Методы оптимизации

ТЕТРАДЬ

Лекция 1

06.09

ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА.

(о достижении верхней грани)

пусть $J(u)$ – ф-ия, к-рую надо минимиз.

U – мн-во, на к-ром минимиз. $J(u)$

I задача

$$J(u) \to \inf_{u \in U}$$

обозн. $J_* = \inf\limits_{u \in U} J(u)$

$U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$

II задача

$$g(u) \to \sup, \quad u \in U$$

$g^* = \sup g(u)$

$U^* = \{u \in U : g(u) = g^*\}$

2-ая задача сводится к первой, если взять $J(u) = -g(u)$

Опр: посл-ть $\{u_k\} \in U$ называется минимизирующей, если

$$\lim_{k \to \infty} J(u_k) = J_*$$

Классическая теорема Вейерштрасса:

$\boxed{\text{Т}}$ пусть U – замкн. и огр. мн-во E^n, $J(u) \in C(U)$

тогда: 1) $J_* > -\infty$ | $J^* < +\infty$

2) $U_* \neq \emptyset$ | $U^* \neq \emptyset$

3) $\forall$ минимизирующая посл-ть сходится ко мн-ву U_*

Зам: в бесконечномерном случае теорема не верна, т.к. в нем нет теоремы Больцано-Вейерштрасса

Рассмотрим условия теоремы Вейерштр.:

I. Непрерывность: $|J(u) - J(u_0)| < \varepsilon \quad \forall u \in U: |u-u_0|<\delta$

т.е.

полунепрерывность сверху (для задач максимизации)

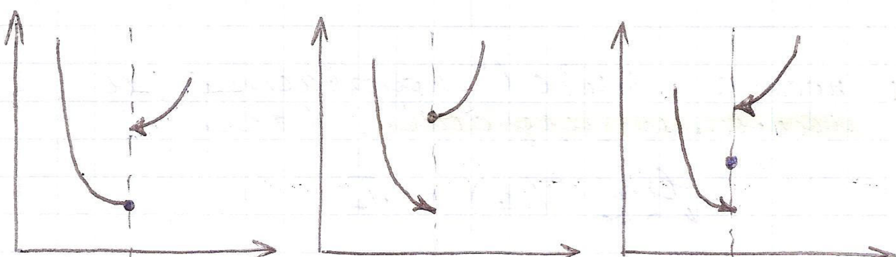
$$\underbrace{J(u_0) - \varepsilon < J(u)}_{\text{полунепрерывность снизу (для задач минимизации)}} < J(u_0) + \varepsilon \quad \forall u \in U, \ |u-u_0|<\delta$$

замена ↓

Опр: $J(u)$ полунепрерывна снизу в т. u_0, если

$$\forall \{u_k\} \in U, \quad u_k \xrightarrow{\rho} u_0 \Rightarrow \varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u_0)$$

($U \subset M$, M — метрич. с метрикой $\rho(u,v)$)



полунепрерывна снизу | полунепр. сверху | не явл. ни полунепр. справа, ни слева

п/н снизу + п/н сверху = непрерывность

II. Замкнутость и огр-ть U

огр-ть $\Rightarrow$ по т. Больцано-Вейерштр. $\exists \{u_k\}$ - сх.

замкн. $\Rightarrow \{u_k\} \to u_0 \in U$

рассм. гильб. про-во H

рассм. ОНС $\{e_k\}$: $\|e_k\| = 1$, $(e_i, e_k) = 0$ $\forall i \neq k$

$\Rightarrow \|e_i - e_k\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_k\|^2 + 2\langle e_i, e_k\rangle = 2$

$\Rightarrow$ посл-ть $\{e_k\}$ не явл. фунд. $\Rightarrow$ нет ни одной сх-ся подпосл-ти в метрике H

$\Rightarrow$ далее для шара $U = \{u \in H : \|u\| \leq 1\}$ - замкн, огр. т. Больцано-Вейерштрасса не выполняется (берем $\{e_k\}$)

$\downarrow$ замена

<u>Опр:</u> $U \subseteq M$ компактно в M, если

$\forall \{u_k\} \in U \Rightarrow \exists \{u_{k_n}\} \xrightarrow{\rho} u_0 \in U$

(т.е. требуем $\exists$-я сх-ся подпосл-ти по опр.)
(вып. т. Вейерштрасса)

<u>Метрический</u> <u>вариант</u> <u>т. Вейерштрасса</u> (см. книгу 1 стр. 82)

$\boxed{Т}$ пусть M - метрическое про-во,
$U \subseteq M$,
U - компактно в M
$J(u)$ - полунепр. снизу на U и конечна

тогда 1) $J_* > -\infty$
2) $U_* \neq \varnothing$
3) $\forall$ минимиз. посл-ть сх. по метрике ρ к мн-ву U_*

<u>Опр:</u> $\{u_k\} \to U_*$, если $\rho(u_k, U_*) = \inf\limits_{v \in U_*} \rho(u_k, v) \xrightarrow{k \to \infty} 0$

Док-во: 1) пусть $\{u_k\}$ - некоторая минимизирующая послть задачи $J(u) \to \inf\limits_{u \in U}$

(почему минимиз. посл-ть $\exists$?

возможны 2 случая:

1) $J_* = -\infty$ $\Rightarrow \exists \{u_k\} \in U,\ J(u_k) \to -\infty$ по опр. inf

$\Rightarrow$ эта посл-ть и есть минимиз.

2) $J_* > -\infty$ $\Rightarrow \exists \{u_k\} \in U:\ J_* \le J(u_k) \le J_* + \underbrace{\frac{1}{k}}_{\varepsilon}$

$\Rightarrow \{u_k\}$ - минимиз посл.)

U - компактно, $\{u_k\} \in U \Rightarrow$ по опр. компактности

$\Rightarrow \exists \{u_{k_r}\} \xrightarrow{\rho} u_* \in U$

$$\Rightarrow J_* \overset{\text{т.к. inf}}{\le} J(u_*) \overset{\text{н/н в т. } u_*}{\le} \varliminf_{r \to \infty} J(u_{k_r}) = \lim_{k \to \infty} J(u_k) \overset{\{u_k\}\text{ - минимиз}}{=} J_*$$

$\Rightarrow \quad J(u_*) = J_*$

$\Rightarrow \quad J_* > -\infty,\ U_* \ne \emptyset\ (u_* \in U_*)$

и $\forall$ пред. точка $\forall$ миним. посл-ти $\in U_*$

2) Докажем, что $\forall$ минимиз. посл-ть сх. к U_*:

пусть $\{u_k\}$ - $\forall$ мин. посл-ть

рассм. $a_k = \rho(u_k, U_*) = \inf\limits_{v \in U_*} \rho(u_k, v) \quad k = 1, 2, \dots$

докажем, что $\{a_k\}$ сх. и сх. к 0:

$$0 \overset{\text{т.к. } a\text{ - расст.}}{\le} a_{min} = \varliminf_{k \to \infty} \underbrace{\rho(u_k, U_*)}_{a_k} \le \varlimsup_{k \to \infty} \underbrace{\rho(u_k, U_*)}_{a_k} = a_{max}$$

из опр. $\overline{\lim} \Rightarrow \exists \{a_{k_m}\} = \{\rho(u_{k_m}, U_*)\}:\ \lim\limits_{m \to \infty} a_{k_m} = a_{max}$

т.к. ~~...~~ $\{u_{k_m}\} \to u_* \in U_*$ (см. 1))

$$\underbrace{\rho(u_{k_m}, U_*)}_{\substack{\downarrow m\to\infty \\ a_{max}}} \overset{\text{по опр.}}{\leq} \rho(u_{k_m}, u_*) \to 0$$

$$a_{max} = 0, \quad \rho(u_{k_m}, U_*) \to 0$$

Теорема д-на

Зам: условие компактности мн-ва U - очень жёсткое (даже шар в гильб. пр-ве не явл. комп.) $\Rightarrow$ ~~пр~~ применение теоремы очень ограничено

Слабый вариант т. Вейерштрасса (книга 2, стр. 49-50)

(для шара применима)

Опр: ф-я $J(u)$ на $U \subset H$ называется слабо полунепрерывной снизу, если:

$$\forall \{u_k\} \in U, \ \{u_k\} \xrightarrow{сл} u_0 \Rightarrow \varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u_0)$$

Опр: мн-во $U \subseteq H$ наз. слабо компактным, если

$$\forall \{u_k\} \in U \Rightarrow \exists \{u_{k_n}\} \xrightarrow{сл} u_0 \in U$$

Опр: посл-ть $\{u_k\} \in H$ слабо сходится к мн-ву $U \subset H$, если $\{u_k\}$ имеет хотя бы 1 сл. сх-ся подпосл-ть, и $\forall \{u_{k_m}\} \xrightarrow{сл} v \Rightarrow v \in U$

$\boxed{\text{Т}}$ пусть $U \in H$, U - слабо компактно в H, $J(u)$ - слабо полунепр. снизу на U

тогда
1) $J_* > -\infty$
2) $U_* \neq \varnothing$
3) $\forall$ мин. посл-ть слабо сх. к U_*

Док-во: пусть $\{u_k\}$ — $\forall$ минимиз. посл-ть: $u_k \in U$, $\lim J(u_k) = J_*$

т.к. U — сл. комп. $\Rightarrow \exists \{u_{k_r}\} \xrightarrow{сл.} u_* \in U$

$$\Rightarrow J_* \overset{опр. \inf}{\leq} J(u_*) \overset{опр. сл. п/н}{\leq} \underline{\lim}_{r \to \infty} J(u_{k_r}) = \lim_{k \to \infty} J(u_k) = J_*$$

$\Rightarrow J(u_*) = J_* > -\infty$

$U_* \neq \varnothing$

п. 3) док-ся аналогично пред теореме

чтд

Рассм. ф-ю $g(u) = \|u\|_H^2$

берем $\forall u \in H$, $\forall \{u_k\} \xrightarrow{сл} u$

покажем, что $\underline{\lim}\, g(u_k) \geq g(u)$:

$$g(u_k) = \|u_k\|_H^2 = \|u_k - u + u\| =$$

$$= \underbrace{\|u_k - u\|^2}_{\geq 0} + 2(u, u_k - u) + \|u\|^2 \geq$$

$$\geq 2(u, u_k - u) + \|u\|^2 \quad k = 1, 2, \ldots$$

пред переход:

$$u_k \xrightarrow{сл} u \Rightarrow \lim_{k \to \infty} (c, u_k) = (c, u) \quad \forall c \in H$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} (u, u_k - u) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\lim}_{k \to \infty} g(u_k) \geq \|u\|^2 = g(u)$$

чтд

Пусть $\{e_k\}$ – ОНС

рассм. $u_k = u + e_k$

Покажем, что $\{e_k\} \xrightarrow{сл} 0$:

рассм. $c_k = (c, e_k)_H$ – коэф. Фурье

Нерво Бесселя: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|c\| < \infty$ (верно $\forall$ ОНС)

$\Rightarrow c_k \to 0$

$\Rightarrow c_k = (c, e_k)_H \to 0 = (c, 0)$

$\Downarrow$

$g(u_k) = \|u + e_k\|^2 = \|u\|^2 + 2\overset{\to 0}{(u, e_k)} + \overset{=1}{\|e_k\|^2}$

$\Rightarrow g(u_k) \geq \|u\|^2 + 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} g(u_k) \geq \|u\|^2 + 1 > \|u\|^2 = g(u)$

$\Downarrow$

$g = \|u\|_H^2$ – слабо полунепр. снизу / св~~ерху~~

Лекция 2

$\boxed{12.09}$

Покажем, что шар – слабо комп. мн-во:

$U = \{u \in H: \|u\| \leq R\}$

будем использовать слабый вариант теоремы Вейерштрасса:

если $\{u_k\}: \|u_k\| \leq const \ \forall k$,
то $\exists \{u_{k_i}\} \xrightarrow{сл} u \in H$.

$\Downarrow$

из V можно выделить подпосл-ть

$\{u_{k_r}\} \xrightarrow{сл} u \in H$

Рассм. $g(u) = \|u\|^2$: $\underline{\lim}_{n\to\infty} g(u_{k_r}) \geq g(u)$

$g(u_{k_r}) \leq R^2 \Rightarrow g(u) \leq R^2 \Rightarrow \|u\| \leq R \Rightarrow u \in V$

$\Rightarrow$ шар — сл. комп. мн-во

Рассм. сферу:

$S = \{u \in H : \|u\| = R\}$ — замкн. и огр.

в конечномерном пр-ве S — комп.

в бесконечномерном нет даже слабой компактности

контрпример: $\{e_k\}$ $(R=1)$, $\{e_k\} \xrightarrow{сл} 0$, но $0 \notin S$

Опр: мн-во V называется выпуклым, если

$\forall u, v \in V \Rightarrow \underset{\text{отрезок}}{[u, v]} = \{w = \alpha u + (1-\alpha)v,\ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset V$

$\boxed{T}$ если V — вып, замкн, огр. из H, то V — слабо комп.

(без док-ва) см. книга 2 стр. 51

$g(u) = -\|u\|^2$ - непр. по $\|\cdot\|$, слабо п/н. сверху (~~снизу~~)

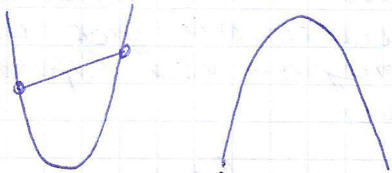
$\hookrightarrow$ (иначе $\underline{\lim}(-\|u_k\|^2) \geq -\|u\|^2$ т.е. $\overline{\lim} \|u_k\|^2 \leq \|u\|^2$ что не верно)

Опр: ф-я $J(u)$ наз. выпуклой на мн-ве U, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha) v) \le \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) \quad \forall u, v \in U, \ \forall \alpha \in [0,1]$$

(опр. имеет смысл только для вып. U)

т.е. хорда выше графика



выпуклая (вниз) | вогнутая (выпуклая вверх)

$\boxed{T}$ если ф-я полунепр. снизу по $\|\cdot\|$ и вып., то она слабо полунепр. снизу

$\boxed{T}$ пусть $U \subset H$ - вып. мн-во
тогда выпуклая ф-я $J(u)$ сл. п/н. снизу на U
$\iff$ $J(u)$ полунепр. снизу на U
(см. кн. 2, стр. 52)

Выпуклый вариант т. Вейерштрасса

$\boxed{T}$ пусть $U \subset H$ - вып., замкн. ($\|\cdot\|$), огр. ($\|\cdot\|$),
$J(u)$ - полунепр. снизу, вып. на U

тогда
1) $J_* > -\infty$
2) $U_* \neq \emptyset$
3) $\forall$ миним. посл-ть $\{u_n\} \xrightarrow{сл} U_*$

Док-во: U - вып. замкн. $\Rightarrow$ слабо комп.
$J(u) \to$ сл. п/н снизу

$\Rightarrow$ применен слабый вариант т. Вейерштрасса

чтд

Все предыдущее верно для любых рефлексивных банаховых пр-в ($B^{**}=B$)

$\forall$ гильб. пр-во рефлексивно т.к. $H^*=H$

L_p, $1<p<\infty$ — рефлексивно.

> Я люблю обе стороны математики: чистую — как возвышенный уход от реальности, прикладную — как страстное стремление к поэзии.
>
> Томас Саати.

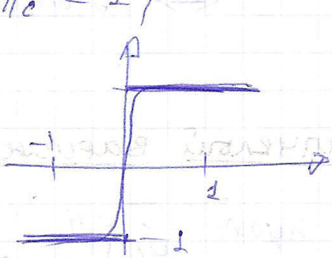
Пример. (вып. т. Вейерштрасса не имеет места)

$$J(u)=\int_{-1}^{0} u(t)\,dt-\int_{0}^{1} u(t)\,dt \longrightarrow \inf_{u\in V}$$

$$V=\{u=u(t)\in C[-1,1]:\ \|u\|_C\le 1\}$$

ф-я линейна $\Rightarrow$ непр.

$J_* = -2$



нижняя грань не достигается (все условия теоремы вып., кроме рефлексивности)

Пример: (иллюстрация к метрическому варианту т. Вейерштрасса)

$$U = \{ u = u(t) \in C[a,b] : |u(t) - u(\tau)| \le L|t-\tau|, \; |u(a)| \le M \quad \forall t,\tau \in [a,b] \}$$

это компактное мн-во в пр-ве C

имеет место

ТЕОРЕМА АРЦЕЛА: если $\exists$ мн-во равностепенно непр. и равномерно огр. ф-ций, то $\exists$ подпосл-ть равн. сх-ся ф-ций в C

равностеп.непр.: $|u(t+\Delta t) - u(t)| \le L|\Delta t| \le \varepsilon \Rightarrow |\Delta t| \le \frac{\varepsilon}{L} \le \delta$

равном. огр.: $|u(t)| \le \underbrace{|u(t) - u(a)|}_{\le L(t-a) \le L(b-a)} + \underbrace{|u(a)|}_{\le M} \le$

$$\le C = L(b-a) + M.$$

Проверим, что предельная ф-я $\in U$:

$\forall \{u_k\} \in U \Rightarrow \exists \{u_{k_r}\} : \{u_{k_r}\} \xrightarrow{\|\cdot\|_C} u(t)$

$|u_{k_r}(t) - u_{k_r}(\tau)| \le L|t-\tau|$

$\downarrow r \to \infty$

$u(t) - u(\tau) \le L|t-\tau|$

$|u_{k_r}(a)| \le M \longrightarrow |u(a)| \le M$

$\Downarrow$

компактность

Теорема Вейерштрасса для квадратичной ~~фун~~ функции (функционала)

Рассм. квадратичную ф-цию:

$$J(u) = \|Au-b\|_F^2, \quad u \in U, \quad A: \overset{\text{лин. непр.}}{\mathcal{L}}(H \to F), \quad b \in F$$
$$U \subset H; \quad H, F - \text{гильб.}$$

Покажем, что $J(u)$ слабо полунепр. снизу:

Возьмем $\forall u \in H$ и $\forall \{u_k\} \xrightarrow{\text{сл } H} u$

Покажем, что $\{Au_k\} \xrightarrow{\text{сл } H} Au$:

$$\forall c \in F \Rightarrow (Au_k, c)_F = (u_k, A^*c)_H \xrightarrow[u_k \xrightarrow{\text{сл } H} u]{k \to \infty} (u, A^*c)_H = (c, Au)_F$$

$$\Rightarrow Au_k \xrightarrow{\text{сл } H} Au \Rightarrow \{Au_k - b\} \xrightarrow{\text{сл } H} Au - b$$

т.к. ф-я $g(f) = \|f\|_F^2$ - слабо полунепр. снизу

$$\Rightarrow \varliminf_{k\to\infty} J(u_k) = \varliminf_{k\to\infty} \|Au_k - b\|_F^2 \overset{\text{сл. п/н + сл. сх-ть}}{\geq} \|Au-b\|_F^2 = J(u)$$

Рассм. задачу минимизации: $J(u) = \|Au-b\|_F^2 \to \inf$,

$\boxed{\text{Т}}$ если U - вып., замкн, огр. мн-во, то

1) $J_* > -\infty$
2) $U_* \neq \varnothing$
3) $\forall$ миним. посл-ть $\xrightarrow{\text{сл}} u_k$

Док-во: U - слабо компактно $\Rightarrow$ из слабого варианта т. Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса для терминального функционала

Рассм. задачу:

$$\mathcal{Y}(u) = |x(T,u) - b|^2_{E^n} \to \inf,$$

где $x = x(t) = x(t;u) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, $t_0 \le t \le T$ — решение сис-мы

$$\begin{cases} \overset{n}{\dot{x}}(t) = \overset{n\times n}{A}(t)\overset{n}{x}(t) + \overset{n\times r}{B}(t)\overset{r}{u}(t), & t_0 \le t \le T, \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

$u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)) \in U \subset L_2^r[t_0, T]$

$a_{ij}(t), b_{ij}(t) \in L_\infty[t_0, T]$

геометрич. смысл: среди всех управлений $u \in U$ ищется такое, для кот-ого правый конец $x(T,u)$ траектории был бы как можно ближе к заданной точке b.

$\mathcal{Y}(u)$ - терминальная ф-я

Покажем, что эту задачу можно представить в виде предыдущ.:

введём оп-р $Au = x(T;u)$, $A \in \mathcal{L}(H \to F)$

$$(u,v)_{L_2^r} = \int_{t_0}^{T} \underbrace{\sum_{i=1}^{r} u^i(t)\, v^i(t)}_{(u(t),\, v(t))_{E^r}} dt$$

$$\|u\|_{L_2^r} = \sqrt{\int_{t_0}^{T} |u(t)|^2_{E^r}\, dt}$$

L_2^r - полное гильб. пр-во.

Лекция 3

20.09

$$\mathcal{Y}(u) = |x(T,u) - b|^2_{E^n} \to \inf \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \overset{n\times n}{A(t)}\overset{n}{x} + \overset{n\times r}{B(t)}\overset{r}{u}(t), & t_0 \le t \le T \qquad (2) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$u \in U \subseteq L_2^r[t_0, T] = H, \quad F = E^n$$

$$\langle u, v \rangle_{L_2^r} = \int \qquad - ?$$

$$\mathcal{Y}(u) = \|Au - b\|^2_F, \quad A \in \mathcal{L}(H \to F), \quad u \in U \subset H$$

$$Au = x(T,u)$$

Опр: решением задачи (2), соотв. управл. ф-ия u

1) $x(t,u)$ – непр.

2)

Лекция 3

20.09

будет ли $A \in \mathcal{L}(H \to F)$? $\quad H = L_2^2[t_0,T]$, $F = E^n$

Надо обобщить понятие решения!

Опр: решением задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u(t), & t_0 \le t \le T \\ x(t_0) = 0, \end{cases}$$

соответствующим управлению $u \in L_2^2[t_0,T]$ называется ф-я, к-рая

1) $x(t,u)$ непр.
2) $$\underbrace{x(t,u) = \int_{t_0}^{t} \big(A(\tau)x(\tau,u) + B(\tau)u(\tau)\big)d\tau}_{\text{ИУ Вольтерр. II рода}} \qquad (4)$$

абс. непр. ф-ции почти всюду имеют производную и почти всюду эта производная равна подынтегр. ф-ции

теорема $\exists$ док-ся с помощью принципа сжимающих отображ.

$A(t), B(t)$ – кус-непр. $\Rightarrow$ решение задачи $\exists!$

$\Rightarrow$ каждому управлению u соотв. ед. траектория
$\Rightarrow$ оп-р определен.

Докажем его лин. и непр.

Утв: $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v, \quad \forall u, v \in \mathcal{U}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Док-во: из ед-ти решения $\Rightarrow$

$$\underbrace{x(T, \alpha u + \beta v)}_{\substack{\text{траектория, отвеч.} \\ \alpha u + \beta v}} = \underbrace{\alpha x(t,u)}_{\substack{\text{траек., отвеч.} \\ u}} + \underbrace{\beta x(t,v)}_{\text{отвеч } v}$$

т.к.
$\Rightarrow$ **A – линейный**

Покажем, что A - огр.: ($\xrightarrow{H,F\text{-нилоб}}$ A-непр.)

$$|x(t,u)| \le \left|\int_{t_0}^{t} A(\tau)x(\tau,u) + B(\tau)u(\tau)\,d\tau\right| \le$$

$$\le \|A(t)\|_C \int_{t_0}^{t} |x(\tau,u)|\,d\tau + \|B(t)\|_C \int_{t_0}^{T} |u(\tau)|\,d\tau$$

(в силу $|\int| < \int||$ и взяли $\int$ по большему отр. и $|A|, |B|$ взяли так)

Предп, что $A(t)$, $B(t)$ - кус.-непр. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |A(t)|_C = \sup_{t_0 \le t \le T} |A(t)| \text{ - конечная вел-на}$$

Верна лемма (нерво Гронуолла):

если $\varphi(t)$, $b(t)$ - неотриц. и непр. на $t_0 \le t \le T$,

$a = const \ge 0$,

$$\varphi(t) \le a \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau + b(t), \quad t_0 \le t \le T$$

тогда

$$0 \le \varphi(t) \le a \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{a(t-\tau)}\,d\tau + b(t), \quad t_0 \le t \le T$$

Если $b(t) \equiv const = b \ge 0$

$$\Rightarrow \varphi(t) \le b e^{a(t-t_0)}, \quad t_0 \le t \le T$$

Если $\varphi(t) \le a \int_{t}^{T} \varphi(\tau)\,d\tau + b(t)$,

то $\varphi(t) \le a \int_{t}^{T} b(\tau) e^{a(\tau-t)}\,d\tau + b(t)$

Положим в этой лемме

$$\varphi(t) = |x(t,u)|, \quad a = \|A\|_C, \quad b = \|B\|_C \int_{t_0}^{T} |u(\tau)|\,d\tau$$

$$\Rightarrow \underset{\|x(\cdot,u)\|_C}{\overset{\|}{|x(t,u)|}} \le \left(\|B\|_C \int_{t_0}^{T} |u(\tau)|\,d\tau\right) e^{\|A\|_C (T-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T]$$

это сильное нерво, т.к. сильная метрика C оценивается слабой метрикой L_2^2

(нерво Коши-Буняк. $\Rightarrow$

$$|x(t,u)|_C \le \underbrace{\left(e^{\|A\|_C (T-t_0)} \|B\|_C \sqrt{T-t_0}\right)}_{const = C_0} \sqrt{\int_{t_0}^{T} |u(t)|^2 dt}$$

$$\Rightarrow \underset{Au}{\overset{\|}{\|x(\cdot,u)\|_C}} \le C_0 \|u\|_{L_2^2[t_0,T]} \Big)$$

$\Rightarrow A$ - лин. огр. $\Rightarrow$ непр. оп-р.

$\Rightarrow$ задачу можно записать в виде:

$$\mathcal{J}(u) = \|Au - b\|_F^2 \longrightarrow \inf.$$

$\Rightarrow$ если U - сл. комп. в $L_2^2[t_0,T] \Rightarrow$ задача имеет хотя бы 1 реш

<u>Пример 1</u> шар в L_2^2:

$$\mathcal{U}_1 = \{ u = u(t) \in L_2^2[t_0,T] : \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L_2^2} \le R \}$$

это мн-во вып. замкн, огр. $\Rightarrow$ слабокомп.

Пример 2:

$$U_2 = \{ u = \underset{\{u^1(t), \dots, u^r(t)\}}{\underset{\parallel}{u^r(t)}} \in L_2^r[t_0, T] : \alpha_i(t) \le u^i(t) \le \beta_i(t),\ i = 1 \dots r \}$$

где i - координата,

$\alpha_i(t), \beta_i(t) \in L_2[t_0, T]$ - заранние, конкретные функц.

(на экзамене: $\alpha_i(t) = -1$, $\beta_i(t) = -1 \Rightarrow |u| \le 1$)

Выпуклость U_2:

рассм. управления $u(t), v(t) \in U_2$.

$$+\ \begin{array}{ll|l} \alpha_i \le u^i(t) \le \beta_i & & \times\alpha \\ \alpha_i \le v^i(t) \le \beta_i & i = 1, \dots, n & \times(1-\alpha) \end{array}$$

$$\alpha_i \le \alpha u^i + (1-\alpha) v^i \le \beta_i \quad i = 1 \dots n$$

$$\Rightarrow (\alpha u^i + (1-\alpha) v^i) \in U_2 \text{, чтд.}$$

Замкнутость:

рассм. посл-ть $\{u_k\} \in U$, $u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L_2^r}} u$

$\Rightarrow$ надо д-ть, что $u \in U$

$\forall u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L_2^r}} u \Rightarrow \exists\, u_{k_l}(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} u(t)$

(это верно даже для посл-тей, сх-ся по мере, не только в L_2^r)

$$\alpha_i(t) \overset{\text{п.в.}}{\le} u_{k_l}(t) \overset{\text{п.в.}}{\le} \beta_i(t)$$

$$\downarrow \text{п.в.}$$

$$\alpha_i(t) \le u(t) \le \beta_i(t) \Rightarrow u(t) \in U_2$$

Ограниченность:

$$|u^i(t)| < \sup_{0 \le t \le T} \{ |\alpha_i(t)|, |\beta_i(t)| \} \in L_2[t_0, T]$$

$\Rightarrow \|u^i\|^2_{L_2} \le const \Rightarrow \|u\|^2_{L_2} \le const$

$\Rightarrow$ U_2 слабо компактно.

Будем рассм. задачу с U_1 или U_2
$\Rightarrow$ нижняя грань достигается.

Обычно: $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), & t_0 \le t \le T \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Задача делится на 2 части:

$$x(t,u) = x_1(t,u) + x_2(t)$$

x_1 удовл.: $\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax_1 + Bu & (f=0) \\ x_1(t_0) = 0 \end{cases}$

x_2 удовл.: $\begin{cases} \dot{x}_2 = Ax_2 + f(t) & (u=0) \\ x_2(t_0) = x_0 \end{cases}$ ← не зависит от u.

$\Downarrow$

$Au = x_1(t,u)$

ф-л $J(u) = |x_1(\tau,u) + x_2(\tau) - b|^2 = |x_1(\tau,u) - b_1|^2$,
$b_1 = b - x_2(\tau)$

<u>Теорема</u> <u>Вейерштрасса</u> для <u>интегрального</u> <u>ф-ла</u>.

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} |x(t,u) - b(t)|^2 dt \longrightarrow \inf \quad (1)$$

где $b(t) \in L_2^n[t_0,T]$ – задана, а $x(t,u)$ – решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \overset{n\times n}{A(t)}\overset{n}{x} + \overset{n\times r}{B(t)}\overset{r}{u(t)} \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$u = u(t) \in U \subseteq L_2^r[t_0,T] = H$,
$F = L_2^n[t_0,T]$

введем оп-р

$$Au = x(t,u) = x(\cdot,u)$$

линейность док-ся аналогично пред.

ограниченность: (т.е. $\|Au\|_{L_2^n} \le C\|u\|_{L_2^r}$)

справедлива оценка:

$$|x(\cdot,u)|_{L_2^n[t_0,T]} \le C\|u\|_{L_2^r[t_0,T]}$$

$$\int_{t_0}^{T} |\underset{x(t,u)}{Au}|^2 dt \le \int_{t_0}^{T} \|x(\cdot,u)\|_C \, dt = |T-t_0|\cdot\|x\|_C \le$$

$$\le \underbrace{(T-t_0)\cdot C}_{C_2}\cdot\|u\|_{L_2^r}$$

$$\Rightarrow \quad Au = x(t,u) = x(\cdot,u) \in \mathcal{L}(H\to F)$$

Теорема Вейерштрасса:

если мн-во U замкн, огр., вып.
$\Rightarrow$ $J(u)$ достигает inf ..

Зам: если x — решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + f \\ x(t) = x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ разбиваем анал. на сумму

„Над урматфизом размышляя,
Я сделал вывод, он таков:
Прощай вино в начале мая,
А в октябре прощай любовь"

27.09

Лекция 4

Теорема Вейерштрасса для задачи о нагреве стержня

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^l |y(T,x;u) - b(x)|^2 dx \to \inf$$

y – решение ур-я теплопров.:

$$\begin{cases} y_t = y_{xx}, & (t,x) \in (0,T)\times(0,l) \\ y_x\big|_{x=0} = 0 & (\text{теплоизолированный}) \\ y_x\big|_{x=l} = u(t) - y\big|_{x=l} & (\text{теплообмен}) \\ y\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$u = u(t) \in L^2(0,T), \quad \alpha \overset{\text{п.в.}}{\le} u(t) \overset{\text{п.в.}}{\le} \beta$

подгоним задачу к привычной схеме:

$\mathcal{I}(u) = \|Au - b\|^2$, где $A \in \overset{\text{лин.непр.}}{\mathcal{L}}(H \to F)$, H, F – гильб. пр-ва

здесь $Au = y(T;x;u)$, $\quad A: H = L^2(0,T) \to F = L^2[0,l]$

A – линейный т.к. задача линейна по y

докажем, что A – огр., т.е. $\|Au\|_F \le c\|u\|_H$:

пока будем считать, что решение классич. $\Rightarrow$ можно делать, что угодно

$\Rightarrow \int(\text{ур-е} * y)$

$$\Rightarrow \iint\limits_Q y_t\, y\, dt\, dx = \iint\limits_Q y_{xx}\, y\, dt\, dx$$

Заметим, что

$$\iint\limits_Q y_t\, y\, dt\, dx = \int_0^\ell\int_0^T \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(y^2)\, dt\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\ell y^2\Big|_{t=0}^{T} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\ell y^2\Big|_{t=T} dx - \frac{1}{2}\int_0^\ell \underbrace{y^2\Big|_{t=0}}_{0\ \text{(нач. усл.)}} dx = \frac{1}{2}\int_0^\ell y^2\Big|_{t=T} dx$$

Преобразуем П.Ч: интегр. по частям по x:

$$\int_0^T\int_0^\ell y_{xx}\, y\, dt\, dx = \int_0^T \left(y_x y\Big|_{x=0}^{\ell} - \int_0^\ell y_x^2\, dx\right) dt =$$

$$= \int_0^T (u-y)y\Big|_{x=\ell} dt - \int_0^T \underbrace{y_x}_{0} y\Big|_{x=0} dt - \int_0^T\int_0^\ell y_x^2\, dx\, dt$$

$$= \int_0^T u y\Big|_{x=\ell} dt - \int_0^T y^2\Big|_{x=\ell} dt - \iint\limits_Q y_x^2\, dx\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\ell y^2(T,x;u)\, dx}_{\|Au\|_F^2} + \overbrace{\iint\limits_Q y_x^2\, dx\, dt}^{\geq 0} + \overbrace{\int_0^T y^2\Big|_{x=\ell} dt}^{\geq 0} = \int_0^T u(t)\, y(t,\ell,u)\, dt \leq$$

$\leq$ {исп. нер-во $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$}

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\, dt}_{\|u\|_H^2} + \frac{1}{2}\int_0^T y^2(t,\ell,u)\, dt$$

приводя ~~слагаемые~~ и учитывая положительность слагаемых в П.Ч, получим оценку:

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell y^2(T,x;u)\, dx \leq \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\, dt, \quad \text{т.е. } \|Au\|_F^2 \leq \|u\|_H^2$$

$$C = 1 \Rightarrow \|A\| \leq 1.$$

23 ~~ггг~~

$\Rightarrow$ A - мон. огр. $\Rightarrow$ непр. $\Rightarrow$ подгоняется под нашу теорию.

$\Rightarrow$ для ф-ла $\mathcal{J}$ все усл. слабой т. Вейерштр. вып.

у нас $\quad V = \{ u(t) \in L_2[0,t] : \alpha \overset{п.в.}{\leq} u(t) \overset{п.в.}{\leq} \beta \}$

вып. замкн. огр. $\Rightarrow$ компактное

(док-ся как в прошлый раз для V_2)

$\Rightarrow$ т. Вейерштрасса действует.

все выкладки проделаны, как будто $\exists$ классич. решение (это так, если управление $u(t)$ — „хорошее", (см. Тихонов, Самарский))

т. к. „хорошее" управление образует плотное мн-во в L_2 $\Rightarrow$ в оценке $\|Au\|^2 \leq \|u\|^2$ можно совершить пред. переход

(в силу плотности для „плохого" управления $\exists \{u_N\} : \|u - u_N\|_{L_2} \to 0$.)

это был пример исп. т. Вейерштрасса для ур-я теплопров.

Можно построить аналогичный и для ур-я колебаний

темп. — распределенный парр.

Дифференцирование.

пусть X, Y – нормированные пр-ва

имеется отображение $F: X \to Y$

F определено в окр. т. x: $O_\varepsilon(x) = \{z \in X : \|z - x\| < \varepsilon\}$

для ед-ти оп-ра дифф-ния (можно шагать в ∀ сторону).

Опр: отобр. F дифф-мо в т. x, если $\exists$ оп-р $L = L(x) \in \mathcal{L}(X \to Y)$: приращение отобр. F представимо в виде:

(1) $$\underbrace{F(x+h)}_{\in O_\varepsilon(x)} - F(x) = \underbrace{\overset{\text{знач. оп-ра } L(x) \text{ на эл-те } h}{L(x)h}}_{\text{производная Фреше (сильная произв.)}} + \alpha(h, x), \qquad \frac{\|\alpha(h,x)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0$$

$\forall h: (x+h) \in O_\varepsilon(x)$ $\qquad L(x) \overset{def}{=} F'(x)$

Ед-ть оп-ра дифф-ния:

пусть L_1, L_2 порождаются (1)

$\Rightarrow (L_1(x) - L_2(x))h = \bar{o}(\|h\|) \quad \forall h: (x+h) \in O_\varepsilon(x)$

фикс. th, пусть th: $x + th \in O_\varepsilon(x) \quad \forall t, |t| \le t_0 < \varepsilon$

$\Rightarrow [(L_1(x) - L_2(x))h]t = \bar{o}(t\|h\|) = \bar{o}(t) \quad \Big| : t (>0)$

$\Rightarrow (L_1(x) - L_2(x))h = \dfrac{\bar{o}(t)}{t} \to 0$

$\Rightarrow$ т.к. п.ч. не зависит от $t \Rightarrow L_1(x)h = L_2(x)h \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow \underline{L_1 = L_2}$

Применим это определение к нашему ф-лу
$J(u)$, $u \in B$ - банахово пр-во
$$F = J: \ B = X \to Y = E^1 \text{ (числа)}$$

$L(x) = F'(x) \in \mathcal{L}(B \to E^1) = B^*$ (сопряж. пр-во - пр-во лин. непр. ф-лов)

Пусть $J(u)$ определена в $O_\varepsilon(u) = \{v \in B: \|v-u\|_B < \varepsilon\}$

$\Rightarrow$ **Опр:** ф-я $J(\cdot)$ диф-ма в т. u, если её приращение представимо в виде:
$$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle + \alpha(h, u)$$
где $J'(u) \in B^*$ - производная Фреше
$\langle J'(u), h \rangle$ - значение лин. непр. ф-ла $J'(u)$ на эл-те h
$$\frac{|\alpha(h,u)|}{\|h\|_B} \to 0 \text{ при } \|h\|_B \to 0$$

Определим 2-ую производную:
$$J'(u): X = B \to Y = B^* \quad (\text{лин. ф-я по } h)$$
$$J'(u+h) - J'(u) = L(u)h + \bar{o}(\|h\|)$$
$$J''(u) = \mathcal{L}(X \to Y) = \mathcal{L}(B \to B^*)$$

Случай гильб. пр-ва: $B = H$

H^* по т. Рисса $\forall f \in H^* \ \exists \eta \in H: f(x) = (f, x) = (\eta, x)_H$
т.е. каждому ф-лу сопост. ~~элем~~ $\eta \in H \Rightarrow H = H^*$

$\Rightarrow$ в этом сл. в определении $\langle J'(u), h \rangle = \langle J'(u), h \rangle_H$ - настоящее скалярное произведение

n-мерный случай: $B = H = E^n$

$J(u) = J(u^1, \dots, u^n)$

$J'(u) = \left(\frac{\partial J(u)}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial J(u)}{\partial u^n}\right)$ — (вектор) (напр. наиб. возраст. ф-ции) градиент.

$J'(u) \in E^n \quad (\underset{\text{векторы строки}}{(E^n)^*} = \underset{\text{векторы столбцы}}{E^n})$

$J''(u) = \left\{\frac{\partial J(u)}{\partial u^i \partial u^j}\right\}_{i,j=1}^{n}$ (матрица)

$\Rightarrow$ ф-ла Тейлора до 2 порядка:

$$J(u+h) - J(u) = \underset{\text{обычное скал. произв. в } E^n}{\langle J'(u), h \rangle_{E^n}} + \frac{1}{2} \underset{\text{квадратичная форма}}{\langle J''(u)h, h \rangle_{E^n}} + \bar{o}(\|h\|^2_{E^n})$$

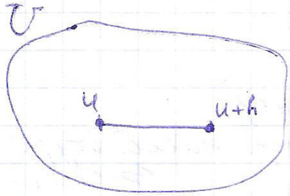
Д/З: д-ть, что $J(u) = \sqrt{|xy|}$ $(u = (x, y))$ в т. $u = 0$ имеет частные производные, но не диф-ма

Лекция 5

$\boxed{04.10}$

$$J(u+h) - J(u) = \langle \underset{\substack{B^* \\ H}}{J'(u)}, h \rangle + \frac{1}{2} \langle \underset{\substack{\mathcal{L}(B \to B^*) \\ \in \mathcal{L}(H \to H)}}{J''(u)} h, h \rangle + \bar{o}(\|h\|^2)$$

Формулы конечных приращений



берем $u \in U$, $(u+h) \in U$: чтобы весь отрезок $\subset U$

$\Downarrow$

можно ввести ф-ю

$$f(t) = \mathcal{J}(u+th), \quad 0 \le t \le 1.$$

научимся диф-ть $f(t)$ по t

Утв: 1) если $\mathcal{J}$ имеет первую произв., то f —"—, —"—, причем

$$f'(t) = \langle \mathcal{J}'(u+th), h \rangle$$

2) если $\mathcal{J}$ имеет 2-ую произв, то

$$\exists\, f''(t) = \langle \underbrace{\mathcal{J}''(u+th)\underset{H}{h}}_{H}, \underset{H}{h} \rangle$$

(как степенная ф-я)

Док-во: фикс. u, h

$$f(t+\Delta t) - f(t) = \mathcal{J}(u + (t+\Delta t)h) - \mathcal{J}(u+th) =$$

$= \{$в определении в кач. u берем $u+th\} =$

$= \mathcal{J}((u+th) + \Delta t h) - \mathcal{J}(u+th) = \{$ф-ла Тейлора$\} =$

$$= \langle \mathcal{J}'(u+th), \Delta t h \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{J}''(u+th)\Delta t h; \Delta t h \rangle + o(\|\Delta t\|^2 \|h\|^2) =$$

$$= \underbrace{\langle \mathcal{J}'(u+th), h \rangle}_{f'(t)} \Delta t + \frac{1}{2}\underbrace{\langle \mathcal{J}''(u+th)h, u \rangle}_{f''(t)} \Delta t^2 + o((\Delta t)^2)$$

чтд

Пользуясь этими ф-лами, можно получить ф-лы конечного приращения:

$$J(u+h) - J(u) = f(1) - f(0) = f'(\theta)\cdot(1-0) \ (=)$$
$$= \int_0^1 f'(t)\,dt \ (==)$$

$$(=) \ \langle J'(u+\theta h), h \rangle$$

$$(==) \ \int_0^1 \langle J'(u+th), h \rangle \, dt$$

$$f'(1) - f'(0) = \langle J'(u+h), h \rangle - \langle J'(h), h \rangle$$
$$f''(\theta) \quad = \quad \langle J''(u+\theta h)h, h \rangle$$
$$\int_0^1 f''(\theta)\,d\theta = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, h \rangle \, dt$$

таких ф-л можно вывести много.

Докажем ещё ф-лу:

$$\langle J'(u+h) - J'(u), z \rangle = \langle J''(u+\theta h)h, z \rangle$$
$$= \int_0^1 \langle J''(u+th)h, z \rangle \, dt$$

(вместо h – z ⇒ вместо квадр. формы ——)
ср-я

Док-во:

Рассм. ф-ю

$$F(t) = \langle J'(u+th), z \rangle, \quad 0 \le t \le 1$$

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \langle J'(u+(t+\Delta t)h), z \rangle - \langle J'(u+th), z \rangle =$$
$$= \langle J''(u+th)\Delta t h + \bar{o}(\|\Delta t\|), z \rangle =$$
$$= \overbrace{\langle J''(u+th)h, z \rangle}^{F'(t)} \cdot \Delta t + \underbrace{\bar{o}(\Delta t)}_{\in R}$$

Надурил!

Рассм. $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$x=0,\quad x+h=0+h=h$

$$\underbrace{f(h)}_{h^3\sin\frac{1}{h}}-\underbrace{f(0)}_{0}=\underbrace{0}_{f'(0)}\cdot h+\frac{1}{2}\underbrace{0}_{f''(0)}\cdot h^2+\underbrace{h^3\sin\frac{1}{h}}_{\bar{o}(h^2)}$$?

все сделали, как прежде

но тут f'' далее $\nexists$!

там мы пользовались обратной теоремой Тейлора:

если $f(x+h)-f(x)=a_1(x)h+\frac{1}{2}a_2(x)h^2+\bar{o}(\|h\|^2)$

+ некоторые ограничения (a_1, a_2 – непр. и т.п.)

тогда $a_1=f'$, $a_2=f''$

(в общем случае т. Тейлора не верна)

! **Т.о. выведенные ф-лы конечного приращения верны для** $J(u)\in C^1(U)$ (для J')

$\in C^2(U)$ (для J'')

$C^1(U)$: $\exists J'(u)\ \forall u\in U$, $\|J'(u+\Delta u)-J'(u)\|_H \xrightarrow{\|h\|\to 0} 0$

$C^2(U)$: $\exists J', J''(u)$, $\|J''(u+\Delta u)-J''(u)\|_{\mathcal{L}(H\to H)} \to 0$.

ОБМАН РАСКРЫТ!

Ф-ла $J(u+h)+J(u) = \langle J'(u+\theta h), h \rangle, \quad 0<\theta<1.$
верна в нашем случае (бан. → бан.)
но в общем случае ~~[illegible]~~ неверна:

<u>Контрпример:</u> $\mathcal{F}(u): H \to E^n$

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi T \\ \sin 2\pi T \end{pmatrix} : [0,1] \to E^2$$

$$F(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F(1) - F(0) = 0 = F'(\theta) \cdot 1$$

но $F'(t) = \begin{pmatrix} -\sin 2\pi T \\ \cos 2\pi T \end{pmatrix} 2\pi \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

⇒ ф-ла не верна

Верна следующая теорема (в общем случае)

$\boxed{T}$ $F: X \to Y: \quad \|F(u+h)-F(u)\|_X \leq \sup\limits_{0\leq\theta\leq1} \|F'(u+\theta h)\|_{L(X\to Y)} \cdot \|h\|$

(док-ся непросто)

на числ. прямой все упорядочено
на этом и строится теория (т. Ролля ⟶ Лагранжа)
а на пл-ти невозможно упорядочить
(только частично)

нельзя все обобщать.

> Мы должны приветствовать будущее, помня, что оно скоро станет прошлым, и мы должны с уважением относиться к прошлым достижениям, помня, что в какой-то момент они представляли предел человеческих возможностей
>
> Джордж Сантаяна (XIX–XX в. амер.)

ПРОИЗВОДНАЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

$J(u) = \|Au - f\|_F^2, \quad A \in \mathcal{L}(H \to F), \; f \in F$

покажем, что $J(u)$ дважды диф-ма

$$J(u+h) - J(u) = \|A(u+h) - f\|_F^2 - \|Au - f\|_F^2 =$$
$$= \|(Au - f) + Ah\|_F^2 - \|Au - f\|_F^2 = \{\text{раскр. скобки}\} =$$
$$= 2\langle Au - f, Ah\rangle + \|Ah\|^2 \overset{\langle Ah, Ah\rangle}{=}$$
$$= \underbrace{\langle 2A^*(Au - f), h\rangle}_{J'(u) \text{ (по опр.)}} + \frac{1}{2}\langle \underbrace{2A^*A}_{J''(u)} h, h\rangle$$

$J''(u)$ – тут надо аккуратнее (если сделать по опр., получится
$J'(u+h) - J'(u) = 2A^*(A(u+h) - f) - 2A^*(Au - f) = 2A^*Ah$)

$\Rightarrow J''(u) = 2A^*A$ – не зависит от u

$J'(u) = 2A^*(Au - f)$ – линейно зависит от u.

$\boxed{11.10}$

Лекция 6

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ТЕРМИНАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА

термин. ф-л:

(1) $J(u) = |x(T, u) - f|_{E^n}^2$,

где x – траектория:

(2) (3) $\begin{cases} \dot{x} = D(t)x + B(t)u(t), & t_0 \le t \le T \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$

управление $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$ (4)

Мы вводим $Au = x(T; u) \in \mathcal{L}(H \to F)$, (4*)

$$H = L_2^r[t_0, T], \quad F = E^n$$

В прошлый раз вычислили произв. ф-ла

$J(u) = \|Au - f\|_F^2$, где $u \in H$, $A: H \to F$ – л.
H, F – гильб.

$J'(u) = 2A^*(Au - f)$

$J''(u) = 2A^*A$

мы попадаем под эту схему
~~Весь вопрос: чему равен A^*?~~
надо только найти A^*

$\langle Au, c\rangle_F = \langle u, A^*c\rangle_H \quad \forall u \in H, \ \forall c \in F$

это тождество однозн. определяет $A^* \in \mathcal{L}(F \to H)$
(или $A^* \in \mathcal{L}(F^* \to H^*)$ где F^*, H^* – сопряж. пр-ва,
но мы отождествляем F и F^* (т. Рисса))

Покажем, что в нашем случае (5)

$A^*c = B^T(t)\psi(t, c)$, где $\psi(t,c)$ – решение з. Коши

$$\begin{cases} \dot\psi = -D^T \quad (6) \\ \psi(T) = c \quad (7) \end{cases}$$

~~Проверим~~ Как это получить!

$\langle Au, c\rangle_{E^n} \overset{(7)}{=} \langle Au, \psi(T)\rangle_{E^n} \overset{(4^*)}{=} \langle x(T,u); \psi(T,c)\rangle_{E^n} =$

$= \{$ф-ла Ньютона Лейбница$\} =$

$$= \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt} \langle x(t), \psi(t) \rangle_{E^n} dt + \langle x(t_0), \psi(t_0) \rangle_{E^n} \overset{(3)}{=}$$

$$= \int_{t_0}^{T} (\langle \overset{(2)}{\dot{x}}, \psi \rangle + \langle x, \overset{(6)}{\dot{\psi}} \rangle) dt = \int_{t_0}^{T} (\langle \cancel{Dx} + Bu, \psi \rangle - \underbrace{\cancel{\langle x, D^T\psi \rangle}}_{\langle Dx, \psi \rangle}) dt$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle Bu, \psi \rangle_{E^n} dt = \int_{t_0}^{T} \langle u, B^T\psi \rangle_{E^r} dt$$

$$\Rightarrow \langle Au, c \rangle_{E^n} = \int_{t_0}^{T} \langle u, B^T\psi \rangle_{E^r} dt = \langle u, \underbrace{B^T\psi}_{A^*c} \rangle_{L_2^r} = \langle u, A^*c \rangle$$

$\Rightarrow$ ф-ла (5) доказана

<u>Схема вычисления градиента</u>

$$J'(u) = 2A^*(Au - f)$$

пусть дано нач. прибл. $u = u(t)$
вычислим градиент

1) $u = u(t) \xrightarrow{(2),(3)} x(t;u) \Longrightarrow x(T,u) = Au \Rightarrow Au - f$

$\xrightarrow{(6),(7)}$ {решаем з. Коши при $c = Au - f$} $\Rightarrow \psi(t;c) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 2B^T(t)\psi(t,c) \equiv J'(u)$

можно вычислить и $J''(u) = 2A^*A$

Дифференцирование интегрального ф-ла.

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} |x(t;u) - f(t)|^2 dt \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \overset{n\times n}{D}(t)x + B(t)u(t), \quad t_0 \le t \le T & (2) \\ x(t_0) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$u = u(t) \in L_2^2[t_0, T] \qquad (4)$$

Ранее мы ввели опр

$$Au = x(t,u) \in \mathcal{L}(H \to F), \qquad H = L_2^2[t_0, T]$$
$$F = L_2^n[t_0, T]$$

<u>Найдем A^*:</u>

<u>Утв:</u> $A^* c = B^T(t)\psi(t,c)$, где ψ – решение з. Коши $\qquad (5)$

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -D^T(t)\psi - \overset{n}{c}(t) & (6) \\ \psi(T) = 0 & (7) \end{cases}$$

<u>Док-во:</u>

$$\langle Au, c\rangle_F = \int_{t_0}^{T} \langle x(t,u), \overset{(6)\to -\dot\psi - D^T\psi}{c(t)}\rangle_{E^n} dt = \int_{t_0}^{T} \langle x, -\dot{\psi} - D^T\psi\rangle_{E} dt$$

$$= -\underbrace{\langle x, \psi\rangle\Big|_{t=t_0}^{T}}_{0\ ((2),(7))} + \int_{t_0}^{T} \left(\langle \overset{(2)}{\dot{x}}, \psi\rangle_{E^n} - \langle x, D^T\psi\rangle_{E^n}\right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left(\langle \cancel{Dx} + Bu, \psi\rangle_{E^n} - \cancel{\langle Dx, \psi\rangle}\right) dt = \int_{t_0}^{T} \langle Bu, \psi\rangle_{E^n} dt$$

35 $= \int_{t_0}^{T} \langle u, B^T\psi\rangle_{E^2} dt = \langle u, \underbrace{B^T\psi}_{A^*c}\rangle_{L_2^2(t_0,t)}$

Схема вычисления градиента

$$u = u(t) \xrightarrow{(2),(3)} x(t,u) \xrightarrow{\psi^*} Au \Rightarrow Au - f = c(t)$$

$$\xrightarrow{(6),(7)} \psi(t,c) \Longrightarrow 2B^T(t)\psi(t,c) = J'(u)$$

Как получим A^*?

С помощью метода ~~неопред.~~ непрер. множ.:

$$0 = \int_{t_0}^{T} (\underbrace{\dot{x} - Dx - Bu}_{0}, \psi)\,dt \to \text{преобразовываем}$$

$$= \langle m, \underbrace{\dot{\psi} + D^T\psi}_{= -c} \rangle + \langle \cdot, \underbrace{\psi(T)}_{=0} \rangle - \langle u, \overset{A^*c}{\cdot} \rangle + \langle \cdot, c \rangle$$

Градиент задачи о нагреве стержня

(1) $J(u) = \int_0^l |y(T,x;u) - f(x)|^2 dt$

$y(T,x;u)$ — распр. темп. в стержне, решение ур-я теплопров.:

$$\begin{cases} y_t = y_{xx}, \quad (t,x) \in Q = (0,T)\times(0,l) & (2)\\ y_x|_{x=0} = 0, \quad y_x|_{x=l} = u(t) - y|_{x=l} & (3)\\ y(0) = 0 & (4)\end{cases}$$

(5) $u = u(t) \in L_2[0,T]$

$$Au = y(T,x;u) \in \mathcal{L}(H \to F), \quad H = L_2(0,T], \; F = L_2(0,l) \qquad (6)$$

Найдем A^*:

$$A^* c = \psi(t,l;c) \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \psi_t = -\psi_{xx}, \quad (t,x) \in Q & (8) \\ \psi_x|_{x=0} = 0, & (9) \\ \psi_x|_{x=l} = -\psi|_{x=l} & (\cancel{11}) \\ \psi|_{t=T} = c(x) & (10) \end{cases}$$

(это не обратная задача; ~~просто~~ она решается назад (если заменить t на $-t$, получим привычную задачу для ур-я теплопров))

$$\langle Au, c\rangle_F = \int_0^l y(T,x;u)\,\psi(T,x;c)\,dx = \{\text{ф-ла Ньют.-Лейбница}\}$$

$$= \int_0^l \Big[\int_0^T (y\psi)'_t\,dt + \cancel{y\psi|_{t=0}}\Big]dx = \iint_Q (y_t\psi + y\psi_t)\,dt\,dx$$

$$= \int_0^T\!\!\int_0^l (y_{xx}\psi - y\psi_{xx})\,dx\,dt = \{\text{по частям}\} =$$

$$= \int_0^T \Big([y_x\psi - y\psi_x]\Big|_{x=0}^{l} + \int_0^l \underbrace{(y_x\psi_x - y_x\psi_x)}_{0}\,dx \Big)dt =$$

$$= \int_0^T \Big[(u(t) - \cancel{y|_{x=l}})\psi|_{x=l} - \cancel{y(-\psi)|_{x=l}}\Big]dt - \cancel{\int_0^T (y_x\psi - y\psi_x)\Big|_{x=0} dt}$$

$$= \int_0^T \Big((u\psi)|_{x=l} - \cancel{(y\psi)|_{x=l}} + \cancel{(y\psi)|_{x=l}}\Big)dt = \int_0^T u\psi|_{x=l}\,dt =$$

$$= \langle u, \psi(t,l;c)\rangle_{L^2[0,T]} \Rightarrow (7)$$

если $u \notin L_2$ — плохое $\Rightarrow$ классич. реш. задачи (2) — (4) $\nexists$

$\Rightarrow$ аппр. плохое управление хорошими:

$\{u_k\}$ — хор., $\|u_k - u\|_{L_2}$

∃ классич. реш.

$\Rightarrow \langle Au_k, c \rangle = \langle u_k, A^* c \rangle$

$\Rightarrow$ пред. переход везде (много техники)

Схема вычисления градиента

$$u = u(t) \xrightarrow{(2)-(4)} y(t,x;u) \longrightarrow \overset{=Au}{y(T,x;u)} - f(t) = c \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(8)-(10)} \psi(t,x;c) \longrightarrow 2\psi\big|_{x=e} = J'(u)$$

Производная Гато

$$F: X \to Y \quad \Big| \lim_{t \to 0+0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} = F'(x,h)$$

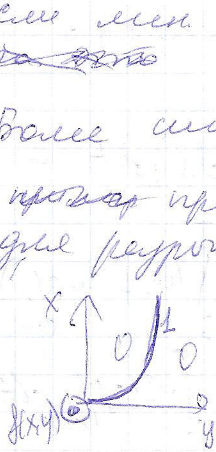
по разным напр. разная, нелин. по h.

Если лин. по h: $F'(x,h) = \langle F'(x), h \rangle$, то ~~то это~~

$F'(x)$ — производная Гато

Более широкий класс, чем произв. Фреше

~~пример~~ производная по Гато может ∃ даже для разрывной функц.



произв. по Гато ∃ (везде 0), а по Фреше — нет ф-я $\sqrt{|xy|}$ не дифф-ма ни по Фреше, ни по Гато

Лекция $\boxed{18.10}$

Элементы выпуклого анализа.

пусть V - мн-во из линейного пр-ва

Опр: V - выпуклое мн-во, если $\forall u, v \in V$ отрезок $[u,v] \in V$

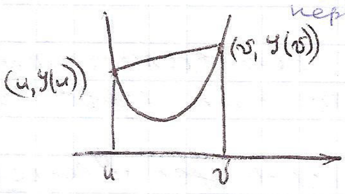
(отрезок $[u,v] = \{w \in V: \alpha u + (1-\alpha) v \quad \forall \alpha \in [0,1]\}$)

Опр: ф-я $J(u)$ заданная на вып. мн-ве V, называется выпуклой, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha) v) \le \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) \quad \forall u, v \in V, \ \forall \alpha \in [0,1]$$

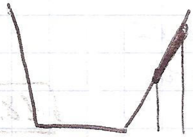
$\cup$ выпуклая $\quad$ $\cap$ вогнутая

$\downarrow$ нер-во в др. сторону

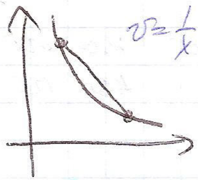


т.е. хорда - выше ф-ции

ф-я наз. строго выпуклой, если нер-во строгое $\forall \alpha \in (0,1)$, $\forall u \ne v$



просто вып.
(ф-я сливается
на нек. участках
с хордой)



строго вып.

сильно
выпуклая

Опр: ф-я наз. сильно выпуклой, если

$$J(\alpha u+(1-\alpha)v) \le \alpha J(u)+(1-\alpha)J(v)-\frac{1}{2}\varkappa\,\alpha(1-\alpha)\|u-v\|_H^2,$$

$\forall \alpha\in[0,1]$, $\forall u,v\in U$

$\varkappa>0$ — константа сильной выпуклости

сильно вып. ф-и рассм. только в гильбертовых пр-вах (нужна норма, но не во всех нормиров. пр-вах $\exists$ сильно вып. ф-ции)

просто вып. — в $\forall$ лин. пр-ве

Пример:
$g(u)=\|u\|_H^2$ — сильно вып. в H.

док-во:

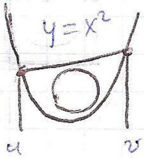
$$\|\alpha u+(1-\alpha)u\|_H^2 \equiv \alpha\|u\|_H^2+(1-\alpha)\|v\|_H^2-\frac{1}{2}\underbrace{2}_{\varkappa}\alpha(1-\alpha)\|u-v\|_H^2$$

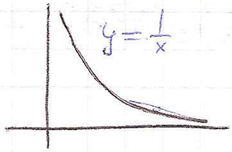
? гипотеза: если в банах. пр-ве есть сильно-вып. ф-я, определенная на всем пр-ве, то это пр-во гильб.

верна для диф-мой ф-ции + усл. Липшица

$\forall$ строго вып. яв. сильно вып.

У сильно вып. ф-ции между хордой и ф-цией можно вписать шарик, радиус к-рого пропорц. $\|u-v\|$

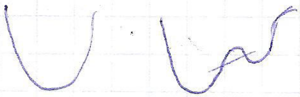




строго вып., но не сильно вып. (радиус шарика не пропорц.

ТЕОРЕМА 1 (о локальном минимуме)

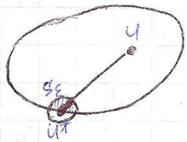
Пусть ф-я $J(u)$ − вып. на вып. мн-ве U. Тогда $\forall$ точка лок. min на U есть точка глобального минимума (т.е. все min − глобальные)



Док-во: (в лоб; можно от противного).

Пусть u_* − точка локального min $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по опр. min

$$\exists\ \varepsilon\text{-окр. } O_\varepsilon(u_*) \cap U = S_\varepsilon : \ J(u_*) \le J(u) \quad \forall u \in S_\varepsilon$$



берем $\forall u \in U \Rightarrow$ отрезок $[u^*, u] \subset U$

$$S_\varepsilon \ni u_* + \underset{\text{маленькое}}{\alpha}(u - u_*) = \alpha u + (1-\alpha)u_* \in S_\varepsilon$$

$$\forall \alpha,\ 0 < \alpha < \alpha_0 \le 1$$

$$\Rightarrow \cancel{J(u^*)} \le J(\alpha u + (1-\alpha)u_*) \le \alpha J(u) + (1-\alpha)J(u_*) =$$

$$= \alpha(J(u) - J(u^*)) + \cancel{J(u^*)}$$

$$\Rightarrow 0 \le \alpha(J(u) - J(u^*)) \Rightarrow J(u^*) \le J(u) \quad \forall u \in U$$

чтд

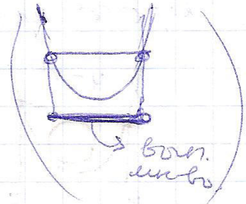
ТЕОРЕМА 2 (о мн-ве Лебега вып. ф-ций)

Пусть $J(u)$ - вып. на вып. мн-ве U

Тогда мн-во Лебега

$$M(v) = \{u \in U: J(u) \le \overbrace{J(v)}^{\forall const}\} -$$

выпукло $\forall v \in U$



Док-во:

$$J(\underbrace{\alpha u + (1-\alpha)v}_{\in U}) \le \underbrace{\alpha}_{\ge 0} \underbrace{J(u)}_{\le J(v)} + \underbrace{(1-\alpha)}_{\ge 0} \underbrace{J(v)}_{\le J(v)} \le J(v)$$

это и есть выпуклость

чтд.

ТЕОРЕМА 3 (выпуклость мн-ва точек минимума)

Пусть $J(u)$ - вып. на вып. мн-ве U

Тогда мн-во

$$U_* = \{u \in U: J(u) = J_* = \inf_U J(u)\}$$

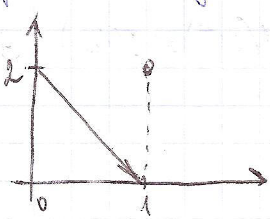
выпукло или пусто.

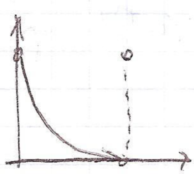
Док-во: $U_* = \{u \in U: J(u) \overset{(=)}{\le} J_*\}$ - мн-во Лебега (меньше J_* быть не может)

$\Rightarrow \longrightarrow$ т2.

чтд

Пример $\overset{вып.}{\text{ф-ции}}$, у кот. $U_* = \varnothing$:





ТЕОРЕМА 4: если $J(u)$ – строго вып. на U,
то U_* либо $\emptyset$, либо состоит из 1 точки

Док-во: пример $U_* = \emptyset$ уже приведен

пусть $U_* \neq \emptyset$: доп., что $u_*, v_* \in U_*$

$$\Rightarrow J_* \le J(\alpha u_* + (1-\alpha) v_*) \overset{\text{опр. вып.}}{\le} \alpha \underbrace{J(u_*)}_{J_*} + (1-\alpha) \underbrace{J(v_*)}_{J_*} = J_*$$

$$\Rightarrow J_* = J(\alpha u_* + (1-\alpha) v_*) = \alpha J(u_*) + (1-\alpha) J(v_*)$$

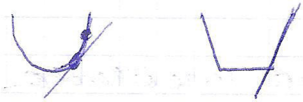
$\Rightarrow$ если $u_* \neq v_*$ — противоречие опр. строго выпуклой ф-ции

$\Rightarrow u_* = v_*$

чтд

ТЕОРЕМА 5: (о касательной пл-ти)
пусть 1) $J(u)$ – вып. ф-я на вып. мн-ве $U \subseteq H$
2) $\exists J'(v)$, $v \in U$

Тогда $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u-v \rangle \quad \forall u \in U$
(т.е. график ф-ции лежит не ниже графика касательной пл-ти



ТЕОРЕМА 6
пусть ф-я $J(u)$ – сильно вып. на вып. $U \subset H$, $\exists J'(v)$, $v \in U$
Тогда
$$J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u-v \rangle + \frac{1}{2} \varkappa \|u-v\|$$
↑ из опр. сильной вып.

<u>Док-во!</u> (т.5 и т.6.)

заметим, что при $\varkappa = 0$ в Т6 $\longrightarrow$ Т5

воспользуемся опр. сильной выпуклости:

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \le \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) - \frac{1}{2}\varkappa\,\alpha(1-\alpha)\|u-v\|_H^2$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2}\varkappa\alpha(1-\alpha)\|u-v\|_H^2 \le \alpha\big(J(u) - J(v)\big) + J(v) - J(v + \alpha(u-v)) =$$

$$= \alpha\big(J(u) - J(v)\big) - \langle J'(v), \alpha(u-v)\rangle - \bar{o}(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

Делим на $\alpha \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\varkappa(1-\alpha)\|u-v\|_H^2 \le J(u) - J(v) - \langle J'(v), u-v\rangle - \underbrace{\frac{\bar{o}(\alpha)}{\alpha}}_{0} \quad \forall \alpha (0,1]$$

<u>$\alpha \to 0$</u>

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\varkappa\|u-v\|_H^2 \le J(u) - J(v) - \langle J'(v), u-v\rangle$$

при док-ве не исп. $\varkappa = 0$ или $\varkappa \ne 0$.

$\Rightarrow$ док-ли обе теоремы.

<u>чтд</u>

<u>Зам:</u> эта теорема обратима:

$\boxed{T7}$ если $J(u) \in C^1(V)$ и $J(u) \ge J(v) + \langle J'(v), u-v\rangle + \frac{1}{2}\varkappa\|u-v\|^2$

то ф-я $J(u)$ сильно выпукла

(выпукла при $\varkappa = 0$)

(без док-ва)

~~характеристика~~

ТЕОРЕМА 8: (необх. условия минимума)

пусть $J(u)$ задана на вып. мн-ве U,
точка u_* – точка локального минимума,
$\exists\, J'(u_*)$

Тогда $\langle J'(u_*), u-u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$ (*)

Док-во: по опр. loc min

$$J(u_*) \leq J(u) \qquad \forall u \in S_\varepsilon = O_\varepsilon(u_*) \cap U$$

$$\forall u \in U \qquad u_\alpha = u_* + \alpha(u-u_*) \in S_\varepsilon$$

$$J(u_*) \leq J(u_* + \alpha(u-u_*)) = J(\alpha u + (1-\alpha)u_*)$$

$$0 \leq J(\alpha u + (1-\alpha)u_*) - J(u_*) = \langle J'(u_*), \alpha(u-u_*) \rangle + \bar{o}(\alpha)$$

$\forall \alpha,\ 0 < \alpha \leq \alpha_1 \leq 1$

делим на α

$$0 \leq \langle J'(u_*), (u-u_*) \rangle + \frac{\bar{o}(\alpha)}{\alpha} \qquad \forall \alpha \in (0, \alpha_1)$$

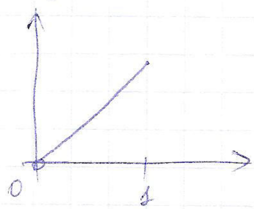
$\alpha \to 0 \quad \to \quad \langle J'(u_*), (u-u_*) \rangle \geq 0$

чтд

А раньше учили, что производная $= 0$??

Пример: $y = x$, $x \in [0,1]$, $y' = 1$

$1(u-0) = u \geq 0$.



точка граничная

45 если точка внутр $\Rightarrow$ $=0$

Дополнение к Т.8:

если $u_* \in \operatorname{int} U$ (внутр. точка), то $(*) \Leftrightarrow J'(u_*) = 0$.

~~тогда $J'(u_*) = 0$~~

Док-во

$\forall h, \quad u_* + \delta h \in U$ при $\forall \delta \in (0, \delta_0)$

$(*) \to \langle J'(u_*), \delta h \rangle \geq 0 \quad \forall \delta \in (0, \delta_0)$

$\Rightarrow \langle J'(u_*), h \rangle \geq 0$

возьмем $h = -J'(u_*)$

$\Rightarrow -\|J'(u_*)\|^2 \geq 0 \Rightarrow J'(u_*) = 0.$

чтд.

производная по напр.:

$$\frac{dJ(u)}{de} = \lim_{\substack{\|u\|=1 \\ t \to 0}} \frac{J(u+te) - J(u)}{t} = \langle J'(u), e \rangle$$

$(*) \to \langle J'(u_*), \underbrace{\frac{u-u_*}{\|u-u_*\|}}_{= e} \rangle \geq 0 \to$ производная по напр.

Лекция

25.10.06.

Теорема 8: (критерий оптимальности)

пусть U – вып. мн-во, $J(u)$ – вып. ф-я $\in C^1(U)$, $U_* \neq \varnothing$

$$u_* \in U \Rightarrow u_* \in U_* \Leftrightarrow \langle J'(u_*), u-u_* \rangle_H \geq 0 \quad \forall u \in U \qquad (1)$$

Док-во:

1) ($\Rightarrow$) ~~u_*~~ уже док-но в пред. лекции

2) ($\Leftarrow$) $\langle J'(u_*), u-u_* \rangle_H \geq 0 \quad \forall u \in U$

по т. о кас. пл-ти $J(u) \geq J(u_*) + \underbrace{\langle J'(u_*), u-u_* \rangle}_{\geq 0 \,(1)}$ в силу (1)

(провели кас. пл-ть в т. u_*)

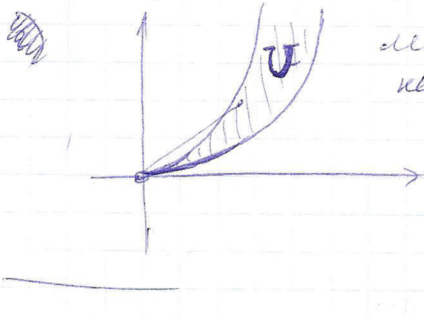
$\Rightarrow J(u) \geq J(u_*) \quad \forall u$

$\Rightarrow u_*$ – точка глоб. min $\Rightarrow$ и локального min

Утв

Недостатки:

1) выпуклость – серьезное требование



мн-во невыпуклое

не все направления допустимые

(1) – вариационное нер-во.

как решать нер-во?

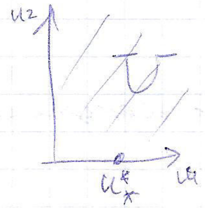
покажем, что на самом деле там спрятано равенство.

Пример:

$J(u) \to \inf, \quad u \in U \equiv E^n_+ = \{(u^1, \dots, u^n) = u \geq 0\}$

(1) $\Longleftrightarrow \quad u^i_* \dfrac{\partial J(u^*)}{\partial u} = 0 \qquad i = 1, \dots, n.$

Покажем это:



1) $u_* \in \operatorname{int} E^+_2$ (внутр.) $\Rightarrow J'(u_*) = 0 \Rightarrow (1)$

2) например, $u^2_* = 0$.

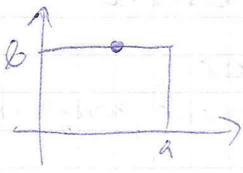
$\Rightarrow \dfrac{\partial J(u_*)}{\partial u_1} \geq 0 \Rightarrow (1)$ (произведение равно 0)

3) $u^1_* = 0$. $\dfrac{\partial J(u_*)}{\partial u^2} \geq 0 \Rightarrow (1)$ (—"—)

4) $u^1_* = u^2_* = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \rightarrow (1)$

Задача (Д/з)

$J(u) \to \inf, \quad u \in U = \{\alpha \leq u^i \leq \beta, \quad i = 1, \dots, n\}$



В общем случае тоже

$(1) \Longrightarrow \begin{cases} u_* \in \operatorname{int} U \rightarrow J'(u_*) = 0 \\ u_* \in \text{границе} \Rightarrow \begin{cases} \text{принадлежность границе (ур-я)} \\ \text{производные по касат. напр.} = 0 \end{cases} \end{cases}$

в хорошем случае (без остриев) получим n уравнений

Условие оптимальности квадратичного ф-ла

$J(u) = \|Au - f\|_F^2$, $A \in \mathcal{L}(H \to F)$, $f \in F$ — фикс.
H, F — гильб.

Пусть $u \in U$ — вып. мн-во, $U_* \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ справедливо (1)

$$J'(u) = 2A^*(Au - f)$$

(1) $\Rightarrow$ $\langle A^*(Au_* - f), u - u_* \rangle_H \geq 0$ и наоборот:

если $\langle A^*(Au_* - f), u - u_* \rangle_F \geq 0 \Rightarrow u_* \in U$ т.к. J вып. ф-я

Для терминального ф-ла:

$J'(u) = 2B^T(t)\psi(t; c)$

$Au = x(T; u)$;

$H = L_2^2[t_0, T]$, $F = E^n$

Тогда (1) $\Rightarrow$ $\langle B^T(t)\psi(t, c), u(t) - u_*(t) \rangle_{L_2^n[t_0, T]} \geq 0$

$\forall u \in U \subseteq L_2^2$

Задача:

написать то же для интегр. ф-ла

Для задачи о нагреве стержня:

$$J'(u) = \psi(t, l; c)$$

$$\int_0^T \psi(t, l; c)(u(t) - u_*(t))\,dt \geq 0.$$

Задача:

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle$$ (ф-л Ритца)

если $A = A^* \geq 0 \Rightarrow J(u)$ - вып. (проверить)

$J'(u) = Au - f$ (проверить → по опр. вывести)

$J'(u_*) = 0 \Rightarrow Au_* - f = 0.$

$\Updownarrow$

$J(u) \to \inf\limits_{H}$ → метод Ритца.

ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА ДЛЯ СИЛЬНО ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

ТЕОРЕМА: пусть U - вып. замкн. мн-во из H (т.е. может быть $U \equiv H$)

(не обяз. ограничено!!)

$J(u)$ - сильно вып., п/н снизу (по $\|\cdot\|$)

Тогда 1) $J_* > -\infty$, $U_* \neq \emptyset$, $U_* = \{u_*\}$

(состоит из одной точки)

2) $\forall$ мин. посл-ти $\{u_k\}$ (т.е. $J(u_k) \to J(u_*)$)

$$\frac{1}{2}\varkappa\|u_k - u_*\|^2 \leq J(u_k) - J(u_*), \quad k = 1, 2, \ldots$$

т.е. мин. посл-ть будет сходиться к самой точке u_*

Док-во: докажем при доп. ограничении:

пусть в какой-нибудь точке $v \in U$ $\exists J'(v)$

(не обязат. условие)

(I) Доказ. $M(v) = \{u \in U;\ J(u) \le J(v)\}$

1) $M(v)$ – выпукло (из т. о выпуклости мн-ва Лебега у вып. ф-ции).

2) $M(v) \overset{\|\cdot\|}{-}$ огр.

ф-я сильно вып.:

$$J(u) \ge J(v) + \langle J'(v), u-v \rangle + \frac{1}{2}\varkappa \|u-v\|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\varkappa \|u-v\|^2 \le \underbrace{J(u) - J(v)}_{\le 0} + \langle J'(v), v-u \rangle \le$$

$$\overset{\{\text{коши к-в}\}}{\le} 0 + \|J'(v)\| \cdot \cancel{\|u-v\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\varkappa}{2}\|u-v\| \le \underbrace{\|J'(v)\|}_{\text{фикс.}} \quad \forall u \in M(v)$$

$\Rightarrow M(u)$ попало в шарик радиуса $\|u-v\|$

$\Rightarrow$ огранич.

3) $M(v)$ – замкн.!

$\forall \{u_k\} \in M(v),\ \{u_k\} \xrightarrow{\|\cdot\|} u \in H,$

Покажем, что $u \in M(v)$:

а) $u \in U$ т.к. U – замкн. мн-во.

б) $J(u) \le J(v)$

$$J(u_k) \le J(v) \xrightarrow[\text{п/н снизу}]{\text{пред. переход}} J(u) \le \underline{\lim}\, J(u_k) \le J(v)$$

$\Rightarrow J(u) \le J(v)$

51 т.о. $M(v)$ – выпукло, замкн, огр $\Rightarrow$ $M(v)$ – слабо компактно

$\Rightarrow$

Исх. задача $\quad J(u) \to \inf, \; u \in U$

$$\Updownarrow$$

$$J(u) \to \inf, \; u \in M(v)$$

(если $u \notin M(v) \Rightarrow J(u) > J(v) \Rightarrow$ min исх. задачи достигается явно не в т. u)

а к этой задаче уже можно применить слабый или выпуклый вариант т. Вейерштрасса

$\Downarrow$

1) $J_* > -\infty \qquad$ 2) $U_* \neq \emptyset$

Сильно выпуклая ф-я $\Rightarrow$ строго вып, а для сильновып. мы док-ли теорему, что если $U_* \neq \emptyset$, то $U_* = \{u_*\}$

$\Downarrow$

1-ая часть теорема док-на

(II)

$$\frac{1}{2}\varkappa \|u-u_*\|^2 \leq J(u) - J(u_*) - \underbrace{\langle J'(u_*), u-u_* \rangle}_{\geq 0 \;\; \forall u \in U \; (\text{из } (1))} \leq$$

$$\leq J(u) - J(u_*) + 0$$

$\forall u \in U$

возьмем $u = u_k \Rightarrow$ получим нужное нерв-во

(мы провели док-во этой части при ~~условии~~ предпол., что $\exists \; J'(u_*)$)

чтд

По-сравн. с предыдущими теоремами Вейерштрасса от ф-ции требуется куда больше, чем раньше, зато от мн-ва требуется куда меньше, чем раньше. (может быть $U \equiv H$)

$J(u) = u^p$, $p \in \mathbb{R}$ где выпукла, сильно выпукла и т. д?

КРИТЕРИИ ВЫПУКЛОСТИ И СИЛЬНОЙ ВЫПУКЛОСТИ.

ТЕОРЕМА 1: (I критерий)

Пусть U – вып. мн-во из H,
$J(u) \in C^1(U)$

(1) Тогда 1) $J(u)$ – вып $\Leftrightarrow$ $\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle_H \geq 0$ $\forall u, v \in U$

(2) 2) $J(u)$ – сильно вып. $\Leftrightarrow$ $\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle_H \geq \mu \|u - v\|^2$ $\forall u, v \in U$

ТЕОРЕМА 2: (II критерий)

Пусть U – вып. мн-во из H,
$\operatorname{int} U \neq \emptyset$
$J(u) \in C^2(U)$

(3) Тогда 1) $J(u)$ – вып. $\Leftrightarrow \langle J''(u)h, h \rangle_H \geq 0$, $\forall u \in U$, $\forall h \in H$

(4) 2) $J(u)$ – сильно вып. $\Leftrightarrow$ $\langle J''(u)h, h \rangle_H \geq \mu \|h\|^2$, $\forall u \in U$, $\forall h \in H$.

(1) – монотонность $J'(u)$ $\quad (f(x) - f(y))(x - y) \geq 0 \to$ опр. монот.
(св-во монотонности градиента)

(2) – сильная монотонность $J'(u)$

(3) – неотрицательная квадратичная форма
и – матрица квадр. формы, h бегает по H.

(4) – положительно-опред. квадр. форма
Работает критерий Сильвестра

(01.11) **Лекция**

Док-во 1-ой теоремы: (это можно списывать ☺)

($\Rightarrow$)
$$J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u-v\rangle + \frac{1}{2}\varkappa\|u-v\|^2$$
$$+\quad J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), v-u\rangle + \frac{1}{2}\varkappa\|u-v\|^2$$
$$0 \geq \langle J'(u) - J'(v), v-u\rangle + \varkappa\|u-v\|^2$$

($\Leftarrow$) $J(u) \in C^1(V)$, вып. (2)
$$\alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - J(\alpha u + (1-\alpha)v) \geq$$
$$\overset{?}{\geq} \frac{1}{2}\varkappa\|u-v\|^2\alpha(1-\alpha)$$

Если получим эту оценку, то всё доказано.

Если бы мы сумели док-ть нер-во:
$$\geq \langle J'(z_1) - J'(z_2), z_1 - z_2\rangle \overset{(2)}{\Rightarrow} \geq \mu\|z_1-z_2\|^2$$

Итак, приведем (...) к ( ):
$$\alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) + J(\underbrace{\alpha u + (1-\alpha)v}_{u_\alpha}) = \{\pm \alpha J(u_\alpha)\} =$$
$$= \alpha(J(u) - J(u_\alpha)) + (1-\alpha)(J(v) - J(u_\alpha))$$

верна ф-ла:

$$\underset{b+h}{\underset{\parallel}{J(a)}} - J(b) = \int_0^1 < J'(\underbrace{b + t(b-a)}_{b+th}), \underbrace{a-b}_{h} > dt$$

Применим её ко всему =>

$$\bigcirc = \alpha \int_0^1 < J'(u_\alpha + t(\overbrace{u-u_\alpha}^{(1-\alpha)(u-v)})), u-u_\alpha > dt +$$

$$+ (1-\alpha)\int_0^1 < J'(u_\alpha + t(\underbrace{v-u_\alpha}_{-\alpha(u-v)})), v-u_\alpha > dt \ \ominus$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u-u_\alpha = (1-\alpha)(u-v) \\ v-v_\alpha = -\alpha(u-v) \end{array} \right\}$$

$$\ominus\ \alpha(1-\alpha)\int_0^1 < J'(\underbrace{u_\alpha + t(u-u_\alpha)}_{=z_1}) - J'(\underbrace{u_\alpha + t(v-u_\alpha)}_{=z_2}), u-v> dt$$

$$\left\{ z_1 - z_2 = t(u-v) \Rightarrow (u-v) = \frac{z_1-z_2}{t} \right\}$$

$$= \alpha(1-\alpha)\int_0^1 < J'(z_1) - J'(z_2), \frac{1}{t}(z_1-z_2) > dt \overset{(2)}{\geqslant}$$

показать, что $z_1, z_2 \in U$ тогда можно применить (2)

$$\geqslant \alpha(1-\alpha)\int_0^1 \frac{1}{t}\mu \underbrace{\|z_1-z_2\|^2}_{t^2\|u-v\|^2} dt = \alpha(1-\alpha)\underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{\frac{1}{2}} \|u-v\|^2 \mu =$$

$$= \alpha(1-\alpha)\underbrace{\frac{\mu}{2}}_{\mu = \varkappa} \|u-v\|^2 \quad \forall u, v \in U$$

т.к. не пользовались тем, что $\mu = \min \neq 0$ => док-ны оба утв.

Т. док-на

Док-во теоремы 2:

⇒ Рассм. 2 случая:

1) $u \in \operatorname{int} U$

берем $\forall h \in H$: $u+\varepsilon h \in U$ $\quad \forall \varepsilon,\ 0 \le \varepsilon < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(h)$

из (2) (ф-я сильно вып.) $\Rightarrow$

$$\langle J'(u+\varepsilon h) - J'(u), \varepsilon h \rangle \ge \mu \|\varepsilon h\|^2$$

применим к л.ч. ф-лу конечных приращений:

$$\text{л.ч.} = \langle J''(u+\theta\varepsilon h)\varepsilon h, \varepsilon h \rangle \ge \mu \varepsilon^2 \|h\|^2$$

$$\langle J''(u+\theta\varepsilon h)h, h \rangle \varepsilon^2 \ge \mu \varepsilon^2 \|h\|^2, \quad \varepsilon > 0$$

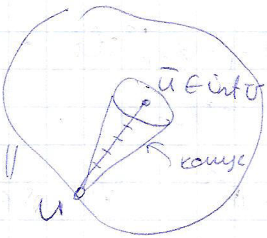
$$\langle J''(\underbrace{u+\theta\varepsilon h}_{\downarrow})h, h \rangle \ge \mu \|h\|^2, \quad \varepsilon \to +0$$

$$\langle J''(u)h, h \rangle \ge \mu \|h\|^2$$

2) $u \in \operatorname{Гр} U$

$\exists u_k \in \operatorname{int} U$,

u_k сх. к u по $\|\cdot\|$



$\Downarrow$

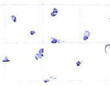
$$\langle J''(u_k)h, h \rangle \ge \mu \|h\|^2 \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\downarrow$$

$$\langle J''(u)h, h \rangle \ge \mu \|h\|^2$$

это не верно для $\forall U$

все точки гран.

(может внутр. точек вообще не быть: )

$\Leftarrow$ пусть вып. (4)

$$< J'(u) - J'(v), u - v > \overset{\text{т. о среднем}}{=} < J''(\underbrace{v + \overset{\overset{(0,1)}{\Downarrow}}{\theta}(u - v)}_{U\text{-вып.}})\overset{h}{(u-v)}, u - v > \overset{(4)}{\geq}$$

$$\geq \mu \|u - v\|^2$$

$\Downarrow$

мы пришли к (2) $\forall u, v \in U$

$\therefore$ в силу Т1 ф-я $J(u)$ - сильно вып.

чтд

Пример:

$J(u) = x^2 - y^2$, $u = (x, y)$

$U = \{ (x,y) \in E^2 : y = 0 \}$

$$J''(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$< J''(u)h, h > = (h^1)^2 - (h^2)^2 \cancel{\geq 0}$$

$J(u)\big|_U = x^2$ - вып. ф-я (далее сильно вып.)

но $\operatorname{int} U \neq \emptyset$.

поэтому теорема не верна.

$\cancel{H = E^n}$

Рассм. случай $H = E^n$

$\Rightarrow J(u) \in C^2(E^n)$

$\Downarrow$

(3): $\langle J''(u)h, h\rangle \geq 0 \quad \forall h \in E^n$ — квадр. форма, неотрицат. опр.

верен след. критерий неотрицательности

$(Ax, x) \geq 0 \quad \forall x \in E^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ все миноры, кроме симметричных относит. главной диагонали, неотрицательны (не только главные угловые) ≥ 0.

(~~соотв. для~~

$\langle J''(u)h, h\rangle > 0 \quad \forall h \in E^n \Leftrightarrow \langle J''(u)h, h\rangle \geq \mu\|u\|^2$

$\inf\limits_{\|u\|=1} \langle J''(u)h, h\rangle = \mu^2 > 0 \Leftrightarrow \langle J''(u)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle \geq \mu > 0.$

$\Rightarrow$ работает критерий Сильвестра (все главные угловые миноры > 0)

Задача: $J(u) = ax^2 + bxy + cy^2 + dz^2$

определить, при каких парам. эта ф-я выпукла, сильно выпукла на E^n

ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ НА МНОЖЕСТВО.

Опр: U - множество из H, $u \in H$.
Скажем, что т. $w \in U$ является проекцией точки u на мн-во U, если

$$\|w-u\| = \inf_{v \in U} \|v-u\| = \rho(u,v)$$

ближайших точек может быть много:

← вся окружность явл. проекцией т. u на эту окр.

ТЕОРЕМА 1 пусть мн-во U - вып., замкн. из H
тогда $\forall u \in H \ \exists!\ P_U(u)$

Док-во:

Рассм. ф-ю $g(v) = \|v-u\|^2_H$ - сильно вып. на H
$\Rightarrow$ и на U

$g(v) \to \inf$, $u \in U$

в силу т. Вейерштрасса (для сильно вып. ф-ций) $g(v)$ достигает $\inf$ в ед. точке

$$\Rightarrow \exists w \in U, \ g(w) = \inf_{v \in U} g(v)$$

$\|w-u\| \leq \|v-u\| \ \forall v \in U$

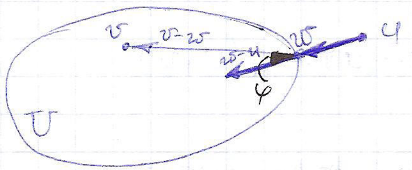
это и есть проекция

чтд

ТЕОРЕМА 2 (характ. св-во проекции)

пусть U — вып., замкн. из H

Тогда $w = \mathcal{P}_U u \iff \langle w - u, v - w \rangle_H \geq 0 \quad \forall v \in U$



~~⇒ угол между~~

⇒ угол φ между векторами $(v-w)$ и $(w-u)$ ≥ 0.

Док-во:

$$g(v) = \|v-u\|_H^2, \quad w \text{ — т.min } g(u)$$

$$g'(v) = 2(v-u)$$

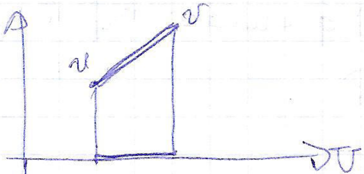
$$g'(w) = 2(w-u)$$

$$\langle g'(w), v-w \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U$$

$$\langle 2(w-u), v-w \rangle \geq 0.$$

ТЕОРЕМА 3: пусть U — вып., замкн.

$$\|\mathcal{P}_U(u) - \mathcal{P}_U(v)\| \leq \|u - v\| \quad \forall\, u, v \in \overset{?}{U}$$



Док-во:

$$+\begin{cases} \langle \mathcal{P}_U(u) - u, \mathcal{P}_U(v) - \mathcal{P}_U(u) \rangle \geq 0 & \forall u, v \in U \\ \langle \mathcal{P}_U(v) - v, \mathcal{P}_U(u) - \mathcal{P}_U(v) \rangle \geq 0 \end{cases}$$

$$< \mathcal{P}_U(u) - \mathcal{P}_U(v) - u + v,\ \mathcal{P}_U(v) - \mathcal{P}_U(u) > \geq 0.$$

нер-во К-Б

$$\|\mathcal{P}_U(u) - \mathcal{P}_U(v)\|^2 \leq < \mathcal{P}_U(u) - \mathcal{P}(v),\ u - v > \leq$$

$$\leq \|\underbrace{\mathcal{P}_U(u) - \mathcal{P}_U(v)}_{\neq 0}\| \cdot \|u - v\|$$

$$\Rightarrow \|\mathcal{P}_U(u) - \mathcal{P}_U(v)\| \leq \|u - v\|.$$

чтд

Лекция

08.11.

ТЕОРЕМА 4:

пусть U – вып, замкн. мн-во,

$J(u)$ – вып и $\in C^1(U)$, $U_* \neq \emptyset$

тогда $u_* \in U_* \Leftrightarrow u_* = \mathcal{P}_U(u_* - \alpha J'(u_*)) \quad \forall \alpha \geq 0.$

Док-во: из критерия оптимальности:

$$u_* \in U_* \Leftrightarrow < J'(u_*),\ u - u_* > \geq 0 \quad \forall u \in U$$

$$\Updownarrow$$

$$< \alpha J'(u_*),\ u - u_* > \geq 0 \quad \forall u \in U \quad \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow < \underset{w}{u_*} - (\underbrace{u_* - \alpha J'(u_*)}_{u}),\ \underset{v}{u} - \underset{w}{u_*} > \geq 0 \quad \forall u \in U$$

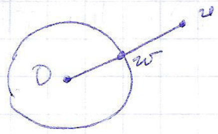
из Т3 $w = \mathcal{P}_U(u) \Leftrightarrow < w - u,\ v - w > \geq 0 \quad \forall v \in U$

$$\Rightarrow u_* \in U_* \Leftrightarrow w = u^* = \mathcal{P}_U(u) = \mathcal{P}_U(u_* - \alpha J'(u_*))$$

чтд.

Примеры

① **шар:** $U = \{u \in H : \|u\| \le R\}$



$$\Rightarrow w = P_U(u) = \begin{cases} \dfrac{u}{\|u\|}R, & u \notin U \\ u, & u \in U \end{cases}$$

Проверим это (по критерию):

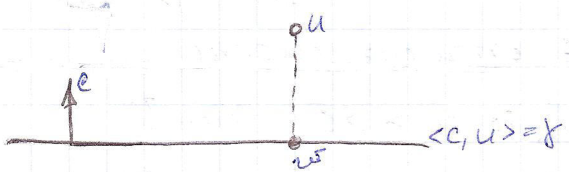
$$\langle w - u, v - w\rangle = \left\langle \frac{u}{\|u\|}R - u,\ v - \frac{u}{\|u\|}R\right\rangle =$$

$$= \frac{\|u\| - R}{\|u\|}\left(\|u\|R - \langle u, v\rangle\right) \ge 0$$

т.к. $\langle u, v\rangle \overset{\text{К-Б}}{\le} \|u\|\,\|v\| \le R\|u\|$

② $U = \Gamma = \{u \in U : \langle c, u\rangle = \gamma,\ c \ne 0\}$

(гиперпл-ть)



$w = u + \alpha c$ ($\overrightarrow{u - w}$ и $\vec{c}$ коллинеарны)

~~Отсюда~~ α опр. из $\langle c, u\rangle = \gamma$.

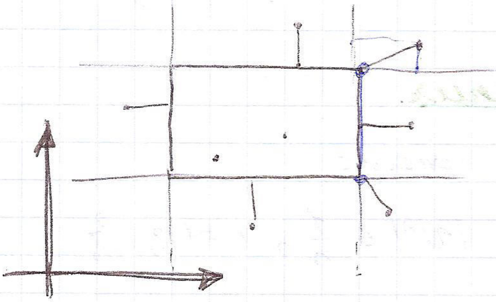
$\Downarrow$

Ответ: $w = u + \dfrac{\gamma - \langle c, u\rangle}{\|c\|^2}\, c$

(проверить самост., там далее $\langle w - u, v - w\rangle = 0$
$\forall v \in U$

③ $U = \{ u = (u^1, \dots, u^n): \ \alpha_i \le u^i \le \beta_i \quad i = 1, \dots, n \}$

(параллелепипед)



перебирая все варианты, получим:

$$w^i = \begin{cases} \alpha_i, & u^i < \alpha_i \\ \beta_i, & u_i > \beta_i \\ u^i, & \alpha_i \le u^i \le \beta_i \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n.$$

надо проверить:

$(w^i - u^i)(v^i - w^i) \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ (очевидно из)

просуммируем $\Rightarrow \ \langle w - u, v - w \rangle \ge 0.$

④ $U = \{ u = u(t) \in L_2^n[0,T]: \ \alpha_i(t) \le u^i(t) \le \beta_i(t) \ \ i = 1, \dots, n \}$

- гильбертово пр-во

$$w^i(t) = \begin{cases} \alpha_i(t), & u^i(t) < \alpha_i(t) \\ \beta_i(t), & u^i(t) > \beta_i(t) \\ u^i(t), & \alpha_i(t) \le u^i(t) \le \beta_i(t) \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n.$$

Проверка:

$(w^i(t) - u^i(t))(v^i(t) - w^i(t)) \ge 0$ для п.в. $t \in [0,T]$, $i = 1, \dots, n$

$\downarrow$

$\int_0^T$ — " — $\ge 0. \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\sum_{i=1}^{n} \Rightarrow \ \langle w - u, v - w \rangle_{L_2^n[0,T]} \ge 0 \quad \forall v \in U.$

Таких мн-в, где явно выписывается проекция, больше практически и нет.

Пример, когда наивный подход приводит к ошибкам (перенос с конечномерн. случая на бесконечномерный не всегда можно делать)

Гильбертов кирпич

l_2 : Σ квадратов коорд-нат конечна

$U = \{ u = (u^1, \ldots, u^n, \ldots) \in l_2 : |u^n| \le \frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots \}$

← гильбертов кирпич

это мн-во выпукло, огр., замкнуто, слабо-комп. (замкн, огр.)

① Есть ли внутр. точки? нет

покажем, что $0 \notin \operatorname{int} U$ и $\operatorname{int} U = \emptyset$

Рассм. направление $e = (1, \frac{1}{2^{3/4}}, \ldots, \frac{1}{n^{3/4}}, \ldots) \in l_2$

Покажем, что $\nexists \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 : 0 + \varepsilon e \in U$:

иначе должно вып. $\frac{\varepsilon}{n^{3/4}} \le \frac{1}{n} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

т.е. $0 < \varepsilon < \frac{1}{n^{1/4}} \to 0. \Rightarrow \nexists \varepsilon$

⇒ по этому напр. — „дыра"

② в n-мерном пр-ве ... точки $\exists$ гиперпл-ть, являющаяся опорой (все мн-во лежит по одну сторону)

здесь это неверно

через 0 заведомо нельзя провести: ребра торчат во все стороны (как иголки у ежа)

Док-ва можно посмотреть в книге:

Васильев кирпич 2002, стр. 533–534

То, что я понял, прекрасно.
Из этого я заключаю, что остальное, что я не понял, тоже прекрасно.

высказывание Сократа по поводу неясностей у Гераклита.

Методы оптимизации.

То пойдёт на поля за ворота,
То обратно вернётся опять,
Словно ищет в потёмках кого-то,
Но не может никак отыскать.

М. Исаковский
(30-е гг, песня про гармониста)

Что искал гармонист? — экстремум
Почему в потёмках? — не было образования
(не было ВМиК, техмата)
Каким методом? (многошаговым)

Общие соображения

Задача: $J(u) \to \inf$, $u \in U \subseteq H$ - гильб. пр-во

u_k - известно

$u_{k+1} = u_k + \alpha p_k$, $p_k \in H$, ~~[illegible]~~

$J(u_{k+1}) \le J(u_k)$ - монотонный метод
(может и не быть монот.)

Проблемы:

1) α и p_k должны не выводить за U
(α - длина шага, p_k - напр.)
Как этого добиться?

2) как выбирать нач. точку u_0?
(обычно из биологии, физики... и др. соображений
а так просто - очень трудно.
Иногда даже нельзя сказать, пусто ли U

3) $U = \varnothing$?

4) когда заканчивать счёт?

тоже ничего нельзя сказать.
напр., $|J(u_{k+1}) - J(u_k)| < \varepsilon$ или $\|u_{k+1} - u_k\| \le \delta$
(подряд 10 шагов сдвига нет)

5) сходимость? скорость сх-ти?
надо д-ть, что хотя бы для какого-нибудь
оп. класса метод сходится

6) устойчивость
метод должен не реагировать на наши
погрешности

Бывают многошаговые методы, когда учитываются
р-ты ~~[illegible]~~ вычислений на неск. шагов назад.
$u_{k+1} \in A(u_k, u_{k-1}, \dots)$

Градиентный метод

самый древний метод — перебор
этот метод предложил Коши

Зад: $J(u) \to \inf,\ u \in H, \quad J(u) \in C^1(U)$ (1)

Метод: $u_{k+1} = u_k - \alpha_k \underbrace{J'(u_k)}_{p_k}, \quad k = 0, 1, \dots$ (2)

градиент локально указывает напр. наиб. ~~спуска~~ подъема

$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle + \bar{o}(\|h\|)$

$\Rightarrow \quad -\|J'(u)\| \cdot \|h\| \le \langle J'(u), h \rangle \le \|J'(u)\| \cdot \|h\|,$

причем $\ominus \Leftrightarrow h = -J'(u) \quad (J'(u) \parallel h)$

min $\Rightarrow$ двигаемся $\downarrow$ $\Rightarrow$ антиградиент.

только Коши (1815–1820 гг) ввел понятия предела, беск. малых вел-н. До него более нормального опр. производной не было („в последний миг, когда $\Delta x = 0$...")

Выбор α_k:

1) метод скорейшего спуска

$J(u_k - t J'(u_k)) = f_k(t) \to \inf, \quad t > 0$

идем до макс. глубины антиградиента
нехорошо! т.к. в далеких точках уже другие градиенты.

2) $\alpha_k = \alpha$ (с постоянным шагом)

~~3) ?~~

3) дробление α_k:

задаем α_k и проверяем: $J(u_{k+1}) \overset{?}{<} J(u_k)$
если нет $\Rightarrow$ дробим.

. . .

(3) Мы рассм. случай $\alpha_k = \alpha = const$

ТЕОРЕМА: (сходимости)

Пусть $U = H$,
$J(u)$ — сильно вып. (можно док-ть и для вып.)
$J(u) \in C^1(H)$

$$\|J'(u) - J'(v)\| \le L\|u-v\|$$ (усл. Липшица — градиент ведет себя прилично)

тогда метод (1), (2), (3) сходится, для

1) $\alpha_k = \alpha \in \left(0, \frac{2\mu}{L^2}\right)$ (μ — const из сильной выпуклости J)
$\langle J'(u) - J'(v), u-v \rangle \ge \mu \|u-v\|^2$

2) при $\forall u_0$ к u_*.

3) скорость сх-ти: $\|u_k - u_*\| \le q^k \|u_0 - u_*\|$, $k = 0, 1, \dots$

$$q^2 = 1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2 = q^2(\alpha)$$

покажем, что $\mu \le L$:

$$\mu\|u-v\|^2 \le L\|u-v\|^2$$

из $\langle J'(u) - J'(v), u-v \rangle \ge \mu\|u-v\|^2$ ← из усл. Липшица

Наилучшая ск-ть: $q_* = \sqrt{1-\left(\frac{\mu}{L}\right)^2}$

Лекция $\boxed{15.11}$

~~Градиентный метод~~

$J(u) \to \inf, \quad u \in H$

$u_{k+1} = u_k - \alpha J'(u_k)$

Док-во: $u_* - \exists$ (по т. Вейерштрасса для сильновып. ф-ций)

введем оп-р $Au = u - \alpha J'(u)$ — определен $\forall u$ ($\exists J'(u)$)

$\Rightarrow A u_{k+1} = Au_k$

$u_* = Au_* = u_* - \alpha \underbrace{J'(u_*)}_{0}$

Покажем, что оп-р - сжимающий

$\|Au - Av\|^2 = \|u - \alpha J'(u) - v + \alpha J'(v)\|^2 =$

$= \|u-v\|^2 - 2 \langle \underbrace{J'(u) - J'(v), u-v}_{\geq \mu \|u-v\|^2} \rangle \alpha + \alpha^2 \underbrace{\|J'(u) - J'(v)\|^2}_{\leq L^2 \|u-v\|^2}$

$=$ { усл. Липшица для grad

$\leq \|u-v\|^2 \left(1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2\right) \leq \Theta^2 \|u-v\|^2, \quad 0 < \Theta < 1$

$\Rightarrow \|Au - Av\| \leq \Theta \|u-v\| \Rightarrow$ оп-р сжимающий

$\Rightarrow$ процесс сх. к неподвижной точке

$\Rightarrow u_k \xrightarrow{\|\cdot\|} u^*$

Оценка

$$\|\underbrace{u_{k+1}}_{=Au_k} - \underbrace{u_*}_{=Au_*}\| = \|Au_k - Au_*\| \le \theta\|u_k - u_*\| \le \{\text{аналог}\} \le$$

$$\le \theta^2\|u_{k-1} - u_*\| \le \dots \le \theta^{k+1}\|u_0 - u_*\|, \quad \theta = q$$

Теорема док-на

$\alpha = \frac{\mu}{L^2}$ – самый лучший вариант, но в реальных задачах мы знаем ни μ, ни L, есть только $\approx$ верхние оценки.

Пример:

$J(u) = \frac{1}{2}\|Au - f\|_F^2, \quad A \in \mathcal{L}(H \to F), \ f \in F$

$J'(u) = A^*(Au - f),$

$J''(u) = A^*A$

$\Rightarrow \ u_{k+1} = u_k - \alpha A^*(Au_k - f)$

Усл. Липшица:

$\|J'(u) - J'(v)\| = \|A^*A(u-v)\| \le \|A^*A\|\|u - v\|$ есть

($\|A^*A\|$ – $\leftarrow L$)

Сильная вып: 2-ой критерий сильной вып:

$\langle J''(u)h, h\rangle = \underline{\langle A^*Ah, h\rangle \ge \mu\|h\|^2}$ $\to$ это уже надо требовать.

$\Rightarrow$ смысл μ и L:

μ – младшее с.з. A^*A

L – max с.з. A^*A

процесс будет сх.

<u>Недостатки град. метода</u>: сх. очень медленно (q близко к 1)

1) если $\mu << L$ (большой разброс с. з)

$\Rightarrow$ то $q = 1 - \left(\frac{\mu}{L}\right)^2$ близко к 1.

Можно это увидеть и практически,

рассм. $J(u) = \frac{x^2}{10^4} + y^2$

$J(u) = C$ (линии уровня) — эллипсы, очень вытянуты

Спуск очень быстрый и крутой до 0 никогда не дойдём

это жёсткая система (овражная ф-я)
(по x нечувствит., а по y очень чувствит.)
вел-ны разномасштабные
надо превратить эллипс в сферу (замена перемен.)
тогда всё быстро сойдётся (за 1 шаг)

2) с точки зрения теории: не знаем μ, L.
Можем действовать только на ощупь

Метод проекции градиента

для задачи $J(u) \to \inf$, $u \in U$ - вып., замкн. из H,
$\exists J'(u) \in C^1(U)$

если делать по-старому $u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k)$ $\Rightarrow$ можем вылезти из U. На замкн. вып. мн-во можно проец.

$\Downarrow$

$$u_{k+1} = P_U(u_k - \alpha_k J'(u_k))$$

проекция

ТЕОРЕМА (сходимости)

Пусть U – выпукл. замкн. из H,

$J(u) \in C^1(U)$

$J(u)$ – сильно вып. ($\Rightarrow$ по критерию для $J \in C^1$ $\mu\|u-v\|^2 \le \langle J'(u)-J'(v), u-v\rangle$)

$\|J'(u)-J'(v)\| \le L\|u-v\|$

Тогда $\forall u_0 \in U$ $\{u_k\} \to u_*$, если $0 < \alpha < \frac{2\mu}{L^2}$

$\|u_k - u^*\| \le q^k \|u_0 - u_*\|$, $q = \sqrt{1-2\alpha\mu+\alpha^2L^2}$

(как и для пред. метода)

Док-во:

введем A: $Au = P_U(u-\alpha J'(u))$

$u_* = Au_* = P_U(u_* - \alpha J'(u_*))$ $\forall \alpha > 0$

$u_{k+1} = Au_k$

докажем, что A – сжимающий оп-р:

$\|Au - Av\|^2 = \|P_U(u-\alpha J'(u)) - P_U(v-\alpha J'(v))\| \le \{\|P(u)\| \le 1\}$

$\le 1 \cdot \|u - \alpha J'(u) - v + \alpha J'(v)\| = \underline{\text{см. выше (пред. т.)}}$

$\le q^2\|u-v\|^2$

$\Rightarrow$ процесс сходится и сх. к неподв. точке u_*

Оценка скорости сх-ти: анал. пред. теореме

ч.т.д.

Пример:

1) $J(u) = \frac{1}{2}\|Au - f\|_F^2 \to \inf, \ u \in U$

$A \in \mathcal{L}(H \to F), f \in F$

$u_{k+1} = P_U(u_k - \alpha [A^*(Au_k - f)])$

Для задачи о нагреве стержня:

$u_{k+1} = P_U(u_k - \alpha\psi(t, l; a_k)) = \{U = \{\alpha \le u(t) \le \beta\}\}$

$$= \begin{cases} \alpha, \text{ если } u_k - \alpha\psi(t, l; a_k) < \alpha. \\ \beta, \text{ если } \text{— " —} > \beta \\ u_k - \alpha\psi(t, l; a_k), \text{ иначе} \end{cases}$$

Уметь выписывать оба метода для всех задач, к-рые мы прошли

2) $J(u) = x^2 + xy + y^2$, $(x, y) \in$ параллелепипеду

← сильновып. ∃ конст. Липшица

(с. $x^2 + 2xy + y^2$ – уже проблемы)

Недостатки:

те же, так же плохо сходится, только надо еще проектировать на каждом шаге

Достоинства:

простая, красивая, естеств.

Методы первого порядка: $J'(u)$ ∃ и: в методе путем только значения о grad

1) метод возможных направлений (исп. градиент хитрым образом)

2) метод условного градиента $u_{k+1} = u_k - \alpha p_k$.

3) метод сопряженных градиентов.

Метод Ньютона

(1) $J(u) \to \inf$, $u \in U$ - вып. замкн. из H (напр. $U = H$), $J(u) \in C^2(U)$

> Это почти неподвижность мука
> Мчаться куда-то со скоростью звука
> Зная прекрасно, что есть уже где-то
> Некто, летящий со скоростью света
>
> Л. Мартынов

Пусть u_k - известно

Разлагаем $J(u)$ в ряд Тейлора в т. u_k.

(2) $$J(u) = J(u_k) + \langle J'(u_k), u - u_k \rangle_H + \frac{1}{2}\langle J''(u_k)(u-u_k), u-u_k\rangle_H + \cancel{\bar{o}(\|u-u_k\|^2)}$$

(3) Задача: $J_k(u) \to \inf$, $u \in U \Rightarrow u_{k+1}$: $J_k(u_{k+1}) = \min_U J_k(u)$

вспомогательная

u_{k+1} - точка min вспомогат. задачи 74

Рассм. $U = H$

$J'(u) = 0$

$J'_k(u_{k+1}) = 0$ ~~$= J'(u_k) + J''(u_k)(u - u_k)$~~

$J'_k(u) = J'(u_k) + J''(u_k)(u - u_k) = 0$

$\Rightarrow J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k) = 0$

$\Rightarrow J''(u_k)(u_{k+1} - u_k) = -J'(u_k)$

$u_{k+1} - u_k = -(J''(u_k))^{-1} J'(u_k)$

$\Downarrow$

$$\boxed{u_{k+1} = u_k - (J''(u_k))^{-1} J'(u_k)}$$ – метод Ньютона

(В одном. случае – метод касательных:

$f(x) = 0 \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$y(x) = f'(x) = 0 \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$ – то же самое мы и получили)

Лекция

22.11

$J(u) \to \inf, u \in U \qquad J(u) \in C^2(U) \qquad (1)$

u_k – изв, $J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k\rangle + \frac{1}{2}\langle J''(u_k)(u - u_k), u - u_k\rangle$

$\longrightarrow \inf, u \in U \Rightarrow u_{k+1}. \qquad (2)$

u_{k+1} может быть много, но это мы сейчас не обсуждаем

ТЕОРЕМА

пусть U – вып., замкн. из H (в частности, $U = H$)
$\text{int}\, U \neq O$

$J(u) \in C^2(U)$, $J(u)$ – сильно вып.

(3) $\|J''(u) - J''(v)\| \leq L\|u - v\|$, $\forall u, v \in U$

Пусть начальное приближение:

(4) $\|u_0 - u_*\| < \frac{2\mu}{L}$ (L – const. Липшица, μ – из усл. сильной вып.)

$\langle J''(u)h, h\rangle \geq \mu\|h\|^2$

Тогда (2) порождает сх-ся посл-ть $\{u_k\}$:

(5) $\|u_k - u_*\| \leq \frac{2\mu}{L} q^{2^k}$, $q = \frac{L\|u_0 - u_*\|}{2\mu} < 1$

Док-во: 1) из т. Вейерштрасса для сильновып. ф-ции $u_*\ \exists!$

2) если u_k известно, то по нему однозначно определяется u_{k+1} т.к. J_k – сильно вып.:

$J_k'(u) = J'(u_k) + J''(u_k)(u - u_k)$, $J_k''(u) = J''(u_k)$

$\Rightarrow \langle J_k''(u)h, h\rangle = \langle J''(u_k)h, h\rangle \geq \mu\|h\|^2$

$\Rightarrow J_k(u)$ – сильно вып.

(здесь существ. роль играет условие $\text{int}\, U \neq \varnothing$)

3) $J_k(u_{k+1}) = \min\limits_{u \in U} J_k(u) \iff \langle J_k'(u_{k+1}), u - u_{k+1}\rangle \geq 0\ \forall u \in U$ (критерий оптимальности)

$\langle \underbrace{J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k)}_{J_k'(u_{k+1})}, u - u_{k+1}\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$

тот же критерий справедлив и для u_*:

$$u_* \Leftrightarrow \quad \langle J'(u_*), u-u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$$

подставим в верхнее $u = u_*$,
в нижнее $u = u_{k+1}$:

$$\langle J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1}-u_k), u_* - u_{k+1} \rangle \geq 0$$

(+)

$$\langle J'(u_*), u_{k+1} - u_* \rangle \qquad \geq 0$$

$$0 \leq \langle J'(u_*) - J'(u_k) - J''(u_k)(u_{k+1} \overset{\pm u_*}{-} u_k), u_{k+1} - u_* \rangle =$$

$$= \langle J'(u_*) - J'(u_k), u_{k+1} - u_* \rangle - \underbrace{\langle J''(u_k)(u_{k+1}-u_*), u_{k+1}-u_* \rangle}_{\geq \mu \|u_{k+1}-u_*\|^2} -$$

$$- \langle J''(u_k)(u_*-u_k), u_{k+1}-u_* \rangle$$

ф-ла конечных приращений:

$$\langle J'(u+h) - J'(u), z \rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, z \rangle dt$$

$$\Rightarrow \sim = \int_0^1 \langle J''(u_k + t(u_*-u_k))(u_*-u_k), u_{k+1} - u_* \rangle dt$$

$$\mu \|u_{k+1} - u_k\|^{\cancel{2}} \leq \int_0^1 \langle \underbrace{[J''(u_k + t(u_*-u_k)) - J''(u_k)]}_{\text{усл. Липшица}}(u_*-u_k), u_{k+1} - u_* \rangle dt$$

$$\overset{\text{К-Б}}{\leq} L \int_0^1 t \|u_* - u_k\|^2 \|\cancel{u_{k+1}} - u_*\| dt$$

$$\Rightarrow \mu \|u_{k+1} - u_k\| \leq L \|u_k - u_*\|^2 \int_0^1 t\, dt = \frac{L}{2} \|u_k - u_*\|^2$$

$$\|u_{k+1} - u_k\| \leq \frac{L}{2\mu} \|u_k - u_*\|^2, \quad k = 0, 1, \dots \qquad (6)$$

Используя (6), докажем (5) по индукции:

$k=0$: $\|u_0 - u_*\| \le \frac{2\mu}{L}$ $(q^{2^0}=q)$ в силу (4)

доп., что для

$k \ge 1$ $\|u_k - u_*\| \le \frac{2\mu}{L} q^{2^k} \overset{(6)}{\Longrightarrow} \|u_{k+1} - u_*\| \le \frac{L}{2\mu}\left(\frac{2\mu}{L} q^{2^k}\right)^2 =$

$$\Rightarrow \|u_{k+1} - u_*\| \le \frac{L}{2\mu}\left(\frac{2\mu}{L}\right)^2 q^{2^k} q^{2^k} = \frac{2\mu}{L} q^{2^{k+1}}$$

чтд

„+" и „−" метода:

„+"
1) высокая скорость сх-ти
2) на каждом шаге надо min квадр. ф-ю (это и недостаток), но если

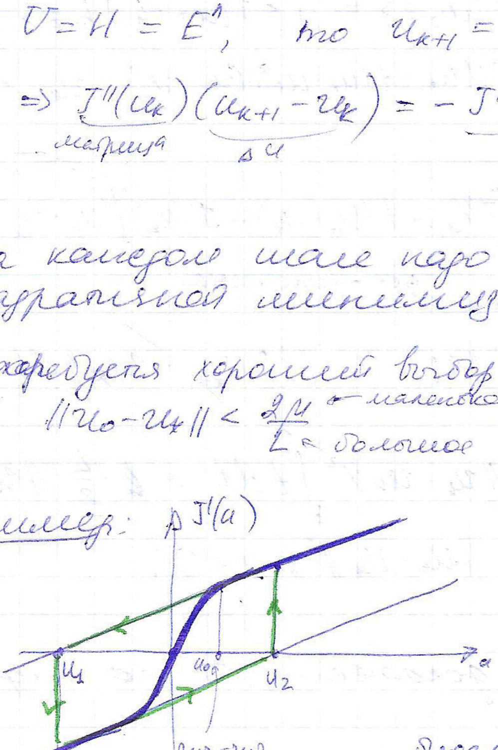
$U = H = E^n$, то $u_{k+1} = u_k - (J''(u_k))^{-1} J'(u_k) \,\Big|\, \cdot J''(u_k)$

$$\Rightarrow \underbrace{J''(u_k)}_{\text{матрица}} \underbrace{(u_{k+1} - u_k)}_{\Delta u} = -J'(u_k) \quad \text{— СЛАУ}$$

„−"
1) на каждом шаге надо решать задачу квадратичной минимизации

2) требуется хороший выбор нач. приближения:
$\|u_0 - u_*\| < \frac{2\mu}{L}$ (μ ← маленькое, L ← большое) $\Rightarrow$ u_0 близко к u_*

Пример:



u_*: $J'(u) = 0$ $u=0$

туда-сюда промахнулись ⇒ будем бегать по кругу

$J''(u_k) \geq \mu > 0 \Rightarrow J''(u_k) h^2 \geq \mu h^2$ => сильно вып. ф-ия капризна к выбору нач. приближения

обычно делают в 2 этапа: находят нач. приближение плохо сх-ся методом (напр., градиентным), потом метод Ньютона.

каждый раз вычислять обратную плохо. Заменить этот обратный опер-р другим опер-ом!

$u_{k+1} = u_k - (\underbrace{J''(u_k)}_{\text{матрица}})^{-1} J'(u_k)$

$u_{k+1} = u_k - A_k J'(u_k)$

надо найти A_k:

а) оно легко вычисляется

б) $\|A_k - (J''(u_k))^{-1}\|_{k \to \infty} \to 0$

конечно, скорость сх-ти будет хуже, но всё же...

квазиньютоновские методы

если нет производных?

МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА

„Коль нет цветов среди зимы,
Так и грустить о них не надо"
Есенин

1,2 произв.

$J(u) = J(u^1, u^2, \ldots, u^n) \to \inf, \quad u \in E^n$, нет никаких производных.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис

вдоль каждой оси будем перебирать значения ф-ции

79 и искать те напр., по кот-рым будет уменьшаться знач. ф-ции

Пусть известно u_k — n-мерная точка и
α_k — параметр.

$\boxed{J(u_k + \alpha_k e_1) < J(u_k)} \xrightarrow{да} u_{k1} = u_k + \alpha_k e_1$

↓ нет

$\boxed{J(u_k - \alpha_k e_1) < J(u_k)} \xrightarrow{да} u_{k1} = u_k - \alpha_k e_1$

↓ нет

$u_{k1} = u_k$

↓

$\boxed{J(u_{k1} + \alpha_k e_2) < J(u_{k1})} \xrightarrow{да} u_{k2} = u_{k1} + \alpha_k e_2$

↓ нет

$\boxed{J(u_{k1} - \alpha_k e_2) < J(u_{k1})} \xrightarrow{да} u_{k2} = u_{k1} - \alpha_k e_2$

↓ нет

$u_{k2} = u_{k1}$

↓

и т. д. по всем осям

Цикл считается удачным, если где-то произошло убывание:

$$u_{kn}: \quad J(u_{kn}) < J(u_k) \Rightarrow u_{k+1} = u_{kn}, \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k$$

Если нигде не произошло убывание =>

$$u_{k+1} = u_k, \quad \alpha_{k+1} = \lambda\alpha_k, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{(дробим шаг)}$$

(Этот вариант метода предложил студент Жданов лет 20-30 назад)

Признак неудачного цикла:

$$J(u_k \pm \alpha_k e_i) \geq J(u_k), \quad i = 1, \dots, n$$

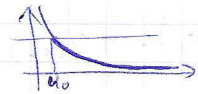
ТЕОРЕМА:

Пусть 1) $J(u) \in C^1(E^n)$ — вып.

2) мн-во Лебега $M(u_0) = \{u \in E^n : J(u) \le J(u_0)\}$ — огр.

Тогда $\{u_k\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) \to 0$

(метод сходится и по ф-ции, и по аргументу)

требование (2) — сильное:  здесь мн-во Лебега неогр.

Док-во:

1) $U_* \ne \emptyset$, т.к. $U_* \in M(u_0)$ — огр, $J(u)$ — непр. на $M(u_0)$
$\Rightarrow$ по т. Вейерштрасса inf достигается

2) $J(u_0) \ge J(u_1) \ge \dots \ge J(u_k) \ge \dots$, $J(u_k) \ge J_*$

посл-ть убывает и огр. снизу $\Rightarrow \exists \lim J(u_k) \ge J_*$

Докажем, что $\lim J(u_k) = J_*$

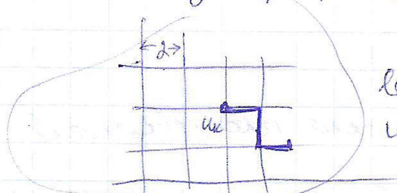
а) Докажем, что число неудачных циклов ∞:
(от противного):

Допустим, что α_k не дробится с какого-то номера:

$\alpha_k = \alpha \quad \forall k \ge k_0$

$\Downarrow$

метод превращается в:



каждый раз цикл удачный $\Rightarrow$ все время будем гулять, не возвращаясь в исх. точку:

$J(u_{k+1}) < J(u_k)$

Но сколько можно гулять по такой сетке?
мн-во Лебега огр., $u_k \in M(u_0)$ $\forall k \Rightarrow$ обойдём все точки $\Rightarrow$ найдем min $\Rightarrow$ будет неудача $\Rightarrow$ надо дробить $\Rightarrow$ противоречие

т.о. будет бесконечное число неудачных циклов с

$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_e}, \dots$

$\alpha_{k_i} \xrightarrow{i\to\infty} 0$ т.к. дробится

На каждом выпп. $J(u_{k_e} \pm \alpha_{k_e} e_i) \geq J(u_{k_e}) \quad \forall i = 1 \dots n$

$\Rightarrow J(u_{k_e} \pm \alpha_{k_e} e_i) - J(u_{k_e}) = \frac{\partial J(u_{k_e} \pm \theta_i \alpha_{k_e} e_i)}{\partial u^i} (\pm \alpha_{k_e} e_i) \geq 0$

делим на $\pm \alpha_{k_e}$ $(\alpha_{k_e} > 0)$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial J(u_{k_e} \pm \theta_i \alpha_{k_e} e_i)}{\partial u^i} \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \Rightarrow = 0 \quad i = 1, \dots, n.$

$\{u_k\} \in M(u_0) \Rightarrow$ по т. Больцано-Вейерштрасса $\exists u_{k_{e_s}} \to u_*$

$\frac{\partial J(u_{k_{e_s}} \pm \theta_i \overset{0}{\alpha_{k_{e_s}}})}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad \xrightarrow{s\to\infty} \quad \frac{\partial J(u_*)}{\partial u^i} = 0 \quad i = 1 \dots n$

$\Rightarrow \quad J'(u_*) = 0, \quad J(u)$ — вып $\Rightarrow u_* \in U_*$

$\lim J(u_{k_{e_s}}) = J_*, \quad \exists \lim J(u_k) \geq J_*,$ посл. $\downarrow \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$

<u>чтд</u>

„+": метод прост, не требует знания производной

„−": плохо сходится, может вообще не сходиться

Лекция

29.11.

Рассм. ф-ю

$$J(u) = x^2 + y^2 - 2(x+y) + 2|x-y|$$

нет гладкости → метод не работает

Можно реализовать для параллелепипеда (огр. обл): всё также, но шаг считается неудачным, если вылезли за пределы параллелепипеда

Парр α можно выбирать из метода скорейшего спуска → метод Зейделя

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle$$

Мы в город изумрудный
Идём дорогой трудной,
Идём дорогой трудной,
Дорогою прямой.

МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

$$J(u) \to \inf, \quad u \in U \qquad (1)$$

возьмём для простоты

$$U = \{u \in U_0 : g_i(u) \le 0, \ i = 1, \dots, m, \ g_i(u) = 0 \ \ i = m+1, \dots, s\} \qquad (2)$$

U_0 – шар, параллелепипед, гипероктант, всё просто,

штрафы помогут избавиться от ~~огр~~ ограничений

Опр: $\{P_k(u)\}$ называется штрафной ф-цией мн-ва U на мн-ве U_0, если:

$$\lim_{k\to\infty} P_k(u) = \begin{cases} 0, & \forall u \in U \\ +\infty, & \forall u \in U_0 \setminus U \end{cases}$$

Пример штрафной ф-ции:

$$P_k(u) = A_k \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(u), 0\} + \sum_{i=m+1}^{s} |g_i(u)|\right)}_{P(u)},$$

штрафных ф-ций можно придумать сколько угодно. $A_i > 0$, $\lim_{u\in U_0} A_k = +\infty$.

Наша ф-я негладкая. Смотрим:

(3) $$P_k(u) = A_k\left(\sum_{i=1}^{m} (\max\{g_i(u), 0\})^{p_i} + \sum_{i=m+1}^{s} (|g_i(u)|)^{p_i}\right)$$

p_i ~~>1~~ — регулятор гладкости

обозн. $(\max\{g_i(u), 0\}) = g_i^+(u)$ (срез ф-ции)

$$|g_i(u)| = g_i^+$$

$$\Rightarrow P_k(u) = \sum_{i=1}^{s} (g_i^+(u))^{p_i}, \quad u \in U_0,$$

$$P(u) = \frac{1}{A_k}\left(\sum_{k=1}^{m} e^{A_k g_i(u)} + \sum_{i=m+1}^{s} e^{A_k g_i^2(u)}\right), \quad A_k \to +\infty$$

ф-я настолько же гладка, насколько $g_i(u)$

Сам метод:

образуем ф-ю (4)

$$\Phi_k(u) = J(u) + P_k(u) = \{\text{напр.}\} = J(u) + A_k P(u) \to \inf_{u \in U_0}$$

ф-я стала похуже, зато мн-во хорошее (U_0)

Идея: (Р. Курант)
A_k не даёт нам искать min там, где не надо (оно там большое). Будем искать там, где A_k ведёт себя спокойно (в U)

Задачу (4) можно решать приближённо: (5)

ищем $u_k \in U_0$: $\Phi_k(u_k) \le \underbrace{\inf_{U_0} \Phi_k(u)}_{> -\infty} + \varepsilon_k$, $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$

Бывает и хорошо, и плохо:

Пример 1 (когда хорошо)

$$J(u) = x^2 + xy + y^2, \quad U = \{u = (x,y) : x - y - 2 = 0\}, \quad u \in E^2 = U_0$$

$$\Phi_k(u) = x^2 + xy + y^2 + \underset{A_k}{k}(x - y - 2)^2 \to \inf, \quad u \in E^2$$

для гладкости

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} = 0 \Rightarrow (x_k, y_k) = \left(\frac{4k}{3+4k}, \frac{4k}{3+4k}\right),$$

$\varepsilon_k = 0$

$$\Rightarrow (x_k, y_k) \to (1, 1) = u_*$$

$$J_*^* = 3.$$

Всё прекрасно

Пример 2 (метод штрафов отказывает)

$$J(u) = e^{-u} \to \inf, \quad U = \{u \in E^1_{U_0},\ g(u) = ue^{-u} = 0\}$$
$\{0\}$

$\Rightarrow U = \{0\} \Rightarrow u_* = 0, \quad J_* = 1$

Теперь применим штраф: (в виде (3))

$$\Phi_k(u) = e^{-u} + kg^2(u) = e^{-u} + ku^2e^{-2u} \to \inf, \ u \in E^1$$

нижняя грань $\inf\limits_{u \in E^1} \Phi_k(u) = 0$ ~~достигается при~~ $(u = +\infty)$

$\Rightarrow u_k = k$ удовл. (5) при $\varepsilon_k = \Phi(u_k) = e^{-k} + k^3e^{-2k} \to +0$

$\Rightarrow u_k \to +\infty \Rightarrow J(u_k) = e^{-k} \to 0 < J_*$

~~причина: k^3e^{-2k} мало далеко от хорошей точки~~ ~~всех~~

$\boxed{T}$ $J(u), g_i(u)$ $i = 1 \ldots s$ — определены и конечны на U_0 $+ \inf\limits_{U_0} \Phi_k(u) > -\infty$
тогда метод штрафов (3), (5) порождает $\{u_k\}$:

(6) $$\varlimsup_{k \to \infty} J(u_k) \le \varlimsup_{k \to \infty} \Phi_k(u_k) \le J_*$$

Док-во:

$$J(u_k) \le J(u_k) + \overbrace{A_k}^{>0} \overbrace{P(u_k)}^{\ge 0} = \Phi_k(u_k) \overset{(3)}{\le} \inf_{U_0} \Phi_k(u) + \varepsilon_k \le$$
$$\le \Phi_k(u) + \varepsilon_k = J(u) + A_k P(u) + \varepsilon_k \qquad \forall u \in U_0, \ k = 1, 2, \ldots$$

в частности, это верно $\forall u \in U$. Там $P(u) = 0$

$\Rightarrow J(u_k) \le \Phi_k(u_k) \le J(u) + \varepsilon_k \quad \forall u \in U$

Переходим к пределу $\to$ ..

чтд

$\boxed{T2}$ Пусть $J(u), g_i(u)$ — определены и конечны на U_0,

$$J_{**} = \inf_{U_0} J(u) > -\infty$$

тогда вып. (6) и $\lim\limits_{k\to\infty} g_i^+(u_k) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, g_i(u_k) \le 0 & i=1,\dots,m \\ \lim\limits_{k\to\infty} g_i(u_k) = 0. & i=m+1,\dots,s \end{cases}$$

Док-во: 1) $J_* \ge J_{**} > -\infty$

$$\Phi_k(u) \ge J(u) \ge J_{**} \quad \forall u \in U_0$$

$$\Downarrow$$

$$\inf_{U_0} \Phi_k(u) \ge J_{**} > -\infty \quad \overset{T.1}{\Longrightarrow} \quad (6)$$

2) $0 \le A_k P(u_k) = \Phi_k(u_k) - J(u_k) \le const - J_{**} = const = C_0$

$$\Rightarrow 0 \le P(u_k) \le \frac{C_0}{A_k} \to 0.$$

$$\Rightarrow P(u_k) \to 0 \quad \overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad g_i^+(u_k) \to 0$$

$\boxed{T3}$ пусть U_0 — слабо замкн. из H (все слабо предельные посл-ти остаются там же)

$J(u), g_i^+(u)$ — слабо полунепр. снизу на U_0

$J_{**} > -\infty$

$U(\delta) = \{u \in U_0 : g_i^+(u) \le \delta \quad i=1,\dots,s\} =$

$= \{u \in U_0 :$ т.ч. $g_i(u) \le \delta \quad i=1,\dots,m$

$|g_i(u)| \le \delta \quad i=m+1,\dots,s\}$

слабо комп. при некотором $\delta > 0$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$, $\{u_k\} \xrightarrow{сл} u_*$

то, что выделяли методом (5)

Док-во:

$\cancel{\Phi_k(u) \geq I(u) \geq I_{**}}$

$\Rightarrow \inf\limits_{U_0} \Phi_k(u) > -\infty \Rightarrow$ метод (5) $\Rightarrow \exists \{u_k\}$

Из Т.1,2 $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} g_i^+(u_k) = 0 \Leftrightarrow \overline{\lim}\, g_i(u_k) \leq 0 \quad i=1\dots m$

$\lim g_i(u_k) = 0 \quad i=m+1,\dots,s$

$\Rightarrow g_i(u_k) \leq \delta \quad \forall k \geq k_0$

$|g_i(u)| \leq \delta \quad k \geq k_0$ $\Big| \in U(\delta)$ - сл. комп, $\exists \{u_{k_l}\} \xrightarrow{сл} u_*$

06.12 Лекция

$$U = \{u \in U_0 : \underset{i=1,\dots,m}{g_i(u) \leq 0}, \underset{i=m+1,\dots,s}{g_i(u) = 0}\}$$

$\underset{\underset{U_0}{\cap}}{\{u_{k_l}\}} \xrightarrow{сл} u_*$

$u_* \in U_0$ - сл. замкн.

$|g_i(u_*)| \overset{\text{сл. н/н снизу}}{\leq} \underline{\lim}\, |g_i(u_{k_l})| \leq \overline{\lim}\, |g_i(u_{k_l})| = 0 \quad i=1,\dots,m$

$\lim\limits_{l\to\infty} g_i^+(u_{k_l}) = 0 \rightarrow \lim\limits_{l\to\infty} |g_i(u_{k_l})| = 0 \rightarrow g(u_*) = 0 \quad i=\overline{m+1, s}$

$\Downarrow$

$u_* \in U$

$J_* \leq J(\overset{\in U}{u_*}) \leq \underline{\lim}\, J(u_{k_l}) \leq \overline{\lim\limits_{l\to\infty}}\, J(u_{k_l}) \overset{Т1}{\leq} J_* \Rightarrow$

$\Rightarrow J(u_*) = J_* = \lim\limits_{l\to\infty} J(u_{k_l}) \overset{\text{в силу произвольности выбора сл. послед-сти}}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$

$\{u_k\} \xrightarrow{сл.} U_*$

Теорема 4 (то же, но в E^n, следствие Т3)

пусть U_0 - замкн. мн-во из E^n,
$J(u)$, $g_i^+(u)$, $i = 1 \dots s$ — п/н снизу
$J_{**} = \inf\limits_{U_0} J(u) > -\infty$

$U(\delta) = \{u \in U_0 : g_i^+(u) \le \delta \quad i = 1, \dots, s\}$ — огр. при некотором $\delta > 0$

(замкнутость $U(\delta)$ в силу п/н снизу $g_i^+(u)$ и замкн. U_0)

$\{A_k\} \to \infty$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$

Тогда посл-ть $\{u_k\}$, кот. получается из метода штрафных ф-ций, J, и

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*,$$

$$\lim_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = 0.$$

„+" метод универсальный, гибкий (штрафует $\forall$ кол-во условий)

~~всегда~~ как решается задача $\Phi_k(u) \to \inf$ $\to \forall$ методом

„−" метод не всегда сх. (т.к. $A_k \to \infty$ может всё испортить)

Пример: $J(u) = x^2 + y^2 \to \inf$, $U = \{x \le 0\}$

$\to x^2 + y^2 + A_k(\max\{x, 0\})^2 \to \inf$, $u \in E^1$

малые изм. x могут привести к огромному приросту ф-ции

x и y очень разномасштабные $\to$ алг. медленно сходится.

на практике метод штрафов применяют на первых порах, когда о задаче ничего неизвестно, для нахожд. нач. прибл.

Правило множителей Лагранжа

„знание некоторых принципов легко возмещает незнание некоторых фактов"
Гельвеций

Задача:

(1) $J(u) \to \inf, \ u \in U$

(2) $U = \{u \in U_0, \ g_i(u) \le 0 \ {}^{i=1,\dots,m}, \ g_i(u) = 0 \ {}^{i=m+1,\dots,s}\}$

ф-я Лагранжа (в современном понимании)

$$\mathcal{L}(u, \bar\lambda) = \lambda_0 J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u), \quad u \in U_0, \ \bar\lambda \in \tilde\Lambda_0$$

$$\tilde\Lambda_0 = \{\bar\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) : \lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \dots, \lambda_m \ge 0\}$$

ТЕОРЕМА: (принцип Лагранжа в n-мерном пр-ве)
пусть U_0 – вып., замкн. мн-во из E^n,
$J(u), g_i(u) \in C^1(U_0)$,
$J_* > -\infty$
u_* – точка лок. min
$J(u_*) \le J(u) \ \forall u \in U_0 \cap \{|u - u_*| \le \gamma\}, \ \gamma > 0$.

(3) тогда $\xRightarrow{\text{необх}} \exists \ \bar\lambda^* \ne 0, \ \bar\lambda^*_0 \in \tilde\lambda_0$

(4) $$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(u_*, \bar\lambda^*)}{\partial u}, u - u_* \right\rangle \ge 0 \quad \forall u \in U_0$$

(5) $\lambda_i^* g_i(u_*) = 0, \quad i = \overline{1,m}$ (условие дополняющей нежёсткости)

$(\checkmark) \Leftrightarrow \mathcal{L}(u_*, \bar\lambda^*) = \inf\limits_{V_0} \mathcal{L}(u, \bar\lambda^*) \overset{\text{если } V_0 = E^n}{=\!=} \dfrac{\partial \mathcal{L}(u_*, \bar\lambda^*)}{\partial u} = 0$

т.е. ограничения надо загнать в какую-то функцию, а потом минимизировать её

Выбросим случаи, когда $\lambda_0 = 0$

неизвестные: u_* – n штук
$\bar\lambda$ – $(s+1)$

надо иметь столько же уравнений:

$(n+s+1)$ ур-е

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathcal{L}(u_*, \bar\lambda^*)}{\partial u} & \text{– n уравнений} \\
\lambda_i^* g_i(u_*) = 0, & i = 1, \dots, m \\
g_i(u_*) = 0, & i = m+1, \dots, s
\end{cases}
\quad \text{s уравнений}
$$

$\bar\lambda^*$ удовл. т. $\Rightarrow \alpha\lambda^*$ $\forall \alpha > 0$ тоже удовл. ур-ю
$\Rightarrow \lambda$ определена с точностью до множит.
$\Rightarrow$ нормировка $\Rightarrow$ еще одно ур-е:
$|\bar\lambda^*|^2 = 1$

на базе метода Лагранжа можно сотворить итерац. ~~[illegible]~~ процесс

Док-во теоремы: (опираясь на метод штрафов)

1) сузим мн-во U_0: рассм. мн-во

$$W_0 = U_0 \cap \{|u-u_*| \le \gamma\},$$

Будем рассм. задачу:

$$g_0(u) = J(u) + |u-u_*|^2 \to \inf_W,$$

(6) где $W = \{u \in W_0 : g_i(u) \le 0,\ i=1,\dots,m,\ g_i(u)=0,\ i=\overline{m+1,s}\}$

$$g_0(u) \ge J(u) \ge J_* \quad \forall u \in W_0,$$

эта задача хороша тем, что у неё есть точка min u_*, и она единственная

2) вводим штраф:

$$\Phi_k(u) = g_0(u) + A_k \sum_{i=1}^{s} (g_i^+(u))^2 \to \inf,\ u \in W_0$$

$\Phi_k(u)$ – непр. ⟶ огр., замкн ⇓ компакт

⇓

нижняя грань достигается

⇓

(7) $\exists u_k \in W_0 : \Phi_k(u_k) = \inf_{W_0} \Phi_k(u)$

вып. все усл. ТЧ: для $U_0 = W_0$

$J(u) = \Phi_k(u)$,

мн-во $U(\delta)$ огр. и замкн (т.к. W_0 огр.)

⇓ ТЧ

$$\lim g_0(u_k) = g_{0*} = J(u_*) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$$

$W_* = \{u_*\}$, $\lim |u_k - u_*| = 0$

Покажем, что для u_k вып. усл. (5)

$$\langle \Phi_k'(u_*),\ u-u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in W_0 \qquad (8')$$

здесь исп. усл. вып. U_0

покажем, что здесь можно писать U_0

$\forall v \in U_0$

$u_k \in W_0 \quad \forall k \geq k_0$

отрезок $[v, u_k] \subset U_0$ (т.к. вып.)

$v_k = u_k + \alpha_k (v - u_k)$, $\quad 0 \leq \alpha \leq 1$

(здесь можно пользоваться шариком)

$$|v_k - u_*| \leq |v_k - u_k| + |u_k - u_*| =$$

$$= \underbrace{\underset{\downarrow\ 0}{\alpha_k}\ \underset{\downarrow\ |v-u_*|}{|v - u_k|}}_{\leq \frac{\delta}{2}} + \underbrace{|u_k - u_*|}_{\leq \frac{\delta}{2} \text{ т.к. } u_k \to u_*} \leq \delta$$

$\Rightarrow$ (8') верно для $u = v_k$

$$\Rightarrow \langle \Phi_k'(u_k),\ \underbrace{v_k - u_k}_{= \alpha_k(v-u_k)} \rangle \geq 0 \quad \forall k \geq k_0$$

$$\langle \Phi_k'(u_k),\ \underbrace{v_k - u_k}_{= \alpha_k(v-v_k)} \rangle \geq 0 \quad \forall k \geq k_0$$

$\Rightarrow$ (8') $\forall u \in U_0$

$$\Phi_k'(u_k) = J'(u_k) + 2(u_k - u_*) + A_k \sum_{i=1}^{m} 2 g_i'(u_k) g_i^+(u_k) + \sum_{i=m+1}^{s} 2 g_i'(u_k) g_i(u_k)$$

$$(z^+)^2 = (\max\{z; 0\})^2$$

$$((z^+)^2)' = 2\max\{z; 0\}$$