает общее количество переходов из первого состояния. Аналогично:

$$A_{12} = \frac{\sum_{n=2}^{N} t_{n-1,1} t_{n2}}{\sum_{n=2}^{N} t_{n-1,1}} = \frac{25 * 1}{25 * 4} = 0.25$$

$$A_{21} = \frac{\sum_{n=2}^{N} t_{n-1,2} t_{n1}}{\sum_{n=2}^{N} t_{n-2,1}} = \frac{24}{4 * 24 + 3} = 0.(24)$$

$$A_{11} = \frac{\sum_{n=2}^{N} t_{n-1,2} t_{n2}}{\sum_{n=2}^{N} t_{n-1,2}} = \frac{24 * 3 + 3}{4 * 24 + 3} = 0.(75)$$

Таким образом матрица A равна:

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.(24) & 0.(75) \end{pmatrix}$$

Ответ: $\pi = (1,0)$, $A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.(24) & 0.(75) \end{pmatrix}$.

Задача 14

Имеется скрытая марковская модель с двумя скрытыми состояниями. Вектор априорных вероятностей $\pi = (0.5, 0.5)$, матрица перехода $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Наблюдаемая переменная является бинарной, в первом состоянии значение 0 выпадает с вероятностью 0.8, а во втором состоянии – с вероятностью 0.2. Требуется с помощью алгоритма Витерби найти наиболее правдоподобную последовательность скрытых состояний для наблюдаемой последовательности $X = \{0,0,1,0,0,1,1\}$.

Решение:

Воспользуемся формулами для функции Беллмана:

$$V_{1j} = log\pi_j$$

$$V_{nj} = \max_i (V_{n-1,i} + logA_{ij} + logp(x_n|\phi_j))$$

$$S_{nj} = arg\max_i (V_{n-1,i} + logA_{ij} + logp(x_n|\phi_j)).$$

Тогда:

$$V_{11} = log\pi_1 = log0.5$$

$$V_{12} = log\pi_2 = log0.5$$

$$V_{21} = \max(\log 0.5 \ + \log 0.9 + \log 0.8, \log 0.5 \ + \log 0.2 + \log 0.8) = \max(\log 0.36, \log 0.08)$$

$$V_{22} = \max(\log 0.5 \ + \log 0.1 + \log 0.2, \log 0.5 \ + \log 0.8 + \log 0.2) = \max(\log 0.01, \log 0.08)$$

$$V_{31} = \max(\log 0.36 \ + \log 0.9 + \log 0.2, \log 0.08 \ + \log 0.2 + \log 0.2) = \max(\log 0.0648, \log 0.0032)$$

$$V_{32} = \max(\log 0.36 \ + \log 0.1 + \log 0.8, \log 0.08 \ + \log 0.8 + \log 0.8) = \max(\log 0.0288, \log 0.0512)$$

И так далее до 7й итерации:

$$V_{71} = \max(\log 0.01 \ + \log 0.9 + \log 0.2, \log 0.008 \ + \log 0.2 + \log 0.2) = \max(\log 0.0018, \log 0.0003)$$

$$V_{72} = \max(\log 0.01 \ + \log 0.1 + \log 0.8, \log 0.008 \ + \log 0.8 + \log 0.8) = \max(\log 0.0008, \log 0.0051)$$

Таким образом $i(7) = arg\max(V_{71}, V_{72}) = 2$. Используя формулу для вычисления S_{nj}, получаем последовательность скрытых состояний равных 2.

Задача 15

Имеется скрытая марковская модель с двумя скрытыми состояниями. Вектор априорных вероятностей $\pi = (0.5{,}0.5)$, матрица перехода $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Наблюдаемая переменная является бинарной, в первом состоянии значение 0 выпадает с вероятностью 0.8, а во втором состоянии – с вероятностью 0.2. Требуется с помощью алгоритма «вперед-назад» вычислить все маргинальные распределения вида $p(t_n|X)$ для наблюдаемой последовательности $X = (0{,}0{,}1)$.

Решение:

Пользуясь свойствами условной независимости в для скрытых марковских сетей, запишем

$$p(t_n|X) = \frac{\alpha(t_n) \cdot \beta(t_n)}{p(X)}, \text{где } p(X) = \sum\nolimits_{t_N} \alpha(t_N).$$

Вычислим $\alpha(t_n)$, пользуясь формулами:

$$\alpha(t_1) = \prod_{j=1}^{K} (\pi_j p(x_1|\phi_j))^{t_{1j}}$$

$$\alpha(t_n) = p(x_n|t_n) \sum_{t_{n-1}} \alpha(t_{n-1}) p(t_n|t_{n-1}).$$

Тогда

$$\alpha(t_1) = \alpha \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

Где $\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = A$ – матрица перехода, $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \pi$- априорные вероятности, α - нормировочная константа. Аналогично

$$\alpha(t_2) = \alpha \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0.592 \\ 0.064 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(t_3) = \alpha \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0.164 \\ 0.208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.56 \end{pmatrix}.$$

Рассчитываем $\beta(t_n)$ по формулам:

$$\beta(t_n) = \sum_{t_{n+1}} \beta(t_{n+1}) p(x_{n+1}|t_{n+1}) p(t_{n+1}|t_n)$$

$$\beta(t_N) = 1.$$

Тогда в нашей задаче:

$$\beta(t_3) = \beta \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0.188 \\ 0.68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.78 \end{pmatrix}$$

$$\beta(t_2) = \beta \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.78 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0.174 \\ 0.16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.52 \\ 0.48 \end{pmatrix}$$

$$\beta(t_3) = \beta \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.52 \\ 0.48 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0.384 \\ 0.16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix},$$

Где β- нормировочная константа.

Тогда итоговые маргинальные распределения:

$$\gamma_0(t_3) = p(t_3|X) = \frac{0.7 \cdot 0.44}{0.3 \cdot 0.56 + 0.7 \cdot 0.44} = 0.373$$

$$\gamma_0(t_2) = p(t_2|X) = \frac{0.52 \cdot 0.9}{0.1 \cdot 0.48 + 0.52 \cdot 0.9} = 0.906$$

$$\gamma_0(t_3) = p(t_3|X) = \frac{0.22 \cdot 0.8}{0.78 \cdot 0.2 + 0.22 \cdot 0.8} = 0.831$$

Задача 16

Рассматривается игра «Морской бой». В квадрате размера 3×3возможны 2 ситуации: один двухпалубный корабль и два двухпалубных корабля. С помощью построения тупикового теста найти минимальное число ходов, необходимое для гарантированного определения того, какая из двух ситуаций имеет место.

Решение:

Для начала запишем таблицы всех возможных положений кораблей каждого из классов К1 (1 двухпалубный) и К2 (2 двухпалубных). Поле 9*9 будем представлять как вектор длины 9, соответствующий следующей нумерации клеток:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Найдём таблицу попарных различий строк из таблиц первого и второго классов.
Далее применяем стандартный метод. Для каждой строки вида [z1 z2 … z9] записываем соответствующую дизъюнкт: $D_k = x_{i1} V\ x_{i2} V \dots V x_{in_k}$, в которую включается переменная $x_i \leftrightarrow z_i = 1$. Рассматриваем функцию $F = \bigwedge_k D_k$, в которой получаем 96 дизъюнктов. Упрощение с использованием преобразований $D * (D\ V\ D') = D$ производилось с использованием компьютера.
В итоге получилось $F\ = (x_8 V\ x_9)(x_7 V\ x_8)(x_1 V x_2)(x_2 V x_3)(x_3 V x_6)(x_6 V x_8)(x_1 V x_4)(x_4 V x_7) = (x_8 V\ x_7 x_9)(x_2 V\ x_1 x_3)(x_6 V\ x_3 x_9)(x_4 V\ x_1 x_7) = (x_2\ x_4\ x_6\ x_8)\ V\ (x_1\ x_3\ x_7\ x_9)\ V\ F'$, где F' очевидно содержит только конъюнкты длины > 4. Значит кратчайшими тупиковыми тестами будут 2-4-6-8 и 1-3-7-9, что соответствует: $\begin{matrix} & * & \\ * & & * \\ & * & \end{matrix}$ и $\begin{matrix} * & & * \\ & & \\ * & & * \end{matrix}$. Очевидно, в первом случае при 2-х попаданиях получаем 2 корабля, при одном – один. Во втором – 1 корабль при 0 и 1 попадании, 2 корабля – при 2.

Код на Матлабе для исключения лишних дизъюнктов прилагается:

```
a = [
1   1   0   0   0   0   0   0   0
0   1   1   0   0   0   0   0   0
0   0   0   1   1   0   0   0   0
0   0   0   0   1   1   0   0   0
0   0   0   0   0   0   1   1   0
0   0   0   0   0   0   0   1   1
1   0   0   1   0   0   0   0   0
0   0   0   1   0   0   1   0   0
0   1   0   0   1   0   0   0   0
0   0   0   0   1   0   0   1   0
0   0   1   0   0   1   0   0   0
0   0   0   0   0   1   0   0   1];

b = [
1   1   0   0   0   0   1   1   0
1   1   0   0   0   0   0   1   1
0   1   1   0   0   0   0   1   1
0   1   1   0   0   0   1   1   0
1   0   1   1   0   1   0   0   0
1   0   0   1   0   1   0   0   1
0   0   1   1   0   1   1   0   0
0   0   0   1   0   1   1   0   1];

na = size(a, 1);
nb = size(b, 1);

m = size(a, 2);
c = zeros(na*nb, m, 'uint8');
```

```
for i = 1 : size(a, 1)
    for j = 1 : size(b, 1)
        c((i-1)*nb + j, :) = (a(i,:) ~= b(j, :));
    end
end

finish = false;
while ~finish
    finish = true;
    n = size(c, 1);
    for i = 1 : n
        for j = 1 : i-1
            if (c(i, :) <= c(j, :))
                c(j, :) = [];
                finish = false;
                break;
            elseif (c(j, :) <= c(i, :))
                c(i, :) = [];
                finish = false;
                break;
            end
        end
        if finish == false
            break;
        end
    end
end
```

Задача 17

Найти результирующую ДНФ для системы тестовых уравнений

$$\begin{cases} x_1 \vee x_2 = 1 \\ x_2 \vee x_3 = 1 \\ x_3 \vee x_4 = 1 \\ \cdots \\ x_{n-1} \vee x_n = 1 \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим д. н. ф. $\bigvee_k x_{i1} x_{i2} \dots x_{in_k}$, где индексы $i_1, \dots, i_{n_k}$ — всевозможные комбинации, удовлетворяющие условиям:

1) $0 < i_1 < \cdots < i_{n_k} < n$

2) Среди i_j нет трёх подряд идущих чисел (считая, что индексы i_0 и i_{n_k+1} присутствуют всегда).

3) $i_j - i_{j-1} \le 2, j = 0, 1, \dots, n_k + 1, i_0 = 0, i_{n_k+1} = n + 1$.

Очевидно, если д.н.ф. = 1, то все уравнения системы будут выполняться. Действительно, в д.н.ф. найдётся конъюнкт К = $x_{i1} x_{i2} \dots x_{in_k} = 1$, у которого индексы $i_1, \dots, i_{n_k}$ удовлетворяют условиям 1)-3). Из условия 3) сразу же следует выполнимость каждого уравнения системы.

Осталось показать, что д.н.ф. - тупиковая. Поскольку правило склейки неприменимо (нет отрицаний переменных), все конъюнкты различны и правило поглощения не применимо, то по теореме Блейка-Квайна д.н.ф. является максимальной. Невозможность применить правила поглощения (K V K*K' => K) следует из того, что характеристические вектора наборов индексов различных конъюнктов несравнимы между собой. Под характеристическим вектором конъюнкта понимается булев вектор, где 1 стоят на тех (и только тех) местах, которые соответствуют номерам индексов переменных, входящих в этот конъюнкт. А несравнимы они потому, что при добавлении хотя бы одной новой единицы в характеристический вектор какого-либо конъюнкта приведёт к нарушению свойства 2).

Значит построенная таким образом д.н.ф. является тупиковой д.н.ф., ч.т.д

Задача 18

В обучающей таблице класс K_1 состоит из всех векторов, принадлежащих шару радиуса 3 с центром в (0, 0, …, 0), а класс K_2 состоит из всех векторов, принадлежащих шару радиуса 4 с центром в (1, 1, …, 1). К какому классу будет отнесен объект (0, 1, 0, …, 1) алгоритмом «Кора», если n – четное?

Решение:

Утверждение: Для любого набора из 3 столбцов (i_1, i_2, i_3) и любой тройки чисел (k_1, k_2, k_3) можно найти такой вектор U из K_1 и V из K_2, что $U_{i1} = V_{i1} = k1$, $U_{i2} = V_{i2} = k_2$, $U_{i3} = V_{i3} = k_3$.

Доказательство:

1)Для класса K_1: берём вектор U : $U_i = k_j$ для $i = i_j$ и $U_i = 0$ для остальных i. В нем не больше трёх единиц (по построению), следовательно, U отстоит от (0, 0, …, 0) не более, чем на 3 и принадлежит K_1.

2)Для класса K_2: берём вектор V : $V_i = k_j$ для $i = i_j$ и $U_i = 1$ для остальных i. В нем не больше трёх нулей (по построению), следовательно, V отстоит от (1, 1, …, 1) не более чем на 3 и принадлежит K_2.

Следствие: Алгоритм «Кора» не сможет дать ответ ни для какого входного вектора, т.к. не сможет найти ни одной тройки столбцов и тройки чисел, позволяющих отличить один класс от другого.

Задача 19

В обучающей таблице класс K_1 представлен объектами (0,0,…,0,0) и (1,1,…,1,1), а класс K_2 – объектами (1,0,1,0,…) и (0,1,0,1…). Тестовый объект имеет вид $\left(\underbrace{1,1,\dots,1}_{k},\underbrace{0,0,\dots 0,0}_{k}\right)$.К какому классу будет отнесен этот объект алгоритмом «Кора» при четном и нечетном n?

[тут сомнительное место в условии. Мы его подправили, сообразуясь с логикой]

Решение:

Считаем, что n = 2k. В тестовом объекте k нулей и k единиц.

В случае k = 2t получаем:

- количество троек, совпадающих с K1 : Г1 = $(C_t^2 * C_t^1 + C_t^1 * C_t^2) * 2$. При этом выбирается 1 чётная и 2 нечётных позиции из 1-й половины вектора; 2 чётных и 1 нечётная из первой; умножаем на 2, поскольку можем выбирать также из второй половины.
- количество троек, совпадающих с K2 Г2 = $(C_t^2 * C_t^1 + C_t^1 * C_t^2) * 2$. При этом выбирается 1 чётная позиция из первой половины, 2 чётных – из второй; 2 чётных из первой, 1 - из второй; умножаем на 2, поскольку можем заменить чётные позиции на нечётные.

В итоге, получаем равенство голосов и объект не будет отнесён ни к какому классу.

В случае k = 2t+1 получаем:

- количество троек, совпадающих с K1: Г1 = $(C_{t+1}^2 * C_t^1 + C_{t+1}^1 * C_t^2) * 2$. (Здесь выбираем индексы как и в случае k = 2t).
- количество троек, совпадающих с K2: Г2 = $(C_{t+1}^2 * C_{t+1}^1 + C_{t+1}^1 * C_{t+1}^2) + (C_t^2 * C_t^1 + C_t^1 * C_t^2)$. (Здесь выбираем аналогично случаю k = 2t, только при выборе из второй половины вместо чётных позиций берём нечётные (поскольку k = 2t+1)).

$$\Gamma 1 = (t+1)t^2 + (t+1)t(t-1)$$

$$\Gamma 2 = (t+1)^2 t + (t-1)t^2$$

В итоге, $\Gamma 1 - \Gamma 2 = -(t+1)t + t(t-1) = -2t$. То есть выигрывает второй.

Задача 20

Написать формулу для числа голосов в алгоритме вычисления оценок, если функция близости определяется параметрами $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, допустимое число невыполняющихся неравенств q = 3, а совокупность характеристических векторов опорных множеств образует интервал конъюнкции $x_1 \& \ldots \& x_r \& \overline{x_{r+1}} \& \ldots \& \overline{x_{r+k}}$.

Решение:

[теория – см. лекции Журавлёва, 2008, стр 16..18. Обозначения взяты оттуда же]
Предположим (иное не указано в условии), что веса всех признаков и экземпляров классов одинаковы (=1) . Количество выполнившихся неравенств:

$$\mathrm{N}'(\omega \mathrm{S}, \omega \mathrm{S_i}) = \sum_{j=1}^{|\omega|} (|\mathrm{a}_{\mathrm{u_j}} - \mathrm{a}_{\mathrm{ju_i}})| \leq \varepsilon_\mathrm{j})$$

Индикатор близости векторов по заданному множеству столбцов:

$$\mathrm{N}(\omega \mathrm{S}, \omega \mathrm{S_i}) = \begin{cases} 1, & \mathrm{N}'(\omega \mathrm{S}, \omega \mathrm{S_i}) \geq |\omega| - q \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Кол-во голосов для заданной строки:

$$\Gamma_{ij}(S) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{N}(\omega \mathrm{S}, \omega \mathrm{Si})$$

Здесь Ω – множество векторов вида ($u_1 \ldots u_l$) – подмножеств векторов номеров столбцов, в которые входят столбцы 1..r и не входят (r+1)..k

Итоговое количество голосов за класс K_j :

$$\Gamma_j(S) = \sum_{\mathrm{i}:\mathrm{S_i} \in \mathrm{K_j}} \mathrm{N}(\omega \mathrm{S}, \omega \mathrm{S_i})$$

Задача 21

В алгоритме вычисления оценок $x_{11} = 1$; $x_{10} = x_{01} = x_{00} = 0$. Написать формулу для числа голосов, если функция близости определяется параметрами $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, допустимое число невыполняющихся неравенств равно q, а система опорных множеств состоит из всех подмножеств мощности 2q.

Решение:

[теория – см. лекции Журавлёва, 2008, стр 16..18. На стр 17 есть странная фраза про «легко видеть» и q/2, что заставляет подозревать здесь где-то подколку]

Фактически, задача сводится к предыдущей с минимальными изменениями.

Предположим (иное не указано в условии), что веса всех признаков и экземпляров классов одинаковы (=1) .

Количество выполнившихся неравенств:

$$\mathrm{N}'(\omega\mathrm{S}, \omega\mathrm{S_i}) = \sum_{j=1}^{|\omega|} (|\mathrm{a}_{\mathrm{u_j}} - \mathrm{a}_{\mathrm{ju_i}})| \leq \varepsilon_\mathrm{j})$$

Индикатор близости векторов по заданному множеству столбцов:

$$\mathrm{N}(\omega\mathrm{S}, \omega\mathrm{S_i}) = \begin{cases} 1, & \mathrm{N}'(\omega\mathrm{S}, \omega\mathrm{S_i}) \geq |\omega| - q \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Кол-во голосов для заданной строки:

$$\Gamma_{ij}(S) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{N}(\omega\mathrm{S}, \omega\mathrm{Si})$$

Здесь Ω – множество векторов вида ($u_1 \ldots u_l$) – подмножеств векторов номеров столбцов, в которые входят столбцы 1..r и <u>не</u> входят (r+1)..k

Итоговое количество голосов за класс K_j : так как x_{ij} для (i, j) != (1, 1) равно нулю, лишние слагаемые убираются, и остается

$$\Gamma_j(S) = \sum_{\mathrm{i:S_i} \in \mathrm{K_j}} \mathrm{N}(\omega\mathrm{S}, \omega\mathrm{S_i})$$

Упражнение 1

Доказать, что матрица $\Phi^{\mathrm{T}}\Phi \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}$ при $m > n$.

Решение:

Дополним матрицу $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times m}$ до квадратной нулевыми строками:

$$\widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \overline{0} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\widehat{\Phi}^{T} = (\Phi^{\mathrm{T}}\,\overline{0})$$

Произведение полученных матриц в точности совпадает с исходным:

$$\widehat{\Phi}^{T}\widehat{\Phi} = \Phi^{\mathrm{T}}\Phi$$

однако они являются квадратными, значит, можем воспользоваться свойством определителя:

$$detAB = detA \cdot detB$$

В силу вырожденности матриц $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Phi}^{T}$ матрица $\widehat{\Phi}^{T}\widehat{\Phi}$ также является вырожденной.