Теоретический минимум по квантовой механике.

① Сформулировать постулаты квантовой механики

Первый постулат.

Любой объект микромира полностью характеризуется волновой функцией $\psi(\vec{r},t)$ (каждую физ. величину можно представить ...).

Второй постулат.

$\forall$ физ. величине классической физики соответствует оператор. В рез. измерения физ. величины F, предст. опер. $\hat{F}$, может получиться лишь одно из собств. значений F_m оператора $\hat{F}$.

Третий постулат.

При измерениях, осуществляемых над системой, находящейся в состоянии, определяемой волновой функцией $\psi(\vec{r},t)$,

$|\psi(\vec{r},t)^2|\,d\vec{r}$ задает вероятность нахождения в dr

(т.е. вероятность получить значение F_m физ. величины F равна квадрату модуля коэффиц. c_m разложения в. ф. $\psi(r,t)$ по собств. функц. оператора $\hat{F}$).

② Сформулировать принцип неопределенности.

Невозможно измерить одновременно импульс частицы и её местоположение со сколь угодно большой точностью.

$\boxed{\Delta p \cdot \Delta x = 2\pi\hbar}$ – соотн. неопр. Гейзенберга.

В $\forall$ момент времени нельзя определить p или x точнее, чем $\hbar$.

③ Сформул. принцип суперпозиции.

Если частица может находиться в состояниях $\psi_1(x,t)$, $\psi_2(x,t)$ – волн. функции, то она может как и в сост. $\psi(x,t) = c_1\psi_1(x,t) + c_2\psi_2(x,t)$.
при $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

$$\int |\psi(x,t)|^2 dx = 1.$$

④ Волновая функция задана в координатном представлении. Каков её физ. смысл?

Волновая функция (функция состояния) - комплексная функция, используемая для вероятного описания состояния квантомеханической системы.
(в шир. смысле - вектор. состояния).

Волн. функция:

$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$

формируется таким образом, что квадрат её модуля $|\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2$ представляет собой плотность вероятности (для дискретных спектров - просто вероятность) обнаружить систему в положении, описываемом координатами.

Набор координат, кот. выступают в роли аргументов функции, представл. собой полный набор физ. величин, которые можно измерить в системе.

Можно выбирать разные полные наборы, поэтому одна и та же волновая функция может быть записана от разных аргументов: коорд. представление, волн. представление, импульсное предст. и т. д.

⑤ Записать операторы координаты и импульса в координатном представлении. Какому правилу коммутации подчиняются эти операторы?

Вычислим ср. знач. координаты в момент вр. t:

$$\langle x_t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 x\,dx = \int \psi^* \hat{x} \psi\, dx$$

$\hat{x}$ - оператор сопост. x (это сама величина x)

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi\, dx$$

$[x, p] = i \cdot \hbar \neq 0$. → коммутируют

Оператор значения импульса:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{p} \psi \, dx.$$

$$\langle p \rangle_{\text{де Бройль}} = |A|^2 \int e^{-ikx} p \cdot e^{ikx} dx = \{ \langle p \rangle = p = \hbar k \} =$$

$$= |A|^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) e^{ikx} dx = \hbar k$$

$\boxed{\hat{p} = -i\hbar \nabla}$ – оператор импульса в 3D случае.

Свойства:

– линейное

– эрмитово: $\int \psi_1^* \hat{A} \psi_2 \, dx = \int (A \psi_1)^* \psi_2 \, dx$.

Для эрм. операторов среднее значение действительное.

6 Как в координатном построить оператор физической величины, где x – координата, а p – импульс частицы?

$\forall$ физ. величине классической физики соответствует оператор. Значение этой величины, измеряемой в эксперименте, соотв. среднее значение оператора.

$\vec{r}, \vec{p}$ x; $p_x = p$; $U(x) = mgx$

$f(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x)$

$$\boxed{f(\vec{r}, \vec{p}, t) \rightarrow f(\vec{r}, \hat{\vec{p}}, t).}$$

7 Как, зная волновую функцию, вычислить среднее значение какой-либо физ. величины.

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{\psi^*} \hat{A} \psi \, d\vec{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 * A * dA$$

$d\vec{r} = dxdydz$

8. Как, зная волновую функцию, вычислить вероятность какого-либо результата измерения физ. величины.

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

физ. вел.

возвести в квадрат

$$\int |\psi(x,t)|^2$$

9. Сформ. условие измеримости (одновременной) двух физ. величин. Какие пары из величин одновременно измеримы? (операторы проекции момента импульса).

Если операторы величин коммутируют, то они могут быть измерены одновременно.

(Некоммут $AB \neq BA$).

L^2 и L_z

$$\hat{L}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y$$

$$\hat{L}_y = z\hat{p}_x - x\cdot\hat{p}_z$$

10 Записать стационарное и нестационарное уравнения Шредингера. Дать определение стационарного состояния в кв. мех.

Сост. квантовой системы наз. <u>стационарным</u>, если гамильтониан этой системы не зависит от времени.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m}$$

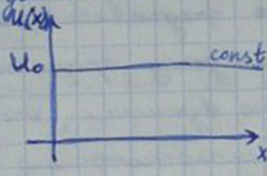
$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi}$$ – у-е Шредингера.

$$H = H(\vec{r}, \vec{p})$$

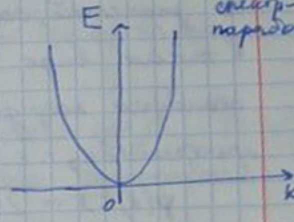
$$\boxed{\hat{H}\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})}$$ – стац. уравн. Шредингера

11 Приведите примеры движения частицы с непрерывным, дискретным и зонным энергетическим спектром. Каковы условия реализации того или иного типа спектра?

<u>Непрерывный спектр</u>: инфинитное движение – свободное, ничем не ограниченное движение. В соотв с стационарным ур. Шредингера



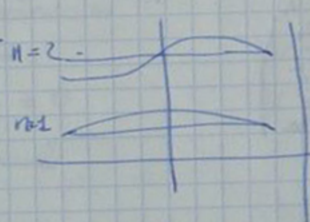
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$



спектр-парабола.

<u>Дискретный спектр</u>:

Финитное движение.



$$\psi\left(\frac{a}{2}\right) = \psi\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\psi_I = C \cdot e^{\pm ikx}$$

$$\psi_{II} = \psi_{III} = 0.$$

Зонный спектр:

12 Какие значения могут принимать результаты измерения физ. величин?

13 Перейдите от волновой к матричной формулир. в кв.

$\forall$ функция может быть представлена как таблица из её значений, соотв. каждому аргументу. Представляя в таком виде волновую функцию, она становится столбцом координат бесконечномерного вектора в Гильб. пространстве, т. е. матрицей.

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n(t) \cdot \varphi_n(t)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

постр. Ж форму $\rightarrow$ Матрица

(14) Запишите операторы спина, их собственные векторы и собств. значения.

Спин – внутренняя хар-ка частицы в кв. мех.

$\vec{S}$

$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$; $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$; $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

σ_z : $S_z = +\frac{\hbar}{2}$.

1) $\boxed{\begin{matrix} \lambda = 1 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 0. \end{matrix}}$ $|\psi_+\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\lambda = -1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ $S_z = -\frac{\hbar}{2}$; $|\varphi_-\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

2 базовых состояния у спина: $\frac{\hbar}{2}$ ↑ $|0\rangle$; $-\frac{\hbar}{2}$ ↓ $|1\rangle$.

(15) Что такое кубит? В чём отличие кубита от классического бита?

Кубит – квантовый бит для хранения информации в квантовом компьютере.

Бывает в двух состояниях (как и бит 0/1 $|0\rangle$ и $|1\rangle$), но в отличие от кубита допускается суперпозиция этих состояний.

$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$ $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

т. е. более информативн.

(16) Как отобразить произвольное состояние на Блоховской сфере? Что такое операторы поворота вектора Блока?

$|\Lambda| = 1$

$\Lambda_x = \sin\theta\cos\varphi$

$\Lambda_y = \sin\theta\sin\varphi$

$\Lambda_z = \cos\theta$

$|\psi\rangle \to \theta,\ \varphi,\ |0\rangle,\ |1\rangle$

$|a|^2 + |b|^2 = 1$

$|a|^2 - |b|^2 = \cos\theta$

$|a| = \cos\frac{\theta}{2}$

$|b| = \sin\frac{\theta}{2}.$

$$\boxed{|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle}$$ ← представл. кубита на блоховской сфере.

Операторы поворота:

$R_x(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\cdot\hat{I} - i\cdot\sin\frac{\theta}{2}\hat{X}$

$R_y(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\cdot\hat{I} - i\cdot\sin\frac{\theta}{2}\hat{Y}$

$R_z(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\cdot\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{Z}.$

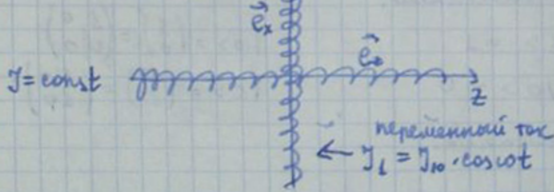
$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x$

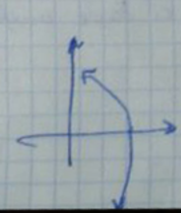
$\hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y$

$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(17) Как экспериментально осуществляются повороты вектора Блока?



2 вектора вращ. в противоположн направлении.



(18) В чём разница между чистым и смешанным состоянии кубита? Что такое матрица плотности кубита?

Чистое - для которого можно опр. волн. функцию или вектор-состояние.

Смешанное - влияет окруж. среда (атом взаим. с окр.).

Чистое : либо $|0\rangle$; 100% ; либо $|1\rangle$ - 100%

Смешанное: $|0\rangle$ - 90% ; $|1\rangle$ - 10%, т.е. одно сост. может приним. как бы 2 значения.

Матрица плотности кубита:

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

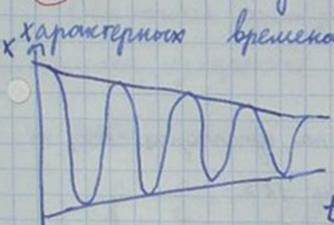
a, b - коэфф. базисных состояний. | вероятности, с которыми получаются $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

$\rho_{00} = a*a$; $\rho_{11} = b*b$

$\rho_{01} = b*a$; $\rho_{10} = b*a$

$$\begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}$$

(19) Что такое декогеренция кубита? На каких характерных временах она происходит?



$t \sim \frac{1}{\gamma}$ Время забывания фазы - декогеренции (будут вынужден. колебания, не помнящие первонач. фазы)

Аналогичный вывод для кубитов. Только со спином.

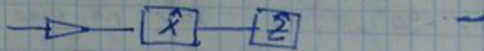
T_2 - время декогерент. кубита.

тв. тело $T_2 \sim 10^{-10}$ секунды

(20) Что такое квантовая схема и квантовые вычисления? Приведите примеры квантовых вентилей и квантовых схем.

Квантовая схема — послед. функц. преобразований из конечного набора (базисных) сост.

Вентили



$\hat{X}$, $\hat{Z}$ — операторы поворота Блоховского вектора

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

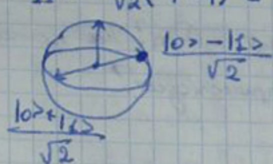
$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

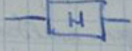
$$\hat{Z} \cdot \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

H — однокубитовый оператор Адамара

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|\right]$$

суперп. сост. — повернутый кубит



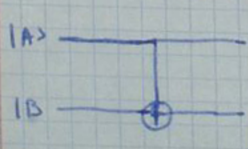


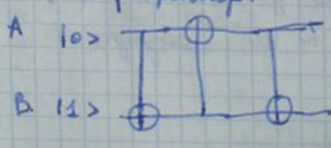
если подейст. H на суперпозиц. сост, то получим $|0\rangle$ или $|1\rangle$

$H|0\rangle$ в x $\quad \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$

$H|1\rangle$ в $-x$ $\quad \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

$\oplus$ CNOT. | пример.

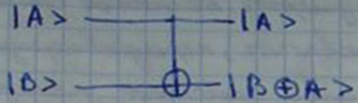




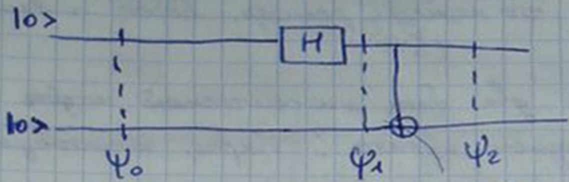
$\psi_0 = |01\rangle$

[γ] контр. регистр данных (заканч. кв. схему)

[γ] целевой оператор измерения



$\boxed{CNOT}$



$$|\psi_0\rangle = |00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\psi_1 = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

$$\psi_2 = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

(21) Какие операторы нужны для реализации ∀ алгоритма на кв. компе. Примеры.

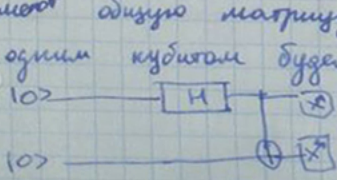
Совокупность однокубитовых {CNOT и поворота-ых много} Адамара, измерения
(CNOT → двухкубитовый)

CNOT, H.

$\hat{X}$, $\hat{Z}$, CNOT, H, γ ...

(22) Что такое перепутанное сост. кубитов? Приведите кв. схему, генерирующую ЭПР-пары (Базис Бэлла)

Если 2 кубита перепутать, то они неразличимы и имеют общую матрицу плотности — т. е. оперируя с одним кубитом будем опер. и с другим



(рез. первого зависит от сост. второго)

23. Почему возможна передача инфо по квантовому каналу без риска её неконтролир. перехвата.

Нельзя никаким образом измерить квантовое состояние. Если Eve попытается перехватить, передаваемую по квантовым каналам, то она изменит поляризацию передав. фотонов, что немедл. регистр. Бобом и Алисой

24. Как передать два бита классической инфы путём передачи одного кубита? Нарис. квантовую схему, осущ. эту передачу.

Базис Бэлла:

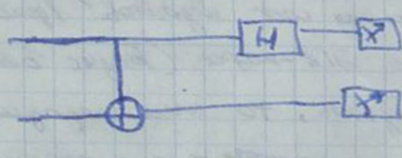
$$\frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

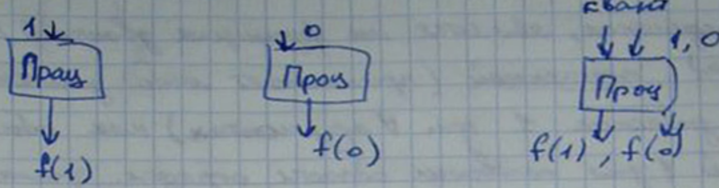
$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

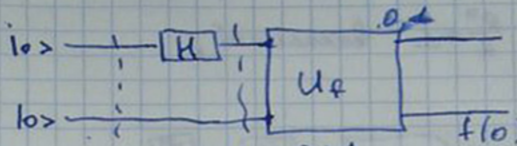
00 + 11	00
01 + 01	01
01 − 10	10
00 + 11	11



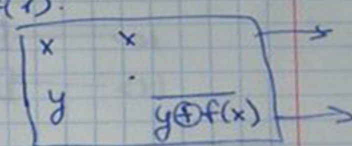
(25) Что такое квантовый параллелизм? В чём отличие от классич. параллелизма. Приведите кв. схему, реализующую квант. параллельное вычисление.

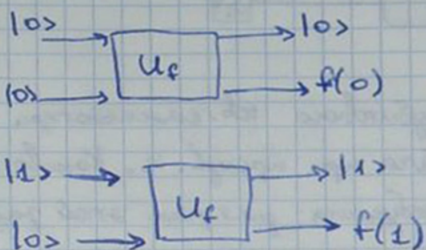
класс:





$\varphi_0 = |00\rangle$ $\psi_1 = |\frac{0+1}{\sqrt{2}}$

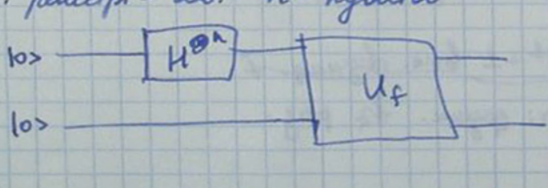




(26) Что такое квантовый компьютер? Как записать различные числа в рег. данных квант. компа?

Выч. устройство, использующее кв. мех. эффекты, напр. кв. параллелизм

Кв. регистр — сов. n-кубитов

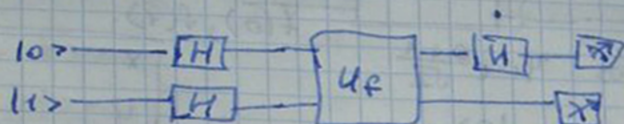


27 Что такое задача Дойча (для чисел)? Приведите схему 2-х кубитового кв. компа, который решает задачу Дойча при $n=1$ и опиши алг. решения.

Определения, является ли функция двоичной переменной $f(n)$ <u>постоянной</u> (принимает либо значение 0, либо значение 1 при $\forall$ аргументах) или сбалансированной (для половины области определ. приним. 0, для другой 1).

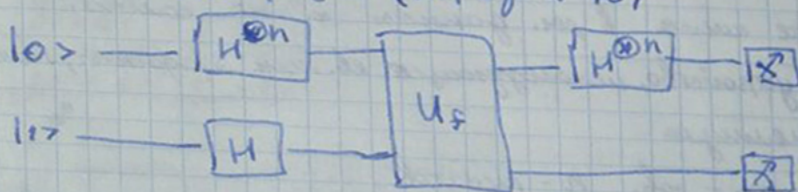
$\frac{2^n}{2}+1$ вычислений.

$n=1$: $\frac{2^1}{2}+1=2$



28 Приведите схему n-кубитового кв. компьютера на кот. реш задача Дойча при произв. n. Каково по порядку число операций, требуемых для реш. этой зад на кв. компе? Сравнить со случаем класс. компьютера.

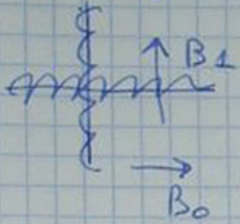
2^n - чисел, n-операций (порядка n)



Класс алг. <u>$2^{n-1}+1$ выч. функц. f</u>

Кв. алг. одна выч. функ. 1 раз.

29 Как экспериментально реализ. CNOT и ал. Дойча на двухкуб. спиновом кв. компьютере.



+ длинная формула.