Емельянов Владимир Ильич — профессор

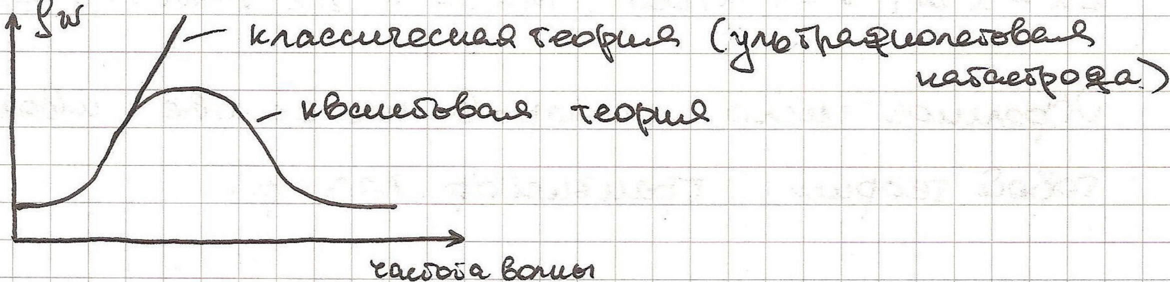
Физика микрообъектов: атомов, спинов, электронов;

завершающий курс физики;

Квантовая физика принципиально отличается от классической, т.к. другие законы поведения квантовых объектов.

В начале прошлого века: конфликт между "новыми экспериментами" (фотоэффект, стабильность атома, наличие дискретных спектров систем) и классической теорией.

Первый шаг: 1900-ые годы: Планк: ф-ла плотности энергии теплового излучения;

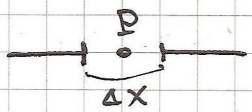


$\hbar$ — фунд. константа Планка: $\hbar = 10^{-27}$ эрг·сек

[Эйнштейн + Гайзенберг + Бор + Дебройль...] →

→ исп. const Планка, построили новую квантовую теорию.

Критерий "квантовости" объекта (отличить микрообъект от макрообъекта):



имеет импульс p: $p = mv$

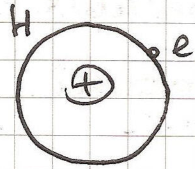
обл-ть локализации

$\Delta x \cdot p \equiv$ действие

Если действие $\sim \hbar$, то объект является микрообъектом и описывается квантовой механикой.

Если $\Delta x p \gg \hbar$, то "классический" объект

ПРИМЕР!



$v = 10^8 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ — электрон на орбите

$m = 10^{-27}$ г

1 Дж $= 10^7$ эрг

Т.о. $\Delta x \cdot v \cdot m \sim 10^{-27}$ эрг·сек $\sim \hbar$

$\Delta x = 1$ см, $v = 1$ см/сек, $m = 1$ г $\Rightarrow \Delta x \cdot v \cdot m \sim 1$ эрг·сек

Огромное число приборов на основе квантовой теории: транзистор, лазер.

Приложения квантовой механики к кв. инф.

[В плане интерпретации квантовой механики дела обстоят плохо.]

• Квантовая информатика ≡ квантовые вычисления (алгоритмы для квантового компьютера).

• Квантовая криптография + передача информации по квантовым каналам.

• Квантовая телепортация

КВАНТОВЫЕ ВЫЧИСЛ-Я → КВАНТОВЫЙ КОМПЬЮТЕР

идёт разработка конкретных схем

• на спинах
• на ионных ловушках
• ...

1900 г. — зарождение квантовой механики

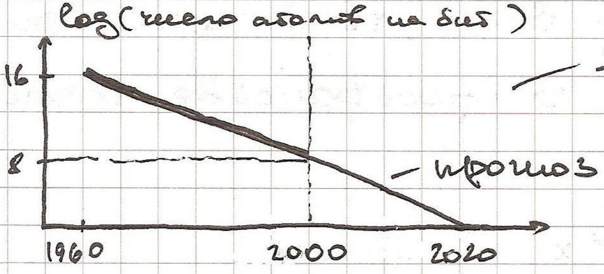
1920-1930 гг. — интенсивное развитие

1940 г. — теория механики в теории твёрдого тела (полупроводники).

1960 г. — лазер

2000 г. — квантовая информатика

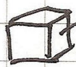
? — квантовый компьютер.



— IBM Journal, 1988 г.

$\log_{10} N = 6$, $N = 10^6$

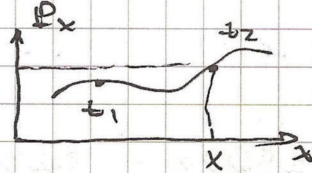
чип : 10^{-5} см

атом :  10^{-7} см → объём : $\left.\begin{matrix} 10^{-15} \text{ см}^3 \\ 10^{-21} \text{ см}^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{10^{-15}}{10^{-21}} = 10^6$ ат.

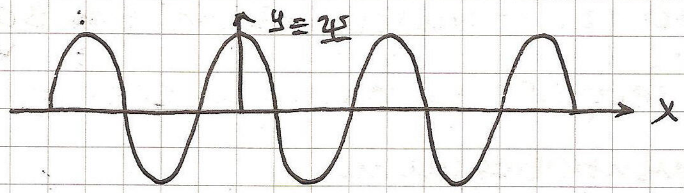
2000-2020 – закон может не работать, т.к. до этого была классическая область, а в этот период должна приблизиться к 1 биту ~ 1 квантовый объект (атом) – куб

МОДЕЛИ $\Big\langle$ модель частицы / модель волны

частица : $m, \vec{v}, \vec{r}, \vec{p} = m\vec{v}$ – определены одновременно с $\forall$ степенью точности, т.е. $\exists$ траектория, частица ЛОКАЛИЗОВАНА



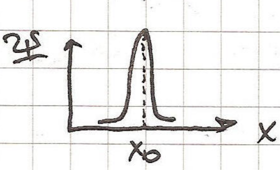
волна :

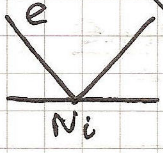


$\Psi(x,t) = A_0 \sin(\omega t - kx)$, $\lambda = 2\pi/k$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x_0)} dk = \delta(x-x_0)$$ – дельта ф-я Дирака

т.е. если взять много волн, то можно описать локализованный в пространстве объект.



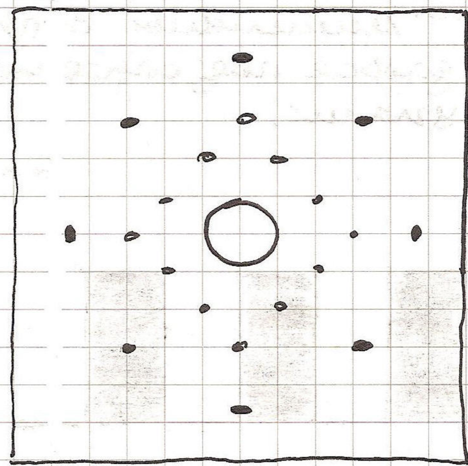
Опыт : 

фотоэффект

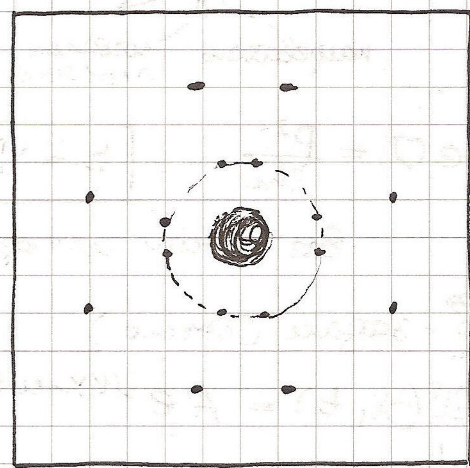
1) рентгеновские лучи NaCl (дифракция, рассеяние) —

— рентг. лучи: $\lambda \sim 10^{-8}$ см

С по этой картинке можно установить расположение атомов, симметрию, расстояние.

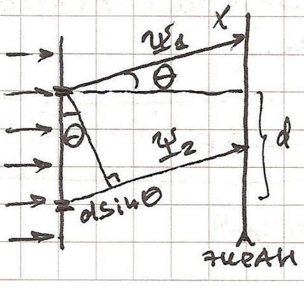


2) точно такая же картина дифракции наблю-ся, если направить на пластину пучок электронов



⇒ электроны ведут себя как волны!

Дифракция света:



$\Psi_1 = A e^{ikx}$

$\Psi_2 = A e^{i(k(x+\Delta))}$, $\Delta = d \sin\theta$

$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ — интерференция (света)

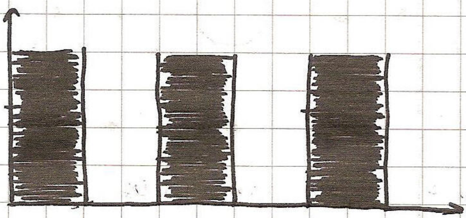
$$|\Psi|^2 = 4A^2\cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right) \qquad \frac{kd\sin\theta}{2} = \pi n,\quad n = 0, \pm 1, \dots$$

→ максимумы будут наблюдаться под определёнными углами.

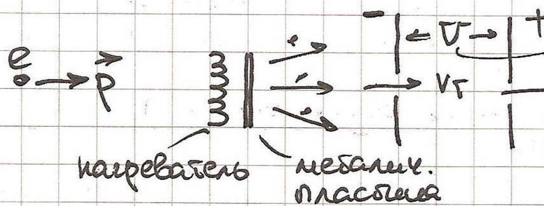
$$\boxed{d\sin\theta_n = n\lambda}$$

условие максимума Брегга

$\lambda = 2\pi/k$



Опыт де Бройля: предположение + формула:



$V_T = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, k – пост-ая Больцмана

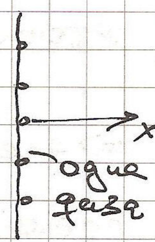
$eU = \frac{p^2}{2m}$, $\boxed{p = \sqrt{2meU}} \gg p_T = mV_T$

Все эл-ны находятся в сост-ии с импульсом p.

$\vec{p}$ - задан (точно)

$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ – плоская волна;

первая волновая ф-я в квантовой механике



$$\boxed{p = \hbar k,\ \frac{p^2}{2m} = \hbar\omega}$$

– соотношение де Бройля [корпускулярно-волновой дуализм]

$k = 2\pi/\lambda$ - волн. число

$\frac{p^2}{2m}$ – кинетическая энергия

$$\boxed{\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}}$$

волновая функция

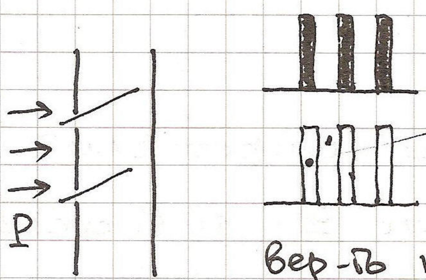
Физический смысл:

$|\Psi(x,t)|^2$

$|\Psi_p(x,t)|^2$, $\Psi_p = Ae^{i(\frac{p}{\hbar}x-\omega t)}$

$|\Psi_p(x,t)|^2 = |A|^2 = const$ — соотн-е неопределённости Гейзенберга.

Если импульс p определён точно, то координата неопределена [статистическая интерпретация] — постулат подтверждён экспериментально!

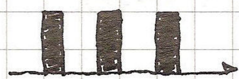


← что будет, если пучок P ослабить до одного электрона?

получаем одну точку!
$N \to \infty$

вер-ть попадания: $\lim\limits_{dN_y\to\infty} w(y)dy = \frac{dN_y}{N} = |\Psi|^2 dy$,

т.е. точки преимущественно заполняют области высокой интенсивности:



Тем не менее, электрон — не классич. точка, а всё-таки волна → трудоёмкость интерпретации квантовой механики.

[Плотность вероятности ≡ производная от функции распределения].

14.02.07 – лекция № 2.

Принцип суперпозиции. Соотношение неопределённости. Операторы физических величин. Уравнение Шредингера.

$\vec{p}$, $\Psi_p(x) = C e^{i\frac{p}{\hbar} - i\omega t}$, $\hbar\omega = \frac{p^2}{2m}$

<u>1-ый постулат:</u> Квантовый объект с наибольшей полнотой описывается заданием волновой функции.

<u>принцип суперпозиции:</u> Если микрообъект может находиться в состоянии Ψ_1 и в состоянии Ψ_2, то он может находиться в состоянии $\Psi(x) = c\Psi_1 + B\Psi_2$, $\int |\Psi|^2 dx = 1$.

с этот принцип играет основную роль в квантовом компьютере.

$|\Psi_p(x)|^2 = const = |c|^2$ – частное соотношение неопределённости.

Общее соотношение неопределённости

сформируем волновой пакет:

$\Psi(x) = \sum_n c_n \Psi_n(x)$, $\Psi(x,t) = \frac{1}{\Delta k} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} A(\omega) e^{i(kx - \omega t)} dk$

узкий волн. пакет, т.е. $\Delta k \ll k_0$.

$$\hbar\omega = \frac{p^2}{2m} \;;\quad \omega = \omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k_0}(k-k_0)$$

$$\xi = k - k_0 \;,\quad A(\omega) \approx A(\omega_0) = A_0$$

$$\Psi(x,t) = \frac{A_0}{\Delta k}\, e^{i(k_0x-\omega_0t)} \int\limits_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} \exp\left[i\xi\left(x - \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k_0} t\right)\right] d\xi$$

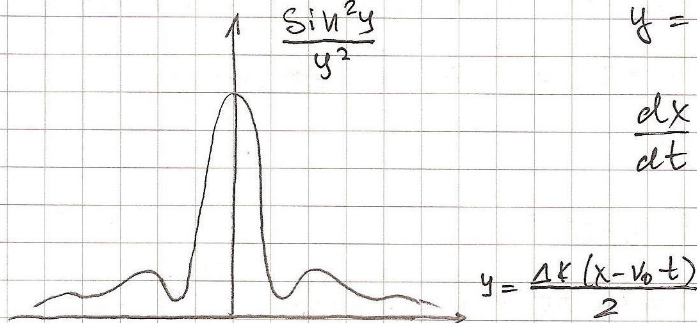
$$\hbar\omega(k) = \frac{\hbar^2k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \;;\quad \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k_0} = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p_0}{m} = v_0$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = \frac{A_0}{\Delta k}\, e^{i(k_0x-\omega_0t)}\, \frac{\sin\left[\frac{\Delta k(x-v_0t)}{2}\right]}{\frac{\Delta k(x-v_0t)}{2}}$$

Обозн. $y = \dfrac{\Delta k(x-v_0t)}{2}$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = A_0 \frac{\sin y}{y}\, e^{i(k_0x-\omega_0t)}$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = A_0 \frac{\sin^2 y}{y^2}$$



$$y = \frac{\Delta k(x-v_0t)}{2} = \text{const}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 > 0$$

Рассм. $\Delta y = \Delta\left(\dfrac{\Delta k(x-v_0t)}{2}\right) = \dfrac{\Delta k\Delta x}{2} = \pi \;;\quad t = \text{const}$

$p = \hbar k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta p \Delta x = 2\pi\hbar}$ – соотношение неопределённости.

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta p \to \infty$ (увеличивается Δk)

Если $\Delta p \to 0$, т.е. p – задано, то $\Delta x \to \infty$ (остаётся всего одна волна де Бройля)

Из принципа неопределённости следует, что отсутствуют траектории.

<u>2ой постулат:</u> Каждой физической величине соответствует оператор, а зн-ю физ. величины, измеряемому в эксперименте, соответствует среднее значение оператора:

$$A \to \hat{A} \quad , \quad A_{изм.} \to \langle \hat{A} \rangle$$

$\Psi(x,t): \hat{x} \to x$

$$\langle x \rangle = \int |\Psi(x,t)|^2 x \, dx = \int \Psi^*(x,t) x \Psi(x,t) \, dx$$

$f(\vec{r}): \langle f \rangle = \int \Psi^* f(\vec{r}) \Psi \, d\vec{r}$

$f(\vec{p}): \vec{p} \to p_x$

$\langle p_x \rangle = \int \Psi^*(x) \hat{p}_x \Psi(x) \, dx = \{$ возьмём в кач-ве $\Psi(x) = \Psi_p(x) = A e^{i \frac{p_x}{\hbar} x} \} = p_x = \int \Psi_p^* \hat{p}_x \Psi_p \, dx =$

$= \{$ исп. $\int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 dx = 1 \}$

$$\boxed{\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}$$

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla$$

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1.$$

$f(\vec{p}) \to f(\hat{\vec{p}}) = \hat{f}$

$f(\vec{r}, \vec{p}) \to f(\vec{r}, \hat{\vec{p}})$ — оператор произвольной физической величины.

Оператор энергии: $\underset{\text{гамильтониан}}{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + U(\vec{r}) \;=$

$$\ominus -\frac{\nabla^2}{2m}\hbar^2 + U(\vec{r}) = -\frac{\hbar}{2m}\Delta + U(\vec{r})$$

$A \to \hat{A}$, $\hat{A}\Psi = A\Psi$ ← собств. ф-ции $\hat{A}$

собств. зн-е $\hat{A}$

$$A\Psi_n = A_n\Psi_n$$

Т: Набор собств. волн. ф-ций эрмитового оп-ра ($\langle A\rangle = \langle A\rangle^*$) является полным набором:

$$\Psi(x) = \sum_n c_n \Psi_n$$

Т: Собственные функции квантомеханического оператора ортонормированы:

$$\int \Psi_n^*(x)\Psi_m(x)\,dx = \delta_{nm}$$

$$1 = \int |\Psi(x)|^2 dx = \sum_{nm} c_n^* c_m \int \Psi_n^*\Psi_m\,dx = \sum_n |c_n(t)|^2$$

вер-ть обнаружить при измерении A_n

Уравнение Шредингера.

Нужно найти $\Psi(x,t)$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$ ← уравнение волны

плоская волна: $\Psi = ce^{i(kx-\omega t)}$ → подставим в ур-ние:

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = k^2c^2}$$ ← дисперсионное соотношение

$$\hbar\omega = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2k^2}{2m} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $i\hbar \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi$

С это ур-е даёт соотн-е $\omega = \dfrac{\hbar}{2m}k^2$, $H = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{i\hbar \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi}$ – УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА.

[необходимо задать начальные, граничные усл-я]

$\hat{H} = \hat{H}(\vec{r}, \hat{\vec{p}}, t)$ $\forall$ такой системы волн. ф-я подчиняется уравнению Шредингера.

Стационарное уравнение Шредингера.

$\boxed{О}$ Стационарная система – это система, у которой $\hat{H} = \hat{H}(x, p)$

Пусть $\Psi(t, r) = f(t)\varphi(r)$

$i\hbar\varphi(r)\dfrac{\partial f}{\partial t} = f(t)\hat{H}\varphi(r) \Rightarrow$

$\Rightarrow i\hbar\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{1}{\varphi(r)}\hat{H}\varphi(\vec{r}) = const = E \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\dfrac{iE}{\hbar}f(t) \Rightarrow f(t) = Ce^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

и $\boxed{\hat{H}(\varphi(r)) = E\varphi(r)}$ $\Rightarrow$ E – собств. зн-е

$\leftarrow$ СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА.

$\Psi(\vec{r}, t) = \sum\limits_n C_n \varphi_n(r) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$ – общее решение.

21.02.07 — лекция №3.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

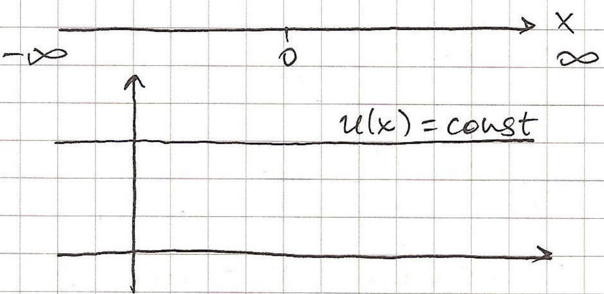
задача упрощается, если $H = H(x, p)$ =>

=> стационарное уравнение Шредингера:

$\hat{H}\Psi = E\Psi$ + граничные условия.

Финитные и инфинитные движения. Дискретные и непрерывные энергетические спектры. Движение частицы в одномерной потенциальной яме. Двухуровневое прибл-е. (Квантовый бит (кубит)). Эффект туннелирования.

Инфинитное движение

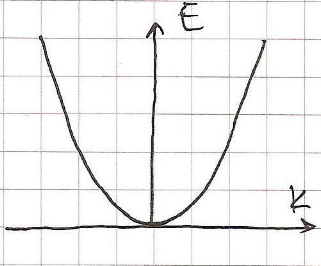


$u(x) = const = 0$ ← без ограничения общности

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Rightarrow$$

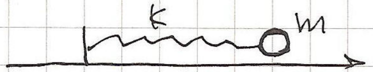
$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = E\Psi$$

Ищем реш-е в виде: $\Psi = Ce^{ikx}$



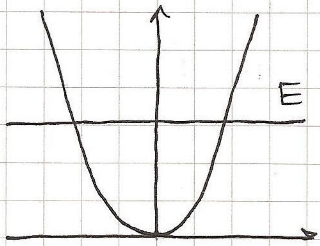
=> подставляем в ур-е => $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E$

Движение в потенциальных ямах.

ПРИМЕР 1: 

k – коэф-т жёсткости

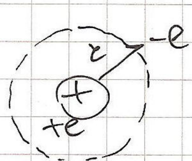
Потенциальная энергия: $U(x) = \frac{kx^2}{2}$



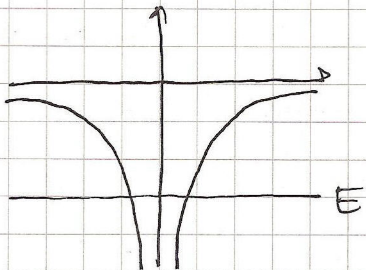
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \frac{kx^2}{2}\right)\Psi = E\Psi$$

реш-е этого уравнения – численная задача.

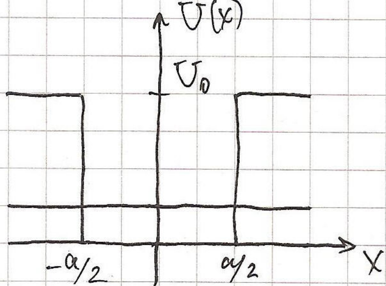
ПРИМЕР 2:



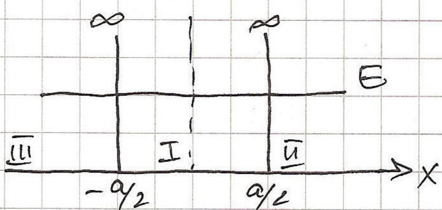
$$U(x) = -\frac{e^2}{|\vec{r}|}$$



Задача:



← упростим задачу: $U_0 \to \infty$, т.е.



а затем обобщим её решение.

Решим эту задачу:

(I): $U(x) = 0 \quad \Psi_{\pm} = Ce^{\pm ikx}$

(II, III): $\Psi(x) = 0$.

$$\Psi_I\left(-\frac{a}{2}\right) = \Psi_I\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\Psi_{I+} = C_1 (e^{ikx} + e^{-ikx}) = C_1 \cos kx$$

$$\Psi_{I-} = D_1 (e^{ikx} - e^{-ikx}) = D_1 \sin kx$$

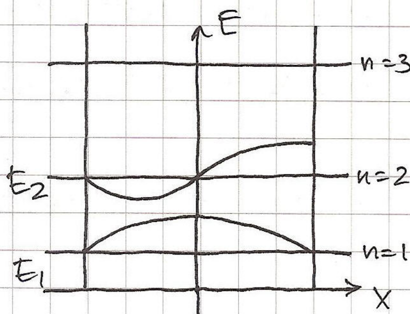
Из граничных условий : $\cos\frac{ka}{2} = 0$, $\frac{ka}{2} = \frac{\pi}{2} n$, $n = 1, 2, 3 \dots$

$k_n = \frac{\pi}{a} n$, $n = 1, 3, 5, \dots$
$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$, $\Psi_n = C_n \cos k_n x$ } для чётных волн. ф-ций.

$\sin\frac{ka}{2} = 0$

$\frac{k_n' a}{2} = \pi n'$, $n' = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow n = 2n'$

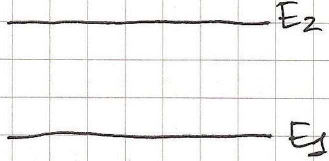
$\frac{k_n a}{2} = \frac{\pi}{2} n$, $n = 2, 4$
$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$, $\Psi_n = D_n \sin k_n x$ } для нечётных волн. функций.



– расстояние между уровнями увеличивается

$\Rightarrow$ мы получили дискретный энергетический спектр.

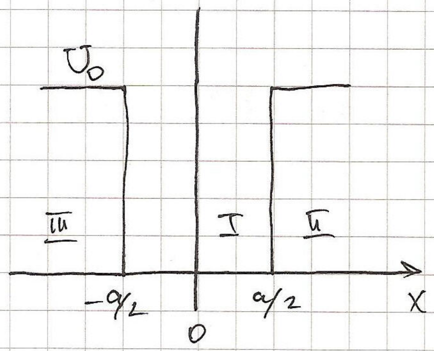
Двухуровневая система.



$\exists$ условия, при которых частица совершает переходы только между этими двумя уровнями.

Двухуровневая квантовая с-ма

Рассмотрим случай, когда яма имеет конечную глубину:



В области I ничего не меняется.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U_0\right)\Psi_{III}=E\Psi_{III} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_{III}=(U_0-E)\Psi_{III}$$

Если $E<U_0$ => правая часть положит. =>

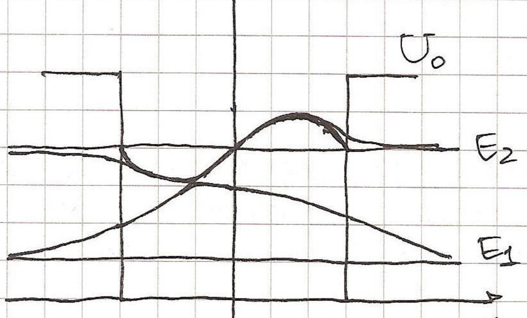
=> реш-е носит релаксационный характер, а не колебательный =>

$$\Rightarrow \Psi_{III}(x)\sim e^{\pm\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}x}$$

т.е. реш-е либо затухает, либо возрастает.

Но! возрастающее решение нефизично, т.к. волновая ф-я подчиняется условию нормировки => оставляем только убывающее реш-е.

Из-за симметричности задачи в области II реш-е аналогично.

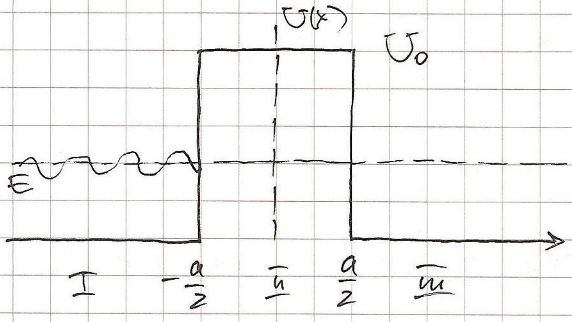


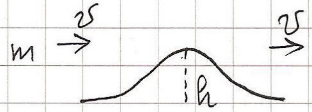
проникновение квантовой частицы в классически недоступную область.

но в квантовой механике такого запрета нет, и частица может проникать в обл-ть $E<U$.

Классическая энергия: $E=K+U(x)$
$K>0$.

Прохождение через потенциальный барьер.





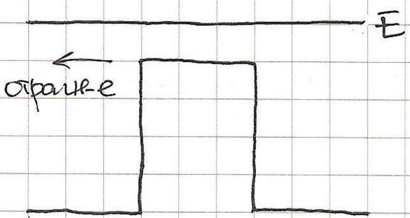
$$\frac{mv^2}{2} > mgh$$

$$\frac{mv^2}{2} < mgh$$

1-ый случай: $E < U_0$: $\Psi_{II} \sim C e^{-\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}\,x}$

Если барьер достаточно тонкий и E близко к U_0, то частица просочится через барьер $\Rightarrow$ квантомеханический эффект — туннелирование.

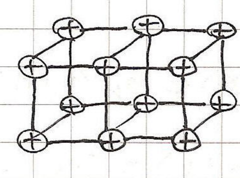
Вер-ть прохождения через барьер $\sim e^{-\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}\,a}$



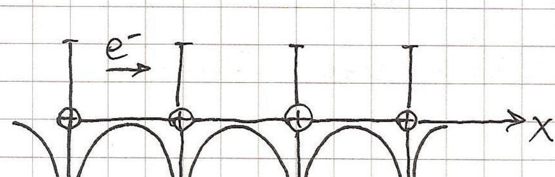
$T + R = 1$

вер-ть отражения

Используется в физике тв. тела:



Одномерный кристалл.



$$U(x) = U(x+a)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right)\psi = E\psi$$

$U(x) = \sum_g U_g e^{igx}$ $g = \frac{2\pi}{a}n$, $n = 1, 2, 3$

вектор обратной решётки.

$\Psi = \sum_k c_k e^{ikx}$ — пакет плоских волн.

$$\sum_{k'} c_{k'} e^{ik'x} (\varepsilon_{k'} - E) + \sum_{k'} \sum_{g} U_g c_{k'} e^{ik'x + igx} = 0$$

С уравнение Шредингера.

$\varepsilon_{k'} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}$ — энергия свободного электрона.

$$\frac{1}{L} \int_0^L e^{-ikx} dx ; \frac{1}{L} \int_0^L e^{i(k'+g-k)x} dx = \begin{cases} 1, & k'+g-k=0, \\ 0, & k'+g-k \neq 0. \end{cases}$$

$$\boxed{c_k (\varepsilon_k - E) + \sum_g U_g c_{k-g} = 0}$$

$$\Psi = \sum_k c_k e^{ikx} \to \sum_g c_{k-g} e^{i(k-g)x} = u_k(x) e^{ikx},$$

где $u_k(x) = \sum_g c_{k-g} e^{-igx}$

Эта амплитуда удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} u_k(x) = u_k(x+a), \\ u_{k+g}(x) = u_k(x) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Т:}}$ [Блока] : Волновая функция электрона в кристалле задаётся функцией Блока:

$$\Psi_k(x) = u_k(x) e^{ikx}$$

28.02.07 — лекция №4

Движение частиц в периодическом потенциале.

Реш-е ур-я Шредингера: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi = E\Psi$

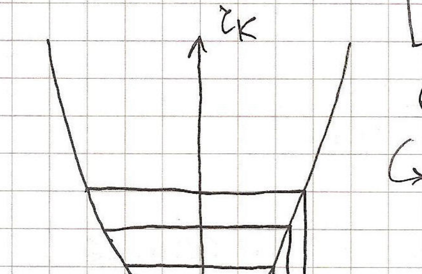
периодич. потенциал: $U(x) = U(x+a)$

периодич. — $\Psi_k = u_k(x)e^{ikx}$

$u_{k\pm g}(x+a) = u_k(x)$, $g_n = \frac{2\pi}{a}n$

Удивительно, что электрон нах-ся в стационарном состоянии несмотря на наличие ионов с периодическим потенциалом, т.е. движется в кристаллич. решётке без рассеивания:

$\left[\varepsilon_k = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\right]$ — спектр свободного электрона



$e^{ikL} = 1$ — периодич. гр. усл-я

↳ квантование: $k_nL = 2\pi n$

$\left[k_n = \frac{2\pi}{L}n\right]$ — период

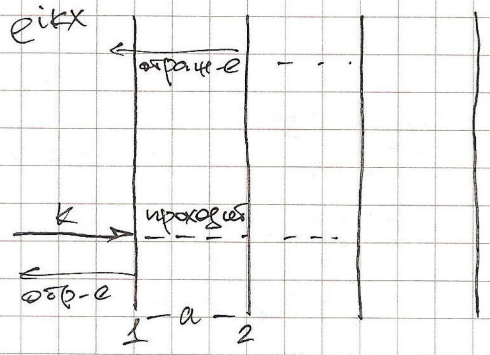
Масса m заменяется на m^*:

$\left[\varepsilon_k = \frac{\hbar^2k^2}{2m^*}\right]$ — спектр электрона в кристалле.

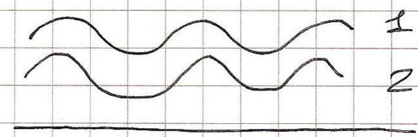
[2002г.: Кардона: "Физика полупроводников"]

$$\Psi_k(x) = \sum_g c_{k-g}\, e^{i(k-g)x}$$

∡ поток эл-нов:



+



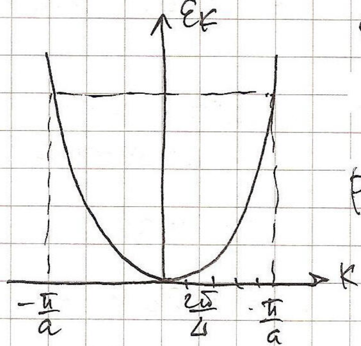
усиление = конструктивная интерференция.

Разность хода 1 и 2: $\Delta_{12} = 2a = n\lambda,\ n = 1, 2, \ldots$

$2a = m\frac{2\pi}{k}$ → в точках $k_m = \frac{\pi}{a} m,\ m = \pm1, \pm2$

└ в этих точках

Рассм. что происходит в $m = \pm 1$:



$$\varepsilon_k = \frac{\hbar k^2}{2m^*}$$

a − расстояние в кристаллич. решётке

k_m: $10^{-8} - 10^{-7}$ см.

→ можно оставить всего две волны в пакете:

$$\Psi_k = \sum_k c_{k-g}\, e^{i(k-g)x} \to \Big(\underbrace{c_k e^{ikx}}_{\text{падающ. волна}} + \underbrace{c_{k-g}\, e^{i(k-g)x}}_{\text{отраж. (дифрагированная) волна}}\Big) =$$

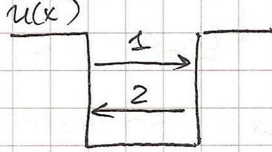
$$= \Big(c_{\frac{\pi}{a}}\, e^{i\frac{\pi}{a}x} + c_{\frac{\pi}{a}}\, e^{-i\frac{\pi}{a}x}\Big)$$

здесь ещё подразумевается одинаковый временной множитель: $e^{-\varepsilon_k/\hbar^2 t}$

└ первая зона Бриллюэна $g_n = \frac{2\pi}{a} n$

$C_{\frac{\pi}{a}} = \pm C_{-\frac{\pi}{a}}$ ← симметрия задачи.

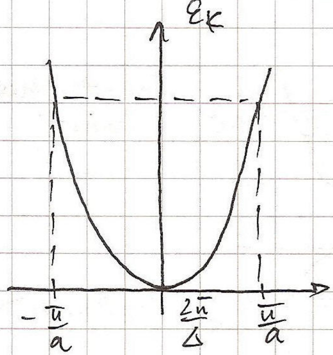
Из падающей и отражённой волн $\underset{\text{отр.}\leftarrow}{\rightarrow\text{пад.}}$ можно составить две комбинации:



[аналогия: потенциальные ямы]

$$\Psi_k^{(+)} = C\left(e^{i\frac{\pi}{a}x} + e^{-i\frac{\pi}{a}x}\right)$$
$$\Psi_k^{(-)} = D\left(e^{i\frac{\pi}{a}x} - e^{-i\frac{\pi}{a}x}\right)$$

комбинации частных реш-й на гр-цах зоны Бриллюэна.



$\Psi^{+}_{\frac{\pi}{a}}, \Psi^{-}_{\frac{\pi}{a}}$

Постулат квантовой механики: наблюдаемому значению соответствует среднее значение. =

= В данном случае, энергия:

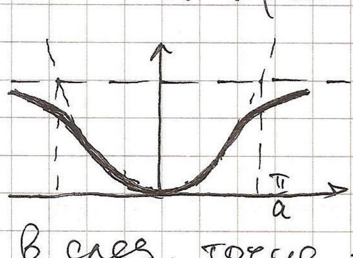
$$\varepsilon_{\frac{\pi}{a}} = \int \Psi^*_{\frac{\pi}{a}}(x) H(x) \Psi_{\frac{\pi}{a}}(x)\,dx$$

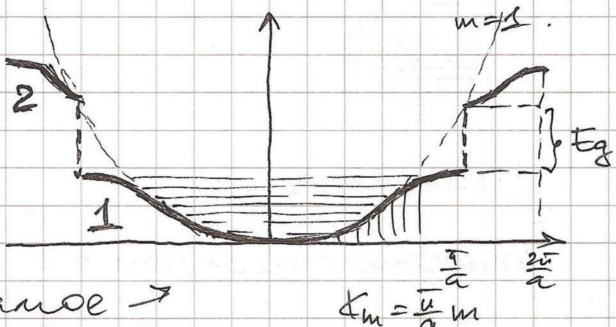
→ одной точке $\frac{\pi}{a}$ соответствует два значения энергии:

$$\varepsilon^{(\pm)}_{\frac{\pi}{a}} = \int \Psi^{(\pm)}_{\frac{\pi}{a}}(x) H(x) \Psi^{(\pm)}(x)\,dx.$$

Симметричные искажения вблизи т. $\frac{\pi}{a}m$ ≡

≡ зоны Бриллюэна:





В след. точке — то же самое →

$k_m = \frac{\pi}{a}m$

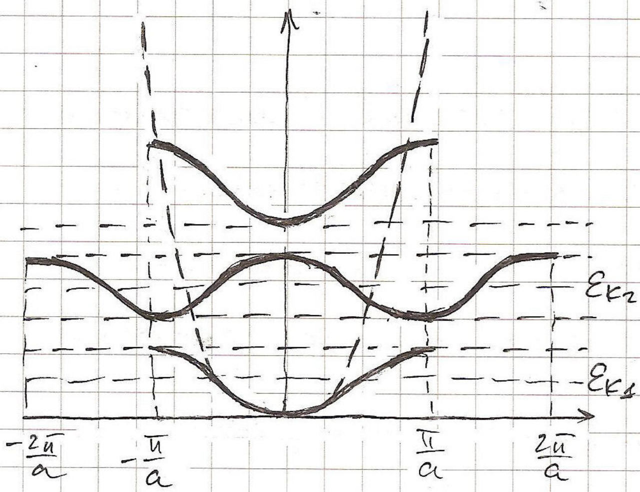
$E_g \equiv$ запрещённая зона.

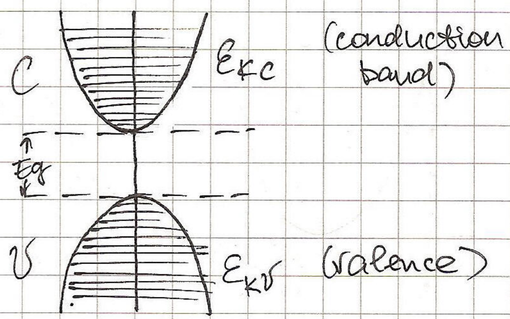
$\Psi_k(x) = \Psi_{k\pm g}(x) \rightarrow$ состояния одинаковые!
(неотличимы!)

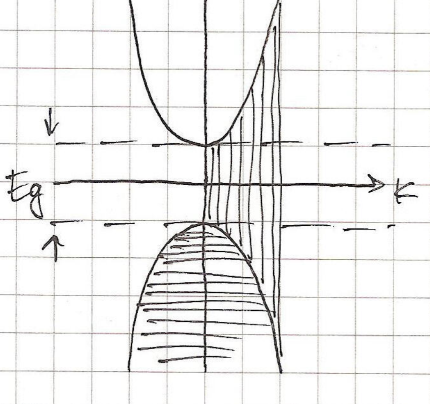
↳ $|\Psi_k(x)|^2 = |\Psi_{k\pm g}(x)|^2$ – плотности вероятности равны др. другу.

$g = \frac{2\pi}{a} \cdot n$.

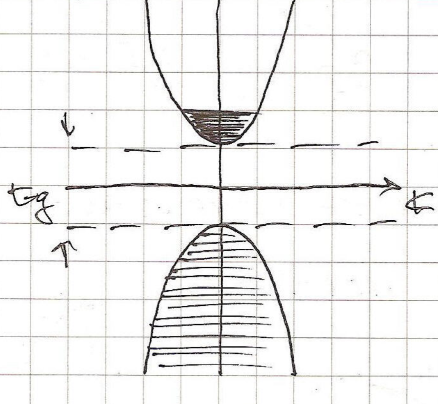
Обычно рисуют так:







ДИЭЛЕКТРИК

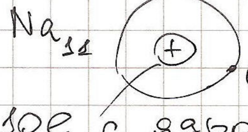


МЕТАЛЛ

полностью заполненная зона не проводит эл. ток

Принцип Паули: В одном квантовом состоянии может находиться только один   - частица с дробным зарядом.

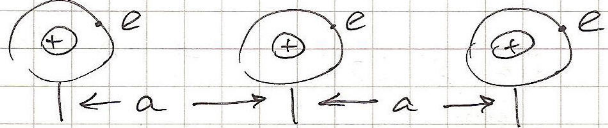
ПРИМЕР: Na (типичный металл) в 1ой группе;



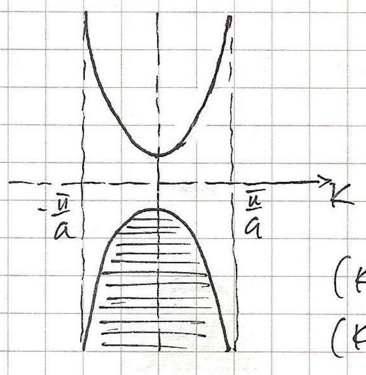
\- характерная валентность = 1.

10e с ядром образуют положительный ион.

ионная решётка:



Используем принцип min энергии и принцип Паули: в каждом из k сост-й м. находиться 2 электрона:

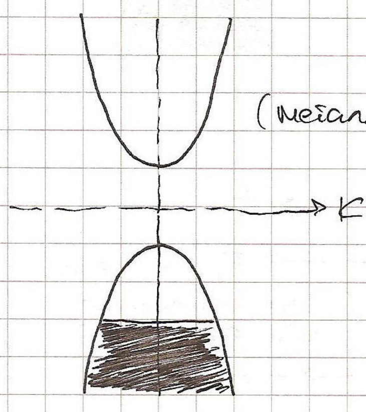


L - размер кристалла

$$\frac{2\pi/a}{2\pi/L} = \frac{L}{a} = N$$ - число атомов в кристалле.

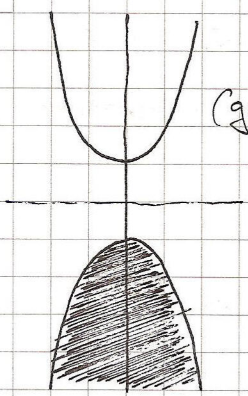
число различных k сост-й = $\frac{2\pi}{a}$

$(k_1 + \frac{1}{2})$
$(k_1 - \frac{1}{2})$ $- N_e = N$



(металл)

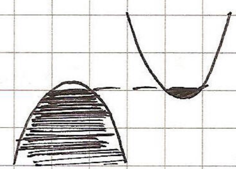
=> Элемент с нечётной валентностью при соединении в кристалл даёт металл (справедливо для кристаллов с одним атомом в ячейке).

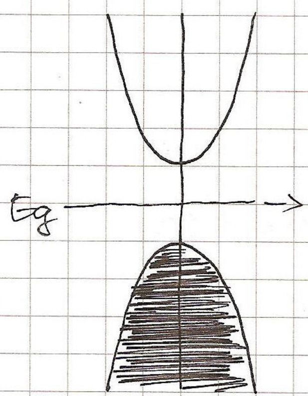


(диэлектрик)

=> Если элемент имеет чётную валентность, то внизу заполнено всё.

Если есть заполнение сверху, то получ-ся "полуметалл". ←





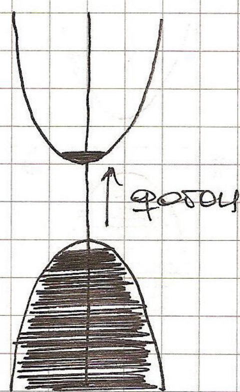
$E_g^{пп} \leq 1$ эВ $\qquad \hbar^{2\,a\,10^{-4}\,см} \sim 1$ эВ

$E_g^{диэл.} \sim 9$ эВ

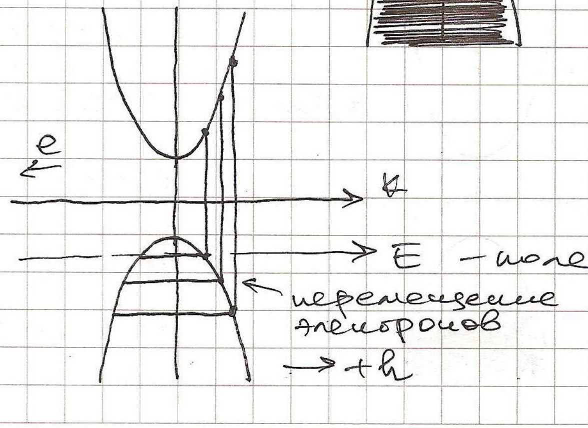
ПРИМЕР: NaCl

с при возбуждении светом (фотонами) в диэлектрике появляются "дырки":

дырка (+h) ≡ полностью заполненная зона − минус 1 электрон.



В случае действия электрического поля:



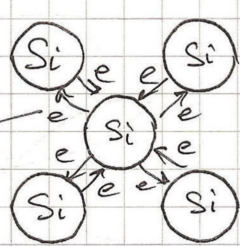
Способы искусственного создания дырок:

• освещение (долго не живут, электроны будут возвращаться и рекомбинировать)

[примеры: лазер, фотоприёмник;
лазер → «фотонная лавина»].

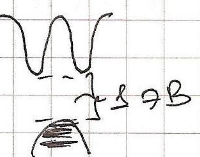
• введение в полупроводник примесей с иной валентностью (легированный полупроводник)

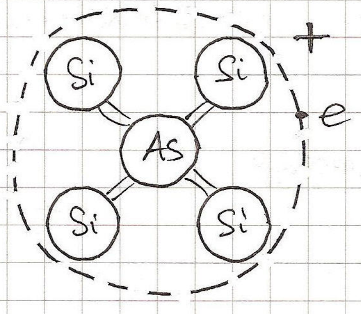
<u>ПРИМЕР:</u> Si: $v=4$:



пара электронов с противоположно направленными спинами.

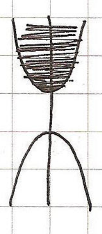
Вводятся примеси: бор^{B} ($v=3$), мышьяк^{As} ($v=5$):





— один квазисвободный электрон

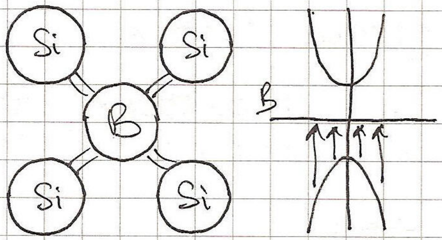
↳ энергетическая диаграмма с уровнем.



— много электронов в зоне проводимости.

⇒ такой полупроводник наз-ся полупроводником N-типа с примесью-донором.

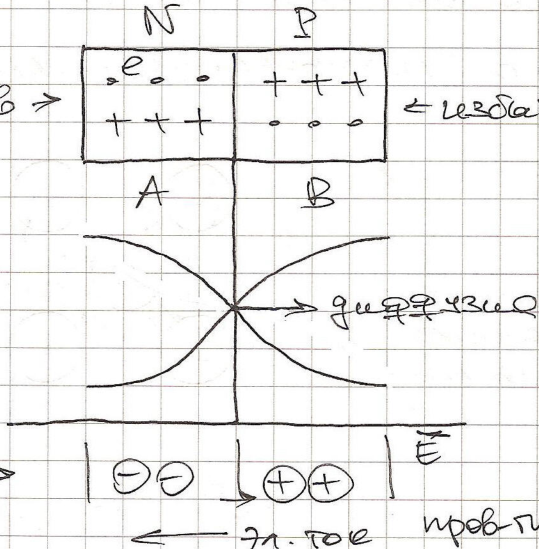
Аналогично, создаются дырки при вводе эл-та с валентностью $v=3$:



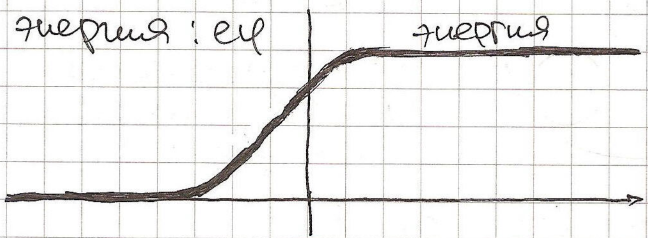
— полупроводник P-типа ≡
≡ с дырками

акцептор → положит.
дырки в огромном кол-ве:
$10^{-21}/см^3$.

PN — переход

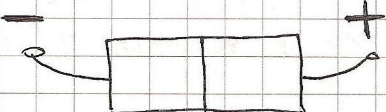


С ток будет идти до установления стационарного состояния



— энергетический барьер

Благодаря этому барьеру, эл-ны из N-обл-ти не могут перейти в P-область.

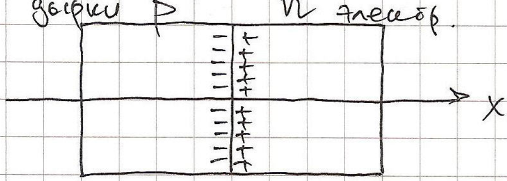


Как уменьшить вел-ну барьера? =
= Добавить внешнее напряжение.

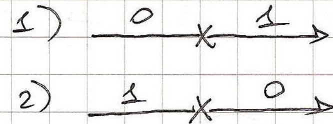
⇒ Электроны устремляются в P-область, и идёт ток. Аналогично для дырок

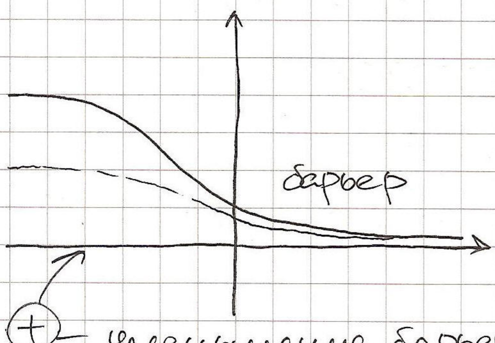
07.03.07 — лекция №5

PN – переход. Транзистор.



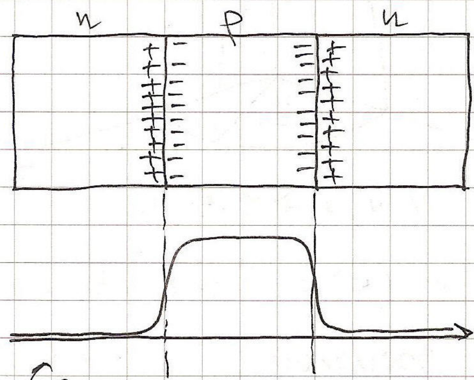
логические операции:





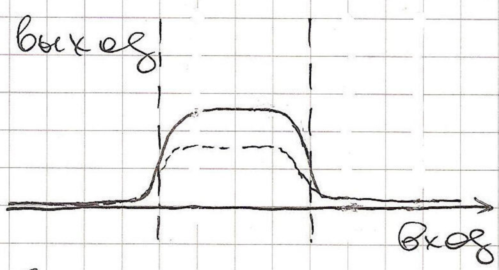
(+) — уменьшение барьера при приложении напр-я соответствующего знака.

(1)

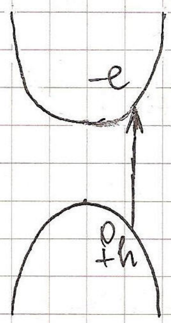


барьер для электрона

при отриц. заряде барьер уменьшается!



Зонный спектр



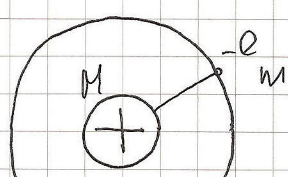
остаётся условиться об обозначениях "x".

−U	0	вход
+U	1	выход

Тока нет: 1
Ток есть: 0

благодаря этому есть дырки и электроны =>
=> ТРАНЗИСТОР РАБОТАЕТ!

ПРИМЕР: Атом водорода ↓

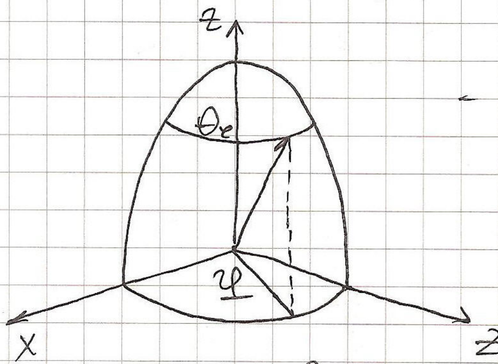


$, \frac{m}{M} \sim 10^{-3} \Rightarrow$ ядро можно считать неподвижным и рассм-ть электрон в кулоновском поле ядра.

$\hat{H}\Psi = E\Psi$ — ур-е Шредингера.

$\Psi(\vec{r})$

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{Ze^2}{r}$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r\Psi = \frac{\hbar^2}{2mr^2}\Delta_{\theta,\varphi}\Psi =$$

$$= (E - U(r))\Psi$$

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r};$$

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta\varphi)$$

$x, y, z \rightarrow r, \theta, \varphi$

Л.ч. (φ) = Пр.ч. $(\theta,\varphi) = \lambda$

радиальн. угловое

результат: $\Delta_r R + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_{эффект.}(r))R = 0$,

$\Delta_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$, $U_{эфф.}(r) = \dot{U}(r) + \lambda\frac{\hbar^2}{2mr^2}$

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y + \lambda Y = 0$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta) - \Phi(\varphi)$$

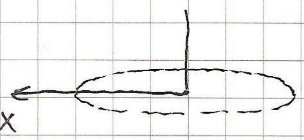
$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi(\varphi) = 0$$

конст.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)\Theta + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0.$$

решение: $\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi}$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$



$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — магнитное квантовое число.

$$\cos\theta = \xi$$

$$(1-\xi^2)\,\Theta''(\xi) - 2\xi\Theta' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)\Theta = 0.$$

[изложенное нормально написано в

лит-ра: Блохинцев "Квантовая механика"]

$\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ — орбитальное квантовое число.

$$\Theta_{l,m}(\theta) = C P_l^{|m|}(\cos\theta)$$

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = C_{l,m} P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

полином Лежандра: $P_l^{|m|} = 0$, $|m| > l \Rightarrow$

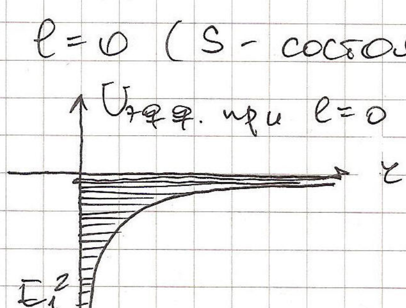
$\Rightarrow P_l^{|m|} \neq 0$ при $|m| \le l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $m = -l, \ldots, 0, \ldots +l$

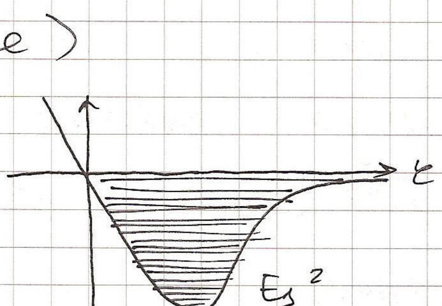
$$R(r) = \frac{f(r)}{r}$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U_{\text{эфф.}}(r)\right) f = 0.$$

$$U_{\text{эфф.}} = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2mr^2}\, l(l+1).$$

$l = 0$ (S - состояние)





[опять же, Блохинцев...]

т.к. спектр всегда дискретный.

$n = 1, 2, 3$ — главное кв. число

$l = 0, 1, \dots, n-1$ — орбитальное кв. число

$|m| \le l$ — m — магнитное кв. число

все квантовые числа.

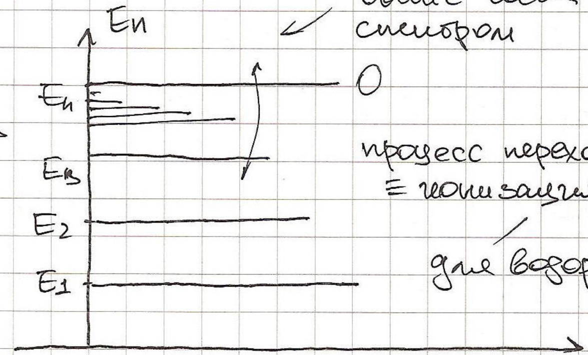
$R_{n,l}(r)$ собств. зн-я $\rightarrow E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$

Окончательный вид волновой функции электрона в квантовой механике:

$$\Psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\,\Theta_{lm}(\theta)\,\Phi_m(\varphi)$$

$$\lambda = l(l+1)$$

выше сост-е с непр. спектром



теор. серии переходов экспериментально подтверждены и хорошо опис-ся ф-лой Бора:

$\hbar\omega_{mn} = E_m - E_n$

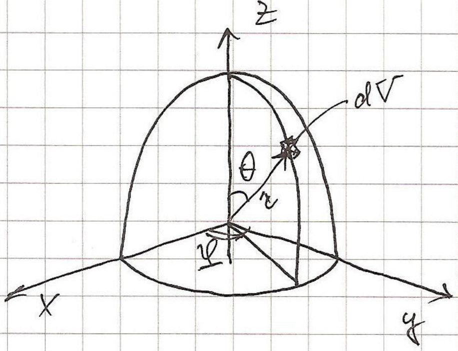
процесс перехода ≡ ≡ ионизация

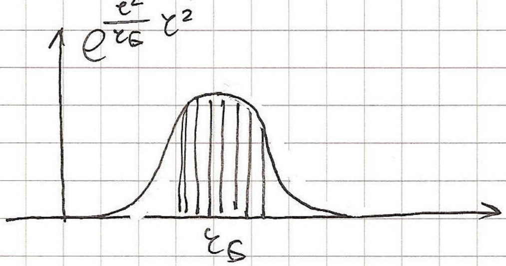
для водорода: 3,6 эВ

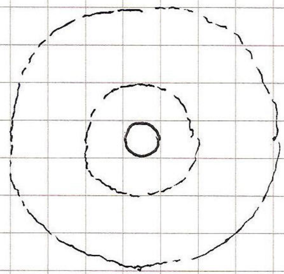
$n=1$ ≡ электрон находится в самом низком энергетическом состоянии. В этом случае $l=0$ — единств. возможное зн-е, $m=0$. Сост-е с такими кв. числами ≡ ОБЫЧНОЕ состояние электрона.

$R_{1,0} = C e^{-\frac{r}{a_Б}}$, $a_Б = 0.5\cdot 10^{-8}$ см — радиус Бора

$$\underbrace{|\Psi_{1,0,0}|^2}_{\text{плотность вероятности}} \underbrace{r^2 dr\, d\Omega}_{dV} \qquad R^2_{1,0}(r)\, r^2 dr = C e^{-\frac{2r}{a_Б}} r^2 dr$$

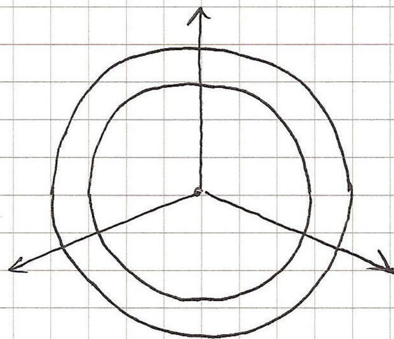


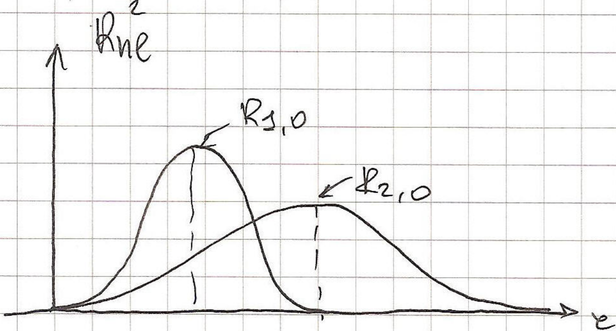


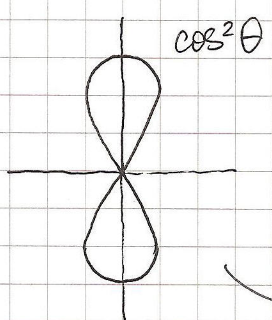


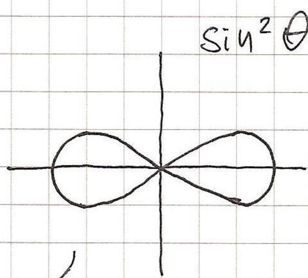
$n=2,\ l=0, m=0$

$l=1,\ m=0,\ m=\pm 1$









электронная плотность

АНИЗОТРОПИЯ

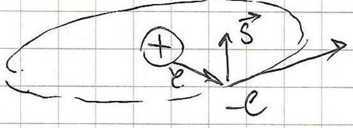
21.03.07 — лекция №7

[Поправка к прошлой лекции от Verочки:

$$\begin{cases} \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = 2i\sigma_z, \\ \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y = 2i\sigma_x, \\ \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z = 2i\sigma_y \end{cases}$$]

Матричная формулировка квантовой механики.

Концепция спина (собственного механического момента):



1928 г. — релятивистская теория спина Дирака + + матричные операторы;

$S_{x,y,z} = \frac{\hbar}{2}\sigma_{x,y,z}$; $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

став. задачи на собств. ф-ра / собств. значения.

$\hat{A}$; $\hat{A}\Psi = A\Psi$ — операт. ур-е

$\hat{B}$; $\hat{B}\psi_n = B_n\psi_n$ — предполагается решённой

ψ_n

$\Psi(x) = \sum_m C_m \psi_m(x)$ ← переход к представлению оператора B.

Подставляем: $\sum_m C_m \hat{A}\psi_m = A\sum C_m \psi_m$

$\int \psi_k(x)\,dx$

$\sum C_m A_{km} = A\sum_m C_m \delta_{mk}$; $\sum_m C_m(A_{km} - A\delta_{mk}) = 0.$

условие разрешимости: $\det|A_{km} - \delta_{mk}A| = 0.$

$A: \sum_m |c_m|^2 = 1.$

Как перейти к матр. формулир-ке в случае нестационарного ур-я Шредингера?

$H_0 \varphi_n = E_n \varphi_n$

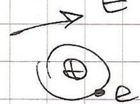
$\Psi^S(x,t) = \sum c_n^{(t)} \varphi_n(x)$

$i\hbar \sum_n c_n \varphi_n = \sum_n c_n \varphi_n$ $\qquad \int \varphi_n^*(x)\,dx$

водород:
пусть есть какое-то поле:

$i\hbar \dot{c}_n = \sum_n H_{mn} c_n$

$\vec{E}$



$\hat{H} = \hat{H}_0 + V_{возм.}$

опер-р энергии взаимодействия атома с внешним возмущением

$H_{mn} = \int \varphi_m^* \hat{H} \varphi_n \,dx$

$V_{возм.} = -\vec{d}\vec{E}$

$(H_0)_{mn} = \int \varphi_m^* \hat{H}_0 \varphi_n \,dx = \{исп.\ \hat{H}_0 \varphi_n = E_n \varphi_n\} = E_n \delta_{mn}$

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_m(t) \end{pmatrix} \qquad \langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_m |c_m|^2 = 1.$$

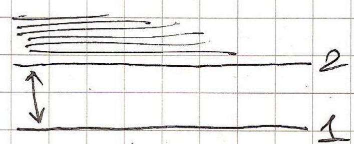
столбец (квантовое обозначение)

$\hat{A}\Psi = A\Psi$ $\qquad H_0 \varphi_1 = E_1 \varphi_1$

$H = H_0 + V$ $\qquad H_0 \varphi_2 = E_2 \varphi_2$

$\hat{H}\Psi = E\Psi$

двухуровневый атом с дискретным спектром:



$\Psi = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2$

$a_1 \hat{H} \varphi_1 + a_2 \hat{H} \varphi_2 = E(a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2)$

$\int \varphi_1(x)\,dx$ $\qquad a_1 H_{11} + a_2 H_{12} = E a_1.$

Умнож. на φ_2, интегрируем $\rightarrow$ получ. 2ое ур-е:

$$\begin{cases} a_1 H_{11} + a_2 H_{12} = E a_1, \\ a_1 H_{21} + a_2 H_{22} = E a_2. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} H_{11} - E & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} - E \end{vmatrix} = 0$$

$$E^2 - E(H_{11} + H_{22}) + H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21} = 0.$$

$$E_{\pm} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(H_{11} + H_{22})^2}{4} - H_{11} H_{22} + H_{12} H_{21}}$$

$\Rightarrow$ зн-е энергии атома в поле:

$$E_{\pm} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12} H_{21}}$$

собственные функции находятся подстановкой в исходную систему.

Как ведёт себя спектр атома?

$H = H_0 - d\vec{E}$, d – дипольный момент атома

$$H_0 \psi_1 = E_1 \psi_1 \; ; \; \hat{H}_0 \psi_2 = E_2 \psi_2$$

$\vec{d}_{11}, \vec{d}_{22}$
$\vec{d}_{12}, \vec{d}_{21}$ $\qquad \vec{d} = e\vec{r}$, $\quad \underset{\longleftarrow \vec{E}}{\overset{\vec{r}}{\oplus \leftrightarrow e^-}}$ $\qquad d_{11} = e \int \psi_1 \vec{r} \psi_1 \, d\vec{r}$

$\left.\begin{aligned} \psi_1(-r) &= \psi(r) \\ \psi_1(-r) &= -\psi(r) \end{aligned}\right)$ в случае, когда с-ма является центральносимметричной: $\hat{H}(-r) = \hat{H}(r)$

$$\vec{d}_{11} = \vec{d}_{22} = 0$$

$$E_{\pm} = \frac{E_2 + E_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_2 - E_1)^2}{2} + |d_{12}| E^2}$$

$$\vec{d}_{12} = e\int \psi_1^*(r)\,\vec{r}\,\psi_2(r)\,d\vec{r}$$

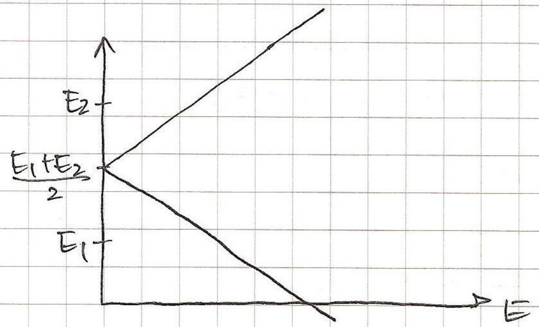
$$E_+ \simeq E_2 + \frac{|d_{21}E|^2}{\hbar\omega^2}, \quad \hbar\ {}_{21} = E_2 - E.$$

E_2

E_1

$$E_- \simeq E - \frac{|d_{21}E|^2}{\hbar\omega_{21}}$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$



$$S_{x,y,z} = \frac{\hbar}{2}\sigma_{x,y,z}$$

Поставим задачи на собств. ф-ции / собств. зн-я операторов (*):

$$\hat{\sigma}_z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = +1} \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 0.$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |0\rangle;\ \lambda = +1.$

$S_z = \frac{\hbar}{2}$

$\underline{\lambda = -1} \Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 1.$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |1\rangle$

$S_z = -\frac{\hbar}{2}$

Принципиальное отличие кв. кубита от классического заключается в наличии произвольных суперпозиций $|0\rangle, |1\rangle$:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$$

$$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

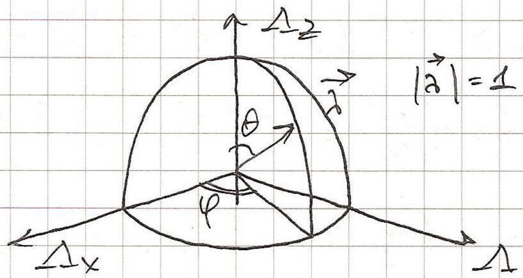
сфера Блоха:

$$\Lambda_z = a^*a - b^*b$$

$$\Lambda_x = b^*a + a^*b$$

$$\Lambda_y = i(a^*b - b^*a)$$

$$\Lambda_x^2 + \Lambda_y^2 + \Lambda_z^2 = 1$$



$\Lambda_z = \cos\theta$, $\Lambda_x = \sin\theta\cos\varphi$

θ, φ $\quad |a|^2 + |b|^2 = 1$

$$\Lambda_z = |a|^2 - |b|^2 = \cos\theta$$

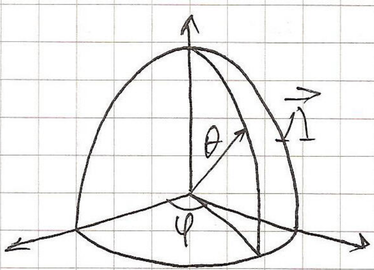
$$|a| = \cos\frac{\theta}{2}, \quad |b| = \sin\frac{\theta}{2}$$

$$|\psi\rangle = |a|e^{i\varphi_a}|0\rangle + |b|e^{i\varphi}|1\rangle = e^{i\varphi_a}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)$$

$\varphi = \varphi_b - \varphi_a$ — фаза кубита.

$\Rightarrow$ сост-е кубита на блоховской сфере задаётся как: $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$

28.03.07 — лекция № 8.



$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

$|\vec{A}| = 1$

Т.к. $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ $\quad |a|^2 + |b|^2 = 1$

$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$

$R_x(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{X}$ $\qquad \hat{X} = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{X} = NOT$ — опер-р поворота $\sim$ NOT!

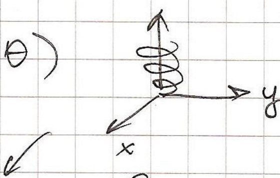
$\hat{I}$ — единичная матрица.

$\hat{X}|0\rangle = |1\rangle \; \hat{X}|1\rangle = |0\rangle$

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{Z}|0\rangle = |0\rangle$

$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$

$R_y(\theta)$



вращение вокруг оси z по правилу буравчика.

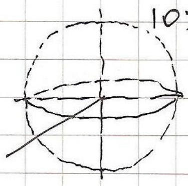
оператор поворота:

$R_y(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{Y}$ $\qquad y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$R_z(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{Z}$ $\qquad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

м-цы Паули

Убедимся, что R_x — оператор поворота!



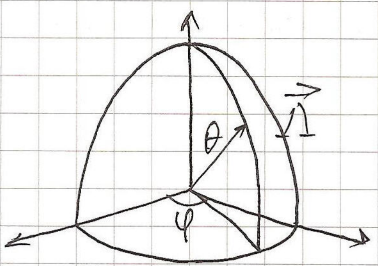
$|0\rangle$ — в нач. момент

$R_x(\frac{\theta}{2})|0\rangle = (\cos\frac{\pi}{4}\hat{I} - i\sin\frac{\pi}{4}\hat{X})|0\rangle =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$

$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$

28.03.07 — лекция № 8.



$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

$|\vec{A}| = 1$

Для $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ $\quad |a|^2 + |b|^2 = 1$

$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$

$R_x(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{X}$ $\qquad \hat{X} = \sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$\hat{X}$ = NOT — опер-р поворота ~ NOT!

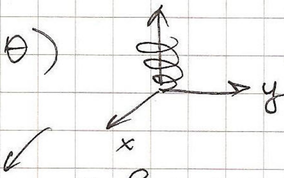
$\hat{I}$ — единичная матрица.

$\hat{X}|0\rangle = |1\rangle$ $\hat{X}|1\rangle = |0\rangle$

$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle$

$|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, $\hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$

$R_y(\theta)$



вращение вокруг оси z по правилу буравчика.

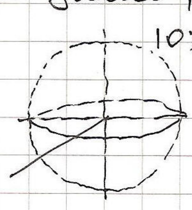
оператор поворота:

$R_y(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{Y}$ $\qquad y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$

$R_z(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{Z}$ $\qquad z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

м-цы Паули

Убедимся, что R_x — оператор поворота!

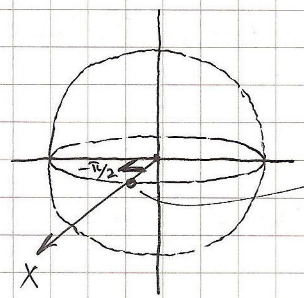


$|0\rangle$ — в нач. момент

$R_x(\frac{\theta}{2})|0\rangle = (\cos\frac{\pi}{4}\hat{I} - i\sin\frac{\pi}{4}\hat{X})|0\rangle =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$

$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$



$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$

– в нач. момент времени все ячейки регистра переводятся в это состояние.

Перед тем, как рассм-ть экспериментальную реализацию, введём ещё одно представление оп-ров поворота:

$$R_x(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{X}}\ ;\ R_y(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{Y}}\ ;\ R_z(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{Z}}$$

Описанные представления эквивалентны.

Покажем:

$$e^{i\frac{\theta}{2}X} = 1 - \frac{i\theta}{2}\hat{X} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i\theta}{2}\right)^2\hat{X} + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i\theta}{2}\right)^3\hat{X} + \ldots =$$

$$= \{\text{исп. } \hat{X}^{2n+1} = (\hat{X})^{2n}\hat{X}\} = \left(1 + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i\theta}{2}\right)^2 + \ldots\right)\hat{I} +$$

$$+ \left(-\frac{i\theta}{2} + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i\theta}{2}\right)^3 + \ldots\right)\hat{X} = \cos\frac{\theta}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{X}$$

[Последн. достижения: премия Декарта за разработку кв. компьютера (1000 кубит?!)]

Физическая реализация кубитовых операций:

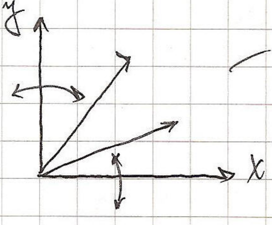
Поворот спина делается при помощи двух полей:

1)-ое: постоянное: $B_0\vec{e}_z$, $|\vec{e}_z| = 1$, $B_0 = const$

2)-ое: переменное: x, $B_1(t)\vec{e}_x$

например, с помощью катушки с пост./ /переменным током.

$$\vec{e}_x B_1(t) = 2B_{10}\cos\omega t\,\vec{e}_x = B_{10}(\cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y) +$$
$$+ B_{10}(\cos\omega t\,\vec{e}_x - \sin\omega t\,\vec{e}_y)$$



— одно поле будет вращаться влево, другое — вправо

$\Rightarrow$ силы будет вращаться в одну из сторон.

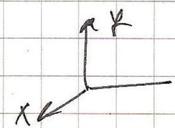
$H = -\vec{\mu}_s \vec{B}$ — энергия взаимодействия (магнитный момент)

$$\left\{\mu_s = -\frac{2\vec{\mu}_Б}{\hbar}\hat{S}\right\} = B_0\mu_Б\hat{z} + S_x = \frac{\hbar}{2}\hat{x} +$$
$$+ B_{10}\mu_Б(\cos\omega t\,\hat{x} + \hat{y}\sin\omega t)$$

$S_x = \frac{\hbar}{2}\hat{x}$

$2B_0\mu_Б = \hbar\omega_0$

$2B_{10}\mu_Б = \hbar\Omega$



$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{z} + \frac{\hbar\Omega}{2}(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t) = H_0 + V(t)$$

Динамическое полное ур-е Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle$$

$$|\psi(0)\rangle$$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\frac{\omega t}{2}\hat{z}}|\psi(t)\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}\hat{z}}|\Psi(t)\rangle$$

$$\frac{\hbar\omega}{2}\hat{z}e^{-i\frac{\omega t}{2}\hat{z}}|\Psi(z)\rangle + e^{-i\frac{\omega t}{2}\hat{z}}\,i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} =$$
$$= \hat{H}e^{-\frac{i\omega t}{2}\hat{z}}|\Psi\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = \frac{\hbar(\omega_0-\omega)}{2}\hat{z}|\Psi\rangle + e^{i\frac{\omega t}{2}\hat{z}}\,V\,e^{-i\frac{\omega t}{2}\hat{z}}|\Psi\rangle$$

$$\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -i\frac{(\omega_0-\omega)}{2}\hat z|\Psi\rangle - \left(\frac{i\Omega}{2}\right)e^{i\frac{\omega t}{2}\hat z}(\hat x\cos\omega t + \hat y\sin\omega t)e^{i\frac{\omega t}{2}\hat z}|\Psi\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} e^{i\frac{\omega t}{2}\hat z}\hat y e^{-i\frac{\omega t}{2}\hat z} &= \hat x\sin\omega t+\hat y\cos\omega t \\ e^{i\frac{\omega t}{2}\hat z}\hat x e^{-i\frac{\omega t}{2}\hat z} &= \hat x\cos\omega t-\hat y\sin\omega t \end{aligned}\right]$$

соотношения док-ся с исп-ем альтернативного предст-я оп-ра поворота ↑

Используем соотношения ↑:

$\hat x\hat z = -i\hat x$; $\hat x\hat z = i\hat x$

$$\boxed{\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = i\frac{(\omega_0-\omega)}{2}\hat z|\Psi\rangle - \frac{i\Omega}{2}\hat x|\Psi\rangle}$$

упрощение ур-я, кот. можно проинтегр-ть и получить опер-ное реш-е

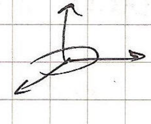
$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\left[\frac{(\omega_0-\omega)}{2}\hat z+\frac{\Omega}{2}\hat x\right]t}|\Psi(0)\rangle$$

1) $B_{10}=0$; $\omega=0$; $0=\Omega \sim B_{10}$

$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}\hat z}|\Psi(0)\rangle$ — вращение вектора происходит с такой круговой частотой.

Вычислим среднее значение, поясн. картину вращения:

$\omega_0 = \frac{2B_0\mu_Б}{\hbar}$



нач. сост-е: $|\Psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt2}$

В этом случае: $\langle S_z\rangle_{t=0} = \frac{\hbar}{2}\langle\hat z\rangle_{t=0}=0$

$\langle S_x\rangle_{t=0} = \frac{\hbar}{2}\langle\hat x\rangle_{t=0} = \frac{\hbar}{2}$ — означает, что вектор нач. сост-я явл-ся собств. вектором оп-ра $\hat x$ с собств. зн-ем 1.

[т.к. $\hat x$ — оператор NOT: переворачивает зн-е, ничего не меняет].

$\langle S_y \rangle_{t=0} = 0$ – не так просто, докажите сами.

=> вектор спина в нач. момент времени направлен вдоль оси X.

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \cos\frac{\omega_0 t}{2} + i\,\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \sin\frac{\omega_0 t}{2}$$

Исп. фор-лу, вычислим среднее X:

$$\langle X \rangle_t = \left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \cos\frac{\omega t}{2} + i\,\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \sin\frac{\omega_0 t}{2} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \cos\frac{\omega_0 t}{2} - i\,\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \sin\frac{\omega_0 t}{2} \right] =$$

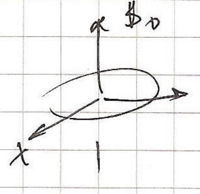
$= \{$исп. $\hat{X}|0\rangle = |1\rangle$, $\hat{X}|1\rangle = |0\rangle\} =$

$= \{$это вы можете проделать сами$\} =$

$$= \cos^2\frac{\omega_0 t}{2} - \sin^2\frac{\omega_0 t}{2} = \cos\omega t.$$

Аналогично, $\langle Y \rangle_t = \sin\omega t$

Чему соответствуют эти результаты?



– среднее значение проекции спина вращается вокруг оси Z с угловой скоростью ω_0.

картина прецессии вокруг напр-я пост. поля.

[Кстати, это оправдывает выкидывание одной из вращающихся волн из ур-я, к-го ранее].

2) $\omega = \omega_0$ [резонанс] : $\omega = 10^8 \frac{1}{\text{см}}$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\left[\frac{\omega_0-\omega}{2}\hat{z} + \frac{\Omega}{2}\hat{x}\right]t}|\Psi(0)\rangle$$

$\Rightarrow$ для резонанса: $|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\Omega t}{2}\hat{x}}|\Psi(0)\rangle$

<u>ЗАМЕЧАНИЕ:</u> В соответствии с алгоритмом, какую-либо ячейку нужно перевернуть, в то же время, все остальные должны остаться без изменения $\Rightarrow$ поле должно действовать только на одну ячейку! – это явл-ся проблемой. В простых компьютерах это решается исп. спинов с различными g-факторами (зависящ. от окружения).

⊕ кубит испытывает огромное число неконтролируемых воздействий (им. большое число степеней свободы) $\Rightarrow$ нельзя записать волн. ф-ю $\rightarrow$ исп. м-цу плотности.

⊕ процедура измерения волн. поля в условиях релаксации

НА СЛЕД. ЛЕКЦИИ.

04.04.07 — лекция № 9.

Время D-когерентизации кубита.

$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ — чистое состояние ($\equiv$ с заданным вектором).

Временная эволюция сост-я м. быть найдена из $i\hbar \frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi\rangle$

А м. быть найдена из эволюции коэффициентов a и b, не завис. от времени [?]

Когда есть окруж-е, нельзя $\uparrow$ явно задать состояние

$$i\hbar\left(\frac{da}{dt}|0\rangle + \frac{db}{dt}|1\rangle\right) = \hat{H}\left(a|0\rangle + b|1\rangle\right)$$

| • умн. слева на $\langle 0|$, $\langle 1|$.

исп. св-ва $\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle 0|1\rangle = 0$.

$$i\hbar\frac{da}{dt} = a\langle 0|\hat{H}|0\rangle + b\langle 0|H|1\rangle$$

$$i\hbar\frac{db}{dt} = a\langle 1|\hat{H}|0\rangle + b\langle 1|\hat{H}|1\rangle$$

$H = H_0 + V$

$H_0|0\rangle = E_0|0\rangle$, $H_0|1\rangle = E_1|1\rangle$ — обозн.

$$i\hbar\frac{da}{dt} = aE_0 + bV_{01}$$

$$i\hbar\frac{db}{dt} = bE_1 + aV_{10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = -\dfrac{iE_0}{\hbar} a - \dfrac{1}{\hbar} V_{01} b \quad (1) \\ \dfrac{db}{dt} = -\dfrac{iE_1}{\hbar} b - \dfrac{iV_{10}}{\hbar} a \quad (2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \rho_{01} = b^* a \\ \rho_{10} = a^* b \end{matrix}\right\}$$

a, b – не операторы, а числа!

Переходим к линейным комбинациям.

Для этого $\begin{matrix} b^* \cdot (1) \\ (2) \cdot a^* \end{matrix}$ $+$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\rho_{01}}{dt} = -\frac{i(E_0 - E_1)}{\hbar}\rho_{01} + \frac{iV_{01}}{\hbar}(\rho_{00} - \rho_{11})}$$

$$a^* \cdot \Big| \ \frac{da}{dt} = -\frac{iE_0}{\hbar} a - \frac{iV_{01}}{\hbar} b,$$

$+$

$$\frac{da^*}{dt} = \frac{iE_0}{\hbar} a^* + \frac{iV_{10}}{\hbar} b^* \ \Big| \cdot a$$

$$\frac{d\rho_{00}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left(V_{10}\rho_{01} - V_{10}\rho_{10}\right)$$

$\rho_{00} + \rho_{11} = a^* a + b^* b = 1$ [радиус сферы]

$\rho_{00} - \rho_{11} = \mathcal{D}$ [от слова difference ≡ ≡ разность населённости] $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho_{00} = \frac{\mathcal{D}}{2} + \frac{1}{2}$$

Подставляя ρ_{00} в получ. ур-е → ур-е для $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{D}}{dt} = \dfrac{2i}{\hbar}\left(V_{10}\rho_{01} - V_{01}\rho_{10}\right) \\ \dfrac{d\rho_{01}}{dt} + \omega_{01}\rho_{01} = \dfrac{iV_{01}}{\hbar}\mathcal{D} \end{cases}$$

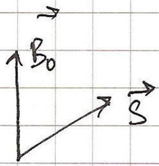
замкнутая с-ма; $\rho_{10} = \rho_{01}^*$

В случае спина: $H_0|0\rangle = B_0\mu_0 - |0\rangle$

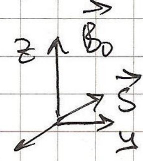
$H_0|1\rangle = -B_0\mu_0 - |1\rangle$

$E_0 = B_0\mu_Б, \; E_1 = -B_0\mu_Б$

$V = B_1\mu_Б(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)$



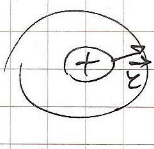
$\omega_{01} = 2B_0\mu_0 \equiv \omega_0$



С получим ОУ1 для лазеров.

⇒ В случае взаимодействия электрона с эл.-магн. полем для двухуровн. атома:

$V = -\vec{d}\vec{E}$ $\quad \vec{d} = e\vec{r}$

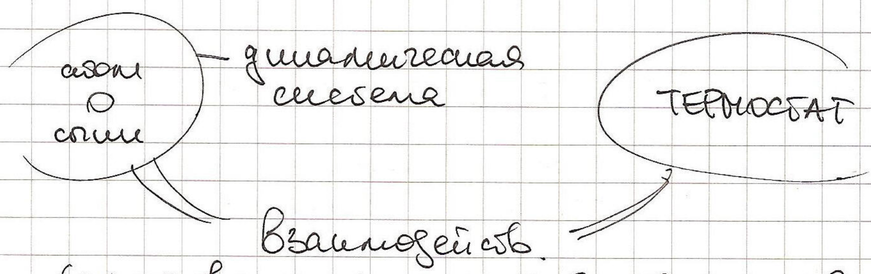


$V_{10} = -\vec{d}_{10}\cdot\vec{E}, \ldots$

$\vec{d}_{10} = e\int \psi_1^* \vec{r}\, \psi_0\, d\vec{r}$ (собств. ф-ции оп-ра Гамильтона для электрона в атоме)

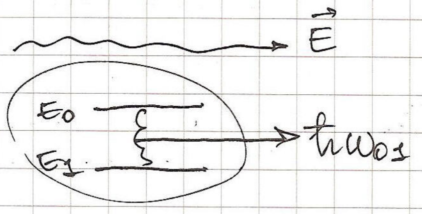
Теперь ф-м смешанные состояния.

Окружение ≡ огромная система с большим числом степеней свободы.



(существование для сост-я маленькой с-мы и пренебр. мало, чтобы повл-ть на сост-е большой с-мы)

ПРИМЕР: [взаимодействие]



[1900г.]

$\vec{E}_{излуч.} - \vec{d}\vec{E}_{тепл.}$ = взаимод-е

Введём в уравнения взаимодействие с термостатом:

$$H = \underbrace{H_0 + V}_{\text{дин.}} + \underset{\text{бес. число степеней свободы}}{W(\infty)}$$

$$\frac{d\rho_{01}}{dt} + i\omega_{01}\rho_{01} = \frac{\omega_{01}}{\hbar}\Delta + iW_{01}(\text{дин., терм.})\Delta$$

делаем усреднение:

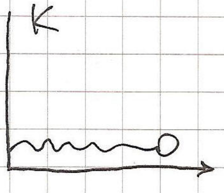
$$\frac{d\rho_{01}}{dt} + i\omega_{01}\rho_{01} = \frac{\omega_{01}}{\hbar}\Delta + iW_{01}(\text{дин., терм.})\Delta$$

делаем усреднение:

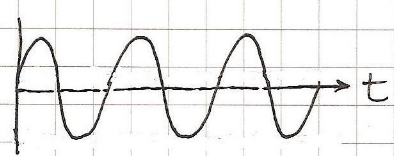
$$\frac{d\bar{\rho}_{01}}{dt} + i\omega_{01}\bar{\rho}_{01} = \frac{\omega_{01}}{\hbar}\bar{\Delta} + i\overline{\underset{(*)}{W_{01}}(\text{дин., терм.})\Delta} \;-$$

— задача квант. статистической механики.

Чтобы получить результат, проведём аналогию с маятником:



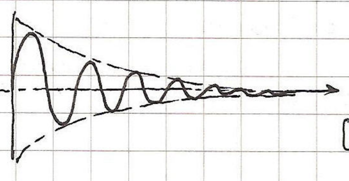
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$



Пусть есть трение → $\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Γ - коэф., характ. трение

Тогда:



— забывание своего нач. сост-я из-за диссипации.

[Здесь аналогия с термостатом]

$$\rightarrow \rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)\, e^{-i\omega_{01} t}$$

Г.О.: $$\frac{d\rho}{dt} + i\omega_{01}\bar{\rho}_{01} + \frac{1}{T_2}\bar{\rho}_{01} = \frac{iV_{01}}{\hbar}\bar{z} \quad (*)$$

$$\bar{\rho}_{01} = \overline{b^* a} \qquad \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \text{ – матрица плотности.}$$

$$\frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{1}{T_1}(\bar{z} - z^0) = \frac{2i}{\hbar}\left(V_{10}\bar{\rho}_{01} - V_{01}\bar{\rho}_{10}\right)$$

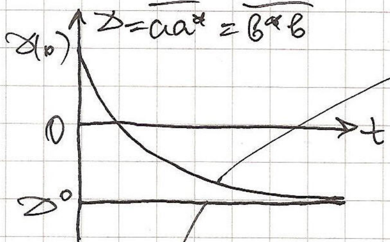
T_1 – время релаксации населённости (диаг. эл-та).

<u>ЗАМЕЧАНИЕ:</u> Все вычисления на квантовом компьютере д.б. закончены за время $\ll T_2$. Иначе, вычисление произвести будет невозможно.

Положим $V_{01} = 0$, тогда получим:

$$\frac{d\rho_{01}}{dt} + iW_{01}\rho_{01} + \frac{1}{T_2}\rho_{01} = 0$$

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)\, e^{-i\omega_0 t - \frac{t}{T_2}} = |\rho_{01}(0)|\, e^{i\varphi(0) - i\omega_0 t - \frac{t}{T_2}}$$



спонтанный переход из нач. сост-я в равновесное за характери. время релаксации диаг. эл-тов (T_2)

равновесная населённость соотв. предост. самой себе дост. долгое время — отрицат. т.к. вер-ть нахож-я в нижнем равновесном состоянии больше.

$$V_{01} = 0 = V_{10}.$$

$T_2 \le T_1$ (вообще-то $T_2 \ll T_1$) – не что иное, как закон сохр-е длины блоховского вектора.

На $t < T_2$ ($t \ll T_2$) удаляем быструю зав-ть от времени таким переходом:

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{01}(t) = \tilde{\rho}_{01}\, e^{-i\omega_{01} t} \\ V_{01} = \tilde{V}_{01}\, e^{-i\omega_0 t} \end{array}\right) \omega = \omega_{01}$$

[подразумевается случай точного резонанса]

$\Rightarrow$ в "медленных" перем-ых:
$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\rho}_{01}}{dt} = \dfrac{i\tilde{V}_{01}}{\hbar} D, \\ \dfrac{dD}{dt} = -\dfrac{2i}{\hbar}\left(\tilde{V}_{01}\tilde{\rho}_{10} - \tilde{V}_{10}\tilde{\rho}_{01}\right) \end{cases}$$

вывод закона сохранения:

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{\rho}_{10}\tilde{\rho}_{01}\right) = \frac{i}{\hbar}\left(\tilde{V}_{01}\tilde{\rho}_{10} - \tilde{V}_{10}\tilde{\rho}_{01}\right) D \quad | \cdot 4$$

$$\frac{d}{dt} D^2 = -\frac{4i}{\hbar}\left(\tilde{V}_{01}\tilde{\rho}_{10} - \tilde{V}_{10}\tilde{\rho}_{01}\right) D$$

+

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(D^2 + 4\tilde{\rho}_{01}\tilde{\rho}_{10}\right) = 0$$ – ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ

Матрица плотности: $D^2 + 4\tilde{\rho}_{01}\tilde{\rho}_{10} = const$

блоховский вектор: $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$

напр., λ_z в новых обозначениях: $\lambda_z = \rho_{00} - \rho_{11} = D$

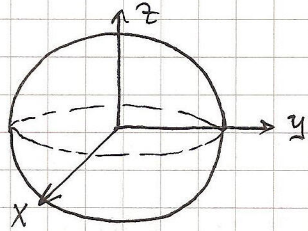
м. показать, что $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 4\tilde{\rho}_{01}\tilde{\rho}_{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_z^2 + \lambda_x^2 + \lambda_y^2 = const$ ($=1$, т.к. $D = 1$ в нач. момент)

Всё это имеет смысл на временах $\ll$

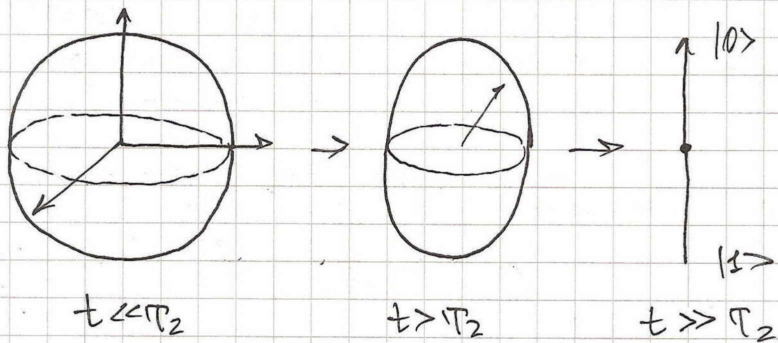
$\ll$ времени потери когерентности: $t \ll T_2$.

А что будет происходить с кубитом после момента времени T_2 ?



$$\tilde{\rho}_{01}\tilde{\rho}_{10} = \lambda_x^2 + \lambda_y^2$$

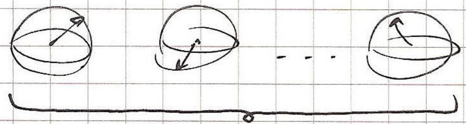
$$\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} \sim e^{-t/T_2}$$



$\Rightarrow$ при $t \gg T_2$ квантовый кубит превращается в классический бит с двумя состояниями 1 и 0.

Квантовые измерения

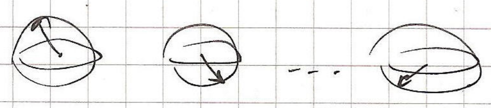
регистр квантового компьютера:



$|\Psi_n\rangle^{t=0}$

n кубитов

после задания нач. состояния, в соответствии с алгоритмом, над этими кубитами произв-ся преобразования → получ. конечное состояние:



$|\Psi_n\rangle^{t}$

На этом заканчивается Шредингерская квантовая механика, поскольку теперь нужно как-то считать из кубитов полученный результат. ≡

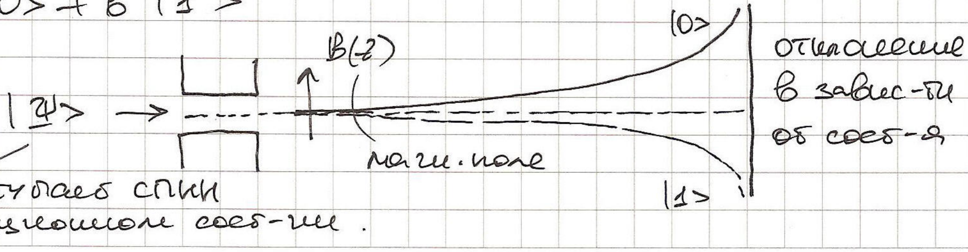
≡ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ.

ТИ создана постулативно фон Нейманом для описания экспериментально наблюдаемых эффекты

Требуется измерить суперпозиционное сост-е:

$|\Psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$

прибор:



на вход поступает спин в суперпозиционном сост-ии.

В случае смеш. сост-я спина, отклонение будет произвольно!

↳ Произв. N экспериментов:

$|0\rangle : N_0 \qquad N_0 + N_1 = N$

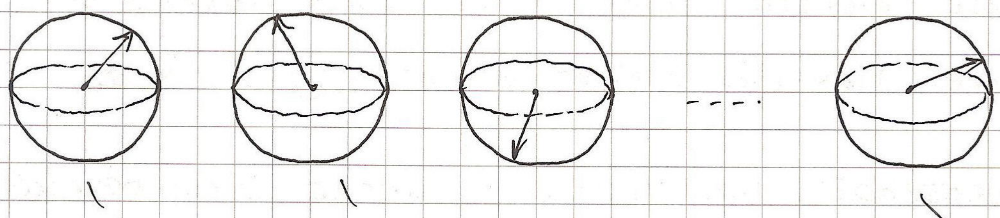
$|1\rangle : N_1$

↳ оказывается, что $\frac{N_0}{N} = |a|^2$, $\frac{N_1}{N} = |b|^2$

ЗАМЕЧАНИЕ: Раскрывается странная, непривычная особенность квантовой системы: в кубите м.быть огромное кол-во информации, но в рез-те измерений удаётся извлечь только один бит :((

↳ огромные потери информации. Несмотря на это, имеются алгоритмы с экспоненц. выигрышем по сравнению с классическим компьютером.

11.04.07 — лекция № 10



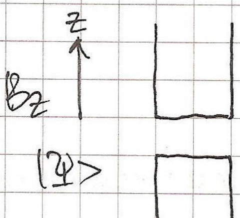
$|\Psi(0)\rangle_1$ $|\Psi(0)\rangle_2$ - - - - - - $|\Psi(0)\rangle_n$

$|\Psi(t)\rangle_1$ $|\Psi(t)\rangle_2$ - - - - - - $|\Psi(t)\rangle_n$

Измерительный базис. Выбор измерительного базиса.

Базис — собственные вектора оператора измерения.

Оператор измерения — оператор спина, который входит в Гамильтониан произведения с полевой переменной.



$$H = -\mu_z B_z = \hat{z}\,\mu_Б B$$

$$\hat{z}|0\rangle = +1|0\rangle, \quad \hat{z}|1\rangle = -1|1\rangle$$

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$|a|^2 \to |0\rangle, \quad |b|^2 \to |1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

1-ый постулат измерений: в каждом измерении с вероятностью $|a|^2$ получается значение 0.

Несмотря на огромное число состояний блоховского вектора, измерение необратимо сокращает кол-во информации до 1 бита

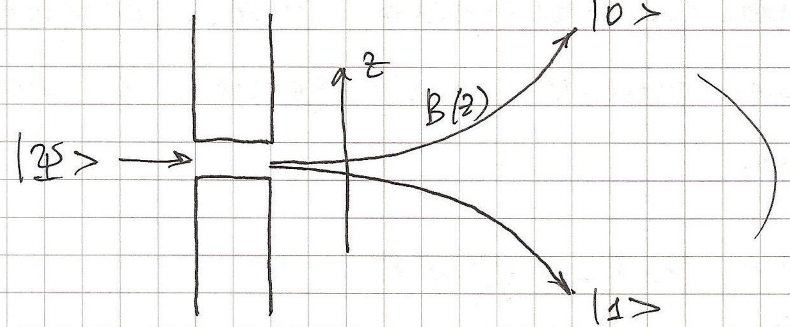
2-ой постулат измерений: после измерения и получения 0 или 1, кубит сколь угодно долго остаётся в этом состоянии.

Чтобы восстановить a и b → N измерений:

$N_a\, |0\rangle \qquad |a|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{N_a}{N}$

$N_b\, |1\rangle \qquad |b|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{N_b}{N}$

Эксперимент:

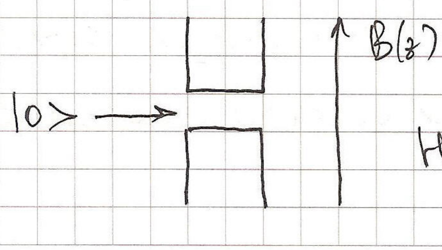


либо то, либо это.

$\hat{Z}$ $|0\rangle, |1\rangle$ — Пусть, для определённости, отклонился в $|0\rangle$

$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

$\hat{Z}|0\rangle = +1|0\rangle \qquad \mu_z = \mu_Б,\ S_z = \frac{1}{2}$ — магнетон Бора



классич.: $\vec{\mu}\vec{B} = 0$.

$H = \mu_Б \hat{X} B_x$, $B_x \equiv$ м-ца Паули

$\hat{X} = NOT$

$$\mathrm{NOT}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = +1,\ c_1 = c_2 = 1$; $\lambda = -1,\ c_1 = -c_2 = 1$

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |0\rangle + |1\rangle$$

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |0\rangle - |1\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} \langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1 \\ \langle + | - \rangle = 0 = \langle - | + \rangle \end{aligned}\right\} \text{ смеш.}$$

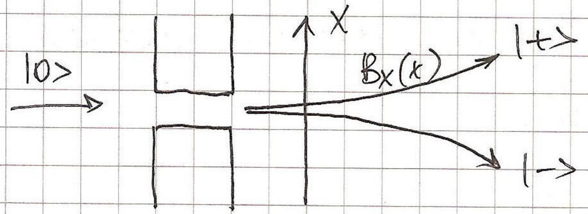
$$|\psi\rangle = |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi\rangle + |-\rangle\right)$$

Т.о., с вероятностью $\frac{1}{2}$ получим сост-е $|+\rangle$

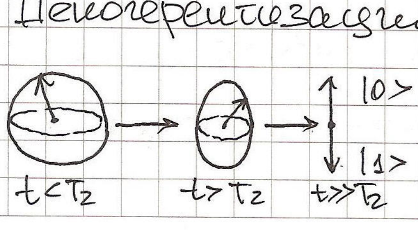
с вероятностью $\frac{1}{2}$ получим сост-е $|-\rangle$

Что это означает?

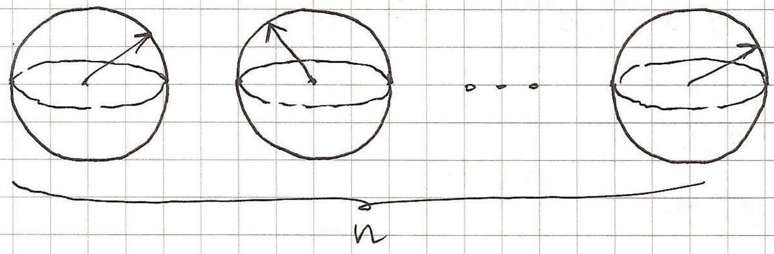


хотя, с точки зрения классической физики, $|0\rangle$ никуда отклоняться не должен! = Опровергается экспериментом: почему так происходит, никто не знает :(

Декогерентизация кубита:



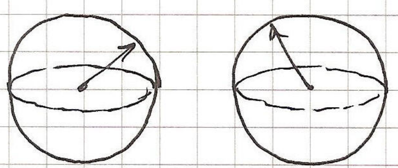
Безопасная передача квантовой информации ≡ ≡ невозможно НЕЗАМЕТНО слушать канал информации, т.к. измерения вносят необратимые изменения.



$n \simeq 10$

$n \sim 10^5$

Пусть регистр состоит из двух кубитов:



$|0\rangle \otimes |1\rangle = |0\rangle$

$|00\rangle$
$|11\rangle$
$|10\rangle$

$|0\rangle$ – 2 куб.
$|1\rangle$

n кубитов $\to 2^n$ баз. векторов.

В чём принципиальное отличие квантового кубита от классического? = В наличии суперпозиционных состояний.

$|\Psi\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle + c|01\rangle + d|10\rangle$

$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$; $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$.

Как узнать состояние первого кубита и к каким общим изменениям это приведёт?

как получить $\rightarrow \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes (a|0\rangle + c|1\rangle) + |1\rangle \otimes (d|0\rangle + b|1\rangle) \Leftrightarrow$$

нужно нормировать:

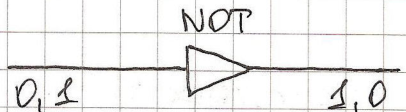
$$\Leftrightarrow \{u = \sqrt{|a|^2+|c|^2},\ v = \sqrt{|d|^2+|b|^2}\} =$$

$$= u|0\rangle \otimes \left(\frac{a|0\rangle + c|1\rangle}{u}\right) + v|1\rangle \otimes \left(\frac{d|0\rangle + b|1\rangle}{v}\right)$$

Теперь преобразовали вектор к виду, к которому непосредственно применяется постулат измерения:

$$|u|^2 \rightarrow |0\rangle \qquad |0\rangle, \quad |0\rangle \otimes \frac{a|0\rangle + c|1\rangle}{u} = \frac{a|00\rangle + c|01\rangle}{u}$$

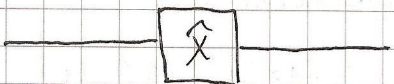
$$|v|^2 \rightarrow |1\rangle \qquad |1\rangle, \quad |1\rangle \otimes \frac{d|0\rangle + b|1\rangle}{v} = \frac{d|10\rangle + b|11\rangle}{v}$$

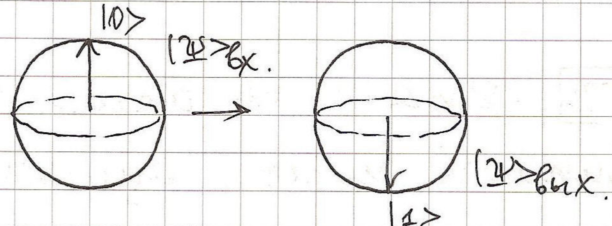


$$\hat{X} = NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

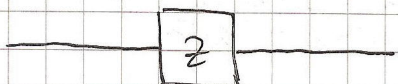
$$\hat{X} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

$$\hat{X}|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{X}|1\rangle = |0\rangle$$



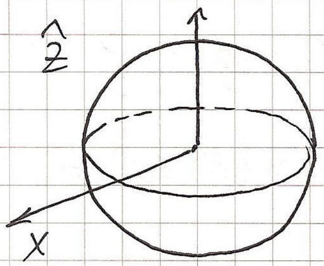


"Квантовые провода" ≡ линии, указывающие послед-ть квантовых операций, причём время измеряется слева направо.



$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

$$\hat{Z}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$



$\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt2}$

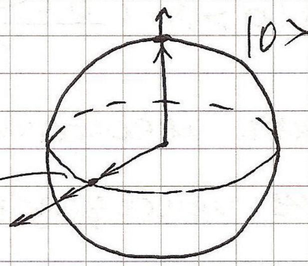
Оператор Адамара ≡

$\equiv H$ (Hadamar): $\hat H = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{\sqrt2}\big((|0\rangle+|1\rangle)\langle 0| +$

$+ (|0\rangle-|1\rangle)\langle 1|\big)$

$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt2}(|0\rangle+|1\rangle)$



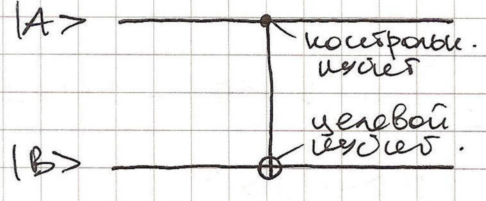
когда компьютер — $\frac{1}{\sqrt2}(|0\rangle+|1\rangle)$
стартует, все
кубиты переводятся
оператором Адамара в это сост-е.

Обратно: $H\frac{1}{\sqrt2}(|0\rangle+|1\rangle) = 0$

$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt2}(|0\rangle-|1\rangle)$

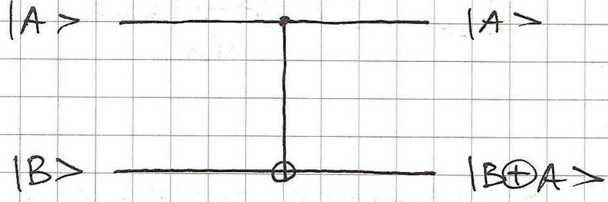
Множество однокубитовых операторов —
— континуум.

$\boxed{\text{Т:}}$ Для ∀ кв. алгоритма достаточно полного набора однокубит. операций и одного 2-кубитового оператора (для контроля ≡ CNOT), с помощью которых можно реализовать ∀ состояние кубита.



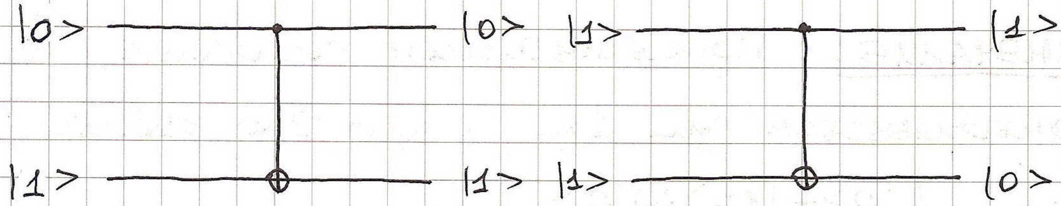
$CNOT = |1\rangle\langle 1| \otimes NOT +$
$+ |0\rangle\langle 0| \otimes \hat I$

$\hat I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$

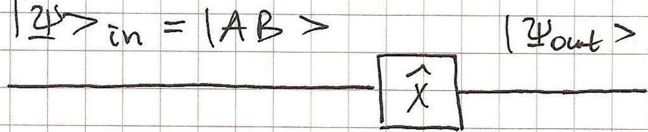


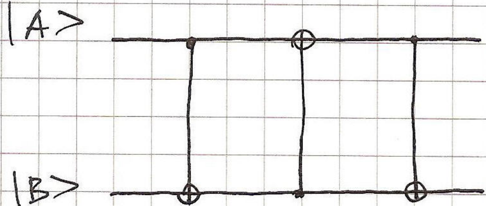
$|0\rangle \oplus |A\rangle = |A\rangle$

$|1\rangle \oplus |A\rangle = |1-A\rangle$



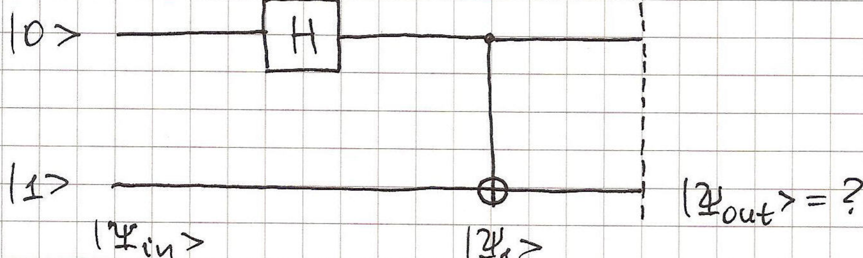
Для схемы:





 $\equiv$ обозн. опер-р измерения.

(1935г.) сост-я Эйнштейна-Подольского-
-Розенберга



$|\Psi_0\rangle = |00\rangle \qquad |\Psi_1\rangle = H|0\rangle = \dfrac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle = \dfrac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$

действие оп-ра CNOT: $|\Psi_{out}\rangle = \dfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$

(!) состояния Белла

Можно сгенерить ещё 3 похожих состояния.

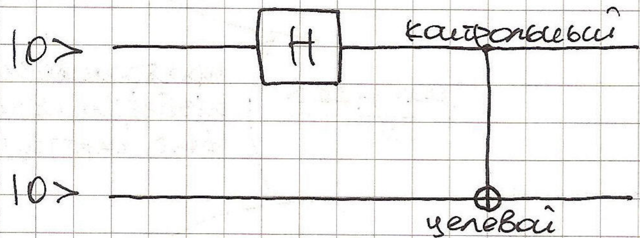
<u>ЗАМЕЧАНИЕ:</u> Промежуточное состояние $|\Psi_1\rangle$ факторизуется для 1го и для 2го кубита:

$|\Psi_1\rangle = \dfrac{(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle}{\sqrt{2}}$. Но конечное сост-е

$|\Psi_{out}\rangle$ <u>нельзя факторизовать</u> – такие сост-я наз. перепутанными.

18.04.07 — лекция N

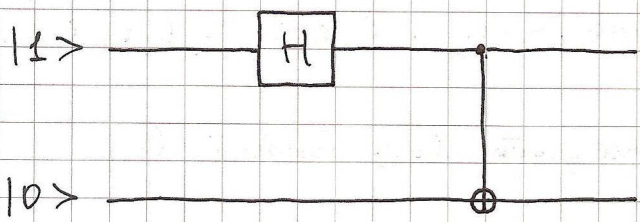
Перепутанные сост-я кубита.



$$\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$$

ЭПР ≡ Эйнштейн & Подольский & Розенберг

Получаем, что:



$$\frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\left\{\begin{matrix}|0\rangle \\ |1\rangle\end{matrix}\right\} \to \frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}\ ; \quad \left\{\begin{matrix}|1\rangle \\ |1\rangle\end{matrix}\right\} \to \frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}$$

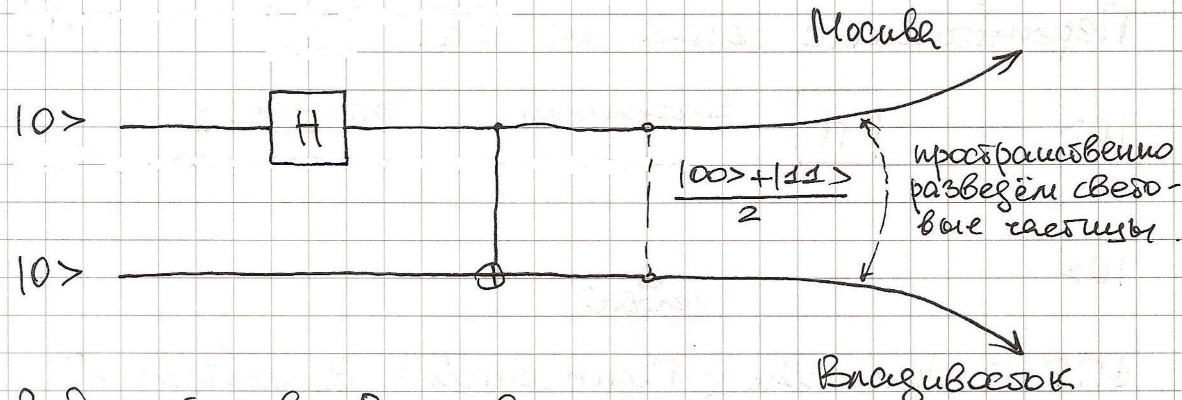
Белл: существуют ли квантовые объекты независимо от наблюдателя (1) или свойства объектов возникают только во время измерения (2).

Если неравенства Белла выполняются, то (1), иначе (2).

Экспериментально док-но, что НЕ выполняются.

$$|01\rangle - |00\rangle = |0\rangle \otimes (|1\rangle + |0\rangle).$$

Возьмём состояние : $|\Psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$



2ой кубит во Владивостоке:

с вер-тью $\frac{1}{2} \to |0\rangle$; с вер-тью $\frac{1}{2} \to |1\rangle$

↳ и т.д. → получ. след. ряд: 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1...

А если сначала измерить 1ый кубит в Москве:

с вер-тью $\frac{1}{2} \to |0\rangle$; с вер-тью $\frac{1}{2} \to |1\rangle$

по 2ому постулату изм-й: $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$

$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$

↳ Если в Москве измерение производится раньше, чем во Владивостоке, то результат изм-е в можно спрогнозировать с вероятностью 1! Хотя частицы никак не взаимодействуют. => Парадокс. Назыв-ся ПРОБЛЕМА НЕЛОКАЛЬНОСТИ квантовой механики.

Весь выигрыш кв. компьютеров – за счёт суперпозиционных состояний, в основном, перепутанных.

Плотное кодирование

С помощью 1 кубита можно передать 2 классических бита информации.

0 $|00>$

1 $|01> \to |01>$ $\qquad \log_2 4 = 2,$

2 $|10>$ $\qquad \log_2 1 = 0.$

3 $|11>$

Алгоритм Дойча: пусть им. два корреспондента: Боб и Алиса. Допустим, есть устройство, которое создаёт ЭПР-пары:

1-ый кубит сообщ. Бобу → 2 кубита →)
2-ой кубит сообщ. Алисе →

$$\rightarrow \boxed{\text{ЭПР парагем.}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00> + |11>\right)$$

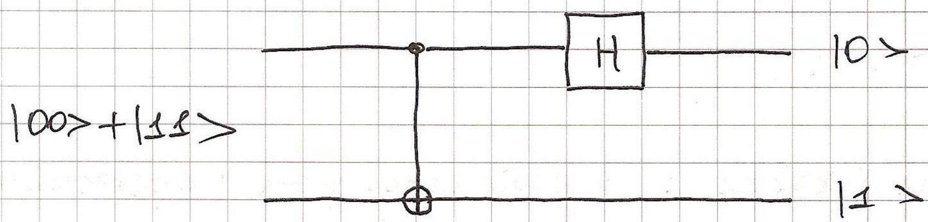
0, 1, 2, 3 – Кодировка.

Операции на стороне Боба:

0	$\hat{I}$	идентичность: $\lvert\Psi\rangle = \frac{\lvert 00\rangle + \lvert 11\rangle}{\sqrt{2}}$
1	$\hat{X}$	$\lvert\Psi_1\rangle = \frac{\lvert 10\rangle + \lvert 01\rangle}{\sqrt{2}}$
2	$\hat{Z}$	$\lvert\Psi_2\rangle = \frac{\lvert 00\rangle - \lvert 11\rangle}{\sqrt{2}}$
3	$\hat{X}\hat{Z}$	$\lvert\Psi_3\rangle = \frac{\lvert 11\rangle - \lvert 01\rangle}{\sqrt{2}}$
	Воз. 1 кубит	

Сост-я Белла

После кодирования, второй кубит передаётся Алисе. Производится декодирование с помощью схемы с оп-рами Адамара, но в обратную сторону:

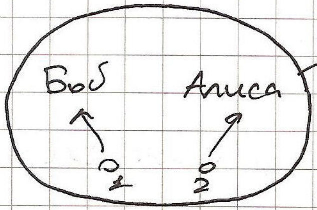


Алиса:

0	$\lvert\Psi_0\rangle$	$\lvert 00\rangle + \lvert 10\rangle$	$(\lvert 0\rangle + \lvert 1\rangle)\otimes\lvert 0\rangle$	00
1	$\lvert\Psi_1\rangle$	$\lvert 11\rangle + \lvert 01\rangle$	$(\lvert 1\rangle + \lvert 0\rangle)\otimes\lvert 1\rangle$	01
2	$\lvert\Psi_2\rangle$	$\lvert 00\rangle - \lvert 10\rangle$	$(\lvert 0\rangle - \lvert 1\rangle)\otimes\lvert 0\rangle$	10
3	$\lvert\Psi_3\rangle$	$\lvert 11\rangle - \lvert 01\rangle$	$(\lvert 1\rangle - \lvert 0\rangle)\otimes\lvert 1\rangle$	11
		после CNOT		преобр. Адамара

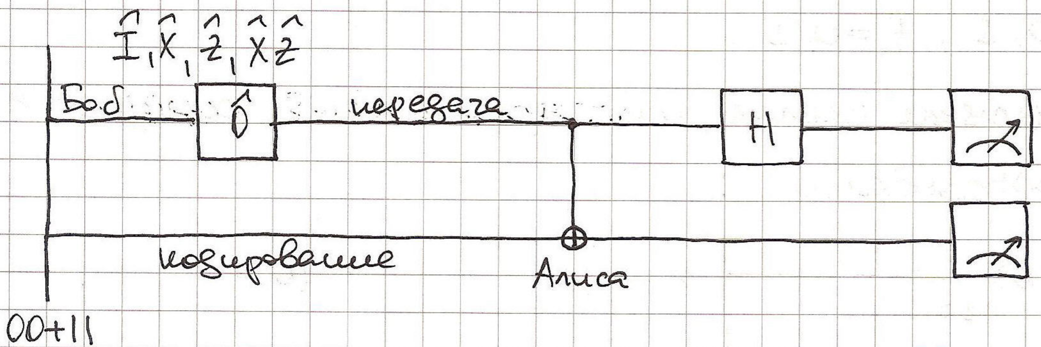
Эти сост-я уже явл-ся сепарабельными

$\Rightarrow$ Передан был 1 кубит, но 2 бита информации.

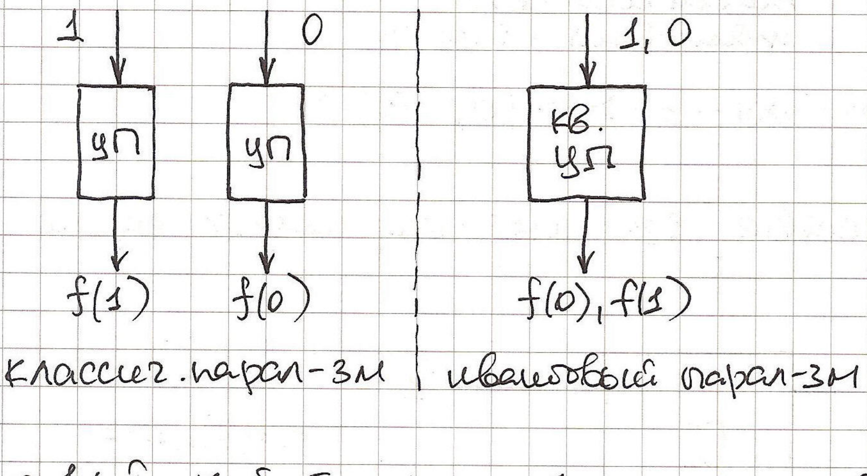


+ это — предварительное действие.

Схема квантового компьютера, который производит плотное кодирование:



Квантовый параллелизм



- 1ый кубит ≡ регистр данных (здесь записывается арг-т ф-ции) [обобщ. на n кубитов]

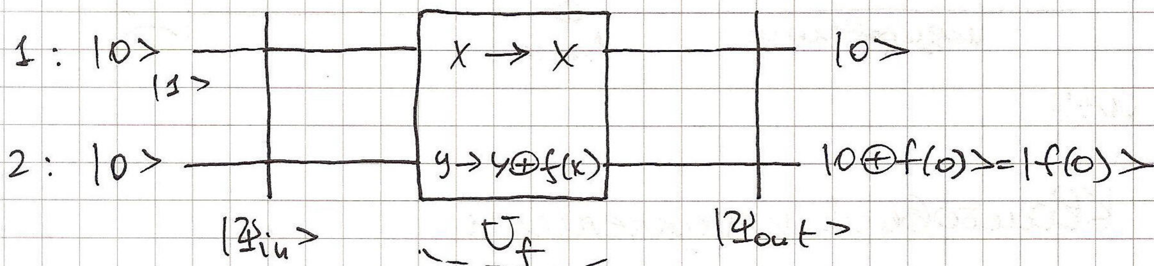
- 2ой кубит ≡ целевой регистр (здесь записывается зн-е ф-ции) [всегда состоит из 1 кубита]

Обозн. $|x, y\rangle \equiv$ входное состояние

Пусть есть логический вентиль, преобразующий $|x, y\rangle$ в $|x, y \oplus f(x)\rangle$, где f – заданная ф-ция, зн-е которой нужно выч-ть

$x = 0, 1$, $f = 0, 1$.

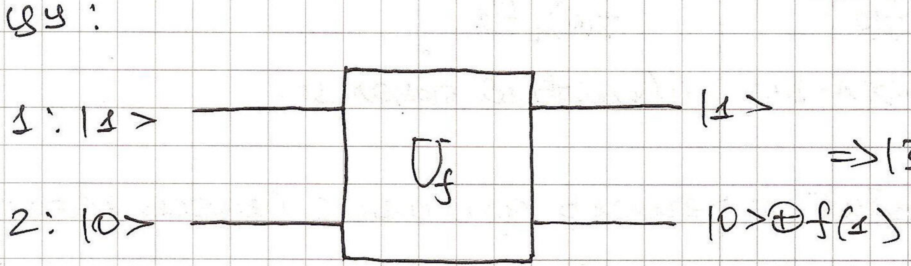
Нарисуем схему, кот. формально осущ-ет ф преобразование:



линейный двух-кубитовый кв. оп-р

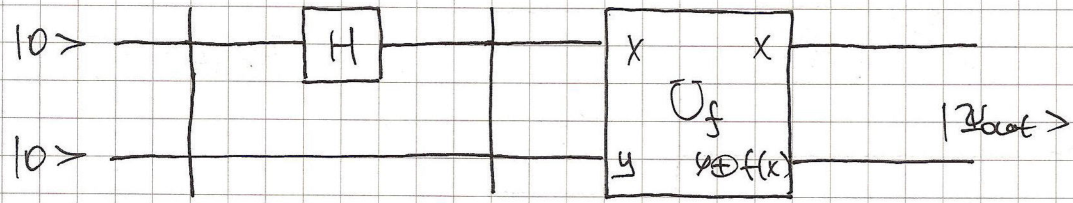
$|\Psi_{out}\rangle = |0\rangle \otimes |f(0)\rangle = |0, f(0)\rangle$

Если в качестве 1го кубита подать единицу:



$\Rightarrow |\Psi_{out}\rangle = |1, f(1)\rangle$

Вывод: когда на вход под-ся баз. состояния: 00 или 10, то такой процессор работает, как классический.



$|\Psi_0\rangle = |00\rangle$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$|00\rangle \xrightarrow{U_f} |0, f(0)\rangle$

$|10\rangle \xrightarrow[U_f]{} |1, f(1)\rangle$

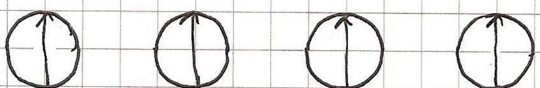
$$|\Psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0, f(0)\rangle + |1, f(1)\rangle\right)$$

$\frac{1}{2} \to |0, f(0)\rangle$

$\frac{1}{2} \to |1, f(1)\rangle$

информация теряется, как только мы сделаем измерение

Регистр данных:



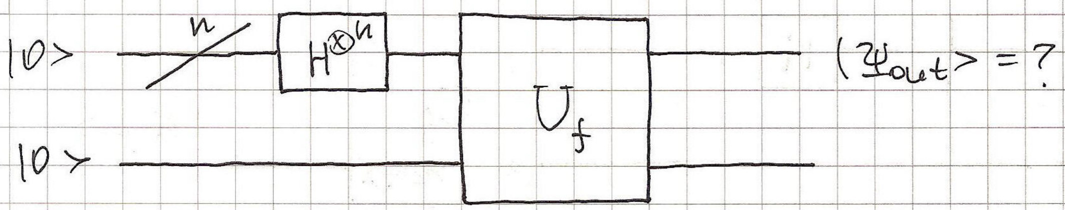
— n спинов.

$\underbrace{|0\rangle \quad |0\rangle \quad |0\rangle \quad |0\rangle}_{n \text{ кубитов}}$.

$|0\rangle$ ——/—— — 1-ой регистр
n кубитов

$|0\rangle$ ———— — 2-ой целевой регистр

$$|\Psi_0\rangle = (\underbrace{|0, 0, \ldots 0\rangle}_{n \text{ кубит}}) \otimes |0\rangle$$



$$H^{\otimes n} = (\underbrace{H \otimes H \otimes \ldots \otimes H}_{n})(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \ldots \otimes |0\rangle) =$$

$$= \left(\frac{(1+0)}{\sqrt{2}} \otimes \frac{(1+0)}{\sqrt{2}} \otimes \ldots \otimes \frac{(1+0)}{\sqrt{2}} \right) \otimes |0\rangle =$$

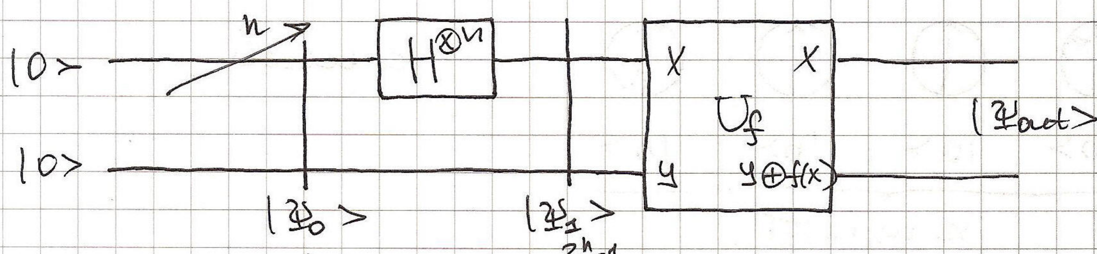
$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} (\underbrace{|00\ldots0\rangle}_{n} + \ldots + \underbrace{|111\ldots1\rangle}_{n}) \otimes |0\rangle$$

$$|x\rangle = |\overset{0}{x_0}, \overset{1}{x_1}, \ldots, x_{n-1}\rangle$$

$$x = x_{n-1} 2^{n-1} + x_{n-2} 2^{n-2} + \ldots + x_0 2^0$$

$$0 \le x \le 2^n - 1$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x, 0\rangle$$



$$|\Psi_{out}\rangle = U_f |\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x, |0\rangle \oplus |f(x)\rangle\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x, f(x)\rangle$$ => за 1 действие 2^n-1 зн-й ф-й.

Другие задачи для кв. компьют-ов:

- Задача факторизации больших чисел →

➤ Квантовое FFT [алгоритм Шора]

- Задача быстрого поиска в базах данных.
- Моделирование квантовых систем на квантовых компьютерах.

Исторически, первым был алгоритм, показ. возм-ть реш-я задач экспон. сложности на квантовых компьютерах ≡ алгоритм Дойча.

Задача Дойча: Алиса & Боб играют в игру:

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ x & \longrightarrow & f(x) \\ \odot & \longleftarrow & \end{array}$$

$\odot$ – м. быть два случая:

1) постоянная функция:

$$f(x) = \left[\begin{array}{l} 0, \text{ для всех } x, \\ 1, \text{ для всех } x. \end{array}\right.$$

2) сбалансированная: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{для половины} \\ 1, & \text{для др. половины} \end{cases}$

Боб выбирает тип функции: постоянная или сбалансированная. Алиса должна узнать, какой тип выбрал Боб.

Вопрос: сколько понадобится передать корреспонденции?

на классич. ком-ре	на квант. ком-ре
$\left(\frac{2^n}{2} + 1\right)$	за 1 опер-ю передачи

25.04.07. — лекция N

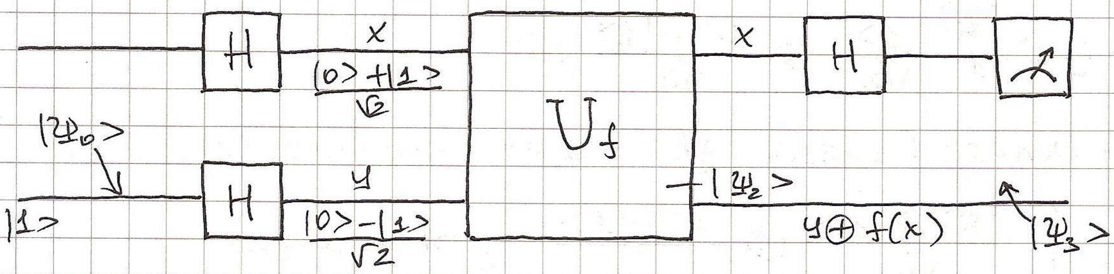
X 2^n чисел
$$f(x) = \begin{cases} \text{регулярная } f(x)=\{0 \vee 1\}\ \forall X, \\ \text{сбалан. } f(x)=0,\ f(x)=1. \end{cases}$$

Алиса Боб

X $\rightleftarrows$ f(x).

Алиса должна определить тип функции.

$\frac{2^n}{2}+1$ шагов. n = 1, 2, 0, 1.



$f_1(0)=0,\ f(1)=0$; $U_{f_1} = \hat{I} \otimes \hat{I}$

$f_2(0)=1,\ f_2(1)=1$; $U_{f_2} = \hat{I} \otimes NOT$

Если $f_3(x)$ — первый тип сбаланс. ф-ции, то этому типу соотв-ет $U_{f_3} = CNOT$. На зачёте будет предложено это проверить.

Рассм. конкретный случай:

$f_4(x) = NOT\,X$; $U_{f_4} = CNOT \cdot \hat{I} \otimes NOT$

$|\Psi_0\rangle = |01\rangle$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Есть удобная формула:

$$U_f\left[|x\rangle \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right] = (-1)^{f(x)}|x\rangle \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} -$$

– на первый взгляд странная фор-ла.

Исп-ем её:

$$U_f|\Psi_1\rangle = U_f\left(|x\rangle \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = (-1)^{f(x)}|x\rangle \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= (-1)^{f(x)}\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = (1)^{\overset{f(x)}{0}}\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} +$$

$$+ (-1)^{\overset{f(x)}{1}}\frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} =$$

складывается две части суперпозиции

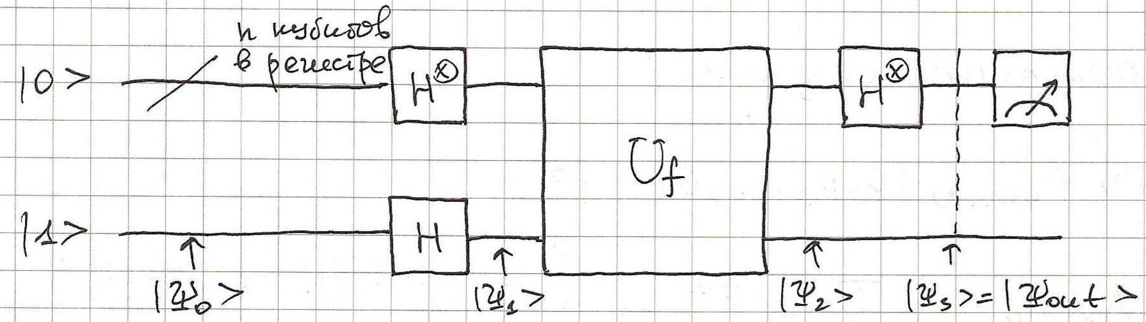
$$= \begin{cases} \dfrac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \dfrac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}, & \text{регулярн.} \\ \dfrac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \dfrac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}, & \text{сбаланс.} \end{cases}$$

$$|\Psi_3\rangle = \begin{cases} |0\rangle \otimes \dfrac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |1\rangle \otimes \dfrac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$|0\rangle$; f-пост. ф-я; $|1\rangle$, f-сбал. ф-я.

Квантовый компьютер, решающий задачу Дойча для $\forall$ кол-ва (n) кубитов:

[Этот алгоритм РЕАЛИЗОВАН на прототипе квантового компьютера]



Как этот кв. алгоритм реш. задачу Дойча за одно измерение?

$$|\Psi_0\rangle \underset{\uparrow}{} |0\rangle^{\otimes n} \otimes |1\rangle$$

произв-е n сост-й

После операции Адамара: $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum\limits_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$

$\langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle = 1.$

$H^{\otimes n}|x\rangle = ?$, где $|x\rangle = |\overset{0}{x}_0, \overset{1}{x}_1, \dots, \overset{0}{x}_{n-1}\rangle$

Формализуем эту запись, чтобы не запутаться:

$$H|x_i\rangle = \sum_{z_i=0,1}(-1)^{x_i z_i}\frac{|z_i\rangle}{\sqrt{2}} ;$$

$$|\Psi_3\rangle = H^{\otimes n}|\Psi_2\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1}\frac{H^{\otimes n}(-1)^{f(x)}|x\rangle}{\sqrt{2^n}} \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}}(-1)^{f(x)+x_0z_0+x_1z_1+\dots+x_{n-1}z_{n-1}}|z_0, z_1 \dots z_{n-1}\rangle \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} =$$

Получили выходное состояние $|\Psi_3\rangle = |\Psi_{out}\rangle$

Тип. функции опр-ся за одно измерение.

Выделим в поле сост-е $|00\dots0\rangle$, а всё →

остальное отделим:

$\ominus$ $A_{00\ldots0}|0,0,\ldots,0\rangle + |\Psi\rangle$;

$$A_{00\ldots0} = \frac{1}{2^n}\sum_{\substack{x\\0\ldots2^n-1}}(-1)^{f(x)} = \begin{cases} 1, & \lim f(x)=0, \text{пост.} \\ -1, & \lim f(x) = 1, \text{сбала.} \end{cases}$$

$|\Psi\rangle$ – добавка $=0$, т.к. происходит компенсация фаз.

$\langle \Psi_3, \Psi_3 \rangle = 1$

$\langle 00\ldots0|00\ldots0\rangle = 1.$

$\Rightarrow$ В случае пост.: $|\Psi_3\rangle = |\Psi_{out}\rangle =$

$= A_{00\ldots0}|00\ldots0\rangle\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ В случае сбалансир.:

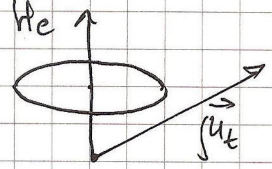
$A_{000} = 0$, $\lim f(x) +$ сбал.

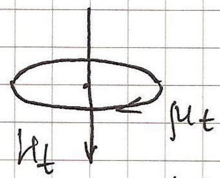
Итого, если при измерении получили все нули $\Rightarrow$ Боб выбрал постоянную функцию; если хотя бы одна 1-ца $\Rightarrow$ сбалансир.

Взаимная компенсация фаз существенно используется в алг-ме Шора, квантовом преобразовании Фурье.

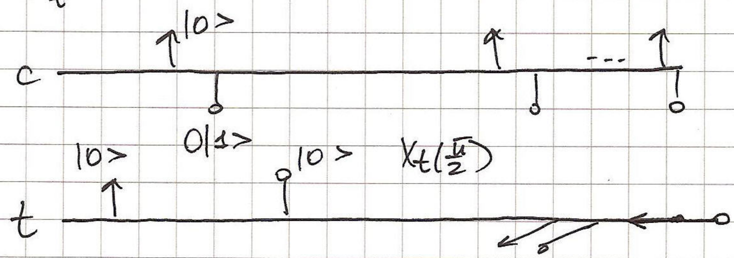
Двухкубитовые операции:

$$H = -\vec{\mu}_c \vec{\mu}_t$$





$$H = J\hat{Z}_c\hat{Z}_t$$



$X_t(0)$