07.02

Двойственные задачи

Я недала и верила
Сердцу вопреки.
Мы с тобой два берега
У одной реки

$J(u) \longrightarrow \inf,$

(1) $u \in U = \{ u \in U_0 : \; g_i(u) \le 0 \quad i = 1, \dots, m$
$g_i(u) = 0 \quad i = m+1, \dots, s \}$

ф-ия Лагранжа

(2) $L(u, \lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u), \quad u \in U_0, \quad \lambda \in \Lambda_0$

$\Lambda_0 = \{ \lambda \in E^s : \; \lambda_1 \ge 0, \dots, \lambda_m \ge 0 \}$

(3) $L(u_*, \lambda) \le \underbrace{L(u_*, \lambda^*)}_{\text{седловая точка}} \le L(u, \lambda^*) \qquad \forall u \in U_0, \; \forall \lambda \in \Lambda_0$

u_* – решение (1). Что же такое λ^*?

Введем ф-ю

$$p(u) = \sup_{\lambda \in \Lambda_0} L(u, \lambda) = \begin{cases} J(u), & u \in U \\ +\infty, & u \in U_0 \setminus U \end{cases}$$

$J(u) \longrightarrow \inf, \; u \in U_0 \iff (1)$
(это просто другая запись)

Введём

$$\psi(\lambda) = \inf_{u \in U_0} L(u, \lambda)$$ (по мн не застрахованы от $-\infty$)

Рассм. задачу

$$\psi(\lambda) \longrightarrow \sup, \quad \lambda \in \Lambda_0 \qquad (1^*)$$

это и есть двойственная задача)

обозн. $\inf_{U_0} \mathcal{X}(u) = \mathcal{X}_* = \mathcal{I}_*$ | $\sup_{\Lambda_0} \psi(\lambda) = \psi^*$

$U_* = \{u \in U_0, \ \mathcal{X}(u) = \mathcal{X}_*\}$ | $\Lambda^* = \{\lambda \in \Lambda_0 : \psi(\lambda) = \psi^*\}$

$$\psi^* \leq \mathcal{X}_* \qquad (4)$$

верно всегда

Докажем (4):

возьмём $\forall (u, \lambda) \in U_0 \times \Lambda_0$

$$\left. \begin{array}{l} L(u, \lambda) \leq \sup\limits_{\lambda \in \Lambda_0} L(u, \lambda) = \mathcal{X}(u) \\ L(u, \lambda) \geq \inf\limits_{u \in U_0} L(u, \lambda) = \psi(\lambda) \end{array} \right\} \ \forall u \in U_0, \ \lambda \in \Lambda_0 \qquad (5)$$

$\Downarrow$

$$\psi(\lambda) \leq \mathcal{X}(u) \quad \forall u \in U_0, \ \forall \lambda \in \Lambda_0$$

$$\psi^* = \sup \psi(\lambda) \leq \mathcal{X}(u) \quad \forall u \in U_0$$

$$\Rightarrow \psi^* \leq \inf_{U_0} \mathcal{X}(u) = \mathcal{X}_*$$

Когда нее $\psi^* = \chi_*$?

Это выполнено не всегда (приводился пример когда ф-я Лагранжа имеется нормально, а седла нет)

$\boxed{T}$ для того, чтобы 1) $\psi^* = \chi_*$

2) $U_* \neq \emptyset$, $\Lambda^* \neq \emptyset$

необх. и дост., чтобы ф-я $L(u,\lambda)$ имела седло (3)

$\{\text{седло}\} = \{ U_* \times \Lambda^*$

мн-во седловых точек

Док-во

<u>необходимость</u> ((6) $\Rightarrow$ седло)

$\forall (u_*, \lambda^*) \in U_* \times \Lambda^*$ покажем, что это седло

в (5) $u = u_*$, $\lambda = \lambda^*$ $\Rightarrow$

$$\psi(\lambda^*) = \inf_{v \in U_0} L(v, \lambda^*) \le L(u_*, \lambda^*) \le \sup_{\nu \in \Lambda_0} L(u_*, \nu) = \chi(u_*)$$

$\psi(\lambda^*) = \psi^*$, $\chi(u_*) = \chi_* = \psi^*$ по усл

$\Downarrow$

$$L(u, \lambda^*) \ge \inf_{u \in U_0} L(u, \lambda^*) = L(u_*, \lambda^*) = \sup_{\nu \in \Lambda_0} L(u_*, \nu) \ge L(u_*, \lambda)$$

$\forall u \in U_0$ $\forall \lambda \in \Lambda_0$

$\Rightarrow$ это и есть седло

достаточность ((3) $\Rightarrow$ (6))

$$L(u_*, \lambda) \le L(u_*, \lambda^*) \le L(u, \lambda^*) \qquad \forall u \in U_0, \quad \forall \lambda \in \Lambda_0$$

$$\chi_* \le \chi(u_*) = \sup_{\Lambda_0} L(u_*, \lambda) = L(u_*, \lambda_*) = \inf_{U_0} L(u, \lambda^*) = \psi(\lambda^*) \le \psi^*$$

$\Downarrow$

$$\chi_* \le \psi^* \qquad (8)$$

$$(8) + (4) \Rightarrow \chi_* = \psi^* \qquad (9)$$

$\Downarrow$

цепочка замкнулась

$\Downarrow$

$$\text{т.} \ (u_*, \lambda^*) - \text{седло} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \psi(\lambda^*) = \psi^* \Rightarrow \Lambda^* \ne \emptyset \\ \chi(u_*) = \chi_* \Rightarrow U_* \ne \emptyset \\ \psi_* = \chi_* \end{array}\right\} (6)$$

ЧТД

Двойств. задача $^{(1^*)}$ равномерно выпуклой, даже если исходная не была выпуклой

Докажем это:

$$L(u, \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2) \overset{\text{лин. по } \lambda}{=} \underset{\ge 0}{\alpha} L(u, \lambda_1) + \underbrace{(1-\alpha)}_{\ge 0} L(u, \lambda_2) \ge$$

$$\ge \alpha \inf_{U_0} L(u, \lambda_1) + (1-\alpha) \inf_{U_0} L(u, \lambda_2) = \alpha\psi(\lambda_1) + (1-\alpha)\psi(\lambda_2)$$

$$\forall u \in U_0$$

если ~~в~~ в л.ч. ~~возьмем~~ взять inf. $\Rightarrow$ Л.Ч. $= \psi(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)$

$\Rightarrow \psi(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2) \geq \alpha\psi(\lambda_1) + (1-\alpha)\psi(\lambda_2)$

$\Rightarrow \psi(\lambda)$ – вогнутая, $\lambda \in \Lambda_0$

Λ_0 – выпукл. мн-во

$\Rightarrow (1^*)$ $\quad \left(-\psi(\lambda)\right) \to \inf$, $\lambda \in \Lambda_0$ – выпуклая задача min

Вернемся к исходной постановке (1^*):

$\psi(\lambda) \to \sup$, $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \Lambda_0 : \psi(\lambda) > -\infty\}$ – выпукл.

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \overset{?}{\Rightarrow} \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2 \in \Lambda \quad \forall \alpha \in [0,1]$

в силу вогнутости ф-ции

$$\psi(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2) \geq \alpha \underbrace{\psi(\lambda_1)}_{>-\infty} + (1-\alpha)\underbrace{\psi(\lambda_2)}_{>-\infty} > -\infty$$

мн-во Λ не всегда замкнуто $\Rightarrow$ т. Вейерштр. не применить.

Двойственная задача линейного прогр.

(пример двойств. задачи, где все хорошо)

Задача линейного программир.:

$J(u) = \langle c, u \rangle$ (линейная ф-я)

$J(u) \to \inf$, $u \in U = \{u \in \overset{U_0}{E^n_+} = \{u \in E^n : u \geq 0\}$:

$A_1 u \leq b_1, \; A_2 u = b_2\}$

<u>каноническая</u> задача ЛП: $\langle c, u \rangle \to \inf$,

$u \in U = \{u \geq 0,\ Au = b\}$

Для этой задачи все вычислим:

$$L(u, \lambda) = \langle c, u \rangle + \langle \lambda, Au - b \rangle =$$

$$= \langle c, u \rangle + \langle A^T\lambda, u \rangle - \langle \lambda, b \rangle = \langle c + A^T\lambda, u \rangle - \langle b, \lambda \rangle$$

$$\psi(\lambda) = \inf_{U_0} L(u, \lambda) = \begin{cases} -\langle b, \lambda \rangle, & c + A^T\lambda \geq 0 \text{ (каждая компонента вектора)} \\ -\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$c + A^T\lambda \geq 0 \Rightarrow \langle c + A^T\lambda, \underbrace{u}_{\geq 0} \rangle - \langle b, \lambda \rangle \to \inf \Rightarrow 0 - \langle b, \lambda \rangle$$

$$(c + A^T\lambda)_{i_0} < 0 \Rightarrow \langle c + A^T\lambda, u \rangle = \underbrace{(c + A^T\lambda)_{i_0}}_{<0} \underbrace{u_{i_0}}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} (c + A^T\lambda) u_i}_{\text{фикс.}}$$

$$\downarrow u_{i_0} \to +\infty$$

$$-\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\psi(\lambda) = -\infty$$

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} -\langle b, \lambda \rangle, & c + A^T\lambda \geq 0 \\ -\infty, & \text{иначе} \end{cases} \longrightarrow \sup_{\lambda \in \Lambda_0}$$

двойств. задача

$\Downarrow$ (работает только верхняя строчка)

$$-\langle b, \lambda \rangle \longrightarrow \sup, \quad \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \Lambda_0 : c + A^T\lambda \geq 0\}$$

14.02. Лекция

$J(u) \to \inf$

$F(u) = 0, \quad F: X \to Y$

$\mathcal{L}(u, \lambda) = \lambda_0 J(u) + \lambda F(u) \longrightarrow$ принцип

сопряж. пр-ву Y^*

$\Rightarrow$ убираем огр. на u

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Тут всё есть, коли нет обмана:
И черти, и любовь, и страхи, и цветы

Общая задача линейного программирования

(03) $J(u) = \langle c, u \rangle, \quad u \in U = \{ u = (u^1, \dots, u^n) : u^j \geq 0, \; j \in I_0, \; \overset{m_1 \times n}{A_1} \overset{n}{u} \leq \overset{m_1}{b_1}, \; \overset{m_2 \times n}{A_2} \overset{n}{u} = \overset{m_2}{b_2}$

покомпонентное

Каноническая задача

(1) $J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf, \quad u \in U = \{ u \geq 0, \; \overset{m \times n}{A} u = \overset{m}{b} \}$

кан. задача — частный случай общей
но и
каждая общая задача может быть записана в эквивалентной кан. форме (в др. правах)

Рассм. задачу:

$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf, \quad U = \{u \geq 0, \; A_1 u \leq b_1, \; A_2 u = b_2\}$ (О3$_1$)

Запишем её в канонич. форме: введем новую переменную:

$$v = b_1 - A_1 u \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 u + v = b_1, \; v \geq 0$$

$z = (u, v)$: $g(z) = \langle c, u \rangle + \langle 0, v \rangle \to \inf.$ (1$_1$)

$z \in Z = \{ z = (u, v) \geq 0, \; A_1 u + v = b_1, \; A_2 u + 0v = b_2 \}$

кан. задача

Покажем, что (О3$_1$) и (1$_1$) эквивалентны (т.е. единовременно обе не имеют решения, либо, если одна имеет, то из него легко найти решение другой):

пусть z_* — решение (1$_1$) $\Rightarrow z_* = (u_*, v_*) \to u_*$ — реш. (О3$_1$) (не будем подробно)

наоборот: если u_* — решение (О3$_1$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow z_* = (u_*, v_* = b_1 - A_1 u_*) \text{ — решение } (1_1)$$

Недостаток: увеличивается размерность ($z = (\overset{n}{u}, \overset{m}{v})$)

Рассм. задачу:

$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf, \quad U = \{A_1 u \leq b_1, \; A_2 u = b_2\}$ (О3$_2$)

Всегда верно равво ($\forall a$):

$$a = \underbrace{\max\{a; 0\}}_{\geq 0} - \underbrace{\max\{-a; 0\}}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow u^i = \underbrace{\max\{u^i, 0\}}_{w^i \geq 0} - \underbrace{\max\{-u^i, 0\}}_{\bar{w}^i \geq 0} = w^i - \bar{w}^i$

$u = \underset{\geq 0}{w} - \underset{\geq 0}{\bar{w}}$

$z = (w_1, \bar{w}_2)$

$\langle c, u\rangle = \langle c, w\rangle - \langle c, \bar{w}\rangle \to \inf$

$z \in Z = \{(w_1, w_2):\ A_1 u = A_1 w - A_1 \bar{w} \leq b_1,$
$A_2 u = A_2 w - A_2 \bar{w} = b_2\}$

добавляем невязку

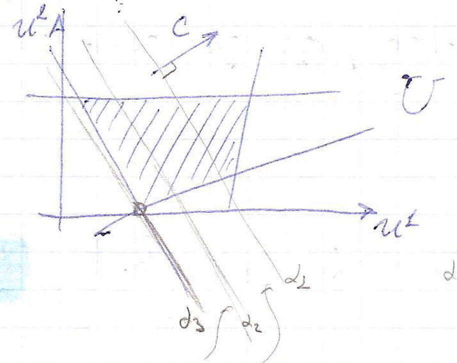
$v = b_1 - A_1 w - A_1 \bar{w}$

т.о. кан. задача — эталонная задача

<u>Стандартная задача лин. програм.</u>

$\langle c, u\rangle \to \inf, \quad u \in U = \{u \geq 0, \ Au \leq b\}$

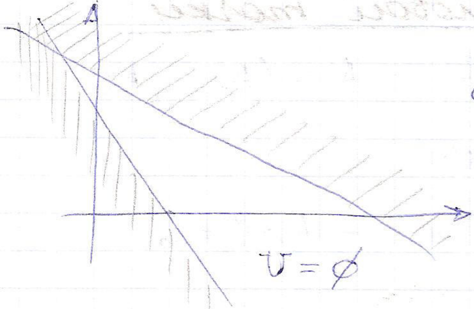
задача хороша для геометрич. интерпретации

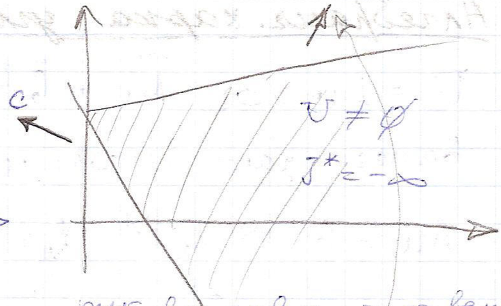


$\langle c, u\rangle = \alpha \overset{\text{или}}{=} \langle c, u - u_0\rangle$

гиперпл-ть $\perp$ вектору c

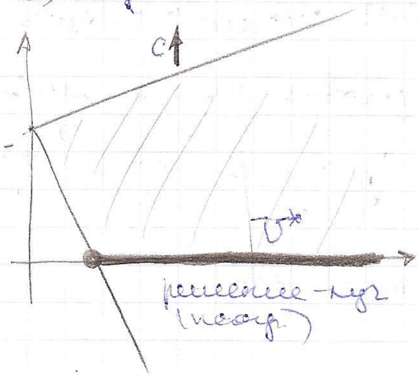
$\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$

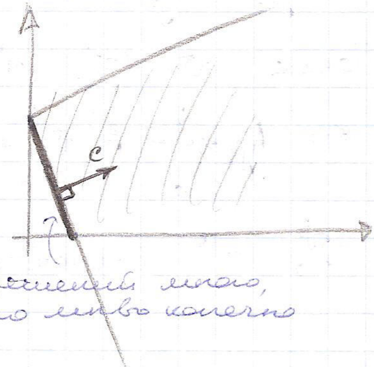




тут все зависит от вектора с
если взять другой то будет

<u>Неприятности</u>: задача не имеет решения, если
1) $V = \varnothing$
2) $\inf = -\infty$





Во всех случаях, когда задача имеет решение, есть угловая точка. Угл. точки играют важную роль в лин. програм.

<u>Угловые точки</u>

Точка $v \in V$ называется **угловой точкой** мн-ва V, если v не является внутр. точкой никакого отрезка, лежащего в V

(отрезок $[v_1, v_2] = \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2, \ 0 \le \alpha \le 1$)

напр., шар целиком состоит из угловых точек, а двугранный угол не имеет угл. точек

Алгебраич. хар-ка угловой точки

(2) $U = \{u \geq 0, \ \overset{m \times n}{A} u = \overset{m}{b}\}$ $\quad A = (A_1, \dots, A_n)$

вписан ранг матрицы

$Au = b \Rightarrow A_1 u^1 + A_2 u^2 + \dots + A_n u^n = b$

$\langle a_i, u \rangle = b^i$

$\boxed{T}$ пусть $\overset{m \times n}{A} \neq 0$, $\operatorname{rang} A = r \geq 1$

$A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ – ~~АНЗ~~ ЛНЗ система ранговых столбцов

Точка $v = (v^1, \dots, v^n)$ – угловая точка мн-ва (2) $\Leftrightarrow$

(3) $\Leftrightarrow A_{j_1} \underbrace{v^{j_1}}_{\geq 0} + A_{j_2} \underbrace{v^{j_2}}_{\geq 0} + \dots + A_{j_r} \underbrace{v^{j_r}}_{\geq 0} = b, \quad v^j = 0 \ \forall j \neq j_1, \dots, j_r$

$v^{j_1}, \dots, v^{j_r}$ – базисные координаты

Док-во

необх. пусть v – угл. точка. Покажем, что верно (3)

1) $\underline{v = 0} \Rightarrow A \cdot 0 = b \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow \forall A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ – ранговые $\Rightarrow$ ~~a~~ $A_{j_1} \cdot 0 + \dots + A_{j_r} \cdot 0 = 0 = b$.

2) $\underline{v \neq 0}$ Выберем положит. координаты

$v^{j_1} > 0, \dots, v^{j_k} > 0$, ост. $= 0$

Покажем, что $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ – ЛНЗ : от противного:

пусть $\exists (\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_k}) \neq 0$: $A_{j_1} \gamma_{j_1} + \dots + A_{j_k} \gamma_{j_k} = 0 \rightarrow$

$\Leftrightarrow \tilde{A}\gamma = 0$, $\tilde{A} = (A_{j_1}, \dots, A_{j_k})$

Возьмем $v_\pm = v \pm \varepsilon\gamma$

$$Av_\pm = Av \pm \varepsilon \underbrace{A\gamma}_{0} = Av = b$$

$v_\pm = v \pm \varepsilon\gamma > 0$ для $j_1, \dots, j_k$ при дост. малых ε

$\Downarrow$

$v_\pm \in V$

но в то же время $v = \frac{v^+ + v^-}{2}$ — середина отрезка $[v^+, v^-]$

$\Rightarrow$ точка не угловая $\Rightarrow$ противоречие

$\Rightarrow$ $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ — ЛНЗ $\quad k \le r$

Докажем (3):

1) $k = r$ $\Rightarrow$ получили ранговую систему столбцов

$\Rightarrow A_{j_1} v^{j_1} + \dots + A_{j_r} v^{j_r} = b$.

2) $k < r$ $\Rightarrow$ доберем до ранга $A_{j_{k+1}}, \dots, A_{j_r}$

а $v_{j_{k+1}} = \dots = v_{j_r} = 0$ $\Rightarrow$ также получим (3)

достат. пусть $v \in V$ и вып. (3). Докажем, что v - угл. точка

от пр.: $\exists v_1, v_2 \in V$: $v = \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2$, $\quad 0 < \exists\alpha < 1$

$v^j = 0 \quad j \ne j_1, \dots, j_r$

$$v^j = 0 = \underset{>0}{\alpha}\, \underset{\ge 0}{v_1^j} + \underset{>0}{(1-\alpha)}\, \underset{\ge 0}{v_2^j} \ge 0 \quad \Rightarrow v_1^j = v_2^j = 0 \quad \forall j \ne j_1, \dots, j_r$$

$$A_{j_1} v_1^{j_1} + \dots + A_{j_2} v_1^{j_2} = b \qquad (Av_1 = b, \ v_1^j = 0 \ \ j \neq j_1, \dots, j_z)$$

$$A_{j_1} v_2^{j_1} + \dots + A_{j_2} v_2^{j_2} = b \qquad (Av_2 = b)$$

$\Downarrow$

вектор b разлагается через базисные столбцы двумя способами

$\Downarrow$

$$v_1^{j_1} = v_2^{j_1}, \dots, v_1^{j_2} = v_2^{j_2} \Rightarrow v_1 = v_2$$

$\Downarrow$

v - угловая

чтд

Опр: угловая точка наз. вырожденной, если среди базисных координат есть нулевые (невырожд., если все они положит.)

Пример:

$$V = \{ u = (u^1, u^2, u^3, u^4) \geq 0, \ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}u^1 + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}u^2 + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}u^3 + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}u^4 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \}$$

$$z = 2$$

$u_1 = (2, 1, 0, 0)$ - угловая точка, невырожденная

базис $B(u_1) = (A_1, A_2)$

$u_2 = (0, 0, 1, 0)$ - вырожденная угл. точка

$B(u_2) = (A_1, A_3) / (A_2, A_3) / (A_4, A_3)$

$u_3 = (0, \frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3})$ - невырожд. угл. точка

$B(u_3) = (A_2, A_4)$

т.о. невырожд. угл. точка имеет только 1 базис

Лекция

21.02

Симплекс-метод

v: $A_{j_1} v^{j_1} + \ldots + A_{j_r} v^{j_r} = b$, $v^j = 0$, $j \neq j_1, \ldots, j_r$

$$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf, \quad u \in U = \{u \geq 0 : \underset{m \times n}{A} u = \overset{m}{b}\}$$

Идея: надо перебрать все угловые точки (их конечное число, т.к. ранговых наборов конечное число ...)

Число может быть близко к C_n^r
А это недостижимо.

Симплекс-метод перебирает угловые точки не беззубо, а целенаправленно
Он переходит к точке, значение в кот. заведомо меньше.

Мы рассм. простейший вариант метода

Пусть мы знаем угловую точку с базисными столбцами:

v, $B(v) = \{A_{j_1}, \ldots, A_{j_r}\}$ (как только её найти?)

Цель: перейти к след. угловой точке

$$(v, B(v)) \longrightarrow (w, B(w)) : \; J(w) \leq J(v)$$

Пусть столбцы перенумерованы так, что
$B(v) = \{A_1, \ldots, A_r\} = B$ (на практике не нужно перенумер, просто так удобнее)

$\Downarrow$

$$v = \begin{pmatrix} \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \bar{c} \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ u_{r+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Будем рассм. задачу в предположении, что

1) $r = \operatorname{rang} A = m$ (выбросили ЛЗ строки)

2) $m < n$ (т.к. $r = m \le n$)

случай $m = n$ исключаем, т.к. он несодержат.:

$$\underset{\text{невырожд. система}}{\overset{n \times n}{A} u = b} \Rightarrow u = A^{-1} b \quad \begin{matrix} \ge 0 \Rightarrow U = \{u\} \\ < 0 \Rightarrow U = \{\emptyset\} \end{matrix}$$

Запишем задачу в приведенной (к угловой точке) форме:

Приведённая форма

$$Au = b \Rightarrow \underbrace{A_1 u^1 + \ldots + A_r u^r}_{B\bar{u}} + A_{r+1} u^{r+1} + \ldots + A_n u^n = b$$

$$\Downarrow$$

$$B\bar{u} + \sum_{i=r+1}^{n} A_i u^i = b \qquad v: \; B\bar{v} = b \;(\text{ост.} = 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{u} + \sum_{i=r+1}^{n} (B^{-1} A_i) u^i = B^{-1} b = \bar{v} \;\Big|\; \bar{u} = \bar{v} - \sum_{i=r+1}^{n} (B^{-1} A_i) u^i$$

$$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \sum_{i=r+1}^{n} c_i u^i =$$

$$= \langle \bar{c}, \bar{v} - \sum_{i=r+1}^{n} (B^{-1} A_i) u^i \rangle + \sum_{i=r+1}^{n} c_i u^i =$$

$$= \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \sum_{i=r+1}^{n} \langle \bar{c}, B^{-1} A_i \rangle u^i + \sum_{i=r+1}^{n} c_i u^i =$$

$$= \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \sum_{i=r+1}^{n} \Big(\underbrace{\langle \bar{c}, B^{-1} A_i \rangle - c_i}_{= \Delta_i} \Big) u^i$$

~~$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \sum_{i=r+1}^{n} \Delta_i u^i$~~

т.о.

$$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \sum_{i=r+1}^{n} \Delta_i u^i; \quad \Delta_i = \langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle - c_i$$

$$i = r+1, \ldots, n$$

Рассм. задачу (та же самая)

$$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \sum_{i=r+1}^{n} \Delta_i u^i \to \inf, \quad u \in U,$$

$$U = \{ u \geq 0 : \bar{u} + \sum_{i=r+1}^{n} (B^{-1}A_i) u^i = \bar{v} \}$$

Это и есть <u>приведенная</u> <u>форма</u>

Осталось поиграть перем. u^i (свободная)
Выделим одну компоненту из хвоста: пусть

$$u^k, \; u^{r+1} = 0, \; u^{k-1} = u^{k+1} = 0, \; u^n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Y}(u) = \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \Delta_k u^k, \quad u \in U = \{ u \geq 0 : \bar{u} + (B^{-1}A_k) u^k = \bar{v} \}$$

<u>Задача</u>:

$$\mathcal{Y}(u) = \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \Delta_k u^k \to \inf, \quad \bar{u} = \bar{v} - (B^{-1}A_k) u_k$$

Это не эквивалентная задача, а вспомогат.

Мы хотим:

$$w: \; J(w) \leq \mathcal{Y}(v), \; w \in U: w \geq 0, \; Aw = b$$

$$\mathcal{Y}(u) = \underbrace{\langle \bar{c}, \bar{v} \rangle}_{\text{фикс.}} - \Delta_k \underbrace{u^k}_{\geq 0} \Rightarrow \text{чтобы было убывание надо } \Delta_k > 0, \; u^k > 0$$

$\bar{u} = \bar{v} - (B^{-1}A_k)u^k$

компонента $B^{-1}A_k > 0$ — опасные компоненты

3 случая:

1) все $\Delta_i \le 0$ $i = r+1, \dots, n$ — безнадёжный случай, почти всегда (это с перепугу)

$\Downarrow$

v — точка min (решение (1))

Док-во: берем $\forall u \in U$

$$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \sum_{i=r+1}^{n} c_i u^i \geq$$

$$\{\Delta_i \geq 0 \Leftrightarrow c_i \geq \langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle\}$$

$$\geq \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \sum_{i=r+1}^{n} \langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle u^i =$$

$$= \langle \bar{c}, \underbrace{\bar{u} + \sum_{i=r+1}^{n} B^{-1}A_i u^i}_{= \bar{v}} \rangle = \langle c, v \rangle = \left\{ \begin{matrix} \text{хвост} \\ = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \langle c, v \rangle = J(v)$$

$\Downarrow$

$J(u) \geq J(v) \quad \forall u \in U$

чтд

2) $\exists \Delta_k > 0, \ (B^{-1}A_k) \le 0$

$$\bar{u} = \underbrace{\bar{v}}_{\geq 0} - \underbrace{\underbrace{(B^{-1}A_k)}_{\le 0} \underbrace{u^k}_{\geq 0}}_{\le 0} \geq 0 \Rightarrow u \geq 0 \Rightarrow u \in U$$

можем брать $u^k \to +\infty \Rightarrow \bar{u} \to +\infty$ остаемся в U $\forall u^k$

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}(v) - \underbrace{\Delta_k}_{>0} \underbrace{u^k}_{\geq 0 \atop \to +\infty} \longrightarrow -\infty \Rightarrow \cancel{\mathcal{J}_*}$$

$\Downarrow$

мы нашли такое напр., двигаясь по кот. $\mathcal{J}(u) \to -\infty$

$\Rightarrow$ $\mathcal{J}_* = -\infty$ т.е. задача не имеет решения.

3) $\exists \Delta_k > 0$ и $\forall k$, для к-рых $\Delta_k > 0$ $\exists i: (B^{-1}A_k)^i > 0$

$$(B^{-1}A_k)^i > 0 \Leftrightarrow I_k(v) = \{i: (B^{-1}A_k)^i > 0\} \neq \emptyset$$

(1) $i \notin I_k(v)$

$$u^i = v^i - \underbrace{(B^{-1}A)^i}_{\leq 0} \underbrace{u^k}_{\geq 0} \geq 0 \quad \forall u^k \geq 0$$

(2) $i \in I_k(v)$

ограничение на u_k

$$u^i = v^i - \underbrace{(B^{-1}A)^i}_{> 0} \underbrace{u^k}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow v^i \geq (B^{-1}A_k)^i u_k$$

$$\frac{v^i}{(B^{-1}A_k)^i} \geq u_k \geq 0 \quad \forall i \in I_k(v) \Rightarrow \bar{u} \geq 0$$

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}(v) - \Delta_k \underbrace{u^k}_{\geq 0}$$

правило выбора u_k

$$u_k = \min_{i \in I_k(v)} \frac{v^i}{(B^{-1}A_k)^i}$$

28.02

Лекция

Продолжение док-ва:

$$\min_{i \in I_k(v)} \frac{v^i}{\gamma_{ik} > 0} = \frac{v^s}{\gamma_{sk}} = u^k$$

$$\gamma_{ik} = (B^{-1} A_k)^i$$

$$\bar{u} + B^{-1} A_k u_k = \bar{u}$$

Пришли к новой точке

$$w = \Big(\bar{u} = \bar{v} - (B^{-1} A_k) u_k, \overbrace{0, 0, u^k = \frac{v^s}{\gamma_{sk}}, 0, \dots, 0}^{n-r}\Big)$$

т.е. $(v, B(v)) \xrightarrow{???} (w, B(w))$ → покажем, что это угл. точка

с $B(w) = (A_1, \dots, A_{s-1}, A_k, A_{s+1}, \dots, A_r)$

было A_s, и был базис.

надо n-r нулей

рассм. $u^s = v^s - \underbrace{(B^{-1} A_k)^s}_{\gamma_{sk}} \underbrace{u_k}_{= \frac{v}{\gamma_{sk}}} = v^s - v_{sk} \frac{v^s}{\gamma_{sk}} =$

$= v^s - v^s = 0.$

Составим лин. комбинацию

$$\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_{s-1} A_{s-1} + \alpha_k A_k + \alpha_{s+1} A_{s+1} + \dots + \alpha_r A_r = 0$$

покажем, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_r$

$\Updownarrow$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{r} \alpha_i A_i + \alpha_k A_k = 0$$

$$A_k = \underbrace{BB^{-1}}_{I} A_k = A_1\gamma_{1k} + \ldots + A_r\gamma_{rk} = \sum_{i=1}^{r} A_i\gamma_{ik}$$ → подст. в лин. комб.

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{r} \alpha_i A_i + \alpha_k \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ik} A_i = 0$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{r} (\alpha_i + \alpha_k\gamma_{ik}) A_i + \alpha_k \gamma_{sk} A_s = 0$$

↓ в силу ЛНЗ $A_1, \ldots, A_r$

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_k\gamma_{ik} = 0 \\ \alpha_k\gamma_{sk} = 0 \quad \to \alpha_k = 0 \end{cases} \to \alpha_i = 0$$

$\Rightarrow$ это действит. ЛНЗ система

Точка - угловая:

$$A_1 v_1 + \ldots + A_{s-1} v_{s-1} + A_k v^k + A_{s+1} v^{s+1} + \ldots + A_r v^r = b$$

Симплекс-таблица

это аналог матрицы

пишем таблицу для т. v и соотв. базиса $B(v)$

↓

	Б(v)	y	u_1	…	u^i	…	u^s	…	u^r	u^{r+1} …		u^n
	базисные столбцы	базисные координ.										
Γ_1	1	v^1	1	…	0	…	0	…	0	γ_{1r+1}	…	γ_{1n}
…	…	…										
Γ_s	s	v^s	0	…	$\gamma_{si}=0$	…	$\gamma_{ss}=1$	…	$\gamma_{sr}=0$	γ_{sr+1}	…	γ_{sn}
…	…	…										
Γ_r	r	v^r	0	…	0	…	0	…	1	γ_{rr+1}	…	γ_{rn}
Δ		$J(v)$	0		0		0		0	Δ_{r+1}	…	Δ_n

приведенная система:

$$\bar u + \sum_{i=r+1}^{n}(B^{-1}A_i)u^i = \bar v = B^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad Au = b$$

$$u^s + \sum_{i=r+1}^{n}\overbrace{(B^{-1}A_i)^s}^{\gamma_{si}} u^i = v^s$$ → коэф. при u^i выписываем в s-ую строку

$\Downarrow$

$$J(v) = J(u) + \sum_{i=r+1}^{n}\Delta_i u^i$$ → выписываем коэф. в строку Δ

$$\Delta_i = \langle \bar c, B^{-1}A_i\rangle - c_i \qquad i = \overline{r+1, n}$$

$$\Delta_i = \langle \bar c, \underbrace{B^{-1}A_i}_{e_i}\rangle - c_i = \langle \bar c, e_i\rangle - c_i = c_i - c_i = 0, \quad i = \overline{1, r}$$

т.к. A_i - один из столбцов B

$J(u)$ писать в мнемонич. правило не принято, т.к. это столбец вида $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

I случай

все $\Delta_k < 0$

$J(u) = J(v) - \Delta_k u^k$

$\Downarrow$

$v \in V_*$

u_{r+1}	u_k	u_n
	γ_{1k}	
	$\vdots$	
	γ_{sk}	
	$\vdots$	
	γ_{rk}	
	Δ_k	

$k = r+1, \dots, n$

~~все~~ Δ_k

II случай $\exists k$: $\Delta_k > 0$ смотрим k-ый столбец

и $B^{-1} A_k \leq 0$

$\Downarrow$

$J_* = -\infty$

u_k
γ_{1k}
$\vdots$
γ_{sk}
$\vdots$
γ_{rk}
Δ_k

III случай: $\exists \Delta_k > 0$, но во всех столбцах, где $\Delta_k > 0$, какая-то координата положит.

$\exists \Delta_k > 0$ и $(B^{-1} A_k)^i = \gamma_{ik} > 0$.

$\Downarrow$

$I_k(v) \neq \varnothing$

$$u^k = \min_{i \in I_k(v)} \frac{v^i}{\gamma_{ik} > 0} = \frac{v^s}{\gamma_{sk}}$$

все s-ое строке (s-ая стр.) делим на γ_{sk}

достиг. min в $+N^\circ s$ $\Rightarrow$ переход к след. угл. точке го

A_s выбрасывается из базиса, A_k добавляется переход симплекс-таблицы к новой угловой точке делается методом ~~методом~~ Гаусса-Жордана

$$\Gamma_s(w) = \frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{sk}} \quad (s\text{-ая строка делится на } \gamma_{sk})$$

→ получим единичку → делаем с её помощью нули!

$$\Gamma_i(w) = \Gamma_i(v) - \gamma_{ik} \overbrace{\frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{sk}}}^{=\Gamma_s(w)}$$

$$\Delta(w) = \Delta(v) - \Delta_k \frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{sk}}$$

„Шуму много, шерсти мало", — сказал чёрт, постригая кошку

„Пошел по шерсть — вернулся стриженным"

$$J(w) = J(v) - \Delta_k u^k = J(v) - \overset{>0}{\Delta_k} \underbrace{\frac{v^s}{\gamma_{sk}}}_{=u^k}{}^{>0} = J(v)$$

А вдруг $v^s = 0$? т.е. вырожденная угловая точка и тогда $\min \frac{v^0}{\gamma_{ik}}$ достигается как раз на этом 0

(но это не всегда, можем и проскочить вырожденную точку)

$J(w) = J(v)$ → $w = v$ (подставить в w), но изменился базис

→ будем крутиться по базисам этой угл. точки

→ зацикливание

Невырожденная задача

$w^k = \min \frac{v^i}{\gamma_{ik}} > 0$ ⇒ будет строиться переход к новой точке ⇒ никогда не вернемся к той точке, в кот. уже были

$(v_0, B(v_0)) \to (v_1, B(v_1)) \to \dots \to (v_p, B(v_p))$

$J(v_0) > J(v_1) > J(v_2) \dots J(v_p)$

→ т.к. угловых точек конечное число ⇒ за конечное число шагов метод завершится

Антициклин

циклы возникают, если переменных ≥ 6
это довольно редкий случай

Антициклин – „противоядие" от зацикливания

Правило выбора min надо дополнить правилом, кое разумно выберет нужный номер, не приводящий к зацикливанию

Лексико-графическое правило (есть и другие)

правило, кое позволяет сравнивать вектора (>, <)

Опр: говорят, что вектор $x = (x^1, \dots, x^\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ лексикографически положителен и обозн. $x \succ 0$ если $x \neq 0$ и первая ненулевая координата положительна

Опр: $x \succ y$, если $x - y \succ 0$

$\forall\ x, y$ справедливо:

либо $x \succ y$,
либо $x \prec y$
либо $x = y$

$\boxed{07.03}$

Лекция

Мы ввели понятие лексикографич. порядка:

$$x \succ y, \text{ если } x - y \succ 0$$

Верные св-ва:

$$x \succ y,\ y \succ z \Rightarrow x \succ z$$

$$x \succ 0 \Rightarrow \alpha x \succ 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$x \succ y \Rightarrow \alpha x \succ \alpha y \quad \forall \alpha > 0$$

$$x \succ 0,\ y \succ 0 \Rightarrow x + \alpha y \succ 0 \quad \forall \alpha \geq 0$$

$$x \succ 0 \Rightarrow y \succ y - \alpha x \quad \forall \alpha > 0,\ \forall y$$

Опр: $X = \{x_i = (x_i^1, \dots, x_i^l), i \in M_0\}$ - заданное мн-во

$x_s \in X$ называется лексикографическим минимумом на мн-ве X, если

$\forall i \in M_0 \Rightarrow$ или $x_i \succ x_s$
или $x_i = x_s$

Обозн: $\boxed{x_s = \text{lex min } X}$

ЛЕММА (о лексикографич. минимуме или о выборе жениха)

Пусть M_0 — конечное мн-во номеров (жеников)

$X = \{x_i \in R^l, \ i \in M_0\}, \quad x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$

Тогда $\operatorname{lex}\min\limits_{x_i \in X} x_i$ достигается, причем на единственном векторе

Док-во: берем M_0. Будем строить мн-ва $M_1, \dots, M_p$

если M_0 состоит из 1 вектора $\Rightarrow$ всё

если нет

$$\Rightarrow M_1 = \{s / \min_{i \in M_0} x_i^1 = x_s^1\}$$

если в M_1 больше 1 вектора $\Rightarrow$ то же самое

...

M_{p-1} — известно, $M_p = \{s / \min\limits_{i \in M_{p-1}} x_i^p = x_s^p\}, \dots \quad p \leq l$

$p = l$, если M_l состоит из ед. вектора (иначе они были бы равны)

~~что~~

Для жеников надо составить алфавит:

1-ая координата: — красивый

2-ая — умный

и т. д. ...

По любому останется один.

Применение:

$\langle c, u \rangle \to \inf, \quad U = \{u \geq 0 : Au = b\} \quad r = \operatorname{rang} A = m < n$

$v, \ B(v) = \{A_{j_1}, \dots, A_{j_r}\}$ — базисные столбцы (столбцы матрицы A)

↑ угл. точка

127

$B^{-1}(v)\,A u = B^{-1}(v)\,b = \bar{v}$

	$B(v)$	y	u^1		u^s		u_k		u_n
Γ	$j^1, \dots, j^2$	$\gamma_0 = B^{-1}A_0$	$\gamma_1 = B^{-1}A_1$		$\gamma_s = B^{-1}A_s$		$\gamma_k = B^{-1}A_k$		$\gamma_n = B^{-1}A_n$
Δ		$y(v) = \Delta_0$	Δ_1		Δ_s		$\Delta_k > 0$, $k \notin Б(v)$		Δ_n

$b = A_0, A_1, \dots, A_n$ $\qquad \gamma_i = B^{-1}(v)\,A_i \quad i = 0, 1, \dots n.$

$B^{-1}A_i$ дает единичные вектора

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} \gamma_{1i} \\ \dots \\ \gamma_{ri} \end{pmatrix}$$

$\Delta_i = \langle \bar{c}, \overset{\gamma_i}{B^{-1}A_i} \rangle - c_i \qquad i = 1, \dots, n$

$\Delta_i = 0 \qquad \forall i \in Б(v)$

$I_k(v) = \{1 \le i \le r : \gamma_{ik} > 0\}$

$$\min_{i \in I_k(v)} \frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{ik} > 0} = \frac{\gamma_{s0}}{\gamma_{jk}} = u_k$$

если $\gamma_{ik} = 0 \Rightarrow$ с точки не сдвинулись, а базис поменялся

надо придумать антициклин

Ищем $\operatorname{lex\,min}_{i \in I_k(v)} \frac{\Gamma_i}{\gamma_{ik}} = \frac{\Gamma_s}{\gamma_{sk}}$

$$\Gamma_i = \left\{ v^{\Gamma_i} = \frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{ik}} = \frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{ik}} u^1 + \frac{\gamma_{i2}}{\gamma_{ik}} u^2 + \ldots + \frac{\gamma_{in}}{\gamma_{ik}} u^n \right\}$$

<u>Опр:</u> $S(v, B(v)) \overset{\Gamma}{\succ} 0$, если $\Gamma_i \succ 0 \quad \forall i = 1, \ldots, r$

$S(v, B(v)) \overset{\Delta}{\succ} S(w, B(w))$, если $\Delta(v) \succ \Delta(w)$

(это два типа сравнения симплекс-таблиц — по строкам и по столбцам)

<u>Лемма:</u> пусть $S(v, B(v)) \overset{\Gamma}{\succ} 0, \quad (v, B(v)) \to (w, B(w))$

$$\Gamma_s(w) = \frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{sk}},$$

$$\Gamma_i(w) = \Gamma_i(v) - \gamma_{ik} \cdot \frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{sk}}, \quad i = 1, 2, \ldots r, \; i \neq s$$

$\Gamma_s(w)$

$$\Delta(w) = \Delta(v) - \Delta_k \frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{sk}}$$

Тогда новая таблица $S(w, B(w)) \overset{\Gamma}{\succ} 0$,

$$S(v, B(v)) \overset{\Delta}{\succ} S(w, B(w))$$

(т.е. в нижней строке происходит строгое убывание — антициклин)

<u>Док-во:</u>

$$\Gamma_s(w) = \frac{\overset{\succ 0}{\Gamma_s(v)}}{\underset{> 0}{\gamma_{sk}}} \succ 0$$

$i \neq s$; 1) $\gamma_{ik} \leq 0 \quad (i \notin I_k(v))$ 2) $\gamma_{ik} > 0 \quad (i \in I_k(v))$

1) $\Gamma_i(w) = \underbrace{\Gamma_i(v)}_{>0} + \underbrace{\frac{(-\gamma_{jk})}{\gamma_{sk}}}_{\geq 0} \underbrace{\Gamma_s(w)}_{\geq 0} > 0$

lexmin $\frac{\Gamma_i(v)}{\gamma_{ik}} = \frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{ik}}$
$i \in I_k(v)$

$\Downarrow$

$\Gamma_i > \gamma_{ik}\left(\frac{\Gamma_s}{\gamma_{sk}}\right) \quad i \in I_k(v)$

1-ое утв. д-но

$$\Delta(v) - \Delta(w) = \underbrace{\Delta_k}_{>0} \frac{\overset{>0}{\Gamma_s(w)}}{\underset{>0}{\gamma_{sk}}} > 0$$

$$\Gamma(v) = (\overset{=b}{B^{-1}A_0}, B^{-1}A_1 \dots B^{-1}A_n) = B^{-1}\underbrace{(b, A_1, \dots, A_n)}_{\substack{\text{rang} = r \\ \text{(по т. Кронекера-Капелли)}}}$$

rang $\Gamma(v) = r \Rightarrow$ все строки различны!

Пусть есть

$\frac{\Gamma_{ik}(v)}{\gamma_{ik}} = \frac{\Gamma_j(w)}{\gamma_{jk}}$, но они ЛНЗ!

$\Rightarrow$ лексикографич. правило выбирает №s единственным образом

$$(v_0, B(v_0)) \to (v_1, B(v_1)) \to \dots \to (v_p, B(v_p))$$

каждый раз новые таблицы, т.к. каждый раз различные нулевые строки Δ

конечн. число $\Rightarrow$ эта посл-ть оборвется $I_k(v)$ станет пустым

$\Rightarrow$ реализ. либо 1), либо 2) случай

$\begin{matrix} v_p \in U_* \\ \text{нет } \Delta_k > 0 \end{matrix} \qquad \searrow J_* = -\infty.$

т.е. симплекс-метод с антициклином полностью решает проблему. Никаких зацикливаний быть не может

<u>Пример:</u>

$$J(u) = 10u^2 - u^3 + 4u^4 + u^5 = \langle c, u \rangle$$

$$u = (u^1, \dots, u^5) \geq 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= b} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{A_1} u^1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= A_2} u^2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A_3} u^3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= A_4} u^4 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= A_5} u^5$$

$B = (A_4, A_5, A_2) = I_3$ (ед. матрица – не надо обращать и доп. симплекс-табл. почти готова)

	Б	y	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
Γ_1	4	2	1	0	2	1	0
Γ_2	5	3	2	0	-1	0	1
Γ_3	2	1	-1	1	1	0	0
Δ		21	-4	0	18	0	0

$18 > 0 \Rightarrow \Delta_k$

$\Delta_i = \langle \bar{c}, B^{-1} A_i \rangle - c_i$

Угл. точка
$v_0 = (0, 1, 0, 2, 3)$

14.03

Лекция

Продолжение примера:

Нада 18 есть положит. числа

$\hookrightarrow\ I_3(v) = \{1, 3\}$

$\min\left\{\frac{2}{2}, \frac{1}{1}\right\} \Rightarrow S = \{1,3\} = I_3(v)$ → неопределенность

Применим антициклин

1-ую строчку делим на 2: $\left(1\ \frac{1}{2}\ \ 0\ 1\frac{1}{2}\ \ 0\right) = \frac{\Gamma_1}{\gamma_{14}}$

3-ую строчку — — — $\left(1\ -1\ 1\ 1\ 0\ \ 0\right) = \frac{\Gamma_3}{\gamma_{34}}$

$\Downarrow$

$S = 3$

$\Rightarrow$ из 3-ей строки будет решающий эл-т:

Γ_3	u^2	1	−1	1	1	0	0

Симплекс-таблица для новой угл. точки

	$Б(u)$	y	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	
	u_4	0	3	−2	0	1	0	
	u_5	4	1	1	0	0	1	
Γ_3	u^3	1	−1	1	1	0	0	$*18$
Δ	~~8~~	~~...~~3	14 >0	−18	0	0	0	

~~$\Gamma_3 * 18$ 18 −18 18 18 0 0~~

Δ	21	−4	0	18	0	0
− $\Gamma_3 * 18$	18	−18	18	18	0	0
	3	24	−18	0	0	0

→ Δ для новой угловой точки

В столбике u_3 делаем нули с помощью единички в Γ_3.

Напишем новую угл. точку: u^4, u^5, u^3 − базисные координаты

$v = (0, 0, 1, 0, 4)$

Дальше: $\min\left\{\frac{0}{3}; \frac{4}{1}\right\} = 0 \quad s = 4$

		y	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
Γ_1	u^1	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
Γ_2	u^5	4	0	$5/3$	0	$-\frac{1}{3}$	1
Γ_3	u^3	1	0	$1/3$	1	$\frac{1}{3}$	0
Δ		3	0	$-26/3$	0	$-\frac{14}{3}$	0

В последней строчке ед. положит. эл-т ⇒ Процесс закончен

⇓

$u_* = (0, 0, 1, 0, 4)$ → вырожд. угл. точка в той же (мы остались в той же точке, только базис изменился, т. е. мы нашли её еще на пред. шаге, а таблица нам этого не сказала)

$y(u_*) = 3.$

Упр1: на же задаче с другими угл. точками:

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$$ ~~невырожд~~

$$\left(\frac{8}{5}, \frac{12}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0\right)$$

Упр2: максимизировать ту же ф-ю

$$J(u) \to \sup \Rightarrow g(u) = -J(u) \to \inf$$

Все это хорошо, но для метода нам требовалось

1) знать $(v, B(v))$
2) $S(v, B(v)) \; \mathcal{E}_0$

Начнем с 2): это просто, этого легко добиться с помощью перенумерации координат

Напр., у нас была таблица:

0	-1	0	2	1	0
3	2	0	-1	0	1
0	1	+1	1	0	0

Поиск начальной угловой точки (метод искусственного базиса)

Пусть $U = \{u \geq 0, \; Au = b\}$

переходим к новой переменной и новой задаче:

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ + \\ n \end{matrix}$$

Считаем, что $b \geq 0$
(это не требование: если $(Au)^i = b^i < 0$
$\Rightarrow *(-1) \to \dots$)

Составляем новую целевую ф-ю:

$$g(z) = x^1 + \dots + x^m + 0 \cdot u^1 + \dots + 0 \cdot u^n = \langle c, z \rangle \to \inf_{Z^0},$$

где $Z = \{z \in E^{m+n}: \; z \geq 0, \; x + Au = b\}$

$$C = (I \;\; A) \qquad Cz = b, \quad \operatorname{rang} C = m$$

Получилась каноническая задача + бесплатная угловая точка:

$$z_0 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$Cz = b + A \cdot 0 = b$$

Эта точка угловая, базис

$$B(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_m$$ – не надо обращать ед. матрицу

Приведенная система $Ix + Au = b$

$$b = x + Au$$

Строчка Γ высчитывается просто, как и $\Delta(u)$

$$\Delta_i = \langle \underset{(1,\dots,1)}{\mathbb{1}_m}, \overbrace{B^{-1}(z_0)}^{=I_m} C_i \rangle - 0 = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}, \text{ для небазисн.}$$

$(\Delta_i = \langle \bar{c}, B^{-1} A_i \rangle - c_i)$ — столбцы матрицы C

$$S_0 \overset{\Gamma}{\succ} 0$$

Решаем с антициклином ~~при~~ I случай, т.к.

$$g_* = \inf \geq 0 \quad \text{(из вида функции } g)$$

135

$(z^*, B(z_*))$, $g(z_*) = g_*$

угл. точка

1) $g_* > 0 \Rightarrow U = \varnothing$

от противного: $\exists\, u_0 \in U \Rightarrow \tilde{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix} \in Z$

$g(\tilde{z}) = 0 \geq g_* > 0$

$0 > 0$

противоречие

2) $g_* = 0 \quad = g(z_*) = 0 \Rightarrow x_* = 0 \Rightarrow z_* = \begin{pmatrix} 0 \\ u^* \end{pmatrix}$

Покажем, что это u^* — угл. точка U

Пусть $\exists\, v_1, v_2 \in U$: $u_* = \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2$, $0 < \alpha < 1$

Введем $z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \in Z$

$$z_* = \begin{pmatrix} 0 \\ u_* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$\Downarrow$

z_* — не угловая точка

но она сто опр.* симплекс-метода явл. угловой

противоречие

---

v_* — угл., $B(v_*) = \{\ldots\}$

$v_*^j > 0 \Rightarrow j \in Б(v_*)$, надо добрать до $B(v_*)$

$\operatorname{rang} A = r$

r можно искать как в лин. алгебре

Теоремы

ТЕОРЕМА 1: если $U = \{u \geq 0,\ \underset{m\times n}{A} u = \overset{m}{b}\} \neq \emptyset$, то $\exists$ угловая точка

(мы это док-ли симплекс-методом)

ТЕОРЕМА 2 (Вейерштрасса)
если в канонич. задаче $J_* = \inf\limits_U J(u) > -\infty$, то $U_* \neq \emptyset$

~~[illegible]~~

Теорема только в лин. случае:

$J(u) = 0\cdot x + 1\cdot y$

$U = \{(x, y) \geq 0,\ y \geq \frac{1}{x}\}$

$\Downarrow$

в нелин. случае не действует

$J_* = 0,\ U_* = \emptyset$

ТЕОРЕМА 3: если в канонич. задаче $U_* \neq \emptyset$, то $\exists$ угл. точка $v_* \in U_*$, к-рая является оптимальной

(тоже уже док-на)

21.03

Лекция

Теорема Куна-Таккера

(1) $J(u) = \langle c, u \rangle \longrightarrow \inf\limits_{u \in U}$, $U = \{\underbrace{u \geq 0}_{U_0} : \overset{m\times n}{A} \overset{n}{u} = \overset{m}{b}\}$

$L(u, \lambda) = \langle c, u \rangle + \langle \lambda, Au - b \rangle$, $u \geq 0$, $\lambda \in E^m = \Lambda_0$

Седловая точка:

$$(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times E^m : \quad L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*)$$

$$\forall (u, \lambda) \in U_0 \times \Lambda_0$$

ТЕОРЕМА 4: пусть $U_* \neq \varnothing$ в задаче (1). Тогда $\forall u_* \in U_* \ \exists \lambda^* \in E^m$: (u_*, λ^*) - седло

Верно и обратное: если (u_*, λ^*) - седло, то $u_* \in U_*$

Док-во:

$\Rightarrow$ пусть $u_* \in U_* \Rightarrow u_* \geq 0$, $Au_* = b$, $J(u_*) = J_* > -\infty$ чтобы найти λ^*, докажем лемму:

Лемма: пусть $u_* \in U_*$. Тогда $\exists \lambda^*$:

1) $A^T \lambda^* + c \geq 0$
2) $\langle c, u_* \rangle = \langle -b, \lambda^* \rangle$

Док-во:

Случай 1 пусть $m = \text{rang}\, A = r$
$\Rightarrow$ к задаче можно применить симплекс-метод

1) $U \neq 0 \to \exists (v_0, B(v_0)) \xrightarrow{S\text{-метод}} (v_*, B(v_*))$, $J(v_*) = J_*$
процесс закончится за конечное число шагов (реализуется 1 случай)

Критерий окончания S-процесса:

$\Delta_i = \langle \tilde{c}, B^{-1} A_i \rangle - c_i \leq 0$, $i = 1 \ldots n$

$\lambda^* = -(B^{-1})^T \bar{c}$, $\quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c_{j_1} \\ \vdots \\ c_{j_r} \end{pmatrix}$, $\quad B(v_*) = (A_{j_1}, \ldots, A_{j_r})$

↓

сидит в Δ_i:

$$\Delta_i = \langle \bar{c}, B^{-1} A_i \rangle - c_i = \langle \underbrace{(B^{-1})^T \bar{c}}_{-\lambda^*}, A_i \rangle - c_i \le 0$$

$$\Rightarrow -\langle \lambda^*, A_i \rangle - c_i \le 0$$

$$-A_i^T \lambda^* - c_i \le 0$$

$$\Downarrow$$

$$A_i^T \lambda^* + c_i \geq 0, \quad i = 1 \ldots n$$

$$\Downarrow$$

$$A^T \lambda^* + c \geq 0 \text{ чтд.}$$

2) $\langle c, u_* \rangle = J_* = \langle c, u_* \rangle = \langle \bar{c}, \bar{v}_* \rangle =$ ($\bar{v}_* = B^{-1}(v_*) b$)

$= \langle \bar{c}, B^{-1} b \rangle = \langle \underbrace{(B^{-1})^T \bar{c}}_{-\lambda^*}, b \rangle = \langle -\lambda^*, b \rangle =$

$= \langle -b, \lambda^* \rangle$ чтд.

$\Rightarrow$ доказали для $m = \operatorname{rang} A = r$.

<u>Случай 2</u>: <u>$r = \operatorname{rang} A < m$</u> $\quad (r \le n)$

$Au = b \Leftrightarrow \langle a_i, u \rangle = b_i \quad i = \overline{1, m}$

Уберем ЛЗ строки $\Rightarrow$ получим усеченную равносильную систему:

$\langle a_i, u \rangle = b_i, \; i = 1, \ldots, r \;\Rightarrow\; \bar{A} \bar{u} = \bar{b}, \; \operatorname{rang} \bar{A} = \bar{r} =$ = числу строк $\bar{A}$.

⇓

(1) $\Leftrightarrow \langle c, u \rangle \to \inf, \; u \in U = \{u \geq 0 : \bar{A} u = \bar{b}\}$

а это <u>случай 1</u>

$\Rightarrow \exists \bar{\lambda}^* : \; A^T \bar{\lambda}^* + c \geq 0, \quad \langle c, u_* \rangle = \langle -b, \bar{\lambda}^* \rangle$

$\Rightarrow$ возьмем $\lambda^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, r \\ \\ \}\, m-r \end{matrix}$

Покажем, что это то самое λ^*:

$$A^T \lambda^* + c = \bar{A}^T \bar{\lambda}^* + c$$

1) $A^T \lambda^* + c \geq 0 \quad \Rightarrow$ 1) вып.

2) $\langle c, u_* \rangle = \langle -\bar{b}, \bar{\lambda}^* \rangle = \langle b, \lambda^* \rangle \quad \Rightarrow$ 2) вып.

Лемма доказана

Вернемся к док-ву теоремы.
Покажем, что (u_*, λ^*) — седло:

Правое нер-во: берем $\forall u \in V$

$$L(u_*, \lambda^*) = \langle c, u_* \rangle + \langle \lambda^*, \overbrace{Au_* - b}^{=0} \rangle = \langle c, u_* \rangle =$$

$$\overset{\text{лемма}}{=} \langle -b, \lambda^* \rangle \leq \langle -b, \lambda^* \rangle + \langle \underbrace{u}_{\geq 0}, \underbrace{A^T\lambda^* + c}_{\substack{\geq 0 \\ \text{по лемме}}} \rangle$$

$$= \langle -b, \lambda^* \rangle + \langle Au, \lambda^* \rangle + \langle u, c \rangle$$

$$= \langle -b + Au, \lambda^* \rangle + \langle c, u \rangle =$$

$$= L(u, \lambda^*) \qquad \forall u \geq 0$$

Левое нер-во:

$$L(u_*, \lambda^*) - L(u_*, \lambda) = \cancel{\langle c, u_* \rangle} + \langle \lambda^*, \overbrace{Au_* - b}^{=0} \rangle -$$

$$- \cancel{\langle c, u_* \rangle} + \langle \lambda, \underbrace{Au_* - b}_{=0} \rangle \equiv 0 \qquad \forall \lambda \in E^m$$

$\Rightarrow (u_*, \lambda^*)$ — седло

ч.т.д.

~~(**)~~ Двойственная ф-я:

$$\psi(\lambda) = \inf_{u \geq 0} L(u,\lambda) = \begin{cases} \langle -b, \lambda \rangle, & \text{если } A^T\lambda + c \geq 0 \\ -\infty, & \text{если иначе} \end{cases} \Bigg\} \to \sup_{\lambda \in \Lambda_0 \in E^m}$$

Двойственная задача:

$$\langle -b, \lambda \rangle \to \sup, \quad A^T\lambda + c \geq 0.$$

Мы док-ли, что, когда есть седло

$$\psi^* = \sup_{\Lambda_0} \langle -b, \lambda \rangle = \inf_{u \in U} \langle c, u \rangle = J_*$$

(в общем случае $\psi^* \leq J_*$)

$$\begin{matrix} \psi^* = J_* \\ u_* \in U^* \\ \lambda^* \in \Lambda^* \end{matrix} \iff \exists \text{ седло}$$

<u>Сложность:</u>

оказалось, что $\exists$ задачи, для к-рых симплекс-метод имеет экспоненц. сложность $(2^n - 1)$ n-число угл. точек (при плохой реализации)

Но это контрпримеры. А в неудачи всегда всё было прилично (полиномиально)

Были придуманы полиномиальные методы ~~Хачияна~~ для решения этой задачи

Оптимальное управление

$$\mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{T} f^0(x(t), u(t), t)\, dt + \varphi^0(x(T))$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(t), t), & t_0 \le t \le T \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

Задача со свободным правым концом

Надо выбрать управление u:

$$u = u(t) \in L_2^2[t_0, T], \quad u \in U \subseteq L_2^2[t_0, T]$$

Градиент задачи оптим. управления со свободным правым концом

Литература:

1. Васильев Ф.П.
„Числ. методы решения экстремальных задач"
1980, 81 гг

2. Васильев Ф.П.
„Методы решения экстремальных задач"
1981 г.

3. Васильев Ф.П.
„Методы оптимизации", 2002 г.

4. Карманов В.Г.
„Математическое программирование"

5. Сухарев, Федоров, Тимохов
„Курс методов оптимизации"

эк

Васильев Федор Павлович.

экзамен — весной