ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Вероятностное пространство – это тройка (Ω, A, P), где
Ω-пространство элементарных исходов, конечное или бесконечное, которое описывает все возможные исходы эксперимента;
А – σ-алгебра событий, событие есть подмножество Ω, σ-алгебра – это класс, такой что $1.\,\Omega \in A$ $2.\,a \in A \Rightarrow \overline{a} \in A$ 3.для любой счётной последовательности $a_n : \bigcup_n a_n \in A$

Р – вероятность – мера, являющаяся неотрицательной, нормированной 1 и σ-аддитивной

Условной вероятностью А при условии В называется $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$

События А и В называются **независимыми**, если $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Формула полной вероятности $P(A) = \sum_k (P(H_k) * P(A \mid H_k))$ позволяет найти вероятность события, разбив его на части некоторой группой событий (гипотез). Требуется, чтобы все гипотезы были несовместными (не пересекались) и в сумме покрывали полностью событие А.

Формула Байеса $P(H_k \mid A) = \dfrac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{\sum_i P(H_i)P(A \mid H_i)}$ позволяет узнать вероятность гипотезы a posteriori.

ЧАСТЬ II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Случайная величина – измеримая функция $\xi : \Omega \to R$, причём на R задана σ-алгебра, и полный прообраз любого элемента этой σ-алгебры есть событие. Как правило, берётся борелевская σ-алгебра, то есть σ-алгебра, порождённая всеми открытыми интервалами.
Случайные величины ξ и η называются **независимыми**, если $\forall \Delta_1, \Delta_2\ P(\xi \in \Delta_1, \eta \in \Delta_2) = P(\xi \in \Delta_1) * P(\eta \in \Delta_2)$

Распределение (з-н распределения) вероятностей значений с. в. – правило, по которому для любого Борелевского множества ставится в соответствие вероятность, то есть функция B->R такая, что $\forall \Delta \in B : P(\Delta) = P(\omega : \xi(\omega) \in \Delta)$ Чаще всего пользуются **функцией распределения:** $F_\xi(y)$, что $F_\xi(y) = P(\xi \le y)$. Свойства $F_\xi(y)$: она не убывает, односторонне непрерывна, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Случайная величина $F_\xi(x)$ называется **дискретной**, если существует не более чем счётное множество X такое, что P(X)=1. Дискретная случайная величина имеет не более чем счётное число точек роста.
Случайная величина $F_\xi(x)$ называется **непрерывной**, если существует неотрицательная функция $p_\xi(t)$ такая, что $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt$. Функция $p_\xi(t)$ называется плотностью распределения.

Характеристическая функция (преобразование Фурье): $f_\xi(t) = Me^{it\xi}$

Основное свойство характеристической функции: $f_{\xi+\eta}(t) = f_\xi(t) * f_\eta(t)$

Производящая функция: $g_\xi(z) = Mz^\xi$ (для дискретных целочисленных случайных величин)

Преобразование Лапласа – Стилтьеса: $\varphi(s) = Me^{-s\xi}$ (для неотрицательных случайных величин)

Математическое ожидание – показатель центра распределения – $M_\xi = \int\limits_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$

Математическое ожидание для дискретной случайной величины – $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k * p_k$, для непрерывной – $M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x * p_\xi(x)dx$. Если ряд или интеграл не сходятся абсолютно, то говорят, что математического ожидания не существует.

Мода – наиболее часто встречающееся значение случайной величины, **медиана** – такая точка М, что $P(\xi \le M) \ge \frac{1}{2} \cup P(\xi \ge M) \ge \frac{1}{2}$

Дисперсия с. в. – $D[\xi] = Var[\xi] = M[(\xi - M[\xi])^2]$ - показатель разброса значений вокруг центра. **Среднеквадратичное отклонение** – $\sigma = \sqrt{D\xi}$

<u>Основные свойства мат. ожидания и дисперсии:</u>

$M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$

$M(\xi\eta) = M\xi * M\eta, \textit{если } \xi \textit{ и } \eta \textit{ независимы}$

$D(a\xi + b\eta) = a^2 D\xi + b^2 D\eta, \textit{если } \xi \textit{ и } \eta \textit{ независимы}$

$D\xi = M\xi^2 + (M\xi)^2$

k-м моментом случайной величины называется $M\xi^k$, **k-м центральным моментом** – $M(\xi - M\xi)^k$

<u>Виды сходимости случайных величин.</u>

- Сходимость почти наверное: $\xi_n \xrightarrow{\text{почти наверное}} \xi \Leftrightarrow P(\omega : \xi_n(\omega) \to \xi) = 1$
- Сходимость по вероятности: $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon : \lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$
- Сходимость в среднем порядка l: $\xi_n \xrightarrow{l} \xi \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} M|\xi_n - \xi|^l = 0$
- Сходимость по распределению: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ поточечно, и $F_\xi(x)$ непрерывна для $\forall x$
- Слабая сходимость: $\xi_n \xrightarrow{w} \xi \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} M\varphi(\xi_n) = M\varphi(\xi) \ \forall \varphi(x)$ - непрерывной и ограниченной

Взаимосвязь между видами сходимости:

Предельные теоремы:

- **Закон больших чисел**
  Смысл: среднее арифметическое большого количества одинаково распределённых случайных величин перестаёт быть случайной и стремится к постоянной.
  Формулировка: $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} M\xi$
  Замечание: требуя существование и/или ограниченность дисперсии (а также накладывая на нее некие ограничения), можно доказать, что имеет место сходимость почти наверное (усиленный закон больших чисел).
- **Центральная предельная теорема**
  Смысл: Сумма независимых одинаково распределенных случайных величин ведет себя приблизительно как нормально распределенная случайная величина.
  Формулировка: $P\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - M\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}{\sqrt{D\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}}dt \cong N(0,1)$
- **Теорема Пуассона**
  Смысл: Если число испытаний Бернулли очень велико, а вероятность успеха очень мала, причем так, что $np \to 1$, то такая случайная величина имеет распределение, близкое к распределению Пуассона.
  Формулировка: $\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k \cong B(p) \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ np\to\lambda}]{d} Pois(\lambda)$
- **Неравенство Чебышева**
  Смысл: неравенство Чебышева дает оценку для отклонения случайной величины от ее центра.
  Формулировка: $P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}$

ЧАСТЬ III. ПРИМЕРЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

Дискретные случайные величины.

1. **Распределение Бернулли B(p)**
   Смысл: описывает одиночный эксперимент, результатом которого может быть успех либо неудача.
   Распределение, свойства: $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{Vmatrix}; M\xi = p; D\xi = q; g_\xi(z) = q + pz$
2. **Биномиальное распределение Bi(n,p)**
   Смысл: описывает серию последовательных одинаковых испытаний Бернулли
   Распределение, свойства: $\begin{Vmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{Vmatrix}; M\xi = np; D\xi = npq; g_\xi(z) = (1 + p(z-1))^n$
3. **Геометрическое распределение G(p)**
   Смысл: описывает число успехов до первой неудачи (либо наоборот; эти случайные величины отличаются на 1)

Распределение, свойства: $\left\|\begin{matrix} k \\ q*p^k \end{matrix}\right\| (k=0,1,2,...); M\xi = \frac{p}{q}; D\xi = \frac{p}{q^2}; g_\xi(z) = \frac{1-p}{1-pz}$

Примечание: Непрерывный аналог геометрического распределения – экспоненциальное

4. **Равномерное распределение**
   Смысл: является моделью для экспериментов, в которых все исходы равноправны
   Распределение, свойства: $\left\|\begin{matrix} k \\ \frac{1}{n} \end{matrix}\right\| (k=1..n); M\xi = \frac{n+1}{2}; D\xi = \frac{n^2-1}{12}$
5. **Распределение Пуассона**
   Смысл: описывает число событий, произошедших за единицу времени в пуассоновском потоке.
   Распределение, свойства: $\left\|\begin{matrix} k \\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \end{matrix}\right\|; M\xi = D\xi = \lambda; g_\xi(z) = e^{\lambda(z-1)}$
   Примечание: в силу теоремы Пуассона пуассоновское распределение связано с биномиальным.

Непрерывные случайные величины.

1. **Равномерное распределение**
   Смысл: выбор случайной точки на отрезке
   Распределение, свойства: $p_\xi(x) \equiv \frac{1}{b-a}(a<x<b); M\xi = a + \frac{b}{2}; D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$
2. **Экспоненциальное распределение**
   Смысл: описывает время между появлениями двух событий в потоке.
   Распределение, свойства: $\exp(\lambda) = 1 - e^{\lambda x}; M\xi = \frac{1}{\lambda}; D\xi = \frac{1}{\lambda^2}; \varphi(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$
   Примечание: экспоненциальное распределение является непрерывным аналогом геометрического.
3. **Нормальное распределение**
   Смысл: описывает попадание в цель; является предельным распределением сумм случайных величин
   Распределение, свойства:
   $$N(a,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt; M\xi = a; D\xi = \sigma^2; f_\xi(t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$