# Задачи к экзамену по курсу «Математические основы теории прогнозирования» 2010

1. Вывести формулы векторного дифференцирования
$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a},$$
$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 = 2A^T A\boldsymbol{x} - 2A^T\boldsymbol{b},$$
$$\nabla^2_{\boldsymbol{x}} \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 = 2A^T A.$$

2. Найти нормальное псевдорешение для системы линейных уравнений.

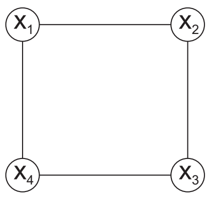
3. Даны $N$ точек в двухмерном пространстве. Найти с помощью метода главных компонент первую главную компоненту и проекцию выборки на одномерное пространство.

4. Дана выборка $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ из некоторого распределения $p(x)$. Требуется оценить по выборке с помощью метода максимального правдоподобия значения параметров этого распределения. Например, у распределения Лапласа вида $p(x) = \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{2b}\right)$ оценить мат.ожидание $\mu$ при известном $b$ или оценить $b$ при известном $\mu$.

5. Дана выборка из $N$ точек в двухмерном пространстве. Первая координата – это $x$, вторая – $t$. С помощью метода наименьших квадратов построить линейную регрессию вида $\hat{t} = kx + b$, т.е. найти коэффициенты $k$ и $b$.

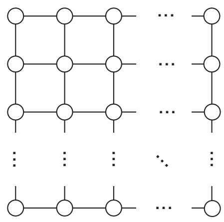
6. Решить задачу условной оптимизации выпуклой функции при выпуклых ограничениях, например
$$-5x^2 + 2xy - 3y^2 \to \max_{x,y},$$
$$x = y - 1.$$

7. Дана марковская сеть вида




с бинарными переменными $x_1, x_2, x_3, x_4$. Для этой модели заданы все значения унарных функций $\theta_1(x_1), \theta_2(x_2), \theta_3(x_3), \theta_4(x_4)$ и бинарных функций $\theta_{12}(x_1, x_2), \theta_{23}(x_2, x_3), \theta_{34}(x_3, x_4), \theta_{41}(x_4, x_1)$. С помощью репараметризации построить граф, минимальный разрез которого соответствует минимуму энергии вида $\sum_{i=1}^4 \theta_i(x_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \theta_{ij}(x_i, x_j)$.

8. Дана марковская сеть с бинарными переменными вида решетка:



Пусть все унарные энергии совпадают для всех вершин $\theta_i(x_i) = \theta(x)$ и равны $\theta(0) = a, \theta(1) = b$. Аналогично все бинарные энергии совпадают между собой $\theta_{ij}(x_i, x_j) = \theta(x, y)$ и равны $\theta(0,0) = c, \theta(0,1) = d, \theta(1,0) = e, \theta(1,1) = f$. Требуется выполнить репараметризацию в этом графе так, чтобы все энергии $\theta_{ij}(0,0) = \theta_{ij}(1,1) = 0$.

9. Дана следующая вероятностная модель:

$$p(X, T|\mu, a_0, b_0) = \prod_{n=1}^{N} p(x_n, t_n|\mu, a_0, b_0) = \prod_{n=1}^{N} p(x_n|t_n, \mu)p(t_n|a_0, b_0),$$
$$p(x_n|t_n, \mu) = \mathcal{N}(x_n|\mu, t_n^{-1}) = \sqrt{\frac{t_n}{2\pi}} \exp\left(-\frac{t_n}{2}(x_n - \mu)^2\right),$$
$$p(t_n|a_0, b_0) = \mathcal{G}(t_n|a_0, b_0) = \frac{b_0^{a_0}}{\Gamma(a_0)} t_n^{a_0 - 1} \exp(-b_0 t_n),\ \mathbb{E}t_n = \frac{a_0}{b_0}.$$

Требуется выписать формулы EM-алгоритма для максимизации правдоподобия

$$p(X|\mu, a_0, b_0) \to \max_{\mu}$$

при фиксированных $a_0, b_0$.

10. Рассматривается вероятностная смесь двух дискретных распределений вида

$$p(x) = \gamma p_1(x) + (1 - \gamma)p_2(x).$$

Величина $x$ может принимать значения (1,2,3). При этом параметры распределений равны:

$$p_1: \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \end{array} \qquad p_2: \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\beta & \beta \end{array}$$

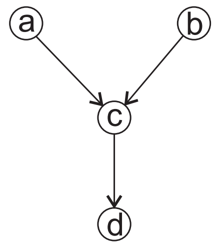
Выборка $X$ состоит из 30 единиц, 20 двоек и 60 троек. Требуется провести первые две итерации EM-алгоритма для восстановления параметров смеси $(\alpha, \beta, \gamma)$ для начального приближения $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0.5$.

11. Пусть имеется три бинарных переменных $a, b, c \in \{0, 1\}$, совместное распределение которых задается следующей таблицей:

| $a$ | $b$ | $c$ | $p(a,b,c)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0.192 |
| 0 | 0 | 1 | 0.144 |
| 0 | 1 | 0 | 0.048 |
| 0 | 1 | 1 | 0.216 |
| 1 | 0 | 0 | 0.192 |
| 1 | 0 | 1 | 0.064 |
| 1 | 1 | 0 | 0.048 |
| 1 | 1 | 1 | 0.096 |

Требуется показать, что переменные $a$ и $b$ не являются независимыми, но при этом являются условно независимыми как при $c = 0$, так и при $c = 1$.

12. Пусть имеется байесовская сеть с графом следующего вида:




Требуется показать, что переменные $a$ и $b$ являются независимыми, но при этом не являются условно независимыми от переменной $d$.

13. Имеется скрытая марковская модель с двумя скрытыми состояниями и бинарными наблюдаемыми переменными. Пусть наблюдаемая последовательность имеет вид $X = (1011001110001\dots)$, т.е. идет группа из $n$ единиц, потом группа из $n$ нулей, потом группа из $n+1$ единиц, $n+1$ нулей и т.д. При этом наблюдаемая последовательность состояний $T = (11112222111122221\dots)$. С помощью метода максимального правдоподобия требуется оценить вектор априорных вероятностей $\boldsymbol{\pi}$ и матрицу перехода $A$, если длина последовательности равна 200.

14. Имеется скрытая марковская модель с двумя скрытыми состояниями. Вектор априорных вероятностей $\boldsymbol{\pi} = (0.5, 0.5)$, матрица перехода $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Наблюдаемая переменная является бинарной, в первом состоянии значение ноль выпадает с вероятностью 0.8, во втором состоянии – с вероятностью 0.2. Требуется с помощью алгоритма Витерби найти наиболее правдоподобную последовательность скрытых состояний для наблюдаемой последовательности $X = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$.

15. Имеется скрытая марковская модель с двумя скрытыми состояниями. Вектор априорных вероятностей $\boldsymbol{\pi} = (0.5, 0.5)$, матрица перехода $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Наблюдаемая переменная является бинарной, в первом состоянии значение ноль выпадает с вероятностью 0.8, во втором состоянии – с вероятностью 0.2. Требуется с помощью алгоритма «вперед-назад» вычислить все маргинальные распределения вида $p(t_n|X)$ для наблюдаемой последовательности $X = (0, 0, 1)$.

16. Рассматривается игра «Морской бой». В квадрате размера $3 \times 3$ возможны две ситуации: один двухпалубный корабль и два двухпалубных корабля. С помощью построения тупикового теста найти минимальное число ходов, необходимое для гарантированного определения того, какая из двух ситуаций имеет место.

17. Найти результирующую ДНФ для системы тестовых уравнений

$$\begin{cases} x_1 \vee x_2 = 1, \\ x_2 \vee x_3 = 1, \\ x_3 \vee x_4 = 1, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} \vee x_n = 1. \end{cases}$$

18. В обучающей таблице класс $K_1$ состоит из всех векторов, принадлежащих шару радиуса 3 с центром в $(0, 0, \dots, 0)$, а класс $K_2$ состоит из всех векторов, принадлежащих шару радиуса 4 с центром в $(1, 1, \dots, 1)$. К какому классу будет отнесен объект $(0, 1, \dots, 0, 1)$ алгоритмом «Кора», если $n$ – четное?

19. В обучающей таблице класс $K_1$ представлен объектами $(0, 0, \dots, 0, 0)$ и $(1, 1, \dots, 1, 1)$, а класс $K_2$ — объектами $(1, 0, 1, 0, \dots)$ и $(0, 1, 0, 1, \dots)$. Тестовый объект имеет вид $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k}, 0, 0, \dots, 0)$. К какому классу будет отнесен этот объект алгоритмом «Кора» при четном и нечетном $n$?

20. Написать формулу для числа голосов в алгоритме вычисления оценок, если функция близости определяется параметрами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, допустимое число невыполняющихся неравенств $q = 3$, а совокупность характеристических векторов опорных множеств образует интервал конъюнкции $x_1 \dots x_r \bar{x}_{r+1} \dots \bar{x}_{r+k}$.

21. В алгоритме вычисления оценок $x_{11} = 1, x_{10} = x_{01} = x_{00} = 0$. Написать формулу для числа голосов, если функция близости определяется параметрами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, допустимое число невыполняющихся неравенств равно $q$, а система опорных множеств состоит из всех подмножеств мощности $2q$.