Теоретический минимум по квантовой информатике

Список вопросов и ответов на них. Только здесь и только по физике :)

1 Сформулировать постулаты квантовой механики

1. Любой микрообъект полностью характеризуется заданием своей волновой функции $\psi(\vec{r}, t)$
2. $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ есть плотность вероятности обнаружить частицу в точке $\vec{r}$ в момент времени t, то есть $\psi(\vec{r}, t)$ — волна вероятности
3. Каждой физической величине соответствует оператор, а его среднему значению соответствует среднее значение физической величины, получаемой в эксперименте

2 Сформулировать принцип неопределенности

Невозможно измерить одновременно импульс частицы и ее координаты со сколь угодно большой точностью.

Есть соотношение Гейзенберга: $\triangle p \triangle x = 2\pi\hbar$, из которого можно получить, что если мы знаем импульс: $\triangle p = 0$, то совершенно неизвестна координата: $\triangle x = \infty$, и наоборот. Такие дела...

3 Сформулировать принцип суперпозиции

Если микрообъект может находиться в состоянии с волновой функцией $\psi_1(x, t)$ и может находиться в состоянии с волновой функцией $\psi_2(x, t)$, то он может находиться в суперпозиционном состоянии с волновой функцией $\psi(x, t) = c_1\psi_1(x, t) + c_2\psi_2(x, t)$.

4 Волновая функция задана в координатном представлении. Каков ее физический смысл?

Волновая функция — комплекснозначная функция, используемая в квантовой механике для описания состояний квантовомеханической системы. Физический смысл волновой функции заключается в том, что, согласно копенгагенской интерпретации квантовой механики, плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства в данный момент времени считается равной квадрату абсолютного значения волновой функции этого состояния.

В координатном представлении волновая функция $\Psi(x_1, \ldots, x_n, t)$ зависит от координат (или обобщённых координат) системы. Физический смысл приписывается квадрату её модуля $|\Psi(x_1, \ldots, x_n, t)|^2$, который интерпретируется как плотность вероятности (для дискретных спектров — просто вероятность) обнаружить систему в положении, описываемом координатами $x_1, \ldots, x_n$ в момент времени t.

По материалам Википедии

5 Записать операторы координаты и импульса в координатном представлении. Какому правилу коммутации подчиняются эти операторы?

Согласно третьему (или второму?) постулату квантовой механики, каждой физической величине соответствует оператор. Оператор действует на записанную после него волновую функцию.

Оператор координаты является простейшим оператором. Он заключается в умножении волновой функции на соответсвующую координату: $\hat{X} \equiv x$, то есть $\hat{X}\psi = x\psi$. Среднее значение этого оператора есть математическое ожидание для координаты частицы:

$$\langle \hat{X} \rangle_t = \int |\psi(x,t)|^2 x dx = \int \psi^*(x,t) x \psi(x,t) dx.$$

В одномерном случае оператор импульса $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, а в жизни, в трехмерном случае $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$, где ∇ — оператор Лапласа:

$$\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Операторы обладают такими свойствами:

- они линейны
- они эрмитовы, то есть $\int \psi_1^* \hat{A} \psi_2 d\vec{r} = \int (\hat{A}\psi_1)^* \psi_2 d\vec{r}$

Оператор координаты и оператор импульса не коммутируют!

6 Как в координатном представлении построить оператор физической величины, задаваемой функцией $F(\vec{r}, \vec{p}, t)$, где $\vec{r}$ — координата, а $\vec{p}$ — импульс частицы?

Для нахождения операторов остальных функций воспользуемся принципом, заключающемся в том, что отношения между операторами повторяют отношения между величинами в классической физике. А в классической физике любая физическая величина выражается через координаты, импульс и время:

$$F(\vec{r}, \vec{p}, t) \Longrightarrow F(\vec{r}, \hat{\vec{p}}, t).$$

7 Как, зная волновую функцию, вычислить среднее значение какой-либо физической величины?

Для требуемой физической величины A нужно написать оператор $\hat{A}$, тогда среднее значение $\langle A \rangle$ равно среднему значению оператора $\langle \hat{A} \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi d\vec{r}$

8 Как, зная волновую функцию, вычислить вероятность какого-либо результата измерения физической величины A?

Какие значения может принимать физическая величина A? Нужно поставить задачу на собственные значения оператора $\hat{A}$, соответствующего этой величине. Решив её, получим спектр собственных значений A_n и соответствующие собственные функции ϕ_n. Набор этот полон, то есть любую волновую функцию можно разложить

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(\vec{r}).$$

Набор чисел A_n дает набор возможных значений величины A, причем принимать она их будет с вероятностями $|c_n(t)|^2$.

9 Сформулировать условие одновременной измеримости двух физических величин A и B. Какие пары из величин x, y, p_x, p_y, L_x, L_y одновременно измеримы? (L_x, L_y — операторы проекции момента импульса)

Совместные величины — величины, которые можно одновременно измерить, или, что то же самое, у их операторов одинаковый набор собственных функций.

Доказывается, что если две величины совместны, то их операторы коммутируют, и наоборот.

Про совместность указанных величин ничего пока не нашел :(

10 Какие значения могут принимать результаты измерения физической величины A?

Какие значения может принимать физическая величина A? Нужно поставить задачу на собственные значения оператора $\hat{A}$, соответствующего этой величине. Решив её, получим спектр собственных значений A_n и соответствующие собственные функции ϕ_n. Набор этот полон, то есть любую волновую функцию можно разложить

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_n c_n(t)\phi_n(\vec{r}).$$

Набор чисел A_n дает набор возможных значений величины A, причем принимать она их будет с вероятностями $|c_n(t)|^2$.

NB Кажется, это где-то уже было...

11 Дать определение стационарного состояния в квантовой механике. Записать стационарное и нестационарное уравнение Шредингера

Система называется стационарной, если её гамильтониан $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r},t)$ не зависит от времени. Соответственно, оператор Гамильтона, в общем случае, зависит от координат и времени $\hat{H} = \hat{H}(\vec{r},t)$, а для стационарной системы только от координат $\hat{H} = \hat{H}(\vec{r})$.

Ёеликоеўравнение Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi,$$

где $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Если система стационарна, то $\psi(\vec{r},t) = f(t)\phi(\vec{r})$, и уравнение Шредингера приобретает вид

$$\hat{H}\phi = E\phi$$

12 Приведите примеры движений частицы с непрерывным, дискретным и зонным энергетическим спектром. Каковы условия реализации того или иного типа спектра?

13 Перейдите от волновой к матричной формулировке квантовой механики

14 Запишите операторы спина, их собственные векторы и собственные значения

15 Что такое кубит? В чем отличие кубита от классического бита?

Кубит — квантовая система с двумя базисными состояниями $|0\rangle$ и $|1\rangle$, которая может находиться в произвольном суперпозиционном состоянии $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, причем $|a|^2 + |b|^2 = 1$. В этом и есть главное отличие кубита от *клабита*[1]: бит может принимать два значения, а кубит — находиться во многих состояниях. Поэтому в регистре, состоящем из n кубитов, можно одновременно записать 2^n чисел, в то время как в классическом — только одно.

16 Как отобразить произвольное состояние кубита на блоховской сфере? Что такое операторы поворота вектора Блоха?

Любое состояние $|\psi\rangle$ можно отобразить на единичной сфере Блоха. Итак, имеем $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$. Возьмем и посчитаем чиселки $\lambda_z = a^*a - b^*b, \lambda_x = b^*a + a^*b, i(a^*b - b^*a)$. Видно, что $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$. Значит, можно задать два угла θ и ϕ. Тогда $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$.

Чтобы вращать наши векторы есть операторы вращений:

- $R_x(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{x}$
- $R_x(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{y}$
- $R_x(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\hat{z}$

[1] классического бита

Причем,

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

17 Как экспериментально осуществляются повороты вектора Блоха?

18 Сформулируйте постулат измерения в квантовой механике. Рассмотрите пример измерения кубита

Есть два замечательных, ни откуда не следующих постулата измерений:

1. после измерения кубита мы получаем $|0\rangle$ с вероятностью $\frac{1}{2}$ и $|1\rangle$ с вероятностью $\frac{1}{2}$!
2. после измерения кубит остается в состоянии $|0\rangle$ или $|1\rangle$ до следующего измерения

Пример — после :(

19 В чем разница между чистым и смешанным состояниями кубита? Что такое матрица плотности кубита?

В идеале состояние системы определяется вектором $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|0\rangle$. Это чистое состояние. Но в действительности, коэффициенты a, b случайны, так как зависят от уймы внешних факторов — за ними не усмотреть. Получаем смешанную систему, которая находится в разных состояниях с какими-то вероятностями. Для описания смешанных состояний кубита используют матрицу плотности. Из уравнения Шредингера что-то, как-то выводится... и получаем матрицу плотности

$$\begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}, \rho_{00} = a^*a, \rho_{01} = b^*a, \rho_{10} = a^*b, \rho_{11} = b^*b.$$

20 Что такое декогеренция кубита? На каких характерных временах она происходит?

Из-за влияния посторонних факторов колебания спина кубита(?) затухают. Возникает декогеренция кубита — нарушается когерентность системы :(Характерное время $T_2 \sim 10^{-10}$.

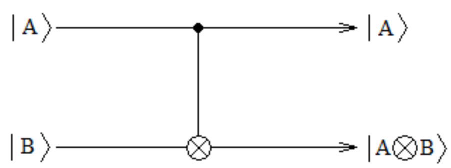
Кстати, это значит, что вычисления нужно проводить за время $t_{comp} < T_2$.

NB Блоховская сфера тоже деградирует и из сферы превращается в отрезок. Так-то...

21 Что такое квантовая схема и квантовые вычисления? Приведите примеры квантовых вентилей и квантовых схем

Квантовые вычисления проводятся на квантовых компьютерах, которые работают по квантовым схемам. Как-то так. Р̈аботают пойли р̈аботают нӓ– тот еще вопрос. Схема реализует какой-то квантовый алгоритм. Показано, что для реализации любого алгоритма достаточно иметь все однокубитовые операторы и один двухкубитовый $CNOT$.

1. Оператор $\hat{X}$, отрицание, фактически. $\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ или $\hat{X} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$
2. Оператор $\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ или $\hat{X} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$
3. Оператор Адамара $\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ или $\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}((|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle + |1\rangle)\langle 1|)$
4. Оператор $CNOT$, контролируемое HE.



Пример схемы — алгоритм Дойча(?!).

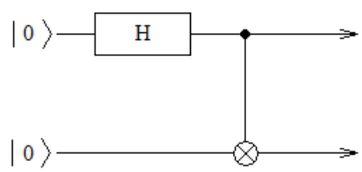
22 Какие операторы нужны для реализации любого алгоритма на квантовом компьютере? Приведите примеры однокубитовых и двухкубитовых операторов

Черт возьми! Простите, дамы! Только что спрашивали!

23 Что такое перепутанные состояния кубитов? Приведите квантовую схему, генерирующую ЭПР-пары (базис Бэлла)

Перепутанные состояния кубитов. Явление!.. Суть его в том, что есть два кубита[2] $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$, а мы их разделяем в пространстве, а потом, измеряя состояние первого, с вероятностью 1 знаем состояние второго.

Приведенная ниже схема генерирует состояние Бэлла $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$:



24 Почему возможна передача информации по квантовому каналу без риска ее неконтролируемого перехвата?

Почему, почему?! Потому что если мы возьмем и что-нибудь перехватим, то, значит, мы что-нибудь измерим. А как только мы что-нибудь[3] измерили — все испортилось, и абоненты все заметят :-P

25 Как передать два бита классической информации путем передачи одного кубита? Нарисуйте квантовую схему, с помощью которой эта передача осуществляется

Нужно: передать $00, 01, 10$ либо 11 по квантовому каналу. Генерируется сначала $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$, первый кубит отдается Алисе, второй — Бобу[4]. Алиса преобразовывет свой кубит посылает его Бобу, который декодирует сообщение с помощью $CNOT$, потом берет оператор Адамара, и все получается!

---

[2] ЭПР-пара?

[3] обязательно квантовое

[4] да-да-да, так издревле повелось, что Алиса и Боб передают сообщения друг другу... Ну, вы были на лекциях?

Как Алиса преобразовывает свой кубит? А вот так[5]!

$$\hat{I} : |\phi_0\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

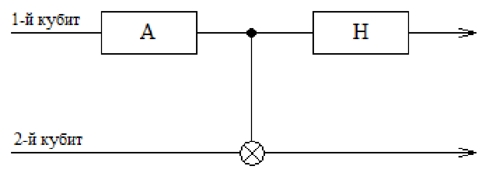
$$\hat{X} : |\phi_1\rangle = \frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{Z} : |\phi_2\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{Z}\hat{X} : |\phi_0\rangle = \frac{|10\rangle - |01\rangle}{\sqrt{2}}$$

.

Схема, вот она:



26 Что такое квантовый параллелизм? В чем его отличие от классического параллелизма? Приведите квантовую схему, реализующую квантовое параллельное вычисление

Квантовый параллелизм — фундаментальное свойство квантовых вычислений. Оно позволяет квантовым компьютерам вычислять функцию $f(x)$ для различных x одновременно.

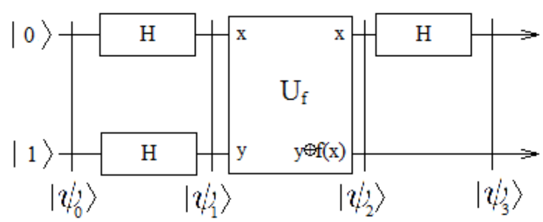
[5] «а вот так» — одна из любимых фразочек С.И. Гурова :)

27 Что такое квантовый компьютер? Как записать 2^n различных n-разрядных целых чисел от 0 до $2^n - 1$ в регистре данных квантового компьютера, состоящем из n кубитов?

28 Что такое задача Дойча (для 2^n чисел)? Приведите схему двухкубитового квантового компьютера, на котором решается задача Дойча при $n = 1$ и опишите алгоритм решения

Задача Дойча: является ли булевская функция $f(x)$, $0 \geq x \geq 2^n - 1$, постоянной или сбалансированной (то есть на половине наборов x функция $f(x) = 0$, а на другой — $f(x) = 1$).

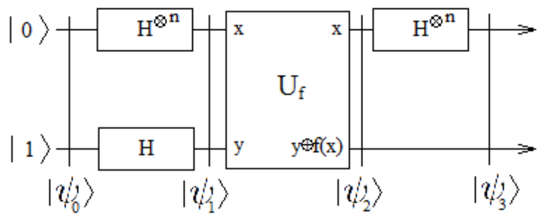
Квантовый компьютер, как и просили:



Работает так. $|\psi_0\rangle = |01\rangle$. После прохождения операторов Адамара получается *хитрая* комбинация $|\psi_1\rangle = \frac{|10\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|10\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$. Потом, если аккуратно расписать, получим, что
либо $|\psi_3\rangle = |0\rangle \otimes \frac{|10\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$, и $\Rightarrow f = const$,
либо $|\psi_3\rangle = |1\rangle \otimes \frac{|10\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$, и $\Rightarrow f$ — сбалансирована.

29 Приведите схему n-кубитового квантового компьютера, на котором решается задача Дойча при произвольном n и опишите алгоритм решения. Каково по порядку число операций, требуемых для решения этой задачи Дойча на квантовом компьютере? Сравнить со случаем классического компьютера

Почти все то же самое. Схема почти ничем не отличается:



Как работает — лучше пока не спрашивать...

В классике нужно $2^{n-1}+1$ раз вычислить функцию, в квантовом — всего n. Вот такой экспоненциальный выигрыш.

30 Как получаются экспоненциально большие выигрыши в памяти и числе операций в квантовом компьютере? Как решается проблема измерения выходного состояния в квантовых алгоритмах (на примере алгоритма Дойча)?

Смиренный игумен Пафнутий руку приложил