Глазкова В.
420 гр.

(I.) Предложить неизбыточную кодировку задачи коммивояжёра и оценить по порядку длину входа. +

1. Мн-во всех возможных значений параметров задачи ком.

$\mathcal{D}(ЗК) = \{C, \{d(c_i, c_j) \in \mathbb{Z}_+ \mid c_i, c_j \in C, i<j, i,j=\overline{1,m}\}, B \in \mathbb{Z}_+\}$

$\Sigma = \{0, 1, ,\}$ – алфавит кодировки

кодировка: $\forall I \in ЗК$

$e(I) = d_{12}, d_{13}, \dots, d_{1m}, d_{23}, \dots d_{2m}, \dots, d_{m-1,m}, B$

где d_{ij} и B записаны в двоичном представлении.

Число городов (m) можно не включать в кодировку, т.к. оно однозначно декодируется по числу запятых в кодировке $\left(\frac{m(m-1)}{2} = \text{число\_запятых}\right)$

2. Двоичное представление числа N занимает $\lfloor \log_2 N \rfloor + 1$ битов. Покажем это.

$N = b_n 2^n + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0 \geq 2^n \Rightarrow n \leq \log_2 N \Rightarrow$
$\Rightarrow n+1 \leq \log_2 N + 1 \Rightarrow \text{числ. битов} \leq \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$

$N = b_n 2^n + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0 \leq 2^n + \dots + 2 + 1 = 2^n - 1$ (т.к. $b_i \in \{0,1\}$)

$\Rightarrow N+1 \leq 2^n \Rightarrow n+1 \geq \log_2(N+1) + 1 \geq \lfloor \log_2 N \rfloor + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{число\_битов} \geq \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$

Итак, $\text{число\_битов} = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$.

3. Теперь оценим длину входа ЗК для кодировки $e(I)$

a) мощность мн-ва расстояний между городами $\{d_{ij}\}_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m} = (m-1) + (m-2) + \dots + 1 = \frac{m(m-1)}{2}$

б) длина_входа $\leq$ откуда max?

$$\leq \underbrace{\frac{m(m-1)}{2} \cdot \max_{c_i,c_j \in C} \{\lfloor \log_2 d(c_i,c_j) \rfloor + 1\}}_{\text{число битов для двоичной записи всех расстояний между городами}} + \underbrace{\lfloor \log_2 B \rfloor + 1}_{\text{число битов в двоичн. записи числа } B} + \underbrace{\frac{m(m-1)}{2}}_{\text{число запятых}}$$

Итак,

$$|e(I)| = \frac{m(m-1)}{2} \max_{c_i,c_j \in C} \{\lfloor \log_2 d(c_i,c_j) \rfloor\} + \lfloor \log_2 B \rfloor + m(m-1) + 1$$

$\Rightarrow$ длина входа — полином от m не совсем

4. Данная кодировка неизбыточна, т.к. любая кодировка ЗК должна иметь длину входа $\geq m$ (т.к. m - число городов)

5. Сравнение с оценкой Гэри-Джонсона

$$m + \lceil \log_2 B \rceil + \max_{c_i,c_j \in C} \lceil \log_2 d(c_i,c_j) \rceil$$

$\Rightarrow$ если $\exists$ кодировка с такой оценкой длины входа, то она лучше предложенной.

+ **II** Дать алгоритм распознавания простоты числа; оценить его временную сложность (пусть число задано в двоичном представ-ии)

1. Алгоритм —
пытаемся разделить данное число N на $2, 3, \dots, \lfloor \sqrt{N} \rfloor$
(чётные числа, больше 2, пропускаем);
если N не делится нацело ни на одно из этих чисел, то оно простое
(т.к. если N раскладывается в произведение двух или более множителей, то один из них не превосходит $\sqrt{N}$)

Если при переборе делителей обнаруживается, что N — составное, то одновременно находится и делитель числа N.

2. Оценим временную сложность алгоритма в битовых операциях.
Покажем, что время работы алгоритма экспоненциально зависит от n, где n — число битов в записи числа N
$(n = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1)$

Число необходимых делений $= \frac{\lfloor N \rfloor}{2} = \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{n/2} \right\rfloor =$
$= O(2^{n/2})$

Каждая операция деление — $O(n^2)$ (деление столбиком) удов -5
(вообще существует алгоритм, требующий $O(n \log_2 n \log_2 \log_2 n)$ битовых операций).

Кроме того необходимо одно извлечение корня (число битовых операций $O(n^2)$, т.к. извлечение корня можно свести к последовательности умножений).

и какой тогда будет сложность?

Итак,

$$T_A(n) = \underbrace{\frac{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}{2}}_{O(2^{n/2})} \cdot O(n^2) + O(n^2) = O(n^2 \cdot 2^{\frac{n}{2}})$$

$\Rightarrow$ время экспоненциально зависит от длины записи данного числа.

Глазкова В. 420 гр.

Задача 3. Доказать, что задача „Составные числа" (т.е. задача проверки того, является ли заданное число составным) принадлежит классу NP.

В качестве подсказки того, что N – составное число, можно использовать любой делитель N, строго больший 1 и меньший N.
Тогда для того, чтобы проверить эту подсказку (т.е. для проверки того, действительно ли N – составное число), надо разделить N на эту подсказку (если N-составное, то остаток от деления должен получиться нулевой).

Длина подсказки – полином от длины входа (т.е. время прочтения подсказки полиномиально), и проверить эту подсказку можно за полиномиальное время (т.к. алгоритм деления уголком требует $O(n^2)$ битовых операций, где n – битовая длина делимого).

След-но, задача проверки того, является ли заданное число составным, $\in$ классу NP. док-во см. ниже

Дополнение к задачам 2 и 3

(1) Оценка временной сложности алгоритма деления уголком.

Пусть делимое и делитель заданы в двоичной сист.

$$X = x_m 2^m + x_{m-1} 2^{m-1} + \dots + x_1 2 + x_0 \text{ – делимое}$$

$$Y = y_k \cdot 2^k + y_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + y_1 2 + y_0 \text{ – делитель } (x_i, y_i \in \{0,1\})$$

Пусть $m \geq k$ (если $m < k$, то сразу можно записать ответ – частное $= 0$, остаток $= X$)

Если $m \geq k$, то число шагов при делении уголком двух чисел, записанных в двоичной системе, равно $(m-k)$.

На каждом шаге нам потребуется не более $(k+1)$-ой битовой операции (вычитание), т.к. мы работаем с двоичным представлением чисел.

Итак, общее число битовых операций $\leq (m-k)(k+1)$

Размерностью задачи можно считать
$n \overset{df}{=} \max(m+1, k+1) = m+1$ (битовая длина делимого).

Сл-но, число битовых операций не превосходит n^2, т.е. для числа битовых операций выполнена оценка $O(n^2)$.

Е.г.

$$\begin{array}{r|l} -10010 & 11 \\ \underline{11} & \overline{110} \\ -11 & \\ \underline{11} & \\ -00 & \\ \underline{00} & \\ 0 & \end{array}$$

$m=4, k=1$
число шагов $=3$

② Алгоритм извлечения квадратного корня.

Пусть исх. число задано в двоичной системе
$N = b_{n-1}2^{n-1} + \ldots + b_1 2 + b_0$
(его битовая длина $= n$). Пусть $N \neq 0$ (иначе ответ 0)

1. Разбить число на грани (по две двоичные цифры в каждой), начиная справа (т.е. если n - нечетное, то самая левая грань будет состоять из одной цифры).
Количество граней $(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$ равно количеству цифр результата.

2. Извлечь кв. корень с недостатком из первой (слева) грани. Этот корень — первая цифра результата. Для двоичных чисел $\neq 0$, эта цифра всегда 1.
Возвести эту цифру в квадрат ($1^2 \equiv 1$) и вычесть полученное число у первой грани.

Приписать к найденной разности справа вторую грань (обозначим полученное число через A_0)

3. Удвоить имеющуюся часть результата (т.е. приписать справа ноль) — обозначим полученное число через a_0.

Теперь надо подобрать наибольшую цифру $x_0 \in \{1, 0\}$ такую, что $(2a_0) + x_0 \le A_0$.
Эта цифра x_0 — следующая цифра результата.

4. Повторять (i-ый) шаг, пока не используется последняя грань ($i = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$)

(i-ый шаг)

Вычесть из A_{i-1} число $(2 \cdot a_{i-1} + x_{i-1})$, если $x_{i-1} = 1$, и 0, если $x_{i-1} = 0$.

Приписать к найденной разности справа следующую грань; получится некоторое число A_i.

Удвоив уже имеющуюся часть результата, получим число a_i.

Теперь надо подобрать такую наибольшую цифру $x_i \in \{1, 0\}$, чтобы
$2 \cdot a_i + x_i \le A_i$.

Цифра x_i — следующая цифра результата.

Итак, число шагов алгоритма $\lceil \frac{n}{2} \rceil$;
Каждый шаг требует $O(n)$ битовых операций.

Следовательно, для извлечения квадратного корня из числа, битовая длина которого равна n, необходимо $O(n^2)$ битовых операций.

Ex
$$
\begin{array}{r}
110001 \\
-\ 1 \\
\hline
1000 \\
-\ 101 \\
\hline
01101 \\
-\ 1101 \\
\hline
0000
\end{array}
$$

ответ 111

+

Глазкова В.
420 гр.

Задача 4.

Завершить док-во NP-полноты задачи 3-ВЫП (рассмотреть случаи $k=1,2$)

Покажем, что NP-полная задача ВЫП сводится к задаче 3-ВЫП.

Пусть исх. КНФ имеет вид $\underset{j=1}{\overset{N}{\&}} f^j(z^j)$.

Покажем, что произвольную (дизъюнктивную функцию) $f^j(z^j)$ (k) переменных ($k=1,2$) можно представить в виде конъюнкции дизъюнкт-х ф-ций от трёх переменных (за счёт введения дополнительных переменных u^j).

Обозначим ч/з y_i переменную z_i^j или $\overline{z}_i^j$ в завис-ти от того, как i-я компонента z^j входит в рассматриваемую дизъюнкт. ф-ю. Тогда рассм. ДФ можно записать как $y_1 \vee \ldots \vee y_k$ ($k=1,2$).

1) случай $k=1$

ДНФ y_1 можно заменить на $КНФ_3$

$$(y_1 \vee u_1^j \vee u_2^j) \& (y_1 \vee u_1^j \vee \overline{u}_2^j) \& (y_1 \vee \overline{u}_1^j \vee u_2^j) \& (y_1 \vee \overline{u}_1^j \vee \overline{u}_2^j)$$

2) случай $k=2$

ДНФ $y_1 \vee y_2$ можно заменить на $КНФ_3$

$$(y_1 \vee y_2 \vee u^j) \& (y_1 \vee y_2 \vee \overline{u}^j)$$

В 2-х случаях имеет место равенство (в ост. $(k>3)$)

При этой замене имеет место следующее.

Если $\forall z$ $y_1 \vee \ldots \vee y_k = 0$ ($k=1,2$), то и $КНФ_3 = 0$ для любых z и u.

Если $\exists z : y_1 \vee \ldots \vee y_k = 1$ ($k=1,2$), то $\exists z, u : КНФ_3 = 1$.

Этого достаточно для сохранения ответа на вопрос о существовании выполняющего набора.

Т.о., $КНФ_3$ выполнима $\Leftrightarrow$ исх. КНФ выполнима.

$\Rightarrow$ наше преобразование является сведением задачи ВЫП к задаче 3-ВЫП.

Глазкова В.
420ф

(5) Представить каноническую задачу ЛП в форме основной задачи ЛП.

Каноническая задача: $\max\limits_{Ax=b,\, x\geqslant\bar{0}} \langle c,x\rangle$

Основная задача: $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^{n'}:\, A'x\leq b'} \langle c,x\rangle$

Пусть A имеет размерность $m\times n$, $A' - m'\times n'$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix}$$

Осуществим сведение канонич. задачи к основной.

$$Ax=b \iff \begin{cases} Ax\leq b \\ Ax\geqslant b\end{cases} \iff \begin{cases} Ax\leq b \\ -Ax\leq -b\end{cases}$$

$$x\geqslant\bar{0} \iff (-E)x\leq\bar{0}$$

Тогда канонич. задачу $\max\limits_{Ax=b,\, x\geqslant\bar{0}} \langle c,x\rangle$ можно представить в форме основной задачи $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^{n'}:\, A'x\leq b'} \langle c,x\rangle$, где

$$A'=\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -E\end{pmatrix}_{m'\times n'},\quad b'=\begin{pmatrix} b \\ -b \\ \bar{0}\end{pmatrix}_{m'\times 1},\quad -E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1\end{pmatrix}_{n\times n},\quad \begin{matrix} m'=2m+n \\ n'=n\end{matrix}$$

Т.е. симплекс-таблица для осн. задачи $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^{n}:\, A'x\leq b'} \langle c,x\rangle$, соотв. канонич. задаче $\max\limits_{Ax=b,\, x\geqslant\bar{0}} \langle c,x\rangle$, будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \\
-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} & -b_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} & -b_m \\
-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\
c_1 & c_2 & \dots & c_n & 0
\end{pmatrix}$$

Глазкова В.
420гр

⑥ Оценить по порядку битовую длину L входа оз ЛП (док-ть, что $L \geq O(\ln(n\Delta))$, где $\Delta = \Delta(\mathcal{D}) = \max|\det \mathcal{D}'|$.)
$\mathcal{D}'$-квадр. подматр. матрицы $\mathcal{D}$

Входом оз ЛП $\max\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ Ax\leq b}} \langle c,x\rangle$ является матрица

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ c_1 & \cdots & c_n & 0 \end{pmatrix}$$

Оценим длину L двоичной кодировки матрицы $\mathcal{D}$ (надо закодировать элементы матрицы $\mathcal{D}$, разделители и порядок (n), чтобы можно было однозначно восстановить положение элементов матрицы).

1) Битовая длина числа $N>0$ равна $\lceil \log_2(N+1) \rceil$ (было доказано в задаче ①)

$\Rightarrow$ для двоичной кодировки любого элемента d матрицы $\mathcal{D}$ требуется $\geq \lceil \log_2(|d|+1) \rceil$ битов (т.к. элементами матрицы $\mathcal{D}$ могут быть знаковые числа)

$$\Rightarrow L \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lceil \log_2(|a_{ij}|+1) \rceil + \sum_{i=1}^{m} \lceil \log_2(|b_i|+1) \rceil +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \lceil \log_2(|c_j|+1) \rceil + \lceil \log_2(n+1) \rceil$$

$\Rightarrow$ {учитывая, что $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab$} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow L \geq \log_2 \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+1) + \log_2 \prod_{i=1}^{m}(|b_i|+1) + \log_2 \prod_{j=1}^{n}(|c_j|+1) + \log_2 n \geq$$
$$\geq \log_2 \left[\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+1) \cdot \prod_{i=1}^{m}(|b_i|+1) \cdot \prod_{j=1}^{n}(|c_j|+1)\right] + \log_2 n = \log_2 \prod_{i=1}^{m+1}\prod_{j=1}^{n+1}(|d_{ij}|+1) + \log_2 n$$

Если докажем, что $\Delta(\mathcal{D}) \leq \prod_{i=1}^{m+1}\prod_{j=1}^{n+1}(|d_{ij}|+1)$, где d_{ij} – элемент матрицы $\mathcal{D}$,

то будет выполнено

$$L \geq \log_2 \Delta + \log_2 n = \log_2(n\Delta) = O(\ln(n\Delta)) \quad \text{ч. и т.д.} \qquad (*)$$

2) Теперь осталось доказать, что $\Delta(\mathcal{D}) \le \prod_{i=1}^{m+1}\prod_{j=1}^{n+1}(|d_{ij}|+1)$

Пусть $\mathcal{D}'$ – квадратная подматрица матрицы $\mathcal{D}$, на которой достигается максимум модуля определителя (пусть её размерность $k\times k$)

$\Rightarrow \Delta(\mathcal{D}) = \Delta(\mathcal{D}') = |\det \mathcal{D}'|$

$$\det \mathcal{D}' \overset{df}{=} \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k) - \\ \text{перестановка} \\ \text{чисел } 1,\dots,k}} (-1)^{\sigma(\alpha)} d'_{1\alpha_1}\cdot\ldots\cdot d'_{k\alpha_k},$$ где d'_{ij} – элемент матр. $\mathcal{D}'$

$$\Rightarrow |\det \mathcal{D}'| \le \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)} |d'_{1\alpha_1}\cdot\ldots\cdot d'_{k\alpha_k}| \le \prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|d'_{ij}| \le$$

т.к. если раскрыть скобки в $\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|d'_{ij}|$, то получим $\sum_\alpha |d'_{1\alpha_1}\cdot\ldots\cdot d'_{k\alpha_k}| \oplus$ положительная сумма

$$\le \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{k}(|d'_{ij}|+1) \le \prod_{i=1}^{m+1}\prod_{j=1}^{n+1}(|d_{ij}|+1)$$

т.к. $|d_{ij}|\ge 0$

Т.о., и оценка (*) будет выполнена.

Глазкова В.
420 гр.

(7) Доказать, что двойственная задача к двойственной задаче ЛП совпадает с прямой задачей ЛП.

Прямая задача ЛП в осн. форме:

(1) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n:\,Ax\le b} \langle c,x\rangle \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},\ c=(c_1,\dots,c_n),\ x=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

Двойств. задача к задаче (1) – задача на min в канонической форме

(2) $\min\limits_{\substack{y\in\mathbb{R}^m:\,yA=c,\\ y\ge \bar{0}}} \langle b,y\rangle \qquad y=(y_1,\dots,y_m)$

1) Двойств. задачу (2) в канонич. форме представим в форме озЛП

Заметим, что

$$\min\langle b,y\rangle = -\max(-\langle b,y\rangle) = -\max\langle -b,y\rangle$$

$$yA=c \Leftrightarrow \begin{cases} yA\le c\\ yA\ge c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yA\le c\\ -yA\le -c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^T y^T\le c^T\\ -A^T y^T\le -c^T\end{cases}$$

$$y\ge\bar{0} \Leftrightarrow (-E)y\le\bar{0}$$

$\Rightarrow$ задачу (2) можно предст. в форме озЛП

(3) $-\max\limits_{y\in\mathbb{R}^m:\,A'y^T\le b'} \langle -b^T,y^T\rangle$, где $A'=\begin{pmatrix} A^T\\ -A^T\\ -E\end{pmatrix}_{m'\times n'},\ b'=\begin{pmatrix} c^T\\ -c^T\\ \bar{0}\end{pmatrix}_{m'\times 1},\ -E=\begin{pmatrix} -1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & -1\end{pmatrix}_{m\times m}$

$m'=2n+m$
$n'=m$

2) Построим двойств. задачу к полученной задаче (3):

(4) $-\min\limits_{\substack{z\in\mathbb{R}^{2n+m}:\,zA'=-b^T\\ z\ge\bar{0}}} \langle b',z\rangle$

3) Наконец, докажем, что эта двойств. задача (4) эквивалентна задаче (1): $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n: Ax\le b} \langle c, x\rangle$

Заметим, что
$$-\min \langle b', z\rangle = \max(-\langle b', z\rangle) = \max\langle -b', z\rangle, \text{ где } -b' = \begin{pmatrix} -c^T \\ c^T \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

Пусть $z = (z_1, z_2, z_3)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, $z_3 \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ задача (4) эквив-на следующей

$$\max_{\substack{z\in\mathbb{R}^{2n+m}: zA' = -b^T \\ z \geqslant \bar{0}}} \langle -b', z\rangle = \max_{\substack{(z_1 - z_2)A^T - z_3 E = -b^T \\ z_i \geqslant \bar{0},\ i=1,2,3}} (\langle c, z_2\rangle - \langle c, z_1\rangle) =$$

(5) $$= \max_{\substack{A(z_1 - z_2)^T - z_3^T = -b \\ z_i \geqslant \bar{0},\ i=1,2,3}} \langle c, z_2 - z_1\rangle$$

Покажем, что задачи (5) и (1) эквивалентны.

① Для любого x: $Ax \le b$ (т.е. $x \in$ допуст. мн-ву для (1)) представим $z = (z_1, z_2, z_3)$: $z_1^T = \dfrac{|x| - x}{2}$, $z_2^T = \dfrac{|x| + x}{2}$,

$z_3^T = b - Ax$, где $|x| \overset{df}{=} \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ а) ур-е $A(z_1 - z_2)^T - z_3^T = -b$ обращается в тождество, т.к. $A(-x) - b + Ax \equiv -b$

б) $z_i \geqslant 0$ $\forall i = \overline{1,3}$

в) $\langle c, x\rangle = \langle c, z_2 - z_1\rangle$

$\Rightarrow$ исследуемые ф-ции совпадают

② Для любого $z = (z_1, z_2, z_3)$ из допустимого множества для (5) предст. $x = z_2^T - z_1^T$

$\Rightarrow$ а) $Ax = A(z_2^T - z_1^T) \underset{\uparrow}{\le} A(z_2^T - z_1^T) + z_3^T = b$

(т.к. $z_3 \geqslant \bar{0}$)

б) $\langle c, x\rangle = \langle c, z_2 - z_1\rangle \Rightarrow$ исслед-е функции совпадают

Итак, задачи (1) и (5) эквивалентны
$\Rightarrow$ двойств. зад. к двойств. зад. ЛП совпад. с прямой задачей ЛП

(8) Доказать, что задача ЛП эквивалентна решению системы линейных уравнений

$Pz = q,\ z \geqslant \bar{0}$ (4)

Любую задачу ЛП можно представить в форме ОЗЛП.

ОЗЛП $\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b} \langle c, x\rangle$ эквивалентна двойств. задаче (1)

$\min\limits_{\substack{y \in \mathbb{R}^m: yA = c,\\ y \geqslant \bar{0}}} \langle b, y\rangle$, и обе они эквивалентны системе (2)

линейных неравенств относит. неизвестных $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$:

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ \langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle \\ yA = c \\ y \geqslant \bar{0} \end{cases} \quad (3)$$

Перейдём от сист. ЛН (3) к ограничениям (4) в канонич. форме, т.е. покажем, что сист. (3) эквив. сист. (4).

Сист. (3) мож. быть записана в виде

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ \langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle \\ A^T y^T = c^T \\ y \geqslant \bar{0} \end{cases} \quad (5)$$

Представим x в виде $x = x_1 - x_2$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow$ (5) запишется в виде

$$\begin{cases} A(x_1 - x_2) + Et = b \\ \langle c, x_1 - x_2\rangle - \langle b, y\rangle = 0 \\ A^T y^T = c^T \\ y \geqslant \bar{0},\ y \in \mathbb{R}^m \\ x_i \geqslant \bar{0},\ i = 1,2 \\ t \geqslant \bar{0},\ t \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (6)$$

Представим z в виде $z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2m}$ $\Rightarrow$ сист. (6) эквивалентна системе

$Pz = q,\ z \geqslant \bar{0}$, где

$$P = \begin{pmatrix} A & -A & E & \bar{0} \\ c & -c & \bar{0} & -b \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & A^T \end{pmatrix}_{(m+n+1)\times(2n+2m)}, \quad q = \begin{pmatrix} b \\ \bar{0} \\ c^T \end{pmatrix}_{(m+n+1)\times 1}$$

Глазкова В.
420 гр.

9. Пусть $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Док-ть, что если $G^0(x) \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{G^0(x)} = G(x)$, $x \in X$ и, сл-но, X - регулярно в точке x,
где $G(x) \equiv \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \operatorname{grad} g_j(x), y \rangle \leq 0 \quad \forall j \in J(x) \}$
$G^0(x) \equiv \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \operatorname{grad} g_j(x), y \rangle < 0 \quad \forall j \in J(x) \}$

① Покажем, что если $G^0(x) \neq \emptyset$, то $\overline{G^0(x)} = G(x)$

1) Т.к. $G^0(x) \neq \emptyset$, то для алгебраической суммы G и G^0 вып.:
$\underbrace{G + G^0 \subseteq G^0}$ (т.к. если $\langle \operatorname{grad} g_j(x), y_1 \rangle \leq 0$, а $\langle \operatorname{grad} g_j(x), y_2 \rangle < 0$, то $\langle \operatorname{grad} g_j(x), y_1 + y_2 \rangle < 0$)
$\Downarrow$
$\overline{G + G^0} \subseteq \overline{G^0} \Rightarrow$ {из линейности оператора замыкания и замкнутости G} $\Rightarrow \boxed{G + \overline{G^0} \subseteq \overline{G^0}}$ (1)

2) Т.к. $G^0(x) \neq \emptyset$, то $\exists y \in \mathbb{R}^n : \langle \operatorname{grad} g_j(x), y \rangle < 0 \quad \forall j \in J(x)$
$\Rightarrow \forall \alpha > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) вектор $z \equiv \alpha y \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет усл-ю
$\langle \operatorname{grad} g_j(x), z \rangle < 0 \quad \forall j \in J(x)$
$\Rightarrow \forall \alpha > 0 \quad z = \alpha y \in G^0(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ нулевой вектор попадёт в замыкание G^0 (т.к. замык-е открытого луча $(0, +\infty)$ является луч $[0, +\infty)$)
$\Rightarrow \bar{0} \in \overline{G^0} \Rightarrow \boxed{G + \overline{G^0} \supseteq G}$ (2)

Из (1) и (2) $\Rightarrow G \subseteq G + \overline{G^0} \subseteq \overline{G^0} \Rightarrow \boxed{G \subseteq \overline{G^0}}$
Учитывая, что $\overline{G^0} \subseteq G$ (это следует из опр-ий мн-в G и G^0)
$\Rightarrow \overline{G^0} = G$

② Док., что если $\overline{G^0(x)} = G(x)$, то мн-во X регулярно в т. x.
Если $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, то $G^0(x) \subset K(X, x)$ (док-но в утв.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ {учит-я, что $K(X,x)$ - замкн. мн-во} $\Rightarrow \overline{G^0(x)} \subseteq K(X, x)$
Сл-но, если $\overline{G^0(x)} = G(x) \Rightarrow G(x) \subseteq K(X, x) \overset{df}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow$ мн-во X регулярно в т. x, ч. и т.д.

10. Получить теорему двойственности как следствие теоремы Куна-Таккера (для случая озЛП)

Теор. (двойственности ЛП)
Задача ЛП разрешима $\Leftrightarrow$ когда разрешима двойственная к ней, и, в случае разрешимости, значение этих задач совпадают ($d^* = d^{**}$).

озЛП:
$$d^* = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ Ax\le b}} \langle c,x\rangle$$

Двойственная к озЛП:
$$d^{**} = \min_{\substack{y\in\mathbb{R}^m:\\ yA=c,\ y\ge\bar{0}}} \langle b,y\rangle$$

Теор. (Куна-Таккера)

(1) Если в задаче МП $\min\limits_{\substack{x\in X,\\ X\ne\varnothing}} f(x)$,

(2) $X \equiv \{x\in\mathbb{R}^n \mid g_i(x)\le 0\ \ \forall i=\overline{1,m}\}\subset\mathbb{R}^n$

функции $f, g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ выпуклы на X и мн-во X регулярно в любой точке, то

x^* – точка min в (1),(2) $\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}^m, \lambda\ge\bar{0}:$ $\operatorname{grad}_x L(x^*,\lambda)=0$ и $\langle\lambda, g(x^*)\rangle = 0$,

где $L(x,\lambda) = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)}_{\langle\lambda,g(x)\rangle}$

Общая идея доказательства.

x^* – точка $\min\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ Ax\le b}}(-\langle c,x\rangle) \equiv -\max\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ Ax\le b}}\langle c,x\rangle = -d^*$

$\xRightarrow[\text{(необх-ть)}]{\text{теор К.-Т.}}$ ① Выявление св-в min, соотв-го d^*: $\exists\lambda\in\mathbb{R}^m, \lambda\ge\bar{0}:$ $\operatorname{grad}_x L(x^*,\lambda)=0$, $\langle\lambda,g(x^*)\rangle=0$

② $\Downarrow$ $\langle c,x^*\rangle = \langle b,y^*\rangle$

Выявление св-в min, соотв. d^{**}: $\exists\lambda'\in\mathbb{R}^{m+2n}, \lambda'\ge\bar{0}:$ $\operatorname{grad}_y L(y^*,\lambda')=0$, $\langle\lambda',g(y^*)\rangle=0$

$\xLeftarrow[\text{(дост-ть)}]{\text{теор. К.-Т.}}$ ③ y^* – точка $\min\limits_{\substack{y\in\mathbb{R}^m:\\ yA=c,\ y\ge\bar{0}}}\langle b,y\rangle = d^{**}$

① Запишем теор. Куна-Таккера для случая озЛП.
Положим $f(x) = -\langle c,x\rangle$,
$g_i(x)$ – i-ая строка матрицы $Ax-b$, т.е.
$g_i(x) = \langle A_i,x\rangle - b_i \le 0$, где A_i – i-ая строка матрицы A
$\Rightarrow f, g_i\in C^1(\mathbb{R}^n)$ выпуклы на $X = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle A_i,x\rangle - b_i\le 0\ \ \forall i=\overline{1,m}\}$
Мн-во X регулярно в $\forall$ точке, т.к. линейные ограничения всегда регулярны.
Сл-но, применима теор. Куна-Таккера, т.е. выполнено

x^* – точка $\min\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ Ax\le b}}(-\langle c,x\rangle) = -\max\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ Ax\le b}}\langle c,x\rangle \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}^m, \lambda\ge\bar{0}:$ $\operatorname{grad}_x L(x^*,\lambda)=0$ и $\langle\lambda,g(x^*)\rangle=0$,

Распишем эти соотношения.

$$L(x,\lambda) = -\langle c,x\rangle + \sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(x) = -\langle c,x\rangle + \sum_{i=1}^m \lambda_i(\langle A_i,x\rangle - b_i) =$$

$$= -<c,x> + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i <A_i, x> - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i \overset{*}{=} -<c,x> + <\lambda A, x> - <b,\lambda> =$$

$$= <\lambda A - c, x> - <b,\lambda>$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}_x L(x^*,\lambda) = \operatorname{grad}_x \left(<\lambda A - c, x> - <b,\lambda>\right) = \lambda A - c = 0 \Rightarrow \lambda A = c$$

$$<\lambda, g(x^*)> = -<b,\lambda> + <\lambda A, x^*> = 0 \Rightarrow <\lambda A, x^*> = <b,\lambda>$$

Итак, x^* – точка $\max\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ Ax\le b}} <c,x> \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}^m, \lambda\geqslant\overline{0}: \lambda A = c$ и $<\lambda A, x^*> = <b,\lambda>$

<u>Док-во</u> перехода $*$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i <A_i, x> = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i a_{ij}x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}x_j(\lambda A)_j = <\lambda A, x>$$

③ Запишем теорему К.-Т. для <u>двойственной</u> задачи к озЛП $\min\limits_{\substack{y\in\mathbb{R}^m:\\ yA=c,\, y\geqslant\overline{0}}} <b,y>$

$$\begin{cases} yA = c \\ y\geqslant\overline{0}\end{cases} \iff \begin{cases} yA - c \le 0 \\ -yA + c \le 0 \\ -y \le 0\end{cases}$$

Положим $f(y) = <b,y>$

$g_i(y) = y_i, \ i=\overline{1,m}$

$g_{m+i}(y) = <y, A^i> - c_i, \ i=\overline{1,n}$

$g_{m+n+i}(y) = -<y,A^i> + c_i, \ i=\overline{1,n}$, где A^i – i-ый столбец матр. A

y^* – точка $\min\limits_{\substack{y\in\mathbb{R}^m:\\ yA=c,\, y\geqslant\overline{0}}} <b,y> \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}^{m+2n}, \lambda\geqslant 0: \operatorname{grad}_y L(y^*,\lambda) = 0$ и $<\lambda', g(y^*)> = 0$

$$L(y,\lambda') = <b,y> + \sum_{i=1}^{m+2n}\lambda_i g_i(y) = <b,y> - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i + \sum_{i=1}^{n}\left(<y,A^i> - c_i\right)\lambda_{i+m} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(-<y,A^i> + c_i\right)\lambda_{i+m+n} \ominus \{\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),\ \lambda_1\in\mathbb{R}^m,\ \lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}^n\} \ominus$$

$$\ominus <b,y> - <\lambda_1,y> + <A\lambda_2, y> - <c,\lambda_2> - <A\lambda_3, y> + <c,\lambda_3> =$$

$$= <c, \lambda_3 - \lambda_2> + <b - \lambda_1 - A(\lambda_3-\lambda_2), y>$$

$$\operatorname{grad}_y L(y^*,\lambda) = b - \lambda_1 - A(\lambda_3 - \lambda_2) = 0$$

$$<\lambda, g(y^*)> = <c, \lambda_3-\lambda_2> + <-\lambda_1 - A(\lambda_3-\lambda_2), y^*> = 0 \iff <c,\lambda_3-\lambda_2> = <\lambda_1 + A(\lambda_3-\lambda_2), y^*>$$

Итак, y^* — точка $\min\limits_{\substack{y\in\mathbb{R}^m:\\ yA=c,\, y\geq\bar{0}}} \langle b,y\rangle \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \exists \lambda_1\in\mathbb{R}^m;\ \lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}^n,\ \lambda_i\geq\bar{0},\ i=\overline{1,3}:\ b-\lambda_1-A(\lambda_3-\lambda_2)=0$ и $\langle c,\lambda_3-\lambda_2\rangle=\langle\lambda_1+A(\lambda_3-\lambda_2),y^*\rangle \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \exists\lambda_1\in\mathbb{R}^m,\ \bar{\lambda}\in\mathbb{R}^n,\ \lambda_1\geq\bar{0}:\ -b+\lambda_1+A\bar{\lambda}=0$ и

$$\langle c,\bar{\lambda}\rangle=\langle\lambda_1+A\bar{\lambda},y^*\rangle$$

(2) Наконец, покажем, что если $\exists x^*\in\mathbb{R}^n:\ Ax^*\leq b$ и $\exists\lambda\in\mathbb{R}^m,\ \lambda\geq\bar{0}:\ \lambda A=c,\ \langle\lambda A,x^*\rangle=\langle b,\lambda\rangle$, то $\exists y^*\in\mathbb{R}^m$ и $\exists\lambda_1\in\mathbb{R}^m,\ \bar{\lambda}\in\mathbb{R}^n,\ \lambda_1\geq\bar{0}:\ -b+\lambda_1+A\bar{\lambda}=0$ и

$$\langle c,\bar{\lambda}\rangle=\langle\lambda_1+A\bar{\lambda},y^*\rangle$$

Переобозначим $\lambda\equiv y^*$.

Имеем: $\exists x^*:\ Ax^*\leq b$ и $\exists y^*\in\mathbb{R}^m,\ y^*\geq\bar{0}:\ \boxed{\begin{array}{l} y^*A=c,\\ \langle y^*A,x^*\rangle=\langle b,y^*\rangle\end{array}}$ (3)

Из того, что $\exists x^*:\ Ax^*\leq b \Rightarrow \exists\bar{\lambda}\in\mathbb{R}^n,\ \bar{\lambda}\equiv x^*:\ A\bar{\lambda}-b\leq 0$

$\Rightarrow \exists\lambda_1\in\mathbb{R}^m,\ \lambda_1\geq\bar{0}:\ A\bar{\lambda}-b+\lambda_1=0 \Rightarrow b=\lambda_1+A\bar{\lambda}$

(4) Из равенств (3) $\Rightarrow \exists y^*\in\mathbb{R}^m,\ y^*\geq\bar{0}:\ \langle c,\underset{\bar{\lambda}}{\underset{\parallel}{x^*}}\rangle=\langle b,y^*\rangle$

Итак, получили, что $\exists y^*\in\mathbb{R}^m,\ y^*\geq\bar{0}$ и $\exists\lambda_1\in\mathbb{R}^m,\ \lambda_1\geq\bar{0}\ \ \exists\bar{\lambda}\in\mathbb{R}^n:\ b=\lambda_1+A\bar{\lambda}$ и $\langle c,\bar{\lambda}\rangle=\langle b,y^*\rangle$

Таким образом, доказано, что если задача ЛП разрешима, то разрешима двойственная к ней, и в случае разрешимости значения этих задач совпадают ($(4)\Rightarrow d^*=\langle c,x^*\rangle=\langle b,y^*\rangle=d^{**}$), ч. и т.д.

(т.к. двойств-я задача к двойств. задаче ЛП совпадает с прямой задачей ЛП)