Методы оптимизации

Васильев Федор Павлович

1) Васильев „Числ. методы решения экстремальных задач"
2) Васильев „Методы реш. экстр. задач"
3) Васильев „Методы оптимизации"
4) Карманов „Матем. программировани
5) Сухарев, Федоров, Тимохов „Курс методов оптимизации"

Я люблю обе стороны математики: чистую — как возвышенный уход от реальности, прикладную — как страстное стремление к жизни.

(Томас Саати)

Утверждать, что эта штука равна 2ой производной, — большой грех! (Васильев

Мы должны приветствовать будущее, помня, что скоро оно станет прошлым, и мы должны с уважением относ. к прошлым достиж., помня, что в какой-то момент они были пределом человеч. возможностей.

(Д. Сантаяна)

$\boxed{06.09}$

Теоремы Вейерштрасса
(о достижении нижн. грани)

$J(u)$ – целевая ф-ция

V – мн-во, на к миним. ф-ие

(1) $J(u) \to \inf, \ u \in V$ – ищем минимум ф-ции J на мн-ве V

$J_* = \inf\limits_{u\in V} J(u)$ – нижн. грань

$V_* = \{u \in V : J(u) = J_*\}$

$g(u) \to \sup$ – максимизация

$J(u) = -g(u)$ – задача max перейдет в задачу min.

Опр. П-ть $\{u_k\} \in V$ называв. минимизирующей, если $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$

Теорема (В. классич.)

Пусть, V – замкн. и огр. из E^n, $J(u)$ – непр. на V

Тогда: 1) $J_* > -\infty$ | $J^* < +\infty$

2) $V_* \neq \varnothing$ | $V^* \neq \varnothing$

3) $\forall$ min-я п-ть сходится ко мн-ву V_*

В бесконечно мерном случае эта теорема не верна.

$J(u)$ – непр. $\to$ $|J(u) - J(u_0)| < \varepsilon \quad \forall u \in V \ |u-u_0|<\delta$

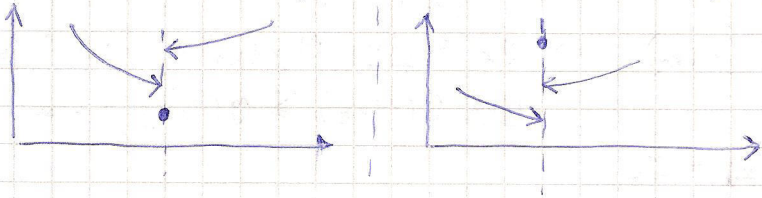
$$\Downarrow \ \underbrace{J(u_0) - \varepsilon \leq J(u)}_{\text{полунепр. снизу}} \leq J(u_0)+\varepsilon, \quad \forall u \in V \ |u-u_0|<\delta$$

Опр. $J(u)^{\in V}$ — полунепр. снизу в т. u_0, если $\forall \{u_k\} \in V : u_k \xrightarrow{\rho} u_0 \Rightarrow \underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u_0)$.

$V \subset M_{\rho(u,v)}$

↖ метрич. пр-во с метрикой ρ

полунепр. снизу полунепр. сверху



Рассм.: V - замкн. и огр.
огр. $\Rightarrow$ т. Больц.-Вейерш.
замкн. $\{u_k\} \to u_0 \in V$

В бесконеч. мерн. пр-ве нет т. Б-В.
Напр.: $H : \{e_k\}$ - ОНБ
$\|e_i - e_k\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_k\|^2 + 2(e_i, e_k) = 2$
т.е. $\{e_k\}$ не явл. фунд.

Опр. Мн-во $V \subseteq M$ называв. компактным, если из $\forall$ п-ти $\{u_k\} \in V$ $\exists$ подп-ть $\{u_{k_r}\} \xrightarrow{\rho} u_0$, $u_0 \in V$.

Теорема (В. - метрич. вариант)
Пусть, $V \subseteq M$ - метр. пр-во, V - компактн., $J(u)$ - полунепр. снизу на V.
Тогда: 1) $J_* > -\infty$
2) $V_* \neq \emptyset$
3) $\forall$ min-ая п-ть ρ-сход. к V_*.

Опр. $\{u_k\} \to V_*$, если $\rho(u_k, V_*) = \inf \rho(u_k, v) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$,
где $v \in V_*$

Док-во (теоремы):

1) Пусть, $\forall \{u_k\}$ – min-я п-ть задачи $\{1\}$
(почему $\exists$ такая п-ть?
а) $J_* = -\infty \Rightarrow \exists \{u_k\} \in V : J(u_k) \to -\infty = J_*$
б) $J_* > -\infty \Rightarrow \exists \{u_k\} \in V : J_* \le J(u_k) \le J_* + \frac{1}{k}$)

2) V – компактное, $\{u_k\} \in V \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \{u_{k_r}\} \xrightarrow{\rho} u_* \in V$

3) $J_* \le J(u_{k_r}) \Rightarrow J_* \overset{\le J(u_*) \le}{\vee}\le \underline{\lim}\, J(u_{k_r}) = \lim J(u_k) = J_*$
$\underline{\lim}\, J(u_{k_r}) \ge J(u_*) \ge J_*$
$\Downarrow$
$J(u_*) = J_*$
$\Downarrow$
$u_* \in V_* \Rightarrow V_* \ne \emptyset$

Значит $J_* = J(u_*) > -\infty$

4) $\forall \{u_k\}$ – min-я п-ть
$a_k = \rho(u_k, V_*) = \inf \rho(u_k, v)$, $k = 1, 2, \ldots$
$a_{min} = \underline{\lim}_{k\to\infty} \rho(u_k, V_*) \le \overline{\lim}_{k\to\infty} \rho(u_k, V_*) = a_{max}$

$0 \le a_{min}$

$\exists\, a_{k_m} = \rho(u_{k_m}, V_*) : \lim\limits_{m\to\infty} a_{k_m} = a_{max}$, $u_{k_m} \to u_*^{\in V}$ (предыд. пункт)

$\underbrace{\rho(u_{k_m}, V_*)}_{\to a_{max}} \le \rho(u_{k_m}, u_*) \to 0 \Rightarrow a_{max} = 0$

Значит $\rho(u_{k_m}, V_*) \to 0 \Rightarrow \{u_k\} \to V_*$

Т-ма док-на.

Эта т-ма имеет огр. применение.
(В гильб. пр-ве шар не явл. компактным)

В гильб. пр-ве H справедлива Т-ма Вейер., если исп. слабую сходимость.

Теорема (слабый вариант Т. В.)

Опр. $J(u) \in V \subset H$ – *слаб. полунепр. снизу* в u_0, если $\forall \{u_k\} \in V : \{u_k\} \xrightarrow{сл} u_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\lim}_{k \to \infty} J(u_k) \geq J(u_0)$

Опр. $V \subset H$ – *слабо компактное*, если $\forall \{u_k\} \subset V \to \exists \{u_{k_r}\} \xrightarrow{сл} u_0 \in V$.

Теорема (слабый вар. Т. В)

Пусть, $V \subset H$-гильб., V-сл. комп., $J(u)$ – слабо полунепр. на V.

Тогда: 1) $J_* > -\infty$
2) $V_* \neq \emptyset$
3) $\forall$ min п-ть слабо свод. к V_*.

Опр. $\{u_k\} \xrightarrow{сл} V_*$, если $\forall$ сл. предельн. точка u_* этой п-ти $\in V_*$

Док-во (т-мы):

1) Пусть, $\forall \{u_k\}$ – min п-ть задачи (1)

2) $\left.\begin{array}{l} V \text{ – сл. комп.} \\ \{u_k\} \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \{u_{k_r}\} \xrightarrow{сл} u_* \in V$

3) $J_* \overset{inf}{\leq} J(u_*) \overset{сл. полунепр.}{\leq} \underline{\lim}\, J(u_{k_r}) = \lim J(u_k) = J_*$

$\Downarrow$

$J(u_*) = J_* > -\infty$

$V_* \neq \emptyset$

4) $\forall \{u_k\}$ – min п-ть
u_* – $\forall$ пред. точка, $u_* \in V_*$

Т-ма док-на.

<u>Пример</u>:

① $g(u) = \|u\|^2_H$ — это ф-ия слабо полунепр. снизу

$\Uparrow$

$\forall u \in H$, $\forall \{u_k\} \xrightarrow{сл} u \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} (c, u_k) = (c, u)$, $\forall c \in H$

Показать: $\underline{\lim}\, g(u_k) \geq g(u)$

$$g(u_k) = \|u_k\|^2 = \|u_k - u + u\|^2 =$$

$$= \|u_k - u\|^2 + 2(u, u_k - u) + \|u\|^2 \geq$$

$$\geq 2(u, u_k - u) + \|u\|^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\lim_{k\to\infty} (u, u_k - u) = 0$$

$\Downarrow$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, g(u_k) \geq \|u\|^2 = g(u)$$

②. $\exists u_k$: $\underline{\lim}\, g(u_k) > g(u)$

$u_k = u + e_k$, $\{e_k\}$ — ОНС, $\{e_k\} \xrightarrow{сл} 0$

$$g(u_k) = \|u_k\|^2 = \|u\|^2 + 2\underbrace{(u, e_k)}_{\to 0} + \overset{=1}{\|e_k\|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(u_k) \geq \|u\|^2 + \underline{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim}\, g(u_k) \geq \|u\|^2 + 1 > \|u\|^2 = g(u)$$

$\boxed{13.09}$

③ $U = \{u \in H : \|u\| \leq R\}$ — шар

<u>Т-ма</u>. $\{u_k\}$, $\|u_k\| \leq const\ \forall k \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ подп. $\{u_{k_n}\} \xrightarrow{сл} u \in H$ (без док-ва)

Рассм. $g(u_k) = \|u_k\|^2$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, g(u_{k_n}) \geq g(u)$$

$g(u_{k_n}) \leq R^2$ (т.к. $\in$ шару U)

$\Downarrow$ $g(u) \leq R^2 \Rightarrow \|u\| \leq R \Rightarrow u \in U$

Получили: шар — сл. комп. мн-во в H.

Рассм. сферу: $S = \{u \in H : \|u\| = R\}$ - огр., замкн. $\|\cdot\|$

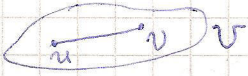
$\{e_k\}$ - ОНС, $R = 1$

$\{e_k\} \xrightarrow{сл.} 0$, но $0 \notin S$

$\Downarrow$

нет слабой компактности.

Опр. Мн-во V называется выпукл., если $\overset{\forall u, v \in V}{[u, v] \in V}$



$[u, v] = \{\omega : \omega = \alpha u + (1-\alpha) v\}$
$0 \le \alpha \le 1$

Теорема. Пусть $V^{\in H}$ - выпукл., замкн.$^{\|\cdot\|}$, огр.$^{\|\cdot\|}$ Тогда V - сл. компактно.
(без док-ва)

Класс слабо полунепр. снизу „беднее" класса сильно полунепр. снизу.

Пример:

$g(u) = -\|u\|^2$

$g(u)$ - сильно полунепр. снизу (т.е. по $\|\cdot\|$

$g(u)$ не явл. слабо полунепр. снизу

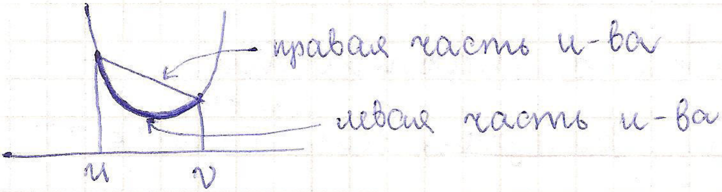
$\underline{\lim}(-\|u\|^2) \overset{?}{\ge} \|u\|^2$ - неверно

Теорема.
$\left.\begin{array}{l} J(u) - \text{полунепр. снизу по } \|\cdot\| \\ \text{выпукл.} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow J(u)$ - слабо полунепр. снизу

Опр. $J(u)$ - выпуклая на вып. V, если

$$J(\underbrace{\alpha u+(1-\alpha)v}_{\in V}) \le \alpha J(u)+(1-\alpha)\cdot J(v), \quad \forall u,v\in V, \ \forall \alpha\in[0,1]$$



Выпуклый вариант т-мы Вейер.:

Теорема. V - выпукл., замкн.$^{\|\cdot\|}$, огр.$^{\|\cdot\|}$ из K,
$J(u)$ - полунепр. снизу по $\|\cdot\|$, выпукл. на V.
Тогда: 1) $J_* > -\infty$
2) $V_* \neq \emptyset$
3) $\forall$ min п-ть $\{u_k\} \xrightarrow{сл.} V_*$

Пояснение:
V - ... => слаб. комп.
$J(u)$ - ... => слаб. полунепр. снизу } => сл. вар. т-мы Вейер.

(!) Все справедливо для рефлекс. $^{(B=B^{**})}$ банах. пр-в

L_p, $1<p<\infty$ - рефлекс. пр-ва.

L_1, C - нерефл.

Пример:
(нерефл. пр-ва, где т-ма Вейер. не имеет места)

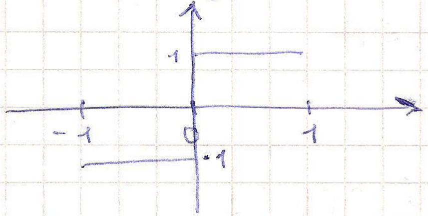
$$J(u)=\int_{-1}^{0} u(t)\,dt - \int_{0}^{1} u(t)\,dt \to \inf, \quad u\in V$$

$$V=\{u=u(t)\in C[-1,1]: \|u\|_C = \max_{t\in[-1,1]}|u(t)|\}$$

$[\ (c,u)_u = g(u)$ - сл. непр$\ ]$

$J(u)$ – лин. ф-ие $\Rightarrow$ $J(u)$ – сл. непр.

V – вып., замкн., огр. в C



$J_* = -2$

$J(u_*) = -2$ – нет такой точки u_*

Выпукл. вар. т-мы Вейер. не применим.

<u>Пример</u>:
(иллюстрация к метрич. вар. т-мы Вейер.)

$$V = \{ u = u(t) \in C[a,b] : |u(t) - u(\tau)| \le L|t-\tau| \}$$
$$|u(a)| \le M \qquad \forall t, \tau \in [a,b]$$

V – компактное мн-во в метрике C.

Т-ма Арцела: {ф-ии} равност. непр. и равном. огр. $\Rightarrow$ ~~мо~~ выбрать подп-ть, сход. к непр. ф-ии

Равност. непр.:

$$|u(t+\Delta t) - u(t)| \le L|\Delta t| < \varepsilon \quad \forall u, \ |\Delta t| \le \frac{\varepsilon}{L} = \delta$$

Равном. огр.:

$$|u(t)| \le \underbrace{|u(t) - u(a)|}_{\le \underbrace{L|t-a|}_{\le L|b-a|}} + \underbrace{|u(a)|}_{\le M} \le C = L|b-a| + M$$

$\Downarrow$

из V можно выделить подп-ть, сходящуюся к непр. ф-ии.

$$\forall \{u_k\} \in V \Rightarrow \exists \{u_{k_n}\} \xrightarrow{C} u(t)$$

Покажем, $u(t) \in C[a,b]$

$|u_{k_r}(t) - u_{k_r}(\tau)| \le L|t-\tau|$

$\Downarrow$

$|u(t) - u(\tau)| \le L|t-\tau|$

$|u_{k_r}(a)| \le M \Rightarrow |u(a)| \le M$

$\Downarrow$

$u(t) \in \mathcal{U}$

$\Downarrow$ $\mathcal{U}$ - компактное в $C[a,b]$

Т-ма Вейерш. для квадратичн. ф-ии: (ф-ла)

$J(u) = \|Au - b\|^2_F$, $A \in \mathcal{L}(H \to F)$, $b \in F$ H, F - гильб. пр-ва

J(u) - сл. полунепр. снизу ~~[illegible]~~ :

$\forall \{u_k\} \xrightarrow{сл.H} u \Rightarrow Au_k \xrightarrow{сл.F} Au \Leftrightarrow \forall f \in F\ (f, Au_k)_F \to (f, Au$

$\left(\langle f, Au_k \rangle_F = \langle A^* f, u_k \rangle_H \to \langle A^* f, u \rangle_H = \langle f, Au \rangle_F \right)$

$g(f) = \|f\|^2_F$ - сл. полунепр. снизу

$\underline{\lim}\, J(u_k) = \underline{\lim}\, \|\underbrace{Au_k - b}_{\to Au-b}\|^2_F \ge \|Au - b\|^2_F = J(u)$

$\Downarrow$

J(u) - сл. полунепр. снизу

Рассм. задачу миним.:

$J(u) = \|Au - b\|^2 \to \inf$, $u \in \mathcal{U}$

$\mathcal{U}$ - выпукл, замкн., огр. (т.е. слабокомп.)

$\Downarrow$

1) $J_* > -\infty$
2) $\mathcal{U}_* \neq \emptyset$
3) $\forall$ min п-ти $\xrightarrow{сл} \mathcal{U}_*$

Теор. Вейер. для терминальн. ф-ла в задачах оптим. упр.:

$$J(u) = |x(T;u) - b|^2 \to \inf \qquad (1)$$

↓ траектория

$$(2)\ \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\cdot x(t) + B(t)\cdot u(t), & t_0 \le t \le T \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

$x \in \mathbb{E}^n$, $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$, $u \in \mathbb{E}^r$

$\dot{x} \in \mathbb{E}^n$, $B \in \mathbb{E}^{n\times r}$

$\mathcal{A}u = x(T;u)$ (см. предыдущий пункт)

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \to F)$ — ?

(3) $u = u(t) \in V \subseteq L_2^r[t_0, T]$ — будем считать

$u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$

$u^i(t) \in L_2[t_0, T]$ — гильб. пр-во

$$\langle u, v\rangle_{L_2^r} = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{r} u^i(t)\cdot v^i(t)\,dt$$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle_{L_2^r}}$$

$\boxed{20.09}$

$H = L_2^r[t_0, T]$

$F = E^n$

$\mathcal{A}: H \to F$

Опр. Реш. задачи (2), соотв. управлению $u \in L_2^r$, назыв. ф-ия: 1) $x(t,u)$ – непр.

2) $$x(t,u) = \int_{t_0}^{t} (A(\tau)\cdot x(\tau,u) + B(\tau)\,u(\tau))\,d\tau \qquad (4)$$

~~Абс. непр. ф-ия — ∃ п.в. произв.~~

$A(t)$, $B(t)$ — кус.-непр.

$\tilde{\mathcal{A}}u = x(t,u)$

Покажем: <u>A – линейный</u>

(т.е. $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v, \ \forall u, v \in H, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$x(T, \alpha u + \beta v) = \alpha x(T, u) + \beta x(T, v)$$

(док-ем из опр. реш.)

Покажем: <u>A – огранич.</u>

($\|Au\|_F \leq c \|u\|_H$)

Из (4) $\Rightarrow |x(t,u)| \leq \underbrace{\|A(t)\|_C}_{a} \cdot \int_{t_0}^{t} |x(\tau)| d\tau +$

$$+ \underbrace{\|B(t)\|_C \cdot \int_{t_0}^{\overset{t \mapsto T}{t}} |u(\tau)| d\tau}_{b}$$

$A(t), B(t)$ – кус.-непр. $\Rightarrow \|A(t)\|_C = \sup\limits_{t_0 \leq t \leq T} |A(t)|$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq \varphi(t) \leq a \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau + b \\ \Downarrow \{\text{л. Гронуолла-Беллмана}\} \\ 0 \leq \varphi(t) \leq b \cdot e^{a(t - t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T] \end{array} \right.$$

$\Downarrow$

$$\underset{\neq \ \|x(\cdot, u)\|_C}{|x(t,u)|} \leq \|B\|_C \cdot \int_{t_0}^{T} |u(t)| dt \cdot e^{\|A\|_C \cdot (T - t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T] \qquad (5)$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{|x(T,u)|}_{=\|Au\|} \leq c \cdot \int_{t_0}^{T} |u(t)| dt \leq c\sqrt{(T - t_0)} \cdot \left(\int_{t_0}^{T} (u(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \underline{c_1 \cdot \|u\|_{L_2^r}}$$

$\Downarrow$

$$A \in \mathcal{L}(H \to F) \quad \Rightarrow \quad Au = x(T, u)$$

<u>V – слабо компакт.</u> в $L_2^r[t_0, T]$:

1) $V_1 = \{ u = \overset{r}{u}(t) \in L_2^r[t_0, T] : \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L_2^r} \leq R \}$

(шар в $\forall$ гильб. пр-ве – слабо комп.)

2) $V_2 = \{ u = \overset{r}{u}(t) \in L_2^r[t_0, T] : \alpha_i(t) \leq u^i(t) \leq \beta_i(t) \}$, $i = \overline{1, r}$

$u(t) = \{ u^1(t), \dots, u^r(t) \}$

$\alpha_i(t), \beta_i(t)$ – данные ф-ции из $L_2[t_0, T]$

Пример:

$\alpha_i(t) = -1, \quad \beta_i(t) = 1$

Тогда $\to \quad |u^i| \le 1$

V_2 – **выпуклое**, (т.к.)

$u(t), v(t) \in V_2$

$\alpha_i \le u^i \le \beta_i, \quad \alpha_i \le v^i \le \beta_i, \quad \forall i = \overline{1,r}$

$\Downarrow \{\forall \alpha \in [0,1]\}$

$\alpha_i \le \alpha u^i + (1-\alpha) v^i \le \beta_i, \quad \forall i = \overline{1,r}$

$\Downarrow$

$\alpha u + (1-\alpha) v \in V_2$

V_2 – **замкнутое**, (т.к.)

$u_k \in V_2, \quad u_k \to u$ в $\|\cdot\|_{L_2^r} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, u_{k_r}(t) \xrightarrow{п.в.} u(t)$

$\alpha_i(t) \le u_{k_r}(t) \le \beta_i(t)$, п.в. t

$\quad\quad\quad\downarrow$ п.в.

$\alpha_i(t) \le u(t) \le \beta_i(t) \quad \Rightarrow u(t) \in V_2$

V_2 – **огр.**, (т.к.)

$|u^i(t)| \le \max\limits_t \{|\alpha_i(t)|, |\beta_i(t)|\} \in L_2[t_0, T]$

$\forall$ координата ограничена

$\|u(t)\|_{L_2^r} \le const$

\~\~\~

Более общ. задача:

— " —

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\cdot x + B(t)\cdot u + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$x(t,u) = x_1(t,u) + x_2(t,$ [illegible]$)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax_1 + Bu \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = Ax_2 + f(t) \\ x_2(t_0) = x_0 \end{cases}$$

↑ см. пред. задачу

↑ не зависит от u

$Au = x_1(T; u)$

$$\mathcal{I}(u) = |x_1(T, u) + x_2(t) - b|^2 =$$

$$= |x_1(T; u) - b_1|^2, \quad b_1 = b - x_2(t)$$

<u>Т-ма Вейерштраса для интегр. ф-ла</u>:

(1) $$\mathcal{I}(u) = \int_{t_0}^{T} |x(t,u) - b(t)|^2 dt \to \inf$$

$b(t) \in L_2^n[t_0, T]$ – заданная ф-ция

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u(t) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$u = u(t) \in U \subset L_2^r[t_0, T]$$

$H = L_2^r[t_0, T]$

$F = L_2^n[t_0, T]$

$$Au = x(t, u) = x(\cdot, u)$$

A – <u>линейный</u> (см. предыд. задачу)

A – <u>огранич.</u>, т.к.
(см. предыд.)

$$|x(t,u)| \le \|B\|_c \int_{t_0}^{T} |u(t)| dt \cdot e^{\|A\|_c \cdot (T - t_0)}$$

$$\Downarrow$$

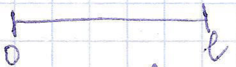
$$\|x(\cdot, u)\|_{L_2^n} \le C \cdot \|u\|_{L_2^r}$$

$$\int_{t_0}^{T} |\overset{x(t,u)}{Au}|^2 dt \le \int_{t_0}^{T} \|x(\cdot, u)\|_c dt = (T - t_0) \cdot \|x\|_c \le$$

$$\le C_2 \cdot \|u\|_{L_2^r}$$

$$A \in \mathcal{L}(H \to F)$$

Т-ма Вейршт. для $^{ур\text{-}е}$ стержня :



задаиный режим

$$J(u) = \int_0^l |y(T,x,u) - b(x)|^2 dx \longrightarrow \inf$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & (t,x) \in Q = [0,T] \times [0,l] \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 & \text{- изолир.} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=l} = -y\big|_{x=0} + \underbrace{u(t)}_{\text{темпер. внеш. среды}} & \text{- происходит теплообмен} \end{cases}$$

~~$\alpha_{min} \le u(t) \le \alpha_{max}$~~

$u = u(t) \in L^2(0,T)$

$\alpha \overset{п.в.}{\le} u(t) \overset{п.в.}{\le} \beta$

$\boxed{27.09}$

$Au = y(T;x,u)$

$A : H = L^2(0,T) \longrightarrow F = L^2[0,l]$

A – линейный, т.к. задача лин. по u.

Ограниченность: $\|Au\|_F \le C\|u\|_H$

↑ Покажем:

Считаем, что решение классическое.

$$\iint_Q y_t \cdot y \, dt\,dx = \iint_Q y_{xx}\, y \, dt\,dx$$

$\Downarrow$

$$\iint_Q y_t \cdot y \, dt\,dx = \int_0^l\int_0^T \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(y^2)\,dt\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l y^2\Big|_{t=0}^{t=T} dx = \frac{1}{2}\int_0^l y^2\big|_{t=T} dx - \frac{1}{2}\int_0^l \underbrace{y^2\big|_{t=0}}_{0} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l y^2\big|_{t=T} dx$$

$$\iint\limits_Q y_{xx}\, y\, dt\, dx = \int_0^T \int_0^l y_{xx}\, y\, dx\, dt =$$

$$= \int_0^T \left(y_x y \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l y_x^2\, dx \right) dt =$$

$$= \int_0^T \left((u-y)\cdot y \big|_{x=l} \right) dt - \int_0^T \overbrace{\left(y_x y \big|_{x=0} \right)}^{=0} dt - \ldots =$$

$$= \cancel{\int_0^T ((u-y)y} = \int_0^T uy\big|_{x=l}\, dt - \int_0^T y^2\big|_{x=l}\, dt - \int_0^T\int_0^l y_x^2\, dx\, dt$$

$\Downarrow$

$$\cancel{\int_0^l \frac{1}{2} y^2 \Big|_{t=T} dx}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l y^2(T,x,u)\, dx}_{\|Au\|_F} + \underbrace{\iint\limits_Q y_x^2\, dx\, dt}_{\geq 0} + \int_0^T y^2\big|_{x=l}\, dt = \int_0^T uy\big|_{x=l} dt$$

Оценим лев. часть:

$$\int_0^T u(t)\cdot y(t,l,u)\, dt \leq \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\, dt}_{\|u\|_H^2} + \frac{1}{2}\int_0^T y^2(t,l,u)\, dt$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l y^2(T,x,u)\, dx}_{\|Au\|_F^2} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\, dt}_{\|u\|_H^2}$$

$\Downarrow$ огр. док-на $(C=1)$

Значит, $A \in \mathcal{L}(H \to F)$

$C = 1 \Rightarrow \|A\| \leq 1$

Условия слаб. вар. т-мы Вейер. выполняются

$U = \{ u \in L^2(0,T),\ \alpha \leq u(t) \leq \beta \}$ – слаб. компактно (док-то также, как U_2).

(!) Предполагаем, что $\exists$ классич. реш. (если упр. u – „хорошее")

$\Rightarrow \|u - u_n\|_{L_2} \to 0$

Дифференцирование

X, Y - нормированные пр-ва
$F: X \to Y$

$O_\varepsilon(x) = \{z \in X : \|z - x\|_X < \varepsilon\}$ - ε-окрестность т. x

F опр. на $O_\varepsilon(x)$

Опр. F-диф. в т. x, если $\exists\ \overset{\text{лин.}}{\Lambda} = \Lambda(x) \in \mathcal{L}(X \to Y)$:

$$F(\underbrace{x+h}_{\in O_\varepsilon(x)}) - F(\underbrace{x}_{\in O_\varepsilon(x)}) = h \cdot \Lambda(x) + \alpha(h, x), \quad (1)$$

где $\dfrac{\|\alpha(h,x)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0$

Обозн. $\Lambda(x) \equiv F'(x)$ - производная Фреше

Пусть, $\exists\ \Lambda_1(x), \Lambda_2(x)$
Тогда, $(\Lambda_1(x) - \Lambda_2(x))h = \bar{o}(\|h\|)$, $\forall h: \cancel{\varepsilon} \underset{(x+h)}{\,} \in O_\varepsilon(x)$
Рассм. $\forall h$, $th : (x + th) \in O_\varepsilon(x)$, $\forall t\ |t| \le t_0 < \varepsilon$

$\Downarrow$

$t[(\Lambda_1(x) - \Lambda_2(x))\cancel{\varepsilon} h] = \bar{o}(t) = \bar{o}(t\|h\|)$

$\Downarrow$

$$\underbrace{(\Lambda_1(x) - \Lambda_2(x))h}_{\text{не зав. от } t} = \frac{\bar{o}(t)}{t} \to 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Lambda_1(x)h = \Lambda_2(x)h$, $\forall x \in X$

Единственность доказана.

Рассм. ф-л $\mathcal{J}(u)$, $u \in B$ - банах. пр-во
$F = \mathcal{J} : B = X \to Y = E^1$

$\Lambda(x) = F'(x) \in \mathcal{L}(B \to E^1) = B^*$ - это ф-л

$\mathcal{J}(u)$ - опр. в окр. $O_\varepsilon(u) = \{v \in B : \|v - u\|_B < \varepsilon\}$

Тогда $\mathcal{J}(\cdot)$ - диф. в т. u, если
$$\mathcal{J}(u+h) - \mathcal{J}(u) = \langle \mathcal{J}'(u), h \rangle + \alpha(h, u).$$

$\mathcal{J}'(u) \in B^*$, $\langle \mathcal{J}'(u), h \rangle$ - значение лин. огр. ф-ла $\mathcal{J}'(u)$ на эл-те h

$$\frac{|\alpha(h,u)|}{\|h\|_B} \to 0 \text{ , при } \|h_B\| \to 0$$

$J'(u)$ – производная Фреше

$J'(u) \in B^*$ 3 , $J' : B^* \to B^*$

$$J'(u+h) - J'(u) = \underline{L(u)}\,h + \bar{o}(\|h\|)$$

$$L(u) = \underset{\uparrow}{J''(u)} \in \mathcal{L}(B \to B^*)$$ – это оператор

вторая производная Фреше

Пусть, $B = H$,

$H^* : \ \forall f \in H^* \ \exists \eta \in H : f(x) \equiv \langle f, x \rangle = \langle \eta, x \rangle_H$

$H^* = H$

В этом случае $\langle J'(u), h \rangle = \langle J'(u), h \rangle_H$

Пусть, $B = H = E^n$

$J(u) = J(u^1, \ldots, u^n)$

$$J'(u) = \left(\frac{\partial J(u)}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial J(u)}{\partial u^n} \right) \in E^n = (E^n)^*$$

$$\underset{\nearrow}{(E^n)^*} = \underset{\uparrow}{E^n}$$

векторы-строки ... векторы-столбцы

$$J''(u) = \left\{ \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_i \, \partial u_j} \right\}_{i,j = \overline{1,n}}$$

$J''(u)$ – симметрич. оп-р (книга: Зорич „мат. ан."2)

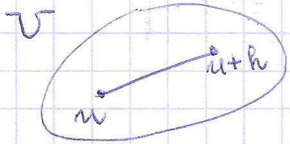
$$J(u+h) - J(u) = \langle \underset{\substack{\in B^* \\ H}}{\underline{J'(u)}}, h \rangle_{E^n} + \frac{1}{2} \langle \underset{\substack{\in \mathcal{L}(B \to B^*) \\ \mathcal{L}(H \to H)}}{\underline{J''(u)\,h}}, h \rangle_{E^n} + \bar{o}(\|h\|^2_E)$$

↑ф-ла Тейлора.

Док-ть: $J(u) = \sqrt{|xy|}$, $u = (x, y)$
в т. $u = 0$ ф-ия имеет частн. пр-ные, но
не дифференцируема.

04.10

Формула конечн. приращений:



Введем ф-цию

$f(t) = J(u+th), \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\underline{f'(t) = \langle J'(u+th), h\rangle}.$$

$$\underline{f''(u+th) = \langle J''(u+th)h, h\rangle},$$

Док-во:

$$f(t+\Delta t) - f(t) = J(\overbrace{u+(t+\Delta t)h}^{(u+th)+\Delta th}) - J(u+th) =$$

$$= \langle J'(u+th), \Delta th\rangle + \frac{1}{2}\langle J''(u+th)\Delta th, \Delta th\rangle +$$

$$+ \bar{o}(|\Delta t|^2\|h\|^2) =$$

$$= \overbrace{\langle J'(u+th), h\rangle}^{f'(t)}\Delta t + \frac{1}{2}\overbrace{\langle J''(u+th)h, h\rangle}^{f''(t)}\Delta t^2 +$$

$$+ \bar{o}(|\Delta t|^2)$$

ч. т. д.

$$J(u+h) - J(u) = \underline{f(1) - f(0)} = f'(\theta)\cdot(1-0) =$$

$$= \int_0^1 f'(t)\,dt =$$

$$= \langle J'(u+\theta h), h\rangle =$$

$$= \int_0^1 \langle J'(u+th), h\rangle\,dt$$

$$\underline{f'(1) - f'(0)} = \langle J'(u+h), h\rangle - \langle J'(u), h\rangle =$$

$$\overset{\|}{f''(\theta)} \dashrightarrow = \langle J''(u+\theta h)h, h\rangle$$

$$\overset{\|}{\int_0^1 f''(t)\,dt} \dashrightarrow = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, h\rangle\,dt$$

$$\boxed{\langle y'(u+h) - y'(u), z\rangle = \langle y''(u+\theta h)h, z\rangle = \\ = \int_0^1 \langle y''(u+th)h, z\rangle dt}$$

Док-во:

$$F(t) = \langle y'(u+th), z\rangle, \quad 0 \leq t \leq 1$$

u, h, z – фикс.

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \langle y'(\overbrace{u+(t+\Delta t)h}^{(u+th)+\Delta th}), z\rangle - \langle y'(u+th), z\rangle =$$

$$= \langle y''(u+th)\Delta t \overset{+o(|\Delta t|)}{h}, z\rangle \pm \underbrace{\langle y''(u+th)h, z\rangle}_{=F'(t)} \Delta t + \bar{o}(\overset{\in R}{\Delta t})$$

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) = \int_0^1 F'(t)\,dt$$

ч.т.д.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$x = 0, \quad x+h = 0+h$$

$$\underset{h^3 \cdot \sin\frac{1}{h}}{\underset{\shortparallel}{f(h)}} - \overset{=0}{f(0)} = \underset{f'(0)}{\underset{\shortparallel}{0}} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \underset{f''(0)}{\underset{\shortparallel}{0}} \cdot h^2 + \underset{o(h^2)}{h^3 \cdot \sin\frac{1}{h}}$$

↑ но не ∃

Обр. т-ма Тейлора:

$$\begin{cases} f(x+h) - f(x) = a_1(x) \cdot h + \frac{1}{2} a_2(x) \cdot h^2 + \overset{\alpha(h,x)}{\bar{o}}(|h|^2) \\ a_1 \text{ – 1ая произ.} \\ a_2 \text{ – 2ая произ.} \end{cases}$$

Верна, если $a_1(x)$ и $a_2(x)$ – непр. по x и $\alpha(h,x)$ равном. непр. в окр. т. X

(!) Ф-лы конечн. приращений верны для класса ф-ий $C^1(V)$ ($C^2(V)$).

19) $C^1(V)$ – ф-ии, дифф. по Фреше в ∀ т. V, и пр-ная непр. $\|y'(u+\Delta u) - y'(u)\|_H \to 0$, $\|h\| \to 0$

$$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u+\theta h), h \rangle \quad 0 < \theta < 1 \qquad (*)$$

↑ НЕ верна в общем случае

Пример:

верна, если $J(u): H \to \boxed{E^1}$

~~$J(u): H \to E^1$~~

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} : [0,1] \to E^2$$

$$F(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F(1) - F(0) = 0$$

$$F'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \end{pmatrix} \cdot 2\pi \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇓ ф-ла(*) не верна

$F: X \to Y$

$$\|F(u+h) - F(u)\|_X \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'(u+\theta h)\|_{\mathcal{L}(X \to Y)} \cdot \|h\|$$

↑ ф-ла верна

$$J(u) = \|Au - f\|_F^2, \quad A \in \mathcal{L}(H \to F), \quad f \in F$$

Покажем, что эта ф-ия дважды диф.

$$J(u+h) - J(u) = \|\overbrace{A(u+h)}^{Au+Ah} - f\|_F^2 - \|Au - f\|_F^2 =$$

$$= 2\langle Au - f, Ah \rangle + \overset{\langle Ah, Ah \rangle}{\|Ah\|^2} =$$

$$= \langle \underbrace{2A^*(Au-f)}_{= J'(u)}, h \rangle + \frac{1}{2} \langle \underbrace{2A^*Ah}_{= J''(u)}, h \rangle$$

$$J'(u) = 2A^*(Au - f)$$

$$J''(u) = 2A^*A$$

$$J'(u+h) - J'(u) =$$
$$= 2A^*(A(u+h) - f) -$$
$$- 2A^*(Au - f) =$$
$$= 2A^*A$$

$\boxed{11.10}$

(1): $J(u) = |x(T;u) - f|^2_{E^n}$

(2): $\dot{x} = D(t)\cdot x + B(t)\, u(t)$, $t_0 \le t \le T$

(3): $x(t_0) = 0$

(4): $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$

$Au = x(T;u) \in \mathcal{L}(H \to F)$, $H = L_2^r[t_0,T]$, $F = H^n$

$J(u) = \|\overset{\in H}{Au} - f\|^2_F$ – дважды диф

$J'(u) = 2A^*(Au - f)$

$J''(u) = 2A^*A$

$\langle Au, c\rangle_F = \langle u, A^*c\rangle_H$, $\forall u \in H$, $\forall c \in F$

$A^* \in \mathcal{L}(F \to H)$, $A^* \in \mathcal{L}(F^* \to H^*)$ (сопр. пр-ва)

Найдем A^*:

$A^*c = B^T(t)\,\psi(t,c)$, B – из сист. (5)

ψ – реш. задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -D^T(t)\cdot\psi, \quad t_0 \le t \le T & (6) \\ \psi(T) = c & (7) \end{cases} \to \psi(t;c)$$

сопр. к исх. ур-е

$$\langle Au, c\rangle_{E^n} \overset{(7)}{=} \langle Au, \psi(T)\rangle_{E^n} = \langle x(T,u), \psi(T;c)\rangle_{E^n} =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\langle x(t), \psi(t)\rangle_{E^n}\, dt + \langle \underbrace{x(t_0)}_{0 \text{ по } (3)}\, \psi(t_0)\rangle_{E^n} =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle \overset{(2)}{\dot{x}}, \psi\rangle + \langle x, \overset{(6)}{\dot{\psi}}\rangle\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} (\langle \underline{Dx} + Bu, \underline{\psi}\rangle - \langle x, D^T\psi\rangle) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle Bu, \psi\rangle_{E^n}\, dt = \int_{t_0}^{T} \langle u, B^T\psi\rangle_{E^r}\, dt \Rightarrow$$

$\Rightarrow A^*c = B^T(t)\,\psi(t,c)$ (5) - док-но.

$\Rightarrow J'(u) = 2A^*(Au - f)$

Схема вычисл. градиента:

1) $u = u(t) \Rightarrow$ решаем задачу Коши (2)-(3) $\Rightarrow$
$\Rightarrow x(t_0) \Rightarrow x(T;u) = Au \Rightarrow Au - f \Rightarrow$
$\Rightarrow$ решаем задачу Коши (6)-(7) $c = Au - f \Rightarrow$
$\Rightarrow \psi(t;c) \Rightarrow 2B^T(t)\,\psi(t,c) \equiv J'(u)$

надо решать 2 задачи Коши (прямую и обратную)

Дифференцирование интегрального функционала.

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} |x(t;u) - f(t)|^2_{E^n}\, dt \qquad (1)$$

$Au = x(t;u) \in \mathcal{L}(H \to F)$
$H = L_2^r[t_0;T]$
$F = L_2^n[t_0,T]$

$J(u) = \|Au - f\|^2_F$
$J'(u) = 2A^*(Au - f)$, $J''(u) = 2A^*A$

Утв. $A^*c = B^T(t)\cdot\psi(t,c)$, где ψ - реш. з. Коши:

$$\begin{cases} \psi' = -D^T(t)\cdot\psi - c(t) & (6) \\ \psi(T) = 0 & (7) \end{cases}$$

Док-во:

$$\langle Au, c\rangle_F = \int_{t_0}^{T} \langle x(t,u), c(t)\rangle_{E^n}\, dt = \int_{t_0}^{T} \langle x; -\dot\psi - D^T\psi\rangle_{E^n} dt =$$

$$= -\langle x;\psi\rangle\Big|_{t=t_0}^{T} + \int_{t_0}^{T}(\langle \dot x, \psi\rangle - \langle x, D^T\psi\rangle)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T}(\langle \underline{Dx} + Bu, \underline{\psi}\rangle - \langle Dx, \psi\rangle)\, dt = \int_{t_0}^{T}\langle Bu, \psi\rangle_{E^n} dt =$$

$$= \langle u, B^T\psi\rangle_{L_2^r(t_0,T)} \Rightarrow A^*c = B^T\psi$$

Утв. док-но.

Схема вычисл. градиента:

$u = u(t) \Rightarrow \{2,3\} \Rightarrow x(t,u) = Au \Rightarrow Au - f = c(t) \Rightarrow \{6,7\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi(t,c) \Rightarrow 2\,B^T(t)\,\psi(t,c) = J'(u)$

Откуда задача Коши для ψ?
Метод неопр. коэф.

$$\int_{t_0}^{T} (\dot{x} - Dx - Bu, \psi)\,dt = 0 \Rightarrow \dots = \langle \odot, \dot{\psi} + D^T\psi \rangle + \langle \cdot, \psi(T) \rangle +$$
$$+ \langle u, \cdot \rangle + \langle \odot, c \rangle .$$

Градиент задачи о нагреве стержня.

(1) $J(u) = \int_0^l |y(T,x,u) - f(x)|^2\,dt$

y - распред. температуры в стержне в момент T

$$\begin{cases} y_t = y_{xx}, \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times (0,l) & (2) \\ y_x|_{x=0} = 0, \quad y_x|_{x=l} = u(t) - y|_{x=l} & (3) \\ y(0) = 0 & (4) \end{cases}$$

(5) $u(t) \in L_2[0,T]$

(6) $Au = y(T,x,u) \in \mathcal{L}(H \to F)$, $H = L_2(0,T]$, $F = L_2(0,l)$

(7) $A^* c = \psi(t,l,c)$

$$\begin{cases} \psi_t = -\psi_{xx}, \quad (t,x) \in Q & (8) \\ \psi_x|_{x=0} = 0, \quad \psi_x|_{x=l} = -\psi|_{x=l} & (9) \\ \psi|_{t=T} = c(x) & (10) \end{cases}$$

не ОЗ, решается назад

$$\langle Au, c \rangle_F = \int_0^l y(T,\overset{6}{x},y) \cdot \psi(T,\overset{10}{x},c)\,dx =$$

$$= \int_0^l \Big[\int_0^T (y\psi)'_t\,dt + \underbrace{y\psi\Big|_{t=0}^{\cancel{t=T}}}_{0} \Big] dx =$$

$$= \iint_Q (y_t\psi + y\psi_t)\,dt\,dx =$$

$$= \int_0^T \int_0^l (y_{xx}\psi - y\psi_{xx})\,dx\,dt =$$

$$= \int_0^T \left((y_x\psi - y\psi_x)\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l (y_x\psi_x - y_x\psi_x)\,dx \right) dt =$$

$$= \int_0^T \left[(u - y|_{x=l})\psi|_{x=l} - y(-\psi)|_{x=l} \right] dt -$$

$$- \int_0^T (y_x\psi - y\psi_x)_{x=0}\, dt =$$

$$= \int_0^T (u\psi|_{x=l} - y\psi|_{x=l} + y\psi|_{x=l})\, dt =$$

$$= \int_0^T u\psi|_{x=l}\, dt = \langle u, \underbrace{\psi(t,l,c)}_{“A^*c} \rangle_{L^2(0,T)} \Rightarrow (7)$$

$u(t) \Rightarrow \{u_k\}$ – „хорошие" управление

$\|u_k - u\|_{L_2} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle Au_k, c \rangle = \langle u_k, A^*c \rangle$

Схема вычисления:

$u = u(t) \Rightarrow \{2,3,4,\boxed{6}\} \Rightarrow y(t,x,u) \Rightarrow \overset{“Au}{y(T,x,u)} - f(t) =$

$\Rightarrow \{8,9,10\} \Rightarrow \psi(t,x,c) \Rightarrow 2\psi|_{x=l} = J'(u)$

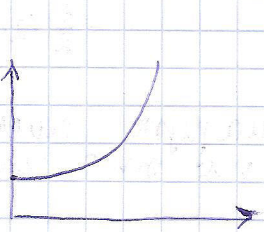
Производная Гато

$F: X \to Y$

$$\lim_{t \to +0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} = F'(x,h) = \langle \overset{\uparrow}{F'(x)}, h \rangle$$

пр-ная Гато
(даже когда ф-ция
разрывна)

Пример:



пр-ная по Гато есть $= 0$

по Фреше нет

$\sqrt{|xy|}$ – не дифф ни по Фреше, ни по Гато

$\boxed{18.10}$.

U - мн-во из лин. пр-ва - наз. <u>выпукл.</u>, если ∀ отрезок $[u,v] \in U$, если $u, v \in U$.

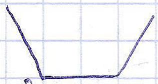
$\{w \in U : \alpha u + (1-\alpha)v\}$ - отрезок $[u,v]$
$\forall \alpha \in [0,1]$

J(u) наз. <u>выпуклой</u> на вып. U, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \le \alpha J(u) + (1-\alpha)\cdot J(v), \quad \forall u, v \in U \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

J(u) наз. <u>строго выпукл.</u> на вып U, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)\cdot J(v), \quad \forall \alpha \in (0,1) \quad \forall u \neq v.$$



J(u) наз. <u>сильно выпукл.</u> на вып. U, если

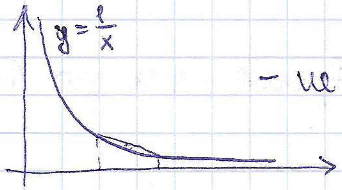
$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \le \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) - \frac{1}{2}\overset{\wedge 0}{\varkappa}\,\alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2_H \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad \forall u, v \in U$$

↗ рассм. только в гильб. пр-вах

$g(u) = \|u\|^2_H$ - сильно вып. на H

$$\|\alpha u + (1-\alpha)v\|^2_H = \alpha\|u\|^2_H + (1-\alpha)\|v\|^2_H - \frac{1}{2}\underset{\varkappa}{\underset{\shortparallel}{\textcircled{2}}}\,\alpha(1-\alpha)\|v-v\|^2_H$$

Если в Банах. пр-ве обнаруж. сильно вып. ф-ция (на всем пр-ве), то это гильб. пр-во.



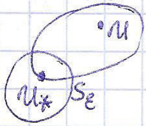
- не явл. сильно вып.
(но явл. строго вып.)

Теорема 1 (о лок. min)

Пусть, $J(u)$ – вып. на вып. U,
Тогда $\forall$ т. лок. min на U будет т. глоб. min

Док-во:

1) Пусть, u^* – т. лок. min =>
=> $\exists$ ε-окр. $O_\varepsilon(u^*) \cap U = S_\varepsilon$; $J(u_*) \le J(u)$, $\forall u \in S_\varepsilon$

2) 

$$\alpha(u-u_*)+u_* = \alpha u+(1-\alpha)u_* \in S_\varepsilon \quad \forall \alpha,\ 0<\alpha<\alpha_0\le 1$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{J(u_*)} \le J(\alpha u+(1-\alpha)u_*) \le \alpha J(u)+(1-\alpha)J(u_*) = \alpha(J(u)-J(u_*)) + \cancel{J(u_*)} \quad =>$$

=> $0 \le \alpha(J(u)-J(u_*))$ => $J(u_*) \le J(u)$, $\forall u \in U$

=> u_* – т. глоб. min

Т-ма док-на.

Теорема 2 (о мн-ве Лебега).

Пусть, $J(u)$ – вып. на вып. U
Тогда, $M(v)=\{u\in U : J(u)\le J(v)\}$ – мн-во Лебега – вып. $\forall v \in U$.

Док-во:

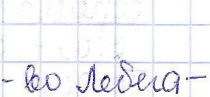
1) Рассм. $u, \omega \in M(v)$

$$J(\underbrace{\alpha u+(1-\alpha)\omega}_{\in U}) \le \underset{\overset{\vee}{0}}{\alpha}\,\underbrace{J(u)}_{\le J(v)} + \underbrace{(1-\alpha)}_{\overset{\vee}{0}}\,\underbrace{J(\omega)}_{\le J(v)} \le$$

$$\le \alpha\cdot J(v)+(1-\alpha)\cdot J(v) = J(v) \quad => [u,\omega]\in M(v)$$

Т-ма док-на.

Теорема 3 (вып. мн-ва т. min)



– вып. но $U_*=\varnothing$

$J(u)$ – вып. на вып. U
Тогда $U_*=\{u\in U : J(u)=J_*=\inf J(u)\}$ – выпукл.
(или $=\varnothing$)

Док-во:

$U_*=\{u\in U : J(u)\le J_*\}$ – вып. по т-ме 2.

Т-ма док-на.

Теорема 4.

Если $J(u)$ – строго вып., то U_* либо $\varnothing$, либо $U_* = \{u_*\}$.

Док-во:

1) $U_* \neq \varnothing$

пусть, $U_* = \{u_*, v_*\}$

Тогда $J_* \leq J(\alpha u_* + (1-\alpha) v_*) \leq \alpha \underbrace{J(u_*)}_{= J_*} + (1-\alpha) \underbrace{J(v_*)}_{= J_*} = J_*$

$\Downarrow$ $J(\alpha u_* + (1-\alpha) v_*) = J_*$

но $u_* \neq v_*$, $\alpha \in (0,1)$

$\Downarrow$

против. $\Rightarrow U_* = \{u_*\}$

Т-ма док-на.

Теорема 5 (о касат. плоск.) – !

$J(u)$ – вып. ф-ия на вып. U, $\exists J'(v)$, $v \in U$

Тогда $J(u) \geq J(v) + \langle J'(u), u - v \rangle$, $\forall u \in U$.

Теорема 6.

$J(u)$ – сильно вып. на вып. $U^{\in H}$, $\exists J'(v)$, $v \in U$

Тогда $J(u) \geq J(v) + \langle J'(u), u - v \rangle + \frac{1}{2} æ \|u - v\|^2$

(при $æ = 0$ т-ма 6 $\mapsto$ т-ма 5)

Док-во:

1) $\frac{1}{2} æ \alpha (1-\alpha) \|u - v\|^2 \leq \alpha (J(u) - J(v)) + J(v) - J(v + \alpha(u - v)) =$

$= \alpha (J(u) - J(v)) - \langle J'(v), \alpha(u - v) \rangle - \bar{o}(\alpha)$, $\forall \alpha \in [0,1]$

$\Downarrow$

$\frac{1}{2} æ \|u - v\|^2 (1-\alpha) \leq J(u) - J(v) - \langle J'(v), u - v \rangle - \frac{o(\alpha)}{\alpha}$, $\forall \alpha \in (0,1]$

$\Downarrow$ $\alpha \to 0$

$\frac{1}{2} æ \|u - v\|^2 \leq J(u) - J(v) - \langle J'(v), u - v \rangle$

Т-мы док-ны.

Эта т-ма обратима:

~~$J(u)$ сильно вып на~~ вып. U, $J(u) \in C^1(U)$ и вып. н-во, то $J(u)$ – сильно вып.

Все хорды выше графика } у вып.
Все касат. ниже графика } ф-ии

Теорема 8 (необх. усл. min)

$J(u)$ - на вып. $U \subset H$,
u_* - т. лок. min, $\exists\, J'(u_*)$
Тогда необх. $\langle J'(u_*), u-u_* \rangle_H \geq 0$ $(*)$, $\forall u \in U$

Док-во:

1) лок min $\Rightarrow J(u_*) \leq J(u)\ \forall u \in S_\varepsilon$

2) $u_1 = u_* + \alpha(u-u_*) \in S_\varepsilon$

$$J(u_*) \leq J(u_* + \alpha(u-u_*)) = J(\alpha u + (1-\alpha)u_*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq J(\alpha u + (1-\alpha)u_*) - J(u_*) = \langle J'(u_*), \alpha(u-u_*) \rangle + \underline{\bar{o}}(\alpha)$$

$\forall \alpha: 0 < \alpha < \alpha_1 \leq 1$

$$0 \leq \langle J'(u_*), u-u_* \rangle + \frac{o(\alpha)}{\alpha}, \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_1)$$

$\Downarrow \alpha \to 0$

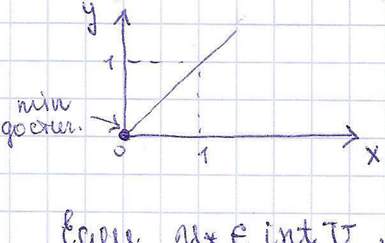
$$\langle J'(u_*), u-u_* \rangle \geq 0$$

Т-ма док-на.

Пример:

ф-ия $y = x$, $x \in [0,1]$

$y' = 1$



на 1 курсе
u_* - внутр. точка
$u_* \in \operatorname{int} U \Rightarrow J'(u_*) = 0$

Если $u_* \in \operatorname{int} U$, то $(*) \Leftrightarrow J'(u_*) = 0$

$\Uparrow$

$\forall h$, $u_* + \delta h \in U$ при $\forall \delta$, $0 < \delta < \delta_0$

$(*) \Rightarrow \langle J'(u_*), \delta h \rangle \geq 0$, $\forall \delta$, $0 < \delta < \delta_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle J'(u_*), h \rangle \geq 0$

пусть $h = -J'(u_*) \Rightarrow -\|J'(u)\|^2 \geq 0 \Rightarrow J'(u) = 0$

$$\frac{dJ(u)}{de} = \lim \frac{J(u+te)-J(u)}{t} = \langle J'(u), e \rangle \geq 0$$

↑ производная по напр.

$\boxed{25.10}$

Теорема 9 (Критерий оптимальности)

U - вып. мн-во, $J(u)$ - вып. ф-ия $\in C^1(U)$, $U_* \neq \emptyset$

Тогда, $\underset{(u_* \in U)}{u_* \in U_*} \Leftrightarrow \langle J'(u_*), u-u_* \rangle_H \geq 0 \quad \forall u \in U$ (1)

Док-во:

1) $\textcircled{\Rightarrow}$ т-ма 8.

2) $\textcircled{\Leftarrow}$ $u_* \in U$

$\langle J'(u_*, u-u_* \rangle_H \geq 0, \ \forall u \in U$

$u_* \in U_*$ - ?

По т-ме о кас. пл. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow J(u) \geq J(u_*) + \underbrace{\langle J'(u_*), u-u_* \rangle}_{\overset{\vee|}{0} \text{ (по усл.)}} \geq J(u_*), \ \forall u \in U$$

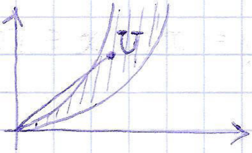
$\Rightarrow J(u) \geq J(u_*), \ \forall u \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow u_*$ - т. min $\Rightarrow u_* \in U_*$

Т-ма док-на.

Недостатки:

- $J(u)$ - вып.
- U - вып.



(1) - Вариационное н-во

Пример:

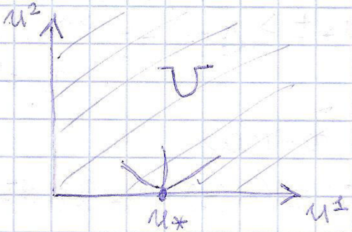
$J(u)$ - гладкая

$J(u) \to \inf$, $U \equiv E^n_+ = \{(u^1, \dots, u^n) = u \geq 0\}$

(1) $\Leftrightarrow$ [illegible] $u^i_* \frac{\partial J(u_*)}{\partial u^i} = 0$, $i = 1..n$

Покажем

Пусть, $n=2$



1) $u_* \in \operatorname{int} E_2^+ \Rightarrow J'(u_*) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1)$

2) $u_*,\ u_*^2 = 0$
$\frac{\partial J(u_*)}{\partial u^1} \geq 0 \Rightarrow$ ~~(как u_* — внутр. точк~~
(1)

3) $u_*^1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial J(u_*)}{\partial u^2} \geq 0 \Rightarrow (1)$

4) $u_*^1 = u_*^2 = 0 \Rightarrow (1)$

[<u>Задача</u>. $J(u) \to \inf,\ u \in U = \{\alpha_i \leq u^i \leq \beta_i\}$

В общем случае:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} u_* \in \operatorname{int} U \to J'(u_*) = 0 \\ u_* \in \text{Гр.} \longrightarrow \begin{cases} \text{принадлежность Гр.} \ (g(u)=c) \\ \text{произв. по кас. напр.} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\nearrow$ n уравнений
(в „хор." случае)

<u>Условие оптимальности для квадратичн. ф-ла</u>

$J(u) = \|Au - f\|_F^2$

$A \in \mathcal{L}(H \to F),\ f \in F$

$u \in U$ — выпукл., $U_* \neq \emptyset$

$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle_H \geq 0,\ \forall u \in U \Rightarrow$

$u_* \in U_* \Leftrightarrow \langle A^*(Au_* - f), u - u_* \rangle_H \geq 0$

(т.к. $J'(u) = 2A^*(Au - f)$)

<u>Термин. ф-л</u>:

$J'(u) = 2B^T(t) \cdot \psi(t; c_*)$

$Au = x(T; u)$

$H = L_2^r[t_0, T],\ F = E^n$

$(1) \Rightarrow \langle B^T(t)\psi(t,c)\ ,\ u(t)-u_* t\rangle_{L_2^r[t_0,T]} \geq 0\ ,\ \forall u \in U$

$U \subseteq L_2^r$

[**Задача**. Крит. для интегр. ф-ла

$J'(u) = \psi(t,l;c)\ ,\quad \int_0^T \psi(t,l;c)(u(t)-u_*(t))\,dt \geq 0$

Задача

$J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle$ (Ритц)

$A = A^* \geq 0 \Rightarrow J(u)$ – вып.

$J'(u) = Au - f$

$J'(u_*) = 0 = Au_* - f = 0$

$\Updownarrow$

$J(u) \to \inf_u$

Теорема Вейерштраса для сильно вып. ф-ций.

Теорема.

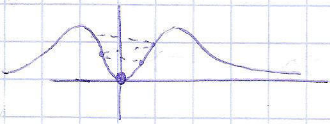
U – вып. замкн. мн-во из H (необяз. – огр. – !),

$J(u)$ – сильно вып., полунепр. снизу $\|\cdot\|$

Тогда, 1) $J_* > -\infty$, $U_* \neq \emptyset$, $U_* = \{u_*\}$

2) $\forall$ min $\overset{J(u_k)\to J(u_*)}{\text{п-ти}}$ $\{u_k\} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\varkappa \|u_k - u_*\|^2 \le J(u_k) - J(u_*), \ \forall k = 1, 2, \dots$$



– min п-ть может не сходится

Док-во:

Доп. предполож.: $\exists J'(v)$ в люб т. $v \in U$

1) Введем мн-во Лебега:

$$M(v) = \{u \in U : J(u) \le J(v)\}$$

$M(v)$ – выпукл. (т-му доказывали)

2) По т-ме о кас. пл.:

~~$0 \le J(v) - J(u) \le \langle J'(v), u - v \rangle \le$~~

$$J(u) \ge J(v) + \langle J'(v), u - v \rangle + \frac{1}{2}\varkappa\|u - v\|^2$$

$$\frac{1}{2}\varkappa\|u - v\|^2 \le \underbrace{J(u) - J(v)}_{\le 0} + \langle J'(v), v - u \rangle \le$$

$$\le \langle J'(v), v - u \rangle \le \|J'(v)\| \cdot \|u - v\|$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2}\varkappa\|u - v\| \le \|J'(v)\|, \ \forall u \in M(v)$$

$\Downarrow$ $M(v)$ – огр.

3) $\forall \{u_k\} \in M(v)$, $\{u_k\} \xrightarrow{\|\cdot\|} u$

Проверим, что $u \in M(v)$

$u \in U$, т.к. U – замкн. мн-во

$J(u_k) \le J(v)$, $k = 1, 2, \dots$

$\Downarrow$ {полунепр. снизу} $J(u) \le \underline{\lim}\, J(u_k) \le J(v) \Rightarrow$

$\Rightarrow J(u) \le J(v) \Rightarrow u \in M(v) \Rightarrow$

$\Rightarrow M(v)$ – замкн.

4) $M(v)$ – вып., огр., замкн. $\Rightarrow$ слабо компак.

5) $J(u) \to \inf, u \in U \Leftrightarrow J(u) \to \inf, u \in M(v)$

если $u \notin M(v) \Rightarrow J(u) > J(v) \Rightarrow$ вне $M(v)$ нет min

6) Слаб. вар. т-мы Вейерштраса $\Rightarrow$
(M – слабо комп.)

$\Rightarrow J_* > -\infty$, $U_* \ne \emptyset$

7) Сильно вып. ф-ия $\Rightarrow$ строго вып. $\Rightarrow$
$\Rightarrow U_* = \{u_*\}$

8) $$\frac{1}{2}\varkappa \|u - u_*\|^2 \le J(u) - J(u_*) - \underbrace{\langle J'(u_*), u - u_* \rangle}_{\ge 0\ \forall u \in U} \le$$

$$\le J(u) - J(u_*), \quad \forall u \in U$$

$\Downarrow$ $u = u_k$

$$\frac{1}{2}\varkappa \|u_k - u_*\| \le J(u_k) - J(u_*), \quad k = 1, 2, \dots$$

$\uparrow$ усл.: $\exists J'(u_*)$

Т-ма док-на.

Замеч.
По сравн. с предыд. т-мами Вейер., от ф-ии треб. больше, от мн-ва – меньше.

Пример:

$J(u) = u^p$, $p \in \mathbb{R}$

Когда ф-ия выпукла, сильно вып. ?

Критерии выпуклости и сильной выпуклости.

Теорема (I критерий)

1) $\left.\begin{array}{l} U \text{ – вып. мн-во из } H \\ J(u) \in C^1(U) \end{array}\right\} \Rightarrow J(u) \text{ – вып.} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle J'(u) - J'(v), u-v \rangle \geq 0$ (1) $\forall u, v \in U$

2) $\left.\begin{array}{l} U \text{ – вып. из } H \\ J(u) \in C^1(U) \end{array}\right\} \Rightarrow J(u) \text{ – сильно вып.} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle J'(u) - J'(v), u-v \rangle \geq \mu \|u-v\|^2$ (2) $\mu \overset{const}{>} 0$

Теорема (II критерий)

1) U – вып. из H, $\operatorname{int} U \neq \varnothing$, $J(u) \in C^2(U) \Rightarrow$

$\Rightarrow J(u)$ – вып. $\Leftrightarrow \langle J''(u)h, h \rangle_H \geq 0$, $\forall u \in U$ (3) $\forall h \in H$

2) U – вып. из H, $\operatorname{int} U \neq \varnothing$, $J(u) \in C^2(U) \Rightarrow$

$\Rightarrow J(u)$ – сильно вып. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle J''(u)h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2$, $\forall u \in U$, $\forall h \in H$ (4)

Комментарии:

(1) $\rightarrow$ $J'(u)$ – монот.

(2) $\rightarrow$ $J'(u)$ – сильно монот.

(3) $\rightarrow$

(4) $\rightarrow$ положит. опр. квадр. форма (крит. Сильвестра)

Док-во (T1)

$\boxed{01.11}$

1) $\textcircled{\Rightarrow}$

$$\begin{array}{l} J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u-v \rangle + \frac{1}{2}\varkappa \|u-v\|^2 \\ + \; J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), v-u \rangle + \frac{1}{2}\varkappa \|u-v\|^2 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle J'(u) - J'(v), v-u \rangle + \varkappa \|u-v\|^2 \leq 0 \qquad \mu = \varkappa$$

2) $\textcircled{\Leftarrow}$ $J(u) \in C^1(v)$, вып. (2)

$$\alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - J(\overbrace{\alpha u + (1-\alpha)v}^{u_\alpha}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{лектор заныкал} \\ \text{в шпар-} \\ \text{галку :)} \end{array} \right. (!)$$

$$= \alpha \left(J(u) - J(u_\alpha) \right) + (1-\alpha)\left(J(v) - J(u_\alpha) \right) = \left\{ \text{ф-ла конечн. приращ.} \right\}$$

$$= \alpha \int_0^1 \langle J'(u_\alpha + t(u-u_\alpha)), u-u_\alpha \rangle dt +$$

$$+ (1-\alpha) \int_0^1 \langle J'(u_\alpha + t(v-u_\alpha)), v-u_\alpha \rangle dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u - u_\alpha = (1-\alpha)(u-v) \\ v - u_\alpha = -\alpha(u-v) \end{array} \right\} =$$

$$= \alpha(1-\alpha) \int_0^1 \langle J'(\underbrace{u_\alpha + t(u-u_\alpha)}_{z_1}) - J'(\underbrace{u_\alpha + t(v-u_\alpha)}_{z_2}), u-v \rangle dt =$$

$$= \{ z_1 - z_2 = t(u-v) \} =$$

$$= \alpha(1-\alpha) \int_0^1 \langle J'(z_1) - J'(z_2), \frac{1}{t}(z_1 - z_2) \rangle dt \geq$$

$$\geq \alpha(1-\alpha) \int_0^1 \frac{1}{t} \mu \| z_1 - z_2 \|^2 dt =$$

$$= \alpha(1-\alpha) \int_0^1 t\,dt\, \mu \|u-v\|^2 = \alpha(1-\alpha)\frac{\mu}{2}\|u-v\|^2, \quad \forall u, v \in U$$

$$\varkappa = \mu$$

(Показать: $z_1, z_2 \in U$)

Теорема 1 док-на.

Док-во (Т2):

[illegible]) $\boxed{\Rightarrow}$

1) $\underline{u \in \mathrm{int}(U)}$, $\forall h \in H$: $u + \varepsilon h \in U$ $\forall \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0(h)$

$J(u)$ – сильно вып. $\Rightarrow$ {условие (2)} $\Rightarrow$

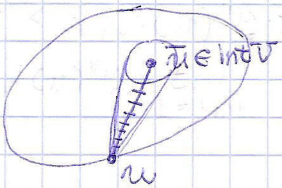
$$\Rightarrow \langle J'(u+\varepsilon h) - J'(u), \varepsilon h \rangle \geq \mu \| \varepsilon h \|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon \langle J''(u + \theta\varepsilon h)\varepsilon h, h \rangle \geq \mu \varepsilon^2 \|h\|^2 \xrightarrow{\varepsilon > 0}$$

$$\Rightarrow \langle J''(u+\theta\varepsilon h)h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2 \Rightarrow \{ \varepsilon \to +0 \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle J''(u)h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2$$

2) $\underline{u \in \text{Гр}\, U}$



$\exists \{u_k\} \in \text{int}\, U \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle J''(u_k)h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2, \quad k = 1, 2, \ldots$

$\downarrow$

$\langle J''(u)h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2$

$\Leftarrow$

3) вып. усл. (4)

$\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle = \{\text{т-ма о средн.}\} =$
$= \langle J''(v + \theta(u - v))(u - v), \overbrace{u - v}^{=h} \rangle \geq \{(4)\} \geq$
$\geq \mu \|u - v\|^2 \quad \Rightarrow \{\text{по Т1}\} \; J(u)$ - сильно вып.
$\forall u, v \in U$

Теорема 2 док-на

Пример:

$$\begin{cases} J(u) = x^2 - y^2, & u = (x, y) \\ U = \{(x, y) \in E^2 : y = 0\} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$J''(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\langle J''(u)h, h \rangle = (h_1)^2 - (h_2)^2$ - $\underline{\text{н-во (3) не вып.}}$

$J(u)\big|_U = x^2$ - вып. ф-ция (сильно вып.)

Т. к. $\underline{\text{int}\, U = \emptyset}$

~

Рассм. $H = E^n$

$J(u) \in C^2(E^n)$

вып. (3) $\Rightarrow \langle J''(u)h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in H^n$ - квадр. форма, неотриц. опр.

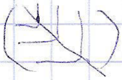
Критерий: $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \;\; \forall x \in E^n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ все миноры матриц. (симметр. отн. главн. диаг.)

$< J''(u)h, h > \; > 0 \; \forall h \in E^n \Leftrightarrow \; < J''(u)h, h > \; \geq \mu \|h\|^2$

$\inf\limits_{\|u\|=1} < J''(u)h, h > \; \geq \mu$

$J(u) = u^p, \quad p \in \mathbb{R}$

$J(u) = ax^2 + bxy + cy^2 + dz^2$ – опр. коэф., когда ф-ия вып., сильно вып. ?



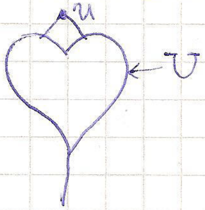
Проекция точки на мн-во.

Опр. U - мн-во из H, $u \in H$. Скажем, что т. $\omega \in U$ явл. проекцией т.u, если

$$\|\omega - u\| = \inf_{v \in U} \|v - u\| = \rho(u, U)$$

$$\omega \triangleq P_U u$$

U - окружность
U - проекция т. u



т.u имеет 2 проекции

Теорема 1. U - вып. замкн. из H $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall u \in H \ \exists!$ проекция т. u $P_U u$.

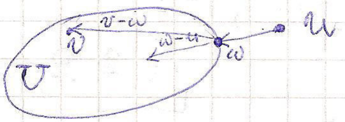
Док-во:

1) Рассм. $g(v) = \|v - u\|^2_H$ - сильно вып. на H
$g(v) \to \inf, \ v \in U$
$\Downarrow$
{т-ма Вейерштр.}
$\exists! \omega^{\in U}: g(\omega) = \inf\limits_{v \in U} g(v) \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\omega - u\|^2 \leq \|v - u\|^2, \ \forall v \in U \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\omega - u\| \leq \|v - u\|$
$\omega = P_U u$

Т-ма док-на.

Теорема 2 (характ. св-во проекции)
V - вып. замк. мн-во из H ,

$$\omega \in P_V u \iff \langle \omega - u, v - \omega \rangle_H \geq 0 \quad \forall v \in V$$



Док-во :

1) $g(v) = \| v - u \|^2_H$, $\omega = P_V(u)$

восп. критерием оптим. =>

$\Rightarrow \langle g'(\omega), v - \omega \rangle \geq 0, \forall v \in V$

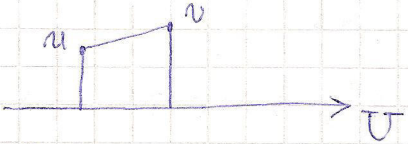
ω - т. min

$g'(v) = 2(v-u) \Rightarrow g'(\omega) = 2(\omega - u) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \langle \omega - u, v - \omega \rangle \geq 0$

Т-ма док-на

Теорема 3: Пусть, V - вып. замк. из H.
Тогда $\| P_V(u) - P_V(v) \| \leq \| u - v \|, \forall u, v \in V$



Док-во :

$\langle P_V(u) - u, z - P_V(u) \rangle \geq 0, \quad \forall z \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow$ верно и для $z = P_V(v) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle P_V(u) - u, P_V(v) - P_V(u) \rangle \geq 0, & \forall u, v \in V \\ \langle P_V(v) - v, P_V(u) - P_V(v) \rangle \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\langle P_V(u) - P_V(v) - u + v, P_V(v) - P_V(u) \rangle \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|P_U(u) - P_U(v)\|^2 \leq \langle u-v, P_U(u) - P_U(v)\rangle \leq$$

$$\leq \|u-v\| \cdot \|P_U(u) - P_U(v)\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|P_U(u) - P_U(v)\| \leq \|u-v\|$$

Т-ма док-на.

$\boxed{08.11}$

<u>Теорема 4</u>. U - вып. замк. мн-во, $J(u)$ - вып. и $\in C^1(U)$, $U_* \neq \varnothing$. Тогда

$$u_* \in U_* \Leftrightarrow u_* = P_U(u_* - \alpha J'(u_*)),\ \forall \alpha > 0$$

<u>Док-во</u>:

1) $u_* \in U_* \overset{\text{крит. оптим.}}{\Leftrightarrow} \langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0\ \forall u \in U$

$\Leftrightarrow \langle \alpha J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0,\ \forall \alpha > 0,\ \forall u \in U$

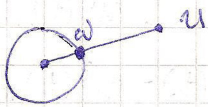
$\Leftrightarrow \langle \underset{\omega}{u_*} - \underbrace{(u_* - \alpha J'(u_*))}_{u}, v - \underset{\omega}{u_*} \rangle \geq 0 \quad \forall \overset{u}{v} \in U$

$\Updownarrow$ по т-ме 2 ~~$u_* \in U_* \Leftrightarrow$~~ $u_* = P_U(u_* - \alpha J'(u_*))$

Т-ма док-на.

<u>Примеры</u>:
(проектирование)

① $U = \{u \in H : \|u\| \leq R\}$



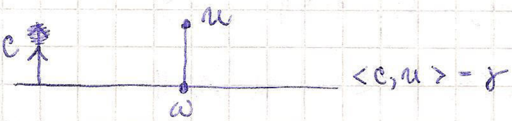
$$w = P_U(u) = \begin{cases} \frac{u}{\|u\|}R, & u \notin U \\ u, & u \in U \end{cases}$$

Проверим (по т-ме 2):

$$\langle \omega - u, v - \omega \rangle = \langle \frac{u}{\|u\|}R - u, v - \omega \rangle =$$

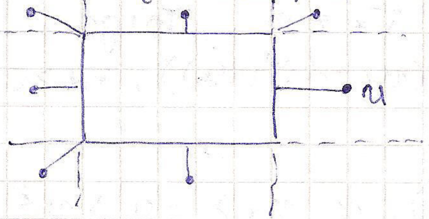
$$= \frac{\|u\| - R}{\|u\|} \langle \|u\|R - \langle u, v \rangle \rangle \geq 0$$

② . $U = \Gamma = \{u \in U : \langle c, u \rangle = \gamma,\ c \neq 0\}$



$$\omega = u + \alpha c = u + \frac{\gamma - \langle c, u \rangle}{\|c\|^2} c$$

③ . $U = \{u = (u^1, \dots, u^n) : \alpha_i \le u^i \le \beta_i,\ i = \overline{1,n}\}$



$$\omega^i = \begin{cases} \alpha_i, & u^i < \alpha_i \\ \beta_i, & u^i > \beta_i \\ u^i, & \alpha_i \le u^i \le \beta_i \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}$$

$$(\omega^i - u^i)(v^i - \omega^i) \ge 0, \quad \forall i = \overline{1,n}$$

$\Downarrow \Sigma$

$$\langle \omega - u, v - \omega \rangle \ge 0$$

④ . $U = \{u = u(t) \in L_2^r[0,T] : \alpha_i(t) \le u^i(t) \le \beta_i(t)\}$ $i = \overline{1,r}$

$$\omega^i(t) = \begin{cases} \alpha_i(t), & u^i(t) < \alpha_i(t) \\ \beta_i(t), & u^i(t) > \beta_i(t) \\ u^i(t), & \alpha_i(t) \le u^i(t) \le \beta_i(t) \end{cases} \qquad i = \overline{1,r}$$

$$(\omega^i(t) - u^i(t))(v^i(t) - \omega^i(t)) \ge 0 \quad \text{п.в. } t \in [0,T] \quad i = \overline{1,r}$$

$\Downarrow \int_0^T dt$

$$\int_0^T (\omega^i(t) - u^i(t))(v^i(t) - \omega^i(t))\, dt \ge 0 \qquad i = \overline{1,r}$$

$\Downarrow \Sigma$

$$\langle \omega(t) - u(t), v(t) - \omega(t) \rangle_{L_2^r} \ge 0$$

(!) ⑤. Гильбертов кирпич

(в экзамен не входит)

$$l_2, \quad U = \{u = (u^1, \dots, u^n, \dots) \in l_2 : |u^n| \le \frac{1}{n}, \; n = 1, 2, \dots\}$$

Св-ва: 1) выпукл.
2) огранич.
3) замкнут. } => слабо комп.

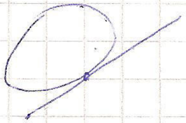
Есть ли внутр. точки? Нет.

0 – не явл. внутр. точкой, т.к. рассм. направление

$$e = (1, \frac{1}{2^{3/4}}, \dots, \frac{1}{n^{3/4}}, \dots) \in l_2$$

$0 + \varepsilon e \in U$ – ? $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$

$\frac{\varepsilon}{n^{3/4}} \le \frac{1}{n}$ $\forall n = 1, 2, \dots$ – ? $\quad \varepsilon < \underbrace{\frac{1}{n^{1/4}}}_{\to 0}$ $\quad \varepsilon_0 \nexists$



– верно для E^n

– не верно для гильб. кирпича (через 0 нельзя провести опорную гиперплоскость)

> То, что я понял, прекрасно. Из этого я заключаю, что остальное, что я не понял, тоже прекрасно.
>
> (Сократ)

Методы оптимизации

Кто пойдет на поле за ворота,
Кто обратно вернется опять,
Словно ищет в потемках кого-то
И не может никак отыскать.

(песня молодого гармонист

Что искал гармонист? Экстремум.
Каким методом? Многошаговым.

Общие соображения

$J(u) \longrightarrow \inf, \quad u \in U \subseteq H$

u_k – известн., $u_{k+1} = u_k + \alpha p_k$

$J(u_{k+1}) < J(u_k)$

p_k – направл., не вывод. из U

p_k, α – ?

u_0 – нач. точка – ?

$U = \varnothing$ – ?

Когда останавлив.?

$|J(u_{k+1}) - J(u_k)| < \varepsilon$

$\|u_{k+1} - u_k\| \le \gamma$

Сходимость?

Устойчивость?

Градиентный метод

$J(u) \to \inf, \quad u \in \underline{H}$ (1)

$J(u) \in C^1(H)$

$\boxed{u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$ (2)

$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle + \bar{o}(\|h\|)$

$-\|J'(u)\| \cdot \|h\| \leq \langle J'(u), h \rangle \leq \|J'(u)\| \cdot \|h\|$

$" = " \Leftrightarrow h = \alpha J'(u)$

Выбираем α_k:

1) скорейший спуск
   $J(u_k - t J'(u_k)) = f_k(t) \to \inf$
2) $\alpha_k = \alpha$ (т.е. постоян. шаг) (3)
3) $J(u_{k+1}) < J(u_k)$ ← такое α_k
   (дробление)

Рассм. $\alpha_k = \alpha = \text{const}$

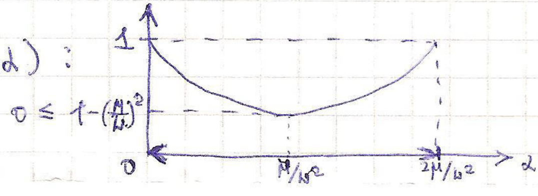
<u>Теорема</u> (сход.)
Пусть, $U = H$, $J(u)$ – сильно вып., $J(u) \in C^1(H)$
$\|J'(u) - J'(v)\| \leq L \|u - v\|$.
Тогда, метод (2)–(3) – сходится $\forall u_0$, u_* – mi
где $\alpha_k = \alpha \in (0, \frac{2\mu}{L^2})$ $\left(\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \geq \mu \|u - v\|^2 \right)$
крит. сильн. вып.

$\|u_k - u_*\| \leq q^k \|u_0 - u_*\|, \quad k = 0, 1, \ldots$

$q = \sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2}$

~~~~~~

График $q^2(\alpha)$:


~~~~~~

Док-во:

1) Рассм. задачу:

$J(u) \to \inf, \ u \in H$

$u_{k+1} = u_k - \alpha J'(u_k) = Au_k$

2) $\exists!\ u_*$ (в силу т-мы)

Рассм. $Au = u - \alpha J'(u)$

$u_* = Au_*$ - неподв. точка, т.к.

$u_* = Au_* = u_* - \alpha \underbrace{J'(u_*)}_{=0} = u_*$

3) Покажем, что оп-р сжимающий:

$\|Au - Av\|^2 = \|u - \alpha J'(u) - v + \alpha J'(v)\|^2 =$

$= \|u - v\|^2 - 2\alpha \langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle + \alpha^2 \|J'(u) - J'(v)\|^2 \le$

$\le \|u - v\|^2 (1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2) \le \theta \|u - v\|^2, \ 0 < \theta < 1$

(см. график)

$\Downarrow$

$\|Au - Av\| \le \theta \|u - v\|$ => сжимание =>

=> сх-ся к св. неподв. т. =>

=> $u_k \xrightarrow{\|\cdot\|} u_*$

4) $\|u_{k+1} - \overset{=Au_*}{u_*}\| = \|Au_k - Au_*\| \le \theta \|u_k - u_*\| \le$

$\le \theta^2 \|u_{k-1} - u_*\| \le \dots \le \theta^{k+1} \|u_0 - u_*\|$

$\theta = q$

$\Downarrow$

сход. метода док-на

Т-ма док-на.

Рассм. $J(u) = \frac{1}{2}\|Au - f\|^2_F$, $A \in \mathcal{L}(H \to F)$, $f \in F$

$J'(u) = A^*(Au - f)$, $J''(u) = A^*A$

$u_{k+1} = u_k - \alpha A^*(Au_k - f)$

Проверим усл. т-мы:

$\|J'(u) - J'(v)\| = \|A^*A(u - v)\| \le \|\overset{\le L}{A^*A}\| \cdot \|u - v\|$

2-ой критерий сильн. выпукл.:

$$< J''(u)h, h > = < A^*Ah, h > \geq \mu \|h\|^2$$

μ - младшее соб. число A^*A $(A^*A > 0)$
L - макс. соб. число A^*A, если $H = E$"

Почти все задачи уклад. в эту схему =>
=> метод пишется легко

Достоинства и недостатки метода:

⊕ простая и универс. схема, нужно только знать градиент
⊖ плохая сходимость $q \sim 1$

если $\mu \ll L$, то сход. плохая

„овражные ф-ии" нужно масштабировать, превратить в шар (окр-ть)

Метод проекций градиента

$J(u) \to \inf$, $u \in U$ – вып., замкн. из H

$J(u) \in C^1(U)$

$u_{k+1} = u_k - \alpha J'(u_k)$ – нельзя, т.к. может $\notin U$

$\Downarrow$

$u_{k+1} = P_U(u_k - \alpha_k J'(u_k))$

Теорема. U – вып., замкн. из H, $J(u) \in C^1(U)$, $J(u)$ – сильно вып. (т.е. $\mu\|u-v\|^2 \le \langle J'(u) - J'(v), u-v \rangle$), $\|J'(u) - J'(v)\| \le L\|u-v\|$.
Тогда, $\forall u_0 \in U$, $\{u_k\} \to u_*$, $0 < \alpha < \frac{2\mu}{L^2}$ $\Rightarrow$ верна оценка

$$\|u_k - u_*\| \le q^k \|u_0 - u_*\|, \quad q = \sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2}$$

Док-во:

1) $Au = P_U(u - \alpha J'(u))$

2) $u_* = Au_* = P_U(u_* - \alpha J'(u_*))$, $\forall \alpha > 0$

Пок-ем сжимаемость:

$\|Au - Av\|^2 = \|P_U(u - \alpha J'(u)) - P_U(v - \alpha J'(v))\|^2 \le$

$\le 1 \cdot \|(u - \alpha J'(u)) - (v - \alpha J'(v))\|^2 = \dots$

(см. предыд. т-му)

Т-ма док-на.

Достоинства и недостатки:

$J(u) = \frac{1}{2}\|Au - f\|_F^2 \to \inf$, $u \in U$, $A \in \mathcal{L}(H \to F)$, $f \in F$

$J'(u) = A^*(Au - f)$, $J''(u) = A^*A$

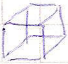
$u_{k+1} = P_U(u_k - \alpha[A^*(Au_k - f)])$

Для конкр. задачи:

$u_{k+1} = P_U(u_k - \alpha\psi(t, l, c)) = \{U = \{\alpha \le u(t) \le \beta\}\} =$

$$= \begin{cases} \alpha, & \text{если } u_k - \alpha\psi() < \alpha \\ \beta, & \text{если } u_k - \alpha\psi() > \beta \\ u_k - \alpha\psi(t, l, c_k), & \text{если } (u_k - \alpha\psi()) \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

$c_k = Au_k - f$

$J(u) = x^2 + xy + y^2$ $(x, y) \in$ 

⊕ : —"—

⊖ : —"—

⊖ : проецировать на ∀ шаге сложно

Методы 1-ого пор., исп. только знание градиента:
- метод возможн. напр.
- метод условного градиента
- метод сопряж. градиентов

Метод Ньютона

(1): $J(u) \to \inf$, $u \in U$ - вып., замкн. мн-во из **H**
$J(u) \in C^2(U)$

Это почти неподвижность и мука
Мчаться куда-то со скоростью звука,
Зная прекрасно, что есть уже где-то
Некто, летящий со скоростью света.

(2): u_k - изв;
$J_k(u_{\cancel{*}}) = J(u_k) + \langle J'(u_k), u - u_k \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u_k)(u - u_k), u - u_k \rangle +$
$+ \bar{o}(\|u - u_k\|^2)$

(3): Рассм. задачу: $J_k(u) \to \inf$ на $u \in U$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow J_k(u_{k+1}) = \min\limits_{U} J_k(u)$

Рассм. $\underline{U = H}$
Ищем такое u: $J'(u) = 0$

$J_k'(u_{k+1}) = 0$, $J'(u_k) + J''(u_k)(u - u_k) = J_k'(u)$

$J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k) = 0 \Rightarrow J''(u_k)(u_{k+1} - u_k) = -J'(u_k)$

Пусть, $\exists (J''(u_k))^{-1} \Rightarrow$
$u_{k+1} - u_k = -(J''(u_k))^{-1} J'(u_k) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_{k+1} = u_k - (J''(u_k))^{-1} J'(u_k)$ — это метод Ньютона

$f(x) = 0 \to x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$J(x) = f'(x) = 0 \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - (f''(x_k))^{-1} f'(x_k)$

22.11

(1) $J(u) \to \inf, \quad u \in U, \quad J(u) \in C^2(U)$

u_k - изв.

(2) $J_k(u_k) = \langle J'(u_k), u - u_k \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u_k)(u - u_k), u - u_k$

$\Downarrow \to \inf, \ u \in U$

u_{k+1}

<u>Теорема</u>. Пусть, U - вып. замк. из H, $\operatorname{int} U \neq \emptyset$,

(3) $J(u) \in C^2(U)$, $\|J''(u) - J''(v)\| \leq L \cdot \|u - v\|$, $L = \text{cons}$ $\forall u, v \in U$

(4) $\|u_0 - u_*\| < \frac{2\mu}{L}$, $J(u)$ - сильно вып.

$\langle J''(u)h, h \rangle \geq \mu \|h^2\|$

Тогда метод (2) порождает однозн. u_k,

(5) причем $\|u_k - u_*\| \leq \frac{2\mu}{L} q^{2^k}$, $q = \frac{L \|u_0 - u_*\|}{2\mu} < 1$

<u>Док-во</u>:

1) $\exists! \, u_*$ (следует из т-мы Вейерштрасса)

2) $u_k \Rightarrow ! \, u_{k+1} \exists$, (т.к.)

$J'_k(u) = J'(u_k) + J''(u_k)(u - u_k)$

$J''_k(u) = J''(u_k)$

$\langle J''_k(u)h, h \rangle = \langle J''(u_k)h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow J_k(u)$ - сильно вып. (2ой крит.)

3) $J_k(u_{k+1}) = \min\limits_{u \in U} J_k(u) \iff$

$\iff \langle J'_k(u_{k+1}), u - u_{k+1} \rangle \geq 0$, $\forall u \in U$ (критер. оптим.)

$\langle J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k), u - u_{k+1} \rangle \geq 0$, $\forall u \in U$

$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$, $\forall u \in U$

$$\Downarrow \begin{cases} \langle J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k), u_* - u_{k+1} \rangle \geq 0 \\ \langle J'(u_*), u_{k+1} - u_* \rangle \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le \langle J'(u_*) - J'(u_k) - J''(u_k)(u_{k+1} \overset{\pm u_*}{-} u_k),\ u_{k+1} - u_* \rangle =$$

$$= \overbrace{\langle J'(u_*) - J'(u_k),\ u_{k+1} - u_* \rangle}^{\int_0^1 \langle J''(u_k + t(u_* - u_k))(u_* - u_k),\ u_{k+1} - u_* \rangle dt} - \underbrace{\langle J''(u_k)(u_{k+1} - u_*),\ u_{k+1} - u_* \rangle}_{\ge \mu \|u_{k+1} - u_*\|^2}$$

$$- \langle J''(u_k)(u_* - u_k),\ u_{k+1} - u_* \rangle \qquad (*1)$$

Ф-ла конечн. приращ.:

$$\langle J'(u+h) - J'(u),\ z \rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h,\ z \rangle dt$$

$(*1) \Rightarrow$

$$\mu \|u_{k+1} - u_*\|^2 \le \int_0^1 \langle \overbrace{(J''(u_k + t(u_* - u_k)) - J''(u_k))}^{\text{усл. Липшица}}(u_* - u_k),\ (u_{k+1} - u_*) \rangle dt \le$$

$$\Downarrow$$

$$\le L \int_0^1 t \|u_* - u_k\|^2 \|u_{k+1} - u_*\| dt$$

$$\Downarrow$$

$$\mu \|u_{k+1} - u_*\| \le L \|u_* - u_k\|^2 \underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{= \frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$(6) \quad \|u_{k+1} - u_*\| \le \frac{L}{2\mu} \|u_k - u_*\|^2, \quad k = 0, 1, \ldots$$

4) $k = 0 \Rightarrow \|u_0 - u_*\| \le \cancel{\frac{2\mu}{2\mu}} \frac{2\mu}{L} \underbrace{q^{2^0}}_{= q}$ – верно

$k \ge 1 \Rightarrow \|u_k - u_*\| \le \frac{2\mu}{L} q^{2^k}$ – пусть верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow (6)\ \|u_{k+1} - u_*\| \le \frac{L}{2\mu} \left(\frac{2\mu}{L} q^{2^k} \right)^2 = \frac{2\mu}{L} q^{2^{k+1}}$

Т-ма док-на.

<u>Достоинства метода</u>:

\+ высок. скорость сходим.

\+ если $U = H = E^n$, то $u_{k+1} = u_k - (J''(u_k))^{-1} J'(u_k)$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{J''(u_k)}_{\text{матр.}} \underbrace{(u_{k+1} - u_k)}_{\text{вектор}} = \underbrace{- J'(u_k)}_{\text{вектор}}$$

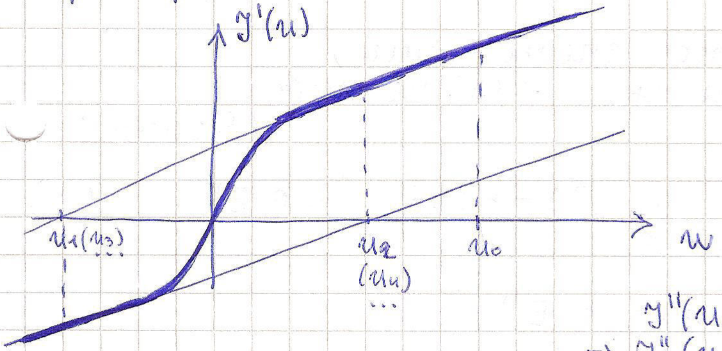
↑ СЛАУ.

<u>Недостатки</u>:

\- на ∀ шаге реш. задача квадратичн. миним.

\- достат. хороший выбор нач. приближ. u_0

Пример :



метод не сходится (плохой выбор u_0)

$J''(u_k) \geq \mu > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow J''(u_k) h^2 \geq \mu h^2$

$$u_{k+1} = u_k - (J''(u_k))^{-1} J'(u_k)$$

$\downarrow$ $u_{k+1} = u_k - A_k \cdot J'(u_k)$, A_k - „просто" вычисл.
$\|A_k - (J''(u_k))^{-1}\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Квазиньютоновские методы.

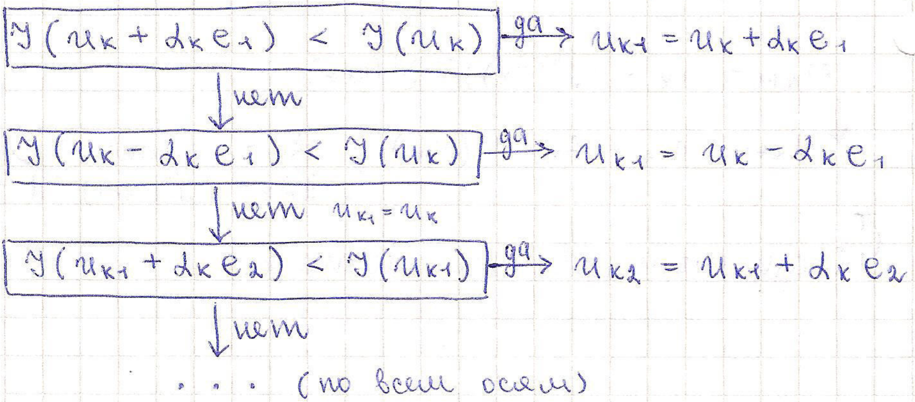
Метод покоординатного спуска

Коль нет цветов среди зимы,
Так и грустить о них не надо.
(Есенин)

$J(u) = J(u^1, u^2, \ldots, u^n) \to \inf, \quad u \in E^n$ (1)
нет производных

$e_1, \ldots, e_n$ — базис в E^n

u_k, α_k — известны



Цикл удачный, если где-то произошло строгое убывание. $J(u_{kn}) < J(u_k) \Rightarrow$

$\Rightarrow u_{k+1} = u_{kn}, \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k$

Иначе, $J(u_{kn}) = J(u_k) \Rightarrow u_{k+1} = u_k$
$\alpha_{k+1} = \lambda \cdot \alpha_k, \quad 0 < \lambda < 1$

(2) $J(u_k \pm \alpha_k e_i) \geq J(u_k), \; i = 1 \ldots n$ — неудачный цикл

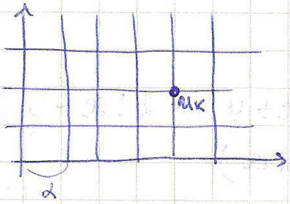
Теорема. $J(u) \in C^1(E^n)$, $J(u)$ - вып.,
$M(u_0) = \{u \in E^n : J(u) \leq J(u_0)\}$ - мн-во Лебега
$M(u_0)$ - огранич. мн-во.
Тогда $\{u_k\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = 0$

Док-во:

1) $U_* \neq \emptyset$, т.к. $U_* \in M(u_0)$ - огр., $J(u)$ - непр. на $M(u_0)$ {классич. т-ма Вейерштр.}

2) $J(u_0) \geq J(u_1) \geq \ldots \geq J(u_k) \geq \ldots$ - убыв.
$J(u_k) \geq J_* \Rightarrow \exists \lim J(u_k) \geq J_*$

3) бескон. много неудачн. цикл, $\boxed{\text{т.к.}}$
от прот.: $\alpha_k = \alpha \ \forall k \geq k_0$ - пусть



$\Rightarrow$ сразу не возвращ. в исходную точку
$J(u_{k+1}) < J(u_k)$

$\forall u_k \in M(u_0)$ - огр. $\Rightarrow$ переберем все точки $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ неудачн. цикл (процесс останов.)

4) $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_l}, \ldots$ - неудачн. циклы
$\alpha_{k_l} \to 0$
$\forall \overset{\text{неуд.}}{\text{цикл}}$ - н-во (2)
$J(u_{k_l} \pm \alpha_{k_l} e_i) \geq J(u_{k_l})$, $i = 1 \ldots n$
$\Downarrow$
$$0 \leq J(u_{k_l} \pm \alpha_{k_l} e_i) - J(u_{k_l}) = \frac{\partial J(u_{k_l} \pm \theta_i \alpha_{k_l} e_i)}{\partial u^i} \cdot (\pm \alpha_{k_l} e_i)$$
$\Downarrow$
$$\frac{\partial J(u_{k_l} \pm \theta_i \alpha_{k_l} e_i)}{\partial u^i} = 0, \quad i = \overline{1,n}$$

$\{u_{k_l}\} \in M(u_0) \Rightarrow u_{k_{l_s}} \to u_*$
$\Downarrow$
$$\frac{\partial J(u_{k_{l_s}} \pm \theta_i \alpha_{k_{l_s}} e_i)}{\partial u^i} = 0 \longrightarrow \frac{\partial J(u_*)}{\partial u^i} = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$$

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow J'(u_*) = 0 \\ \oplus\ J(u) - \text{вып.} \end{array}\right\} \Rightarrow u_* \in U_*$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim J(u_{k_s}) = J_* \\ \text{убыв.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

~~Теорема доказана.~~

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$$

5) $\lim \rho(\ldots)$ – по т-ме Вейер.

Т-ма док-на.

⊕ не надо знать произв.
⊖ медленно сход.

$\boxed{29.11}$

<u>Пример</u>: $J(u) = x^2 + y^2 - 2(x+y) + 2|x-y|$

(алгоритм зациклится)

ф-ия – негладкая

Метод можно реализ. на парал.:
- схема та же
- ⊕ шаг неудачный, если вышли за пределы параллелепипеда.

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle$$

метод покоорд. спуска ⊕ условие скор. спуска = = метод Зейделя.

Мы в город Изумрудный
идем дорогой трудной,
идем дорогой трудной,
дорогой непрямой.

Метод штрафных ф-ий

(1) $J(u) \to \inf, \quad u \in U$

(2) $U = \{u \in U_0 : g_i(u) \le 0, \ i = 1 \dots m, \quad g_i(u) = 0, \ i = m+1, \dots, s\}$

g_i - опр. на U_0.

U_0 - шар, парал., гиперорт., все пр-во, и т.д.
↑ какое-то „простое" мн-во.

Опр. $\{P_k(u)\}$ - штрафн. ф-ие мн-ва U на U_0, если $\lim\limits_{k \to \infty} P_k(u) = \begin{cases} 0, & \forall u \in U \\ +\infty, & \forall u \in U_0 \setminus U \end{cases}$

Пример:

1) $P_k(u) = A_k \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \max\{g_i(u); 0\} + \sum\limits_{i=m+1}^{s} |g_i(u)| \right]$

$A_k > 0, \ \lim A_k = \infty, \quad u \in U_0$

(3) 2) $P_k(u) = A_k \Big[\overbrace{\sum \underbrace{(\max\{\dots\})}_{g_i^+(u)}{}^{p_i} + \sum \underbrace{(g_i(u))}_{g_i^+(u)}{}^{p_i}}^{= P(u)} \Big]$

$p_i > 1$ - регулятор гладкости

3) $P_k(u) = A_k \sum\limits_{i=1}^{s} (g_i^+(u))^{p_i}, \quad u \in U_0, \quad A_k \to \infty$

4) $P(u) = \frac{1}{A_k} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} e^{A_k g_i(u)} + \sum\limits_{i=m+1}^{s} e^{A_k g_i^2(u)} \right)$

$A_k \to \infty$

Метод: (Р. Курант)

(4) $\Phi_k(u) = J(u) + P_k(u) = J(u) + A_k \cdot \overset{(3)}{P}(u) \to \inf\limits_{u\in U_0}$

$k = 1, 2, \dots$

Ф-ия „чуть-чуть похуже", зато мн-во „хорошее"!

(4) можно реш. приближ.

(5) $u_k \in U_0 : \Phi_k(u_k) \le \underbrace{\inf_{U_0} \Phi_k(u)}_{>-\infty} + \varepsilon_k$, $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$

Не задаемся вопросом, как реш. (5): можно исп. ∀ метод.

Пример 1:

$J(u) = x^2 + xy + y^2$, $U = \{u = (x, y) : x + y - 2 = 0\}$

$\Phi_k(u) = x^2 + xy + y^2 + k \cdot (x + y - 2)^2 \to \inf$, $u \in E^2 = U$

$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} = 0 \Rightarrow (x_k, y_k) = \left(\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{4k}{3+4k}} ; \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{4k}{3+4k}} \right)$

$\varepsilon_k = 0$

$\Rightarrow u_* = (1, 1)$, $J_* = 3$.

Пример 2: („хмурый день" :))

$J(u) = e^{-u} \to \inf$, $U = \{u \in E^1 : g(u) = u e^{-u} = 0\} = \{0$

$U_* = \{0\}$, $\underline{J_* = 1}$.

$\Phi_k(u) = e^{-u} + k \cdot g^2(u) = e^{-u} + k \cdot u^2 \cdot e^{-2u} \to \inf$, $u \in E$

$\inf\limits_{E^1} \Phi_k(u) = 0$; ~~$\varepsilon_k$~~

$u_k = k$, $\varepsilon_k = \Phi(u_k) = e^{-k} + k^3 \cdot e^{-2k} \to 0$ при $k \to \infty$

$u_k \to \infty$, $J(u_k) = e^{-k} \to \underbrace{0 < J_*}$

Штр. ф-ие мала, но по аргументу - велика

Теорема 1. $J(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1,s}$ - опр., конечны ($\inf\limits_{U_0} \Phi_k(u) > -\infty$) на U_0, то метод (3), (5) => $\{u_k\}$:

(6) $$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, J(u_k) \le \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \Phi_k(u_k) \le J_*$$

Док-во:

1) $J(u_k) \le J(u_k) + A_k \cdot P(u_k) = \Phi_k(u_k) \le \{3\} \le$
$\le \inf\limits_{U_0} \Phi_k(u) + \varepsilon_k \le \Phi_k(u) + \varepsilon_k = J(u) + A_k\, P(u_k) + \varepsilon_k$
$\forall u \in U_0$
$k = 1, 2, \ldots$

2) Рассм. $\forall u \in U \Rightarrow P(u) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow J(u_k) \le \Phi_k(u_k) \le J(u) + \varepsilon_k, \quad \forall u \in U$
$J(u_k) \le \Phi_k(u_k) \le J_* + \varepsilon_k, \quad \forall k = 1, 2, \ldots$

Т-ма док-на.

Теорема 2. Пусть, $J(u)$, $g_i(u)$ - опр. и конечны на U_0; $J_{**} = \inf\limits_{U_0} J(u) > -\infty$.

Тогда, вып. (6) и $\lim\limits_{k\to\infty} g_i^+(u_k) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, g_i(u_k) \le 0 \\ \lim g_i(u) = 0 \end{array} \right]$$

Док-во:

1) $J_* \geqslant J_{**} > -\infty$
$\Phi_k(u) \geqslant J(u) \geqslant J_{**}, \quad \forall u \in U_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \inf\limits_{U_0} \Phi_k(u) \geqslant J_{**} > -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вып. условие Т1 $\Rightarrow$ верно (6)

2) $0 \leq A_k P(u_k) = \Phi_k(u_k) - J(u_k) \leq$ [illegible]

$\leq const - J_{**} = const = C_0$

$\Downarrow$

$P(u_k) \leq \frac{C_0}{A_k} \to 0$

$\Downarrow$ $P(u_k) \to 0 \Rightarrow$ (3) $g_i^+(u_k) \to 0$

Т-ма док-на.

<u>Теорема 3</u>. U_0 - сл. замкн. из H; $J(u)$, $g_i^+(u)$ - - слабо полунепр. снизу на U_0; $J_{**} > -\infty$;

$U(\delta) = \{u \in U_0 : g_i^+(u) \leq \delta, \ i = \overline{1,s}\} =$

$= \{u \in U_0 : g_i(u) \leq \delta, \ i = \overline{1,m}; \ |g_i(u)| \leq \delta, \ i = \overline{m+1,s}\}$,

$U(\delta)$ - сл. компактно при нек $\delta > 0$.

Тогда, $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = 0$

u_k из (5) $\quad$ $(\{u_k\} \xrightarrow{сл} U_*.)$

<u>Док-во</u>:

1) $\Phi_k(u) \geq J(u) \geq J_{**}$, $\forall u \in U_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf\limits_{U_0} \Phi_k(u) > -\infty \Rightarrow$ метод (5) порожд. $\{u_k\}$.

Из Т1, 2 $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} g_i^+(u_k) = 0 \Leftrightarrow \overline{\lim}\, g_i(u_k) \leq 0$ $i = 1 \dots m$

$\lim g_i(u_k) = 0$ $i = \overline{m+1,s}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} g_i(u_k) \leq \delta \ \forall k \geq k_0 \\ |g_i(u_k)| \leq \delta, \ k \geq k_0 \end{array}\right\} \Rightarrow U(\delta)$ - сл. комп. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{u_{k_l}\} \xrightarrow{сл} u_*$

$\boxed{06.12}$

2) $u_* \in U_0$, т.к. U_0 - сл. замкн.,
$u_k \in U_0$

3) $\lim g_i^+(u_{k_l}) = 0 \Rightarrow g_i(u_*) \leq \underline{\lim}\, g_i(u_{k_l}) \leq \overline{\lim}\, g_i(u_{k_l}) = 0$

(т.к. g_i - сл. полунепр. снизу) $\quad i = 1 .. m$

=> $g_i(u_*) \le 0$

4) $\lim g_i^+(u_{k_l}) = 0$ => $\lim |g_i(u_{k_l})| = 0$ =>

=> $|g_i(u_*)| \le \underline{\lim} |g_i(u_{k_l})| \le \overline{\lim} |g_i(u_{k_l})| = 0$

⇓

$g_i(u_*) = 0$, $i = m+1 \dots s$

5) (2) - 4)) => $u_* \in U$

6) $J_* \le J(\overset{\in U}{u_*}) \le \underline{\lim}\, J(u_{k_l}) \le \overline{\lim}\, J(u_{k_l}) \overset{T.1}{\le} J_*$

⇓

$J(u_*) = J_* = \lim\limits_{l\to\infty} J(u_{k_l})$ => $\{\forall u_{k_l}\}$ =>

=> $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$

7) $\{u_k\} \xrightarrow{сл} U_*$.

Т-ма док-на.

Теорема 4. U_0 - замк. мн-во из E^n,
$J(u)$, $g_i^+(u)$, $i = 1..s$ - полунепр. снизу, $J_{**} > -\infty$,
$U(\delta) = \{u \in U_0 : g_i^+(u) \le \delta,\ i = 1..s\}$ - огранич. при нек δ
(замкн. $U(\delta)$ - в силу полунепр. снизу g_i^+)
$\{A_k\} \to \infty$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$.
Тогда $\exists \{\overset{из\ (5)}{u_k}\}$, $\lim J(u_k) = J_*$, $\lim \rho(u_k, U_*) = 0$
(без док-ва, следствие из Т. 3)

Метод:

⊕ универс., гибкий метод
⊕ ∀ метод реш. $\Phi_k(u) \to \inf$, $u \in U_0$

⊖ огранич. применение (нет - овражн. ф-ии)

Пример: $J(u) = x^2 + y^2 \to \inf$, $U = \{x \le 0\}$
$x^2 + y^2 + A_k(\max\{x, 0\})^2 \to \inf$, $u \in E^1$
мал. измен. x => бол. измен. ф-ии

Правило множителей Лагранжа

Знание нек принципов легко возмещает незнание нек фактов.
(Гельвеций)

(1) $J(u) \to \inf, \quad u \in U$

(2) $U = \{u \in U_0 : \ g_i(u) \leq 0, \ i = \overline{1,m}, \ g_i(u) = 0, \ i = \overline{m+1,s}\}$

$$\underbrace{\mathcal{L}(u, \overline{\lambda})} = \lambda_0 J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u), \quad u \in U_0$$

$$\overline{\lambda} \in \tilde{\Lambda}_0 = \{\overline{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_s) : \ \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0\}$$

<u>Теорема</u> (принцип Лагранжа).
U_0 - вып. замкн. мн-во из E^n, $\swarrow (J(u_*) \leq J(u), \forall u \in U_0 \cap \{|u-u_*| \leq \gamma$
$J(u), g_i(u) \in C^1(U_0)$, $J_* > -\infty$, u_* - т. лок. min
Тогда (необх.) $\exists \overline{\lambda}^* \neq 0, \ \overline{\lambda}^* \in \tilde{\Lambda}_0$ (3)

(4) $\left\langle \dfrac{\partial \mathcal{L}(u_*, \overline{\lambda}^*)}{\partial u}, u - u_* \right\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0$

(5) $\lambda_i^* g_i(u_*) = 0, \ i = \overline{1,m}$ (усл. дополняющ. нежесткости)

<u>Комментарии:</u>

1) $s = m$, $g_i(u)$ - вып. $\Rightarrow \sum \lambda_i g_i$ - вып.
$J(u)$ - вып. $\Rightarrow$ (4): $\mathcal{L}(u_*, \overline{\lambda}^*) = \inf\limits_{U_0} \mathcal{L}(u, \overline{\lambda}^*)$

2) $U_0 = E^n \Rightarrow$ (4): $\dfrac{\partial \mathcal{L}(u_*, \overline{\lambda}^*)}{\partial u} = 0$.

3) неизв. $u, \overline{\lambda}$ - $(n + (s+1))$ неизвестных

$U_0 = E^n \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(u_*, \overline{\lambda}^*)}{\partial u} = 0 & - n \text{ ур-ий} \\ \lambda_i^* \cdot g_i(u_*) = 0 & - m \text{ ур-ний} \\ g_i(u) = 0 & - i = \underline{m+1,s} - \text{все} \end{cases} \Big\} s$ ур-ий

$(n+s+1)$ ур-ий $\longleftarrow$

$\overline{\lambda}^*$ - уровл. т-ме $\Rightarrow \alpha \overline{\lambda}^*$ - $\forall \alpha$ удовл. т-ме
$\downarrow$
$|\lambda_0^*| = 1$ - еще 1 ур-е

4) на базе прин. Л. можно предложить нек итерац. методы

Док-во т-мы:

1) Рассм. мн-во:

$W_0 = U_0 \cap \{|u-u_*| \leq \gamma\}$

$g_0(u) = J(u) + |u-u_*|^2 \to \inf$, $W = \{u \in W_0 : g_i(u) \leq 0, \ g_i(u) = 0\}$ (6)

2) $g_0(u) > J(u) \geq J_*$, $\forall u \in W_0$, $u \neq u_*$

$g_0(u_*) = J(u_*)$

$\Downarrow$

т. min – единств. (u_*)

3) Применим метод штрафов к (6):

$\Phi_k(u) = g_0(u) + A_k \sum_{i=1}^{s} (g_i^+(u))^2 \longrightarrow \inf$, $u \in W_0$ – огр. замк.

$\Phi_k(u)$ – непр.

$\left\{\begin{matrix}\text{классич.}\\ \text{т-ма Вейер.}\end{matrix}\right\}$ $\exists u_k \in W_0 : \Phi_k(u_k) = \inf\limits_{W_0} \Phi_k(u)$ (7)

Вып. все усл. т-мы 4

$(U(\delta)$ – огр. $\forall \delta)$

$\Downarrow$

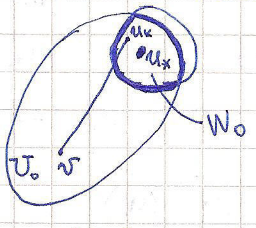
$\lim\limits_{k\to\infty} g_0(u_k) = g_{0*} = J(u_*) \overset{W_* = \{u_*\}}{\Rightarrow} \underbrace{\lim J(u_k)}$

$\underbrace{\lim |u_k - u_*| = 0}$

4) u_* – т. лок. min => для (7)

$\langle \Phi_k'(u_*), u-u_* \rangle \geq 0$, $\forall u \in W_0$ (8')

5) Док-ем $\langle \Phi_k'(u_*), u-u_* \rangle \geq 0 \ \forall u \in U_0$ (8)



$\forall v \in U_0$

$u_k \in W_0$, $\forall k \geq k_0$

$[v, u_k] \in U_0$ (т. к. выпукл.)

$v_k = u_k + \alpha_k (v - u_k)$, $0 \leq \alpha_k \leq 1$ **шпаргалка!**

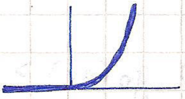
$|v_k - u_*| \leq |v_k - u_k| + |u_k - u_*| = \underset{\downarrow 0}{\alpha_k} \underbrace{|v - u_k|}_{\leq |v-u_*|} + \underbrace{|u_k - u_*|}_{\leq \delta/2} \leq \gamma$

в (8') $u = v_k$ => $\langle \Phi_k'(u_*), \underbrace{v_k - u_*}_{\alpha(v-u_*)} \rangle \geq 0$, $\forall k \geq k_0$ $\forall v \in U_0$

=> док-но (8).

6) $\Phi_k'(u_k) = J'(u_k) + 2|u_k - u_*| + \underbrace{A_k \sum_{i=1}^{m} 2 g_i'(u_k) g_i^+(u_k)}_{\mu_{ik}} +$
$+ \underbrace{A_k \sum_{i=m+1}^{s} 2 g_i'(u_k) g_i(u_k)}_{\mu_{ik}}$

$(z^+)^2 = (\max\{z;0\})^2$



$((z^+)^2)' = 2\max\{z;0\}$

$z = g_i(u)$

$\boxed{13.12}$

7) $\mu_{ik} \geq 0$
Вводим вектор:
$\mu_k = (\mu_{1k}, \dots, \mu_{sk})$
Нормировка:
$(1 + |\mu_k|^2)^{1/2} \geq 1$
$\Downarrow$

$$\left\langle \underbrace{\frac{1}{(1+|\mu_k|^2)^{1/2}}}_{\lambda_{0k}} \left[J'(u_k) + 2|u_k - u_*|\right] + \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\frac{\mu_{ik}}{(1+|\mu_k|^2)^{1/2}}}_{\lambda_{ik}} g_i'(u_k), u - u_k \right\rangle \geq 0$$

$(\lambda_{0k}, \dots, \lambda_{sk}) = \bar\lambda_k$, $|\bar\lambda_k| = 1$ =>
=> $\{\bar\lambda_k\}$ - огр. => $\exists \{\bar\lambda_{k_l}\} \to \bar\lambda^*$
$|\bar\lambda_{k_l}| = 1$ => $|\bar\lambda^*| = 1$ (исп. то, что задача конечно-мерн.)
$\Downarrow$ $\bar\lambda^* \neq 0$, $\lambda_0^* > 0, \dots, \lambda_m^* \geq 0$ (док-ли (3))

8) предельн. переход в н-ве из 7) $\{u_k\} \to u_*$

$$\left\langle \underbrace{\lambda_0^* J'(u_*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* g_i'(u_*)}_{\frac{\partial L(u_*, \bar\lambda^*)}{\partial u}}, u - u_* \right\rangle \geq 0, \quad \forall u \in U_0$$

=> док-ли (4)

9) а) $g_i(u_*) = 0, \quad 1 \leq i \leq m \Rightarrow$ (5) – очевидно

б) $\overset{(u_* \text{ из } U)}{g_i(u_*) < 0} \Rightarrow g_i(u_k) < 0 \quad \forall k \geq k_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_{ik} = 0$ (из опр. срезки g^+) $\forall k \geq k_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{ik} = 0 \quad \forall k \geq k_0 \Rightarrow \lambda_i^* = 0 \Rightarrow$ (5) док-но.

Т-ма док-на.

(!) – рассм. конечно-мерн. случай

Пример:

может быть $\lambda_0^* = 0$ ← это мн-во такое тощее, как студенты после сессии :)

$J(u) = u \rightarrow \inf, \quad U = \{u \in E^1 : g(u) = u^2 \leq 0\} = \{0\}$

$U_* = \{0\}^{= u_*}, \quad J_* = 0$

$\mathcal{L}(u, \bar{\lambda}) = \lambda_0 \cdot u + \lambda_1 u^2, \quad u \in E^1 = U_0$

$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u_*, \bar{\lambda})}{\partial u} \overset{(u)}{=} 0 = (\lambda_0 + 2\lambda_1 u)\Big|_{u = u_* = 0} \Rightarrow \underline{\lambda_0 = 0}$$

$\bar{\lambda}^* = (0, \lambda), \quad \forall \lambda \geq 0$

Задача (экзамен):

$J(u) = x^2 + y^2 + z^2$

ограничение: $x - y + z \leq 1$

$U_0 = E^3$

(!) Т-ма дает необх. усл. оптим. $\Rightarrow$ получ. точки, подозрит. на опт.

Крит. оптим.: $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$

В каких задачах $\lambda_0 = 1$ гарантировано?

[**<u>Теорема</u>** (Кун - Таккер)]

$L(u, \lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u)$ (для задачи (1)-(2))
$u \in U_0$, $\lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda \in E^s : \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0\}$

<u>Опр.</u> $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda_0$ назыв. <u>седловой точкой</u> ф-ии Лагранжа, если:

(2*) $L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*)$, $\forall u \in U_0$, $\forall \lambda \in \Lambda_0$

<u>Теорема1</u> (св-во седловой точки).
Пусть, $J(u)$, $g_i(u)$ - опр. и конечны на U_0, (u_*, λ^*) - седло в смысле (2*).
Тогда, $u_* \in U_*$, $J_* = L(u_*, \lambda^*) = J(u_*)$

<u>Док-во</u>:

1) Рассм. $L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*)$

$$\cancel{J(u_*)} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u_*) \leq \cancel{J(u_*)} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* g_i(u_*), \quad \forall \lambda \in \Lambda_0$$
$$\Downarrow \sum_{i=1}^{s} (\lambda_i - \lambda_i^*) g_i(u_*) \leq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda_0$$

2) рассм, $1 \leq i \leq m$

$$\lambda = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \overset{\geq 0\, \forall}{\lambda_j}, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_s^*) \in \Lambda_0$$
$$\Downarrow \text{ н-во из 1)}$$
$$(\lambda_j - \lambda_j^*) \cdot g_j(u_*) \leq 0, \quad \forall \lambda_j \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\left(1 - \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j}\right) \cdot g_j(u_*) \leq 0$$
$$\Downarrow \lambda_j \to \infty$$
$$\underline{g_j(u_*) \leq 0}, \text{ - ограничение из } U$$

3) рассм. $m+1 \leq i \leq s$

$$\lambda = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \overset{\forall}{\lambda_j}, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_s^*) \in \Lambda_0, \quad \forall \lambda_j \in E^1$$
$$\Downarrow (\lambda_j - \lambda_j^*) \cdot g_j(u_*) \leq 0 \Rightarrow \text{аналогично 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} g_j(u_*) \le 0 \\ g_j(u_*) \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{g_j(u_*) = 0}$$ – ограничение из U

4) Т.е. док-ли, что
(u_*, λ^*) : $u_* \in U$

5) Усл. доп. нежесткости:
$1 \le j \le m$, $\lambda = (\ldots)$

$$(\lambda_j - \lambda_j^*) \underbrace{g_i(u_*)}_{\le 0 \leftarrow \text{уже знали}} \le 0, \quad \forall \lambda_j$$

$$\lambda_j \to 0 \Rightarrow -\lambda_j^* \cdot g_j(u_*) \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le -\underbrace{\lambda_j^*}_{\ge 0} \cdot \underbrace{g_j(u_*)}_{\le 0} \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_j^* \cdot g_j(u_*) = 0}$$ – условие доп. нежесткости.

6) Рассм. $L(u_*, \lambda^*) \le L(u, \lambda^*)$

$$J(u_*) + \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\lambda_i^* g_i(u_*)}_{=0} \le J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* g_i(u), \quad \forall u \in U_0$$

$$\Downarrow \forall u \in U$$

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* g_i(u) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i^*}_{\ge 0} \underbrace{g_i(u)}_{\le 0}$$

$$\Downarrow$$

$$L(u_*, \lambda^*) = J(u_*) \le J(u), \quad \forall u \in U$$

$$\Downarrow$$

$$u_* \in U_*$$

Т-ма док-на.

<u>Пример</u>:
(седла нет)

$J(u) = u \to \inf$, $U = \{u \in E^1 = U_0 : g(u) = u^2 \le 0\}$

$U_* = \{u_* = 0\}$

$J_* = 0$, $U_0 = E^1$, $\Lambda_0 = \{\lambda \ge 0\}$

$L(u, \lambda) = u + \lambda u^2$, $u \in E^1$, $\lambda \ge 0$

$(u_*, \lambda^*) = (0, \lambda^*)$

$L(u^*, \lambda) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$, $\forall \lambda$

$\underbrace{L(u_*,\lambda^*)}_{\shortparallel\,0} \le \underbrace{L(u,\lambda^*)}_{u+\lambda^* u^2}$ — ?

т.е. $0 \le u + \lambda^* u^2$, $\forall u \in E^1$ — это неверно.

Значит, седла нет.

Теорема 2 (Куна-Таккера).

Пусть, U_0 — вып. замкн. мн-во, $s=m$, $U_* \neq \emptyset$, $J_* > -\infty$

$\exists \bar{u} \in U: g_i(\bar{u}) < 0 \ \forall i = \overline{1,m}$; $J(u)$, $g_i(u)$ — вып. ф-ции

(усл. Слейтера) на U_0.

Тогда, $\exists$ седло (u_*, λ^*).

Док-во:

допущение: ~~g~~ $J(u), g_i(u) \in C^1(U_0)$.

1) Исп. правило множителей Лагранжа

расcм. $\forall u_* \in U_*$

$\exists \bar{\lambda}^* \neq 0: \lambda_0^* \ge 0, \dots, \lambda_m^* \ge 0$

Вып. усл. (4), (5)

2) Док-ем: $\lambda_0^* > 0$ (от противного)

пусть, $\lambda_0^* = 0$

$\Downarrow$ {из (3), $L(u_*, \lambda^*)$ — вып.}

$\Downarrow$ $L(u_*, \lambda^*) \le L(u, \lambda^*) \ \forall u \in U_0$ (из критерия оптим.)

$\Downarrow$ $\underset{\substack{\shortparallel\\0\\ *}}{\lambda_0^*} J(u_*) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \cdot g_i(u_*)}_{\shortparallel\,0} \le \underset{\substack{\shortparallel\\0}}{\lambda_0^*} \cdot J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \cdot g_i(u)$, $\forall u \in U_0$ $\Downarrow$ $u = \bar{u}$

$\Downarrow$ $0 \le \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\lambda_i^*}_{\ge 0} \underbrace{g_i(\bar{u})}_{<0}$ ~~→~~ неверно => противор. =>

есть строго полож., т.к. $\bar{\lambda}^* \neq 0$

=> $\lambda_0^* > 0$

3) Нормировка => $\lambda_0^* = 1$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$L(u,\lambda^*)$ – вып. $\Rightarrow$ $\underbrace{L(u_*,\lambda^*) \le L(u,\lambda^*)}$, $\forall u \in U_0$

4) $0 = \lambda_i^* \cdot g_i(u_*) \geq \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \cdot \underbrace{g_i(u_*)}_{\leq 0}$, $\forall\, i = \overline{1,m}$

$\Downarrow$ $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \cdot g_i(u_*) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(u_*) \;\Big|\; + J(u_*)$

$\Downarrow$ лев. н-во седла

$\Downarrow$ $\exists$ седло

Т-ма док-на.