Ю. С. ОСИПОВ, Ф. П. ВАСИЛЬЕВ, М. М. ПОТАПОВ,

ОСНОВЫ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Рекомендовано Министерством
общего и профессионального образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
«Прикладная математика».

Издательство
Московского университета
1999

УДК 530.145
ББК 22.311
О 60

Рецензенты:

кафедра математической физики ВМК МГУ,
проф. М. С. Никольский, МИАН им. В. А. Стеклова

Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.

О 60 Основы метода динамической регуляризации. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 237 с.
ISBN 5-211-04085-6

Книга написана на основе курса лекций, читаемого авторами на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ. Впервые в учебной литературе излагается разработанный Ю. С. Осиповым и его учениками метод динамической регуляризации — метод решения неустойчивых обратных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и др. Для замкнутости изложения приведен вспомогательный материал из функционального анализа, необходимый для строгих математических постановок рассматриваемых обратных задач и обоснования вопросов сходимости излагаемого метода.

Для студентов и аспирантов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика».

УДК 530.145
ББК 22.311

ISBN 5-211-04085-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Настоящая книга представляет собой учебное пособие, написанное на основе курса лекций, читаемого авторами на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета для студентов, специализирующихся на кафедре оптимального управления. В ней излагается метод динамической регуляризации для решения некоторого класса обратных задач, связанных с динамическими системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями (системы с сосредоточенными параметрами) или уравнениями с частными производными (системы с распределенными параметрами).

Под обратной задачей принято понимать задачу восстановления каких-либо характеристик динамической системы (коэффициентов, параметров, входящих в дифференциальные уравнения, в начальные или граничные условия) по информации о пространственных координатах, скорости или других количественных характеристиках траектории (решения) этой системы, поступающей в процессе специально организованных наблюдений (измерений). Такие задачи являются типичными для теории и методов обработки и интерпретации результатов наблюдений и возникают при изучении тех свойств объектов или процессов естествознания, которые недоступны или труднодоступны для прямого измерения и о которых приходится судить по измеренным в результате эксперимента их косвенным проявлениям. В качестве примеров можно привести медицинские эксперименты по изучению внутренних органов человека, эксперименты по неразрушающему контролю за качеством изделий, наблюдения и эксперименты по определению физических характеристик тел по их взаимодействию с подходящими физическими полями и т. д.

Хотя отдельные классы обратных задач давно рассматриваются в науке и практике, широкое исследование обратных задач началось сравнительно недавно, что связано с прогрессом в соответствующих областях знаний. К настоящему времени теория обратных задач стала самостоятельной областью математики, в ней сформировались различные направления, обусловленные как различными сферами ее приложений, так и многообразием математических постановок обратных задач, ей посвящена обширная литература (см., например, [1–5; 7; 11; 12; 16; 19–21; 23; 24; 30–32; 36; 38; 48; 52; 53; 63–68; 71; 72; 92–97; 108; 110–119; 122; 125; 129–134; 137–140; 143; 150; 151]).

Существенную роль в становлении теории обратных задач сыграло интенсивное развитие в последние несколько десятилетий теории неустойчивых (некорректных) задач. Дело в том, что измерения результатов наблюдений и экспериментов (входных данных) сопровождаются неизбежными ошибками, поэтому искомые решения обратных задач также будут определяться с погрешностью. И оказывается, что в большинстве своем обратные задачи естествознания неустойчивы, т. е. сколь угодно малым погрешностям измерений входных данных могут соответствовать большие погрешности в определении искомого решения обратной задачи. Это обстоятельство затрудняет применение обычных методов для поиска решения обратных задач и требует привлечения для этих целей специальных методов, называемых методами регуляризации, разработанных в рамках общей теории некорректных задач [1; 4; 8; 9; 12; 17; 23–25; 36; 64–68; 71; 75; 91; 110–112; 122–125; 129–134; 137; 138; 141].

В настоящем учебном пособии основное внимание уделяется новому методу, разработанному Ю. С. Осиповым и его школой и получившему название метода динамической регуляризации [33–35; 40; 42; 43; 46; 47; 54–62; 76–88; 100–105; 120; 121; 144–149; 152–160]. С идейной точки зрения метод динамической регуляризации основывается на подходах теории позиционных дифференциальных игр, развитой Н. Н. Красовским и его школой [41; 44; 45; 49–51; 98; 99; 106; 107], и подходах теории некорректных задач, развитой в школах А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева [4; 8; 9; 12; 17; 23–25; 65–68; 75; 91; 111; 124; 129–134; 137; 138; 141]. Этот метод целесообразно применять в тех случаях, когда требуется восстановить неизвестные характеристики интересующих явлений в динамике синхронно с развитием этих явлений или, как принято говорить в инженерной практике, в режиме реального времени. При этом предполагается, что информация об измерениях поступает в заданные дискретные моменты времени и на каждом шаге метода для определения текущего приближения неизвестной характеристики процесса разрешено использовать лишь те измерения, которые уже имеются в распоряжении исследователя к данному моменту времени без привлечения тех измерений, которые поступят в последующие моменты времени. С подобными обратными задачами приходится иметь дело, например, в механике управляемого полета, при создании технологических и производственных процессов, в проблемах оперативной обработки информации и т. п.

Метод динамической регуляризации может быть применен и в тех ситуациях, когда уже закончены все измерения и известна вся информация о проведенных наблюдениях, но обработка этой информации традиционными (статическими) методами регуляризации затруднена из-за большого объема информации, из-за ограниченности объема памяти имеющихся вычислительных средств. Тогда имеет смысл накопленную информацию об измерениях обрабатывать отдельными порциями, опираясь на идеи метода динамической регуляризации. Таким образом, этот метод может быть использован и как метод декомпозиции, заключающийся в сведении исходной задачи большой размерности к последовательности задач меньшей размерности.

В гл. I настоящего учебного пособия основная идея метода динамической регуляризации, его обоснование излагаются на примере простейшей задачи восстановления неизвестного управления в системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее показывается, как этот метод может быть использован в задаче восстановления правой части параболического уравнения (об этом идет речь в гл. II) и гиперболического уравнения (гл. III). Решения краевых задач для параболических и гиперболических уранений в гл. II, III понимаются в обобщенном смысле как решения задач Коши для соответствующих операторных дифференциальных уравнений, что оказалось удобным при описании и обосновании метода динамической регуляризации.

Строгое исследование вопросов существования и единственности обобщенного решения в такой интерпретации требует привлечения различных дополнительных сведений из функционального анализа (пространства Соболева, интеграл Бохнера, обобщенные функции со значениями из гильбертова пространства и др.), обычно выходящих за рамки основных университетских курсов лекций. В то же время в отечественной учебной литературе отсутствует единый источник, содержащий систематическое, компактное и доступное студентам изложение необходимого дополнительного материала, а имеющаяся монографическая литература слишком трудна для первого знакомства с предметом исследования. Кроме того, учебный характер книги предполагает доведение ее содержания «до границ известного», определенную замкнутость изложения. Именно в целях предоставления таких удобств заинтересованным, но недостаточно опытным читателям в книгу включена значительная по объему гл. IV, содержащая вспомогательный материал, необходимый для строгого изложения теории задач Коши для операторных дифференциальных уравнений и обоснования метода динамической регуляризации.

В заключительных замечаниях кратко обсуждается общая схема метода динамической регуляризации, возможные обобщения этого метода и область его применимости.

Авторы выражают глубокую благодарность за полезные обсуждения материалов книги Н. Л. Григоренко, А. М. Денисову, А. И. Короткому, А. В. Кряжимскому, В. И. Максимову, М. С. Никольскому, А. В. Разгулину.

Благодарим студентов С. В. Виноградову, А. В. Лаврухина, О. В. Ершову, М. М. Потапову, И. М. Шошенского за помощь в оформлении рукописи книги.

Список обозначений

$\stackrel{\mathrm{def}}{=}$ — по определению.
$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел.
R — числовая ось.
E^n — вещественное n-мерное пространство векторов

$$x = (x^1, \ldots, x^n)$$

со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_{E^n} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i$

и нормой $|x| = \|x\|_{E^n} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x^i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $n \geq 1$.

$E^n \times E^m$ — прямое произведение евклидовых пространств E^n и E^m.
Ω — область (открытое связное множество) из E^n.
$\overline{\Omega}$ — замыкание области Ω.
$\partial\Omega$ — граница области Ω.
Ω_δ — множество точек области Ω, расстояние от которых до $\partial\Omega$ больше δ (при достаточно малых δ множество Ω_δ — область).
$Q_T = (0, T)\times\Omega$ — множество точек (t, x): $0 < t < T$, $x \in \Omega$.
$\|f\|_B$ — норма элемента f из банахова пространства B.
$\|f_k - f\|_B \to 0$ $(k \to \infty)$ — сильная в B (по норме B) сходимость последовательности $\{f_k\}$ к f.
$C(\overline{\Omega})$ — банахово пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $f = f(x)$ с нормой $\|f\|_{C(\overline{\Omega})} = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|$.
$C^k(\overline{\Omega})$ — банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ функций $f = f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \max_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|,$$

где $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x^n)^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^0 f(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(x)$, $C^0(\overline{\Omega}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} C(\overline{\Omega})$, $k \geq 1$.

$C^k_m(\overline{\Omega})$ — банахово пространство m-мерных вектор-функций $f = f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$, таких, что $f^i(x) \in C^k(\overline{\Omega})$, $i = \overline{1, m}$, с нормой

$$\|f\|_{C^k_m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \max_{x\in\overline{\Omega}} \|D^\alpha f(x)\|_{E^m},$$

$$D^\alpha f(x) = \left(D^\alpha f^1(x), \ldots, D^\alpha f^m(x)\right);\ k \geq 0,\ C^0_m(\overline{\Omega}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} C_m(\overline{\Omega}).$$

$C^\infty(\overline{\Omega})$ — пространство бесконечно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ функций.
$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$ — носитель функции $\varphi = \varphi(x)$ на Ω.
$\varphi(x)$ — финитная функция, если при некотором $\delta > 0$

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_\delta.$$

$\overset{\bullet}{C}{}^k(\overline{\Omega})$ — пространство финитных функций

$$\varphi = \varphi(x) \in C^k(\overline{\Omega}), \qquad k \geq 0.$$

$\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\overline{\Omega})$ — пространство финитных функций

$$\varphi = \varphi(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

П. в. — почти всюду (с точностью до множества меры нуль).
Для п. в. — для почти всех.
$L^1(\Omega)$ — банахово пространство функций $f = f(x)$, интегрируемых по Лебегу, с нормой $\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega |f(x)|dx$.
$L^p(\Omega)$ — банахово пространство функций

$$f = f(x) \in L^1(\Omega), \qquad |f(x)|^p \in L^1(\Omega),$$

с нормой $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$.

$L^2(\Omega)$ — гильбертово пространство функций

$$f = f(x) \in L^1(\Omega), \qquad |f(x)|^2 \in L^1(\Omega),$$

со скалярным произведением $\langle f,g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int\limits_\Omega f(x)g(x)dx$ и нормой $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

$L^\infty(\Omega)$ — банахово пространство ограниченных измеримых по Лебегу функций $f = f(x)$, $x \in \Omega$. Измеримая функция $f(x)$ называется ограниченной на Ω, если она эквивалентна некоторой ограниченной функции, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ для п. в. $x \in \Omega$. Нижняя грань всех M обозначается $\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ — это норма в $L^\infty(\Omega)$.

$L^p_r(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, — банахово пространство r-мерных вектор функций $f = \underline{f(x)} = (f^1(x),\dots,f^r(x))$, таких, что $f^i(x) \in L^p(\Omega)$, $i = \overline{1,r}$; норма в $L^p_r(\Omega)$ равна

$$\|f\|_{L^p_r(\Omega)} = \Big(\int\limits_\Omega |f(x)|^p_{E^r}dx\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 1 \le p < \infty$$

и

$$\|f\|_{L^\infty_r(\Omega)} = \operatorname{vrai}\max_{x\in\Omega} \|f(x)\|_{E^r} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

$L^2_r(\Omega)$ — гильбертово пространство r-мерных вектор-функций $f = f(x) = (f^1(x),\dots,f^r(x))$, $f^i(x) \in L^2(\Omega)$, $i = \overline{1,r}$, со скалярным произведением $\langle f,g\rangle_{L^2_r(\Omega)} = \int\limits_\Omega \langle f(x),g(x)\rangle_{E^r}dx$ и нормой $\|f\|_{L^2_r(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^2_{E^r}dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

О. п. — обобщенная производная по Соболеву.

О. р. — обобщенное решение.

$H^1(\Omega)$ – гильбертово пространство функций $f = f(x) \in L^2(\Omega)$, имеющих о. п. $f_{x^1},\dots,f_{x^n} \in L^2(\Omega)$, со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \Big(f(x)g(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)\rangle\Big)dx$$

и нормой $\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \Big(|f(x)|^2 + \|\operatorname{grad} f(x)\|^2_{E^n}\Big)dx\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\operatorname{grad} f(x) = \Big(f_{x^1}(x),\dots,f_{x^n}(x)\Big)$$

(другое обозначение $W^1_2(\Omega)$ для этого пространства также часто используется в литературе).

$H^k(\Omega)$ — гильбертово пространство функций

$$f = f(x) \in L^2(\Omega),$$

имеющих о. п. $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} f(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1}\cdots(\partial x^n)^{\alpha_n}} \in L^2(\Omega)$ всех порядков $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \le k$, со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_{H^k(\Omega)} = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\le k} D^\alpha f(x)\, D^\alpha g(x)\Big)dx$$

и нормой $\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum\limits_{|\alpha|\le k} |D^\alpha f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$ (другое обозначение: $W^k_2(\Omega)$).

$H^1_0(a,b)$ — гильбертово пространство функций

$$f = f(x) \in C[a,b], \quad f(a) = 0, \quad f(b) = 0,$$

имеющих о. п. $f'(x) \in L^2(a,b)$, со скалярным произведением $\langle f,g\rangle_{H^1_0(a,b)} = \int\limits_a^b f'(x)g'(x)dx$ и нормой $\|f\|_{H^1_0(a,b)} = \left(\int\limits_a^b |f'(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$ (другое обозначение: $\overset{\circ}{W}{}^1_2\,(a,b)$).

$H^1_0(\Omega)$ — гильбертово пространство функций

$$f = f(x) \in L^2(\Omega),$$

имеющих о. п. $f_{x^1},\dots,f_{x^n} \in L^2(\Omega)$ и след $f(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0$, со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_{H^1_0(\Omega)} = \int\limits_\Omega \langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)\rangle\, dx$$

и нормой $\|f\|_{H^1_0(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\operatorname{grad} f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$ (другое обозначение: $\overset{\circ}{W}{}^1_2\,(\Omega)$).

$\langle f, g\rangle_H$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H, $\|f\|_H = \Big(\langle f, f\rangle_H\Big)^{\frac{1}{2}}$ — евклидова норма в H.

V^* — пространство линейных непрерывных функционалов, определенных на V.

$\langle f, \varphi\rangle$ — значение линейного функционала $f \in V^*$ на элементе $\varphi \in V$; используются также обозначения $\langle \varphi, f\rangle$, $f(\varphi)$.

$\|f\|_{V^*} = \sup\limits_{\varphi\in V, \|\varphi\|_V \le 1} |\langle f, \varphi\rangle|$ — норма элемента $f \in V^*$.

$A : X \to Y$ — оператор, действующий из пространства X в пространство Y.

$D(A)$ — область определения оператора A.

$R(A)$ — область значений оператора A.

A^{-1} — оператор, обратный к оператору A.

$L\,(H \to F)$ — пространство линейных ограниченных (непрерывных) операторов, действующих из H в F.

$\|A\| = \sup\limits_{f\in H, \|f\|_H \le 1} \|A\,f\|_F$ — норма оператора $A \in L(H \to F)$.

A^* — оператор, сопряженный к оператору $A \in L(H \to F)$; $A^* \in L(F \to H)$.

I — единичный (тождественный) оператор: $Ix = x\ \forall x \in X$.

$R_H : H^* \to H$ — оператор Рисса: $\langle f, \varphi\rangle = \langle R_H f, \varphi\rangle_H\ \forall \varphi \in H$, $\forall f \in H^*$.

$\langle R_V\, f, R_V\, g\rangle_V = \langle f, g\rangle_{V^*}$ — скалярное произведение в V^*.

$f : [a, b] \to H$ — функция $f = f(t)$, определенная на отрезке $[a, b]$, со значениями из гильбертова пространства H (H-значная функция).

$C\Big([a, b]; H\Big)$ — банахово пространство непрерывных на $[a, b]$ H-значных функций с нормой

$$\|f\|_{C\left([a,b];H\right)} = \max_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_H.$$

$C^k\Big([a, b]; H\Big)$ — банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ H-значных функций с нормой

$$\|f\|_{C^k\left([a,b];H\right)} = \sum_{m=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} \|f^{(m)}(t)\|_H;$$

$$f^{(0)}(t) \overset{\text{def}}{=} f(t), \quad C^0\Big([a, b]; H\Big) \overset{\text{def}}{=} C\Big([a, b]; H\Big).$$

$C^\infty\Big([a, b]; H\Big)$ — пространство H-значных функций, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывные поточечные производные всех порядков.

$L^1(a, b; H)$ — банахово пространство H-значных функций $f = f(t)$, интегрируемых по Бохнеру, с нормой

$$\|f\|_{L^1(a,b;H)} = \int_a^b \|f(t)\|_H dt.$$

$L^p(a, b; H)$ — банахово пространство H-значных функций $f = f(t) \in L^1(a, b; H)$, $\|f(t)\|_H \in L^p(a, b)$, с нормой

$$\|f\|_{L^p(a,b;H)} = \Big(\int_a^b \|f(t)\|_H^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

$L^2(a, b; H)$ — гильбертово пространство H-значных функций $f = f(t) \in L^1(a, b; H)$, $\|f(t)\|_H \in L^2(a, b)$, со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle_{L^2(a,b;H)} = \int_a^b \langle f(t), g(t)\rangle_H dt$$

и нормой

$$\|f\|_{L^2(a,b;H)} = \Big(\int_a^b \|f(t)\|_H^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$L^\infty(a, b; H)$ — банахово пространство H-значных функций $f = f(t) \in L^1(a, b; H)$, $\|f(t)\|_H \in L^\infty(a, b)$, с нормой

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;H)} = \operatorname*{vrai\,max}_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_H.$$

О. ф. — обобщенная функция (распределение).

$D(a,b)$ — пространство $\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}[a,b]$ со специально введенным понятием сходимости последовательности (см. определение 4.1).

$D'(a,b;H)$ — пространство о. ф. (распределений) со значениями из гильбертова пространства H.

$H^1(a,b;H)$ — гильбертово пространство регулярных о. ф. $f = f(t) \in L^2(a,b;H)$ с регулярной производной

$$f'(t) \in L^2(a,b;H),$$

скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_{H^1(a,b;H)} = \int_a^b \Big(\langle f(t),g(t)\rangle_H + \langle f'(t),g'(t)\rangle_H\Big)dt$$

и нормой

$$\|f\|_{H^1(a,b;H)} = \Big(\int_a^b (\|f(t)\|_H^2 + \|f'(t)\|_H^2)\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$W(a,b;V,V^*)$ — гильбертово пространство регулярных о. ф. $f = f(t) \in L^2(a,b;V)$ с регулярной производной

$$f'(t) \in L^2(a,b;V^*),$$

скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_{W(a,b;V,V^*)} = \int_a^b \Big(\langle f(t),g(t)\rangle_V + \langle f'(t),g'(t)\rangle_{V^*}\Big)dt$$

и нормой

$$\|f\|_{W(a,b;V,V^*)} = \Big(\int_a^b (\|f(t)\|_V^2 + \|f'(t)\|_{V^*}^2)\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

ОНС — ортонормированная система.

ОНБ — ортонормированный базис.

Глава I

Методы регуляризации одной обратной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

§ 1. Постановка задачи

Будем рассматривать процесс, динамика которого описывается системой

$$y'(t) = f(t,y(t))u(t) + g(t,y(t)), \quad 0 \le t \le T \quad y(0) = y_0, \tag{1.1}$$

где t — время, $y = y(t) = (y^1(t),\dots,y^n(t))$ — фазовая траектория процесса, $u = u(t) = (u^1(t),\dots,u^r(t))$ — управление, $f(t,y) = \{f_{ij}(t,y)\}$, $g(t,y) = \{g_j(t,y)\}$, $i = \overline{1,r}, j = \overline{1,n}$ — матрицы порядка $n \times r$, $n \times 1$ соответственно, момент T и начальное состояние y_0 заданы.

Управление $u = u(t) = (u^1(t),\dots,u^r(t))$ будем называть допустимым, если его компоненты $u^i(t)$, $i = \overline{1,r}$, являются ограниченными измеримыми на отрезке $[0,T]$ функциями, т. е. $u(t) \in L_r^\infty(0,T)$, а значения $u(t)$ для почти всех $t \in [0,T]$ принадлежат заданному ограниченному множеству P из евклидова пространства E^r. Множество всех допустимых управлений будем обозначать через U.

Траекторией (или решением) задачи Коши (1.1), соответствующей (соответствующим) допустимому управлению $u \in U$, будем называть функцию $y = y(t) = y(t,u)$, которая абсолютно непрерывна на $[0,T]$, в начальный момент времени $t = 0$ принимает значение $y(0) = y_0$, для почти всех $t \in [0, T]$ имеет производную $y'(t) \in L_n^\infty(0, T)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1) для почти всех $t \in [0, T]$.

Под прямой задачей будем понимать задачу определения траектории $y = y(t, u)$ системы (1.1) по известному допустимому управлению $u = u(t) \in U$. Тогда задачу определения допустимого управления по известной (полученной в результате наблюдений) траектории $y(t, u)$ системы (1.1) естественно назвать обратной задачей. Именно эта обратная задача будет главным объектом исследования в гл. I. Уточним ее постановку. Введем множество

$$U_* = \{u = u(t) \in U : y(t; u) = y(t),\ 0 \le t \le T\}$$

всех допустимых управлений, порождающих одну и ту же траекторию $y(t)$, $0 \le t \le T$, системы (1.1). Из самой постановки обратной задачи следует, что $U_* \neq \emptyset$, так как предполагается, что наблюдаемая функция $y(t)$ действительно является траекторией системы (1.1), порожденной каким-либо допустимым управлением $v = v(t) \in U$, т. е. $y(t; v) = y(t)$, $0 \le t \le T$, и, следовательно, $v \in U_*$. Однако множество U_* может состоять более, чем из одного элемента. В самом деле, перепишем дифференциальное уравнение (1.1) в виде

$$f(t, y(t))u = y'(t) - g(t, y(t)). \tag{1.2}$$

При известных $y(t)$, $y'(t)$, $0 \le t \le T$, уравнение (1.2) можно рассматривать как систему n линейных алгебраических уравнений с матрицей $f(t, y(t))$, правой частью $y'(t) - g(t, y(t))$ и неизвестными $u = (u^1, \ldots, u^r)$. Система (1.2) вполне может иметь много допустимых решений $u = u(t)$, принадлежащих U_*. Например, в задаче $y' = u^1(t) - u^2(t)$, $0 \le t \le T$, $y(0) = 1$ (здесь $n = 1$, $r = 2$, $f = (1, -1)$, $g = 0$, $P = [-1, 1] \times [-1, 1]$) стационарной траектории $y(t) \equiv 1$ соответствует бесконечно много допустимых управлений $u = (u^1, u^2)$ с поточечно совпадающими компонентами $u^1(t) = u^2(t) \in [-1, 1]$. Имея ввиду такую неединственность, мы для определенности будем придерживаться концепции так

называемого нормального решения обратной задачи. Управление $u = u_*(t)$, $0 \le t \le T$, называют нормальным решением обратной задачи, если [9; 12; 129]

$$u_* \in U_*, \quad \|u_*\|_{L_r^2} = \inf_{u \in U_*} \|u\|_{L_r^2}, \quad L_r^2 = L_r^2(0, T).$$

Ниже (§3) будет доказано, что при естественных предположениях нормальное решение существует и определяется однозначно.

О целесообразности принятия именно такой концепции, отражающей установку на выбор допустимого управления $u_* \in U_*$ с минимальной энергией [49], а также о других возможных подходах, позволяющих полностью или частично избавиться от неопределенности при выборе допустимых управлений из U_* (см., например, [9; 12; 49; 129]).

Важно заметить, что из-за погрешностей наблюдения (вызванных помехами, несовершенством измерительной аппаратуры или другими причинами) вместо точной траектории $y(t)$, $0 \le t \le T$, системы (1.1) нам будет известно лишь ее приближение $\tilde{y}(t)$, $0 \le t \le T$, удовлетворяющее условию

$$|\tilde{y}(t) - y(t)| \le \delta, \qquad 0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

где δ — погрешность, $0 < \delta \le \delta_0$. Теперь можем сформулировать обратную задачу в следующей форме.

Требуется, зная $\tilde{y}(t)$, $0 \le t \le T$, построить допустимое управление $u = \tilde{u}_\delta = \tilde{u}_\delta(t)$, $0 \le t \le T$, такое, что

$$\lim_{\delta \to 0} \|\tilde{u}_\delta - u_*\|_{L_r^2} = 0. \tag{1.4}$$

При этом подразумевается, что динамика системы, т. е. $f(t, y)$, $g(t, y)$, T, y_0, множество P, число δ из (1.3) также известны.

При разработке методов решения поставленной обратной задачи важно иметь в виду, что эта задача относится к классу неустойчивых (некорректных) задач и не всякие методы ее решения, на первый взгляд кажущиеся вполне разумными, позволяют получить управление $\widetilde{u}_\delta \in U$, обладающее свойством (1.4). Поясним сказанное на примере.

Пример. Пусть в (1.1) $n=r=1$, $f(t,y)\equiv 1$, $g(t,y)\equiv 0$, $y_0 = 0$, т. е. динамическая система имеет вид $y'(t) = u(t)$, $0 \le t \le T$, $y(0) = 0$, и пусть $P = \{u \in E^1, |u| \le 1\}$.

Предположим, что ведется наблюдение за траекторией $y(t) \equiv 0$, соответствующей допустимому управлению $u = u_*(t) \equiv 0$. Нетрудно видеть, что множество U_* здесь состоит из единственного элемента $u_* = 0$. Пусть из-за погрешностей наблюдения вместо точной траектории $y(t) \equiv 0$ получено ее приближение $\widetilde{y}(t) = \delta \sin\frac{t}{\delta}$, $0 \le t \le T$, $0 < \delta \le 1$. При этом наивный выбор приближения $\widetilde{u}_\delta(t) = \widetilde{y}'(t) = \cos\frac{t}{\delta}$, $0 \le t \le T$, оказывается неудачным, так как вместо (1.4) мы здесь получим

$$\|\widetilde{u}_\delta - u_*\|^2_{L^2} =$$

$$= \int_0^T \left(\cos\frac{t}{\delta} - 0\right)^2 dt = \frac{1}{2}\left(T + \frac{\delta}{2}\left(\cos^2\frac{T}{\delta} - 1\right)\right) \to \frac{T}{2} \ne 0$$

при $\delta \to 0$. Этот пример свидетельствует о том, что в общем случае обратная задача может оказаться неустойчивой и для ее решения следует применять специальные устойчивые методы решения.

Ниже будут изложены два метода решения сформулированной выше обратной задачи: метод динамической регуляризации, разработанный и исследованный Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским [55; 159], и метод статической регуляризации, представляющий собой вариант метода А. Н. Тихонова [129]. Будет выяснено, что для построения управления $\widetilde{u}_\delta = \widetilde{u}_\delta(t)$ со свойством (1.4) необязательно знать приближения $\widetilde{y}(t)$ из (1.3) во всех точках $t \in [0,T]$, а достаточно иметь приближения $\widetilde{y}_i$ для значений $y(t_i)$, удовлетворяющие условиям

$$|\widetilde{y}_i - y(t_i)| \le \delta, \qquad i = \overline{0, N-1}, \quad 0 < \delta \le \delta_0, \tag{1.5}$$

в подходящим образом выбранные (в зависимости от δ) дискретные моменты времени t_i:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T.$$

Кроме того будут указаны области применения упомянутых методов регуляризации в зависимости от режима поступления и обработки данных $\widetilde{y}_i$, $i = \overline{0, N-1}$, из (1.5).

§ 2. Решение прямой задачи, его свойства

Приведем достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши:

$$y' = f(t,y)u(t) + g(t,y), \quad 0 \le t \le T; \tag{2.1}$$
$$y(0) = y_0 \tag{2.2}$$

и изучим некоторые его свойства.

Теорема 2.1. *Пусть функции $f(t,y)$, $g(t,y)$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных $(t,y) \in E^1 \times E^n$:*

$$\max\{|f(t_1,y_1) - f(t_2,y_2)|;\ |g(t_1,y_1) - g(t_2,y_2)|\} \le \\ \le L(|y_1 - y_2| + |t_1 - t_2|) \tag{2.3}$$

для любых $(t_i, y_i) \in E^1 \times E^n$, $i = 1,2$; $L = \mathrm{const} > 0$; пусть P — замкнутое ограниченное множество из E^r,

$$U = \{u = u(t) \in L^\infty_r(0,T) : u(t) \in P \text{ п. в. на } [0,T]\}.$$

Тогда для любого управления $u = u(t) \in L^\infty_r(0,T)$ и любой начальной точки $y_0 \in E^n$ существует единственное решение $y = y(t,u)$ задачи (2.1), (2.2), определенное на всем отрезке $[0,T]$, причем:

1) $|y(t,u)| \le K_0$ $\forall u \in U$, $\forall t \in [0,T]$, $|y'(t,u)| \le K_1$ $\forall u \in U$, *для п. в.* $t \in [0,T]$, K_0, $K_1 = \mathrm{const} > 0$; $\qquad$ (2.4)

2) $|y(t_1,u_1) - y(t_2,u_2)| \le M_0\left(|t_1-t_2| + \|u_1-u_2\|_{L^2_r}\right)$
$\forall t_i \in [0,T],\ \forall u_i \in U,\ M_0 = \mathrm{const} > 0;$ (2.5)

3) если последовательность $\{u_k = u_k(t)\} \in U$ *и слабо в* $L^2_r(0,T)$ *сходится к управлению* $u = u(t)$, *то* $\|y(t,u_k) - y(t,u)\|_{C_n} \to 0$, *т. е. траектории* $\{y(t,u_k)\}$ *сходятся к* $y(t,u)$ *равномерно на* $[0,T]$.

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (2.1), (2.2) при близких требованиях доказана, например, в [10, с. 428]. Поэтому здесь мы ограничимся лишь кратким воспроизведением схемы доказательства. Зафиксируем произвольные $u = u(t) \in L^\infty_r(0,T)$, $y_0 \in E^n$. Перепишем задачу (2.1), (2.2) в виде равносильного интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 + \int_0^t [f(\tau,y(\tau))u(\tau) + g(\tau,y(\tau))]\,d\tau, \tag{2.6}$$

решение которого ищется в пространстве $C_n[0,T]$. Введем оператор

$$(Ay)(t) = y_0 + \int_0^t [f(\tau,y(\tau))u(\tau) + g(\tau,y(\tau))]\,d\tau,$$

который каждой функции $y(t) \in C_n[0,T]$ ставит в соответствие функцию $(Ay)(t) \in C_n[0,T]$. Из (2.6) видно, что искомое решение задачи (2.1), (2.2) является неподвижной точкой оператора A. Опираясь на условие (2.3), нетрудно показать (см., например, [10]), что m-я степень оператора A при достаточно большом m будет сжимающим отображением в $C_n[0,T]$. Из обобщенного принципа сжимающих отображений [39] следует, что уравнение $y = Ay$ и, следовательно, уравнение (2.6) имеет, притом единственное, решение $y(t) \in C_n[0,T]$. Из свойств интеграла Лебега с переменным верхним пределом [39; 142] и из (2.6) следует, что полученная функция $y(t)$, $0 \le t \le T$, абсолютно непрерывна, ее производная $y'(t) \in L^\infty_n(0,T)$ и уравнение (2.1) удовлетворяется п. в. на $[0,T]$. Таким образом, задача Коши при каждом $u \in L^\infty_r(0,T)$, $y_0 \in E^n$ имеет, притом единственное, решение $y = y(t,u)$.

Докажем неравенства (2.4). Возьмем произвольное $u \in U$. Так как множество P ограничено, $u(t) \in P$ п. в. на $[0,T]$, то $|u(t)| \le |P| = \sup_{u\in P}|u| < \infty$ п. в. на $[0,T]$. Отсюда и из (2.6) с учетом условия (2.3) имеем

$$|y(t)| \le |y_0| + \int_0^t \left(|f(\tau,y(\tau))||P| + |g(\tau,y(\tau))|\right)d\tau \le$$

$$\le |y_0| + \int_0^t \left(|f(\tau,y(\tau)) - f(\tau,0)| + \right.$$

$$\left. + |f(\tau,0)|\right)|P|d\tau + \int_0^t \left(|g(\tau,y(\tau)) - g(\tau,0)| + |g(\tau,0)|\right)d\tau \le$$

$$\le |y_0| + (L|P| + L)\int_0^t |y(\tau)|d\tau + T(f_0|P| + g_0) \quad \forall t \in [0,T],$$

$$\text{где} \quad f_0 = \max_{t\in[0,T]}|f(t,0)|, \quad g_0 = \max_{t\in[0,T]}|g(t,0)|.$$

Далее, воспользуемся известным интегральным неравенством Гронуолла (см., например, [10]): если непрерывная функция $\varphi(t)$ такова, что

$$0 \le \varphi(t) \le a\int_0^t \varphi(\tau)d\tau + b, \quad a, b = \mathrm{const} \ge 0,$$

то $0 \le \varphi(t) \le be^{at}$ $\forall t \ge 0$. В результате $\forall t \in [0,T]$ $\forall u \in U$ получим оценку

$$|y(t,u)| \le \left(|y_0| + T(f_0|P| + g_0)\right)e^{L(|P|+1)T} \stackrel{\mathrm{def}}{=} K_0. \tag{2.7}$$

Тогда из (2.1) имеем

$$|y'(t,u)| \le F_0|P| + G_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} K_1 \quad \text{для п. в. } t \in [0,T],\ \forall u \in U, \tag{2.8}$$

где

$$F_0 = \max_{|y|\le K_0, t\in[0,T]} |f(t,y)|, \qquad G_0 = \max_{|y|\le K_0, t\in[0,T]} |g(t,y)|.$$

Из (2.7), (2.8) следует (2.4). Кроме того, $\forall t_1, t_2 \in [0,T]$ $\forall u \in U$

$$|y(t_1,u) - y(t_2,u)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} y'(s,u)ds \right| \le K_1|t_1 - t_2|. \tag{2.9}$$

Зафиксируем произвольные $u_1, u_2 \in U$. Согласно (2.6)

$$|y(t,u_1) - y(t,u_2)| =$$

$$= \left| \int_0^t \{[f(\tau, y(\tau,u_1) - f(\tau, y(\tau,u_2))]\, u_2(\tau) + \right.$$

$$+ f(\tau, y(\tau,u_1))(u_1(\tau) - u_2(\tau)) +$$

$$\left. + g(\tau, y(\tau,u_1)) - g(\tau, y(\tau,u_2))\}\, d\tau \right| \le$$

$$\le L(|P|+1) \int_0^t |y(\tau,u_1) - y(\tau,u_2)| d\tau + F_0 \int_0^T |u_1(\tau) - u_2(\tau)| d\tau.$$

Снова обращаясь к неравенству Гроуолла, с учетом неравенства Коши–Буняковского

$$\int_0^T 1 \cdot |u_1(\tau) - u_2(\tau)| d\tau \le$$

$$\le \sqrt{T} \sqrt{\int_0^T |u_1(\tau) - u_2(\tau)|^2 d\tau} = \sqrt{T} \|u_1 - u_2\|_{L^2_r}$$

имеем

$$|y(t,u_1) - y(t,u_2)| \le F_0 \sqrt{T} e^{L(|P|+1)T} \|u_1 - u_2\|_{L^2_r} \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.10}$$

Так как

$$|y(t_1,u_1) - y(t_2,u_2)| \le |y(t_1,u_1) - y(t_2,u_1)| + |y(t_2,u_1) - y(t_2,u_2)|,$$

объединяя неравенства (2.9), (2.10), приходим к оценке (2.5).

Остается доказать утверждение 3). Пусть последовательность $\{u_k = u_k(t)\} \in U$ и слабо в $L^2_r(0,T)$ сходится к некоторому $u = u(t)$. Из (2.4), (2.5) следует, что последовательность соответствующих траекторий $\{y_k(t) = y(t,u_k)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на $[0,T]$. По теореме Арцела [39; 136; 142] тогда существует подпоследовательность $\{y_{k_m}(t)\}$, которая равномерно сходится к некоторой функции $\bar{y}(t) \in C_n[0,T]$. Покажем, что $\bar{y}(t) = y(t,u)$. Функция $y_{k_m}(t)$, $0 \le t \le T$, является решением интегрального уравнения (2.6) при $u = u_{k_m}$:

$$y_{k_m}(t) = y_0 + \int_0^t [f(\tau, y_{k_m}(\tau))u_{k_m}(\tau) + g(\tau, y(\tau))]\, d\tau. \tag{2.11}$$

Заметим, что

$$\left| \int_0^t f(\tau, y(\tau, u_{k_m}))u_{k_m}(\tau)d\tau - \int_0^t f(\tau, \bar{y}(\tau))u(\tau)d\tau \right| \le$$

$$\le \left| \int_0^t [f(\tau, y(\tau,u_{k_m})) - f(\tau,\bar{y}(\tau))]u_{k_m}(\tau)d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_0^t f(\tau,\bar{y}(\tau))(u_{k_m}(\tau) - u(\tau))d\tau \right| \to 0 \quad \text{при } m \to \infty, \tag{2.12}$$

так как $|u_{k_m}(t)| \le |P|$ п. в. на $[0,T]$, $y(\tau, u_{k_m})$ сходится к $\overline{y}(\tau)$ равномерно на $[0,T]$, поэтому первое слагаемое из правой части (2.12) стремится к нулю; сходимость к нулю второго слагаемого является следствием слабой сходимости $u_{k_m}(\tau) - u(\tau)$ к нулю:

$$\int_0^T \langle \varphi(\tau), (u_{k_m}(\tau) - u(\tau)) \rangle_{E^r} d\tau \to 0$$

при любом $\varphi(\tau) \in L_r^2(0,T)$, в частности

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} f(\tau, \overline{y}(\tau)), & 0 \le \tau \le t, \\ 0, & t \le \tau \le T. \end{cases}$$

Из (2.11) при $m \to \infty$ с учетом (2.12) и равномерной сходимости $y_{k_m}(\tau)$ к $\overline{y}(\tau)$, $\tau \in [0,T]$, имеем

$$\overline{y}(t) = y_0 + \int_0^t [f(\tau, \overline{y}(\tau))u(\tau) + g(\tau, \overline{y}(\tau))]d\tau. \qquad (2.13)$$

Равенство (2.13) означает, что $\overline{y}(t) = y(t,u)$ — решение задачи (2.1), (2.2), соответствующее управлению $u = u(t) \in L_r^2(0,T)$. Учитывая единственность решения задачи (2.1), (2.2), с помощью рассуждений от противного нетрудно показать, что вся последовательность $\{y(t,u_k)\}$ сходится к $y(t,u)$ равномерно на $[0,T]$. Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Существование нормального решения обратной задачи

В следующей теореме устанавливается существование и единственность нормального решения сформулированной в § 1 обратной задачи.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1. Пусть $y(t) = y(t,\overline{u})$ — траектория задачи (1.1), соответствующая какому-либо допустимому управлению*

$$\overline{u} = \overline{u}(t) \in U = \{u(t) \in L_r^\infty(0,T), \quad u(t) \in P \ \text{п. в. на } [0,T]\}.$$

Тогда:

1) множество $U_* = \{u \in U : y(t,u) = y(t),\ 0 \le t \le T\}$ выпукло, замкнуто, ограничено в $L_r^2(0,T)$;

2) в U_* найдется, притом единственное, управление $u_* = u_*(t)$, $0 \le t \le T$, имеющее минимальную в $L_r^2(0,T)$ норму.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\overline{u} \in U_*$, так что $U_* \ne \emptyset$. Установим выпуклость множества U_*. Пусть $u_1, u_2 \in U_*$, т. е. $u_i \in U$, $y(t,u_i) = y(t)$, $i = 1,2$. Тогда управление $u_\alpha = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in U$ при всех $\alpha \in [0,1]$, так как множество U выпукло. Включение $u_i \in U_*$ означает, что

$$y(t) = y_0 + \int_0^t [f(\tau, y(\tau))u_i(\tau) + g(\tau, y(\tau))]\, d\tau, \quad i = 1, 2.$$

Умножим это равенство при $i = 1$ на величину α, при $i = 2$ на $(1-\alpha)$ и сложим. Получим

$$y(t) = y_0 + \int_0^t [f(\tau, y(\tau))u_\alpha(\tau) + g(\tau, y(\tau))]\, d\tau.$$

Отсюда в силу единственности решения задачи Коши (1.1) следует, что $y(t,u_\alpha) = y(t)$, $0 \le t \le T$, поэтому $u_\alpha \in U_*$ при всех $\alpha \in [0,1]$. Ограниченность U_* следует из ограниченности множества P. Докажем замкнутость U_* в $L_r^2(0,T)$. Пусть $u_k \in U_*$, $\|u_k - v\|_{L_r^2} \to 0$ $(k \to \infty)$. Надо доказать, что $v \in U_*$. Как известно [39], если последовательность $\{u_k(t)\}$ сильно в $L_r^2(0,T)$ сходится к $v(t)$, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{u_{k_m}(t)\}$, которая сходится к $v(t)$ п. в. на $[0,T]$. Так как $\{u_{k_m}(t)\} \in P$ п. в. на $[0,T]$, P — замкнутое множество из E^r, то $v(t) \in P$ п. в. на $[0,T]$. Следовательно, $v \in U$. Кроме того, из сильной сходимости $\{u_{k_m}\}$ к v следует ее слабая сходимость к той же функции v, поэтому согласно теореме 2.1 $y(t) \equiv y(t,u_{k_m})$ сходится к $y(t,v)$ равномерно на $[0,T]$. Следовательно, $y(t,v) = y(t)$, т. е. множество U_* замкнуто.

Остается заметить, что сильно выпуклый и непрерывный на $L_r^2(0,T)$ функционал $J(u) = \|u\|^2_{L_r^2}$ достигает своей нижней грани на выпуклом замкнутом множестве U_* в единственной точке $u = u_*(t) \in U_*$ [9]. Теорема 3.1 доказана.

§ 4. Метод динамической регуляризации

Кратко переформулируем постановку обратной задачи из § 1, уточнив режим получения и обработки информации об измерениях траектории. Напоминаем, что наблюдается траектория $y = y(t)$, $0 \le t \le T$, системы

$$y'(t) = f(t, y)u(t) + g(t, y), \quad 0 \le t \le T, \ y(0) = y_0, \qquad (4.1)$$

соответствующая некоторому неизвестному управлению $u = u(t) \in U = \{u \in L_r^\infty(0, T) : u(t) \in P$ для п. в. $t \in [0, T]\}$. Измерения значений траектории $y(t)$ проводятся в заданные дискретные моменты времени $\{t_i, \ i = \overline{0, N-1}\} : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$, причем вместо точных состояний $y(t_i)$ известны их приближения $\widetilde{y}_i$, удовлетворяющие условиям

$$|\widetilde{y}_i - y(t_i)| \le \delta, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad 0 < \delta \le \delta_0. \qquad (4.2)$$

Здесь подразумевается, что при $\delta \to 0$ шаг сетки

$$h = h(\delta) = \max_{0 \le i \le N-1} (t_{i+1} - t_i) \to 0;$$

другие условия на $h(\delta)$ будут указаны ниже. Требуется, зная $f(t, y)$, $g(t, y)$, T, P, δ, $\widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_{N-1}$, построить управление $u = \widetilde{u}_\delta = \widetilde{u}_\delta(t) \in U$, такое, что

$$\lim_{\delta \to 0} \|\widetilde{u}_\delta - u_*\|_{L_r^2} = 0,$$

где u_* — нормальное решение обратной задачи, определяемое условиями

$$u_* \in U_* = \{u \in U : y(t, u) = y(t), \ 0 \le t \le T\},$$

$$\|u_*\|_{L_r^2} = \inf_{u \in U_*} \|u\|_{L_r^2}.$$

Остается уточнить, в каком режиме поступает информация об измерениях $\widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_{N-1}$ и как она используется при построении искомого управления $\widetilde{u}_\delta$. В этом параграфе будем

предполагать, что величины $\widetilde{y}_i$ определяются и становятся известными нам последовательно во времени, и управление $\widetilde{u}_\delta$ мы строим также последовательно на каждом отрезке $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2], \ldots$, причем для построения $\widetilde{u}_\delta$ на частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ используем лишь значения $\widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_i$, не предполагая знания остальных значений $\widetilde{y}_{i+1}, \ldots, \widetilde{y}_{N-1}$, которые, возможно, пока еще не измерены.

Сформулированную обратную задачу кратко будем именовать задачей (4.1), (4.2). Как отмечалось в § 1, задача (4.1), (4.2) неустойчива к возмущениям входных данных и для ее решения нужно применять специальные устойчивые методы. Ниже будет описан один из таких методов — метод динамической регуляризации, впервые предложенный и исследованный в [55]. В этом методе наряду с кусочно-постоянным управлением $u_h(t)$, $0 \le t \le T$, представляющим собой приближение к нормальному решению u_* задачи (4.1), (4.2), строится вспомогательная кусочно-линейная функция $z_h(t)$, $0 \le t \le T$, которая помогает отслеживать наблюдаемую траекторию $y(t) = y(t, u_*)$, $0 \le t \le T$, по ее приближенным значениям $\widetilde{y}_i$ из (4.2). Приведем индуктивное описание процесса построения $u_h(t)$, $z_h(t)$ на частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ последовательно для $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Пусть $i = 0$ и известно наблюдаемое значение $\widetilde{y}_0$ начальной точки $y(0) = y_0$ точной траектории $y(t)$. Положим $z_h(0) = \widetilde{y}_0$ и, решая вспомогательную задачу минимизации

$$t_0(u) = 2\langle z_0 - \widetilde{y}_0, f(0, \widetilde{y}_0)u\rangle + \alpha |u|^2 \to \inf, \quad u \in P,$$

где $\alpha > 0$, находим точку $u_0 \in P$, такую, что $t_0(u_0) = \inf_{u \in P} t_0(u)$. Затем полагаем

$$u_h(t) = u_0, \quad z_h(t) = z_h(0) + [f(0, \widetilde{y}_0)u_0 + g(0, \widetilde{y}_0)]t \quad \forall t \in [t_0 = 0, t_1].$$

Пусть для некоторого i, $0 < i < N-1$, уже определены $u_h(t)$, $z_h(t)$, $0 \le t \le t_i$, и пусть нам стало известно измерение $\widetilde{y}_i$ наблюдаемой траектории $y(t)$ в момент $t = t_i$. Тогда решаем вспомогательную задачу минимизации

$$t_i(u) = 2\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, f(t_i, \widetilde{y}_i)u\rangle + \alpha |u|^2 \to \inf, \quad u \in P, \qquad (4.3)$$

определяем точку $u_i \in P$, $t_i(u_i) = \inf\limits_{u\in P} t_i(u)$, и полагаем при $t \in (t_i, t_{i+1}]$

$$u_h(t) = u_i, \quad z_h(t) = z_h(t_i) + [f(t_i, \widetilde{y}_i)u_i + g(t_i, \widetilde{y}_i)](t - t_i). \tag{4.4}$$

Далее, по мере поступления информации $\widetilde{y}_{i+1}, \ldots, \widetilde{y}_{N-1}$ последовательно определяются $u_h(t)$, $z_h(t)$ на промежутках $(t_{i+1}, t_{i+2}], \ldots, (t_{N-1}, t_N = T]$.

Описанный метод представляет собой сочетание принципа экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [51] и метода регуляризации А. Н. Тихонова [129]. Вспомогательную траекторию $z_h(t)$ из (4.4) принято называть поводырем, а правило (4.3) выбора u_i называется правилом экстремального прицеливания. Для построения поводыря использован аналог разностного метода Эйлера для решения задачи Коши (4.1), отличающийся от классического метода Эйлера тем, что в (4.4) функции $f(t_i, y)$, $g(t_i, y)$ вычислены в точке $y = \widetilde{y}_i$ вместо $y = z_h(t_i)$.

Роль поводыря, как было замечено выше, заключается в том, чтобы численно отслеживать реальную траекторию по наблюдаемым значениям $\widetilde{y}_i$, $i = \overline{0, N-1}$, путем наилучшего в смысле (4.3), (4.4) выбора кусочно-постоянных управлений $u_h(t) = u_i$, $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$. Идею отслеживания траектории можно было бы реализовать и несколько иначе, выбирая u_i из условия минимума уклонения значения поводыря $z_h(t_{i+1}) = z_h(t_{i+1}, u_i)$ от $\widetilde{y}_i$:

$$|z_h(t_{i+1}) - \widetilde{y}_i|^2 \to \inf, \qquad u \in P. \tag{4.5}$$

Тогда с учетом формулы (4.4) имеем

$$|z_h(t_{i+1}) - \widetilde{y}_i|^2 =$$
$$= |z_h(t_i) + (f(t_i, \widetilde{y}_i)u_i + g(t_i, \widetilde{y}_i))(t_{i+1} - t_i) - \widetilde{y}_i|^2 =$$
$$= |z_h(t_i) - \widetilde{y}_i|^2 + 2\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, f(t_i, \widetilde{y}_i)u_i +$$
$$+ g(t_i, \widetilde{y}_i)\rangle(t_{i+1} - t_i) + |f(t_i, \widetilde{y}_i)u_i + g(t_i, \widetilde{y}_i)|^2(t_{i+1} - t_i)^2. \tag{4.6}$$

Как видим, первое слагаемое в правой части равенства (4.6) от u не зависит и потому может быть опущено без ущерба для задачи (4.5). Если теперь пренебречь третьим слагаемым из правой части (4.6), имеющим порядок $O(h^2)$, $h = \max\limits_{0\le i\le N-1}(t_{i+1} - t_i)$, можем перейти от задачи (4.5) к близкой задаче для определения u_i:

$$2\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, f(t_i, \widetilde{y}_i)u + g(t_i, \widetilde{y}_i)\rangle \to \inf, \qquad u \in P.$$

Замечая, что здесь слагаемое $2\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, g(t_i, \widetilde{y}_i)\rangle$ от u не зависит и может быть опущено, приходим к задаче

$$2\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, f(t_i, \widetilde{y}_i)u\rangle \to \inf, \qquad u \in P.$$

Добавляя к целевой функции последней задачи минимизации регуляризующее слагаемое $\alpha|u|^2$, получаем задачу (4.3).

Приведенные соображения, можно надеяться, объясняют происхождение задачи (4.3). Отметим, что задача (4.3) является стандартной конечномерной задачей математического программирования и для ее решения могут быть использованы различные методы (см., например, [10]). Функция $t_i(u)$ в (4.3) сильно выпукла, квадратична и на выпуклом замкнутом множестве P достигает своей нижней грани в единственой точке $u = u_i$. В частности, если P — многогранное множество, то задача (4.3) превращается в типичную задачу квадратичного программирования, для решения которой существуют конечношаговые методы (см., например, [10]).

Важно также заметить, что в точном определении точки минимума u_i в задаче (4.3) нет необходимости, достаточно найти u_i из условий

$$u_i \in P, \qquad t_i(u_i) \le \inf_{u\in P} t_i(u) + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0. \tag{4.7}$$

В дальнейшем предполагается, что точки u_i из (4.7) уже определены при $i = 0, 1, \ldots, N-1$ и функции $u_h(t)$, $z_h(t)$, $0 \le t \le T$, построены по формулам (4.4) с использованием u_i, полученных из (4.7). Покажем, что если параметры α, ε, h описанного метода (4.3), (4.4), (4.7) подходящим образом согласованы с погрешностью δ из (4.2), то построенное управление $\tilde{u}_\delta = u_{h(\delta)}(t)$, $0 \le t \le T$, может быть взято в качестве приближения для нормального решения обратной задачи (4.1), (4.2).

Теорема 4.1. *Пусть функции $f(t,y)$, $g(t,y)$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности аргументов $(t,y) \in [0,T] \times E^n$ (см. условие (2.3)), P — выпуклое замкнутое ограниченное множество из E^r, приближенные значения $\tilde{y}_i$ наблюдаемой траектории $y(t)$ в моменты t_i, $i = \overline{0, N-1}$, удовлетворяют условию (4.2), параметры $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $h = h(\delta)$ положительны и стремятся к нулю при $\delta \to 0$ согласованно в смысле равенства $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\delta+h(\delta)+\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0$. Тогда функции $u_h(t)$, $z_h(t)$, $0 \le t \le T$, определенные методом (4.3), (4.4), (4.7), таковы, что $\|u_{h(\delta)} - u_*\|_{L^2_r(0,T)} \to 0$, $\|z_{h(\delta)} - y\|_{C_n[0,T]} \to 0$, $\|z'_{h(\delta)} - y'\|_{L^2_n(0,T)} \to 0$ при $\delta \to 0$, где u_* — нормальное решение обратной задачи (4.1), (4.2), $y = y(t) = y(t, u_*)$.*

Доказательство. Введем функцию $V(t)$, которую будем называть функцией Ляпунова задачи (4.1), (4.2), следующим образом:

$$V(t) = |z_h(t) - y(t)|^2 + \alpha \int_0^t |u_h(\tau)|^2 d\tau, \quad \alpha > 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Зафиксируем произвольный момент времени $t \in [0,T]$ и вычислим производную $V'(t)$ этой функции. Для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеем

$$\begin{aligned} V'(t) &= 2\langle z_h(t) - y(t), z'_h(t) - y'(t)\rangle_{E^n} + \alpha|u_h(t)|^2 = \\ &= 2\langle z_h(t_i) - \tilde{y}_i, z'_h(t) - y'(t)\rangle + 2\langle (z_h(t) - z_h(t_i)) + \\ &+ (\tilde{y}_i - y(t_i)) + (y(t_i) - y(t)), z'_h(t) - y'(t)\rangle + \alpha|u_i|^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

В силу (4.1), (4.4) для п. в. $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\begin{aligned} &z'_h(t) - y'(t) = \\ &= (f(t_i, \tilde{y}_i)u_i + g(t_i, \tilde{y}_i)) - (f(t, y(t))u_*(t) + g(t, y(t))). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Так как $|y(t)| = |y(t, u_*)| \le K_0$, $\forall t \in [0,T]$ (см. оценку (2.4)), в силу ограниченности множества P имеем

$$|u_i| \le |P| \equiv \sup_{u\in P} |u| < \infty, \qquad |u_*(t)| \le |P|,$$

в силу условия (4.2) и оценки (2.4) —

$$|\tilde{y}_i| \le |y(t_i)| + \delta \le K_0 + \delta_0, \qquad i = 0, \ldots, N-1 \tag{4.10}$$

(здесь и ниже предполагаем, что $0 < \delta \le \delta_0$), а функции $f(t,y)$, $g(t,y)$ непрерывны по $(t,y) \in [0,T] \times E^n$, из (4.9) имеем

$$|z'_h(t) - y'(t)| \le |z'_h(t)| + |y'(t)| \le M_1 = \text{const} \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,T]. \tag{4.11}$$

Отсюда и из (4.10) следует, что

$$|z_h(t)| = |\tilde{y}_0 + \int_0^t z'_h(\tau)d\tau| \le M_1T + K_0 + \delta_0 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.12}$$

Из (4.2), (4.11), (2.5) получаем оценки

$$|\langle z_h(t) - z_h(t_i), z'_h(t) - y'(t)\rangle| \le M_1^2 h,$$
$$|\langle \tilde{y}_i - y(t_i), z'_h(t) - y'(t)\rangle| \le M_1\delta,$$
$$|\langle y(t_i) - y(t), z'_h(t) - y'(t)\rangle| \le M_0M_1h.$$

Отсюда и из (4.8) с учетом (4.9) для п. в. $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеем

$$\begin{aligned} V'(t) &\le 2\langle z_h(t_i) - \tilde{y}_i, f(t_i, \tilde{y}_i)u_i\rangle + \alpha|u_i|^2 - \\ &-2\langle z_h(t_i) - \tilde{y}_i, f(t, y(t))u_*(t)\rangle + \\ &+2\langle z_h(t_i) - \tilde{y}_i, g(t_i, \tilde{y}_i) - g(t, y(t))\rangle + M_2(h + \delta). \end{aligned} \tag{4.13}$$

В силу (4.2), (4.10), (4.12), (2.5) имеем

$$\begin{aligned} &|\langle z_h(t_i) - \tilde{y}_i, g(t_i, \tilde{y}_i) - g(t, y(t))\rangle| \le \\ &\le (|z_h(t_i)| + |\tilde{y}_i|)L(|t - t_i| + |\tilde{y}_i - y(t)|) \le \\ &\le (M_1T + 2(K_0 + \delta_0))L(h + |\tilde{y}_i - y(t_i)| + |y(t_i) - y(t)|) \le \\ &\le (M_1T + 2(K_0 + \delta_0))L(h + \delta + M_0h). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Из (4.13), (4.14) для п. в. $t \in [t_i, t_{i+1}]$ получаем оценку

$$V'(t) \le t_i(u_i) - 2\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, f(t, y(t))u_*(t)\rangle + M_3(h + \delta). \qquad (4.15)$$

Вспомним, что точка u_i определяется условием (4.7), поэтому

$$t_i(u_i) \le \inf_{u \in P} t_i(u) + \varepsilon \le t_i(u_*(t)) + \varepsilon =$$

$$= 2\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, f(t_i, \widetilde{y}_i)u_*(t)\rangle + \alpha|u_*(t)|^2 + \varepsilon \quad \text{п. в. на } [t_i, t_{i+1}].$$

Подставляя эту оценку в (4.15), получим

$$V'(t) \le 2\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, (f(t_i, \widetilde{y}_i) - (t, y(t)))u_*(t)\rangle + \alpha|u_*(t)|^2 + \\ + \varepsilon + M_3(h + \delta) \quad \text{п. в. на } [t_i, t_{i+1}].$$

Первое слагаемое из правой части полученного неравенства нетрудно оценить сверху по аналогии с (4.14):

$$|\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, (f(t_i, \widetilde{y}_i) - f(t, y(t)))u_*(t)\rangle| \le \\ \le (M_1 T + 2(K_0 + \delta_0))L(h + \delta + M_0 h)|P|,$$

поэтому

$$V'(t) \le \alpha|u_*(t)|^2 + M_4(\delta + h + \varepsilon) \quad \text{п. в. на } [t_i, t_{i+1}] \qquad (4.16)$$

при произвольном i, $0 \le i \le N-1$. Это значит, что оценка (4.16) верна п. в. на $[0, T]$. Интегрируя (4.16) на отрезке $[0, t]$, получим

$$V(t) \le V(0) + \alpha \int_0^t |u_*(\tau)|^2 d\tau + M_4 T(\delta + h + \varepsilon).$$

Вспоминая определение функции Ляпунова и равенство $z_h(0) = \widetilde{y}_0$, с учетом (4.2) при $i = 0$ имеем

$$|z_h(t) - y(t)|^2 + \alpha \int_0^t |u_h(\tau)|^2 d\tau \le$$

$$\le |z_h(0) - y(0)|^2 + \alpha \int_0^t |u_*(\tau)|^2 d\tau + M_4 T(\delta + h + \varepsilon) \le$$

$$\le \alpha \int_0^T |u_*(\tau)|^2 d\tau + M_5(\delta + h + \varepsilon) \qquad \forall t \in [0, T].$$

Отсюда следует, что

$$\max_{0 \le t \le T} |z_h(t) - y(t)|^2 \le \alpha\|u_*\|^2_{L^2_r(0,T)} + M_5(\delta + h + \varepsilon), \qquad (4.17)$$

$$\max_{0 \le t \le T} \int_0^t |u_h(\tau)|^2 d\tau = \int_0^T |u_h(\tau)|^2 d\tau = \|u_h\|^2_{L^2_r} \le \\ \le \|u_*\|^2_{L^2_r} + M_5 \tfrac{\delta + h + \varepsilon}{\alpha}. \qquad (4.18)$$

Из оценки (4.17) с учетом того, что $h = h(\delta) \to 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta) \to 0$, $\alpha = \alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, получаем, что поводырь $z_h(t)$ равномерно на $[0, T]$ сходится к $y(t) = y(t, u_*)$. Далее, из оценки (4.18) и условия $\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0$ следует, что семейство функций $\{u_h(t)\}_{h>0}$ ограничено в норме $L^2_r(0, T)$ (кстати, это также вытекает из ограниченности множества P), поэтому множество слабых в $L^2_r(0, T)$ предельных точек этого семейства при $h \to 0$ непусто [136]. Пусть $v_* = v_*(t)$ — произвольная слабая предельная точка семейства $\{u_h(t)\}$ при $h \to 0$, т. е. существует последовательность $\{h_k\} \to 0$, такая, что $u_{h_k}(t) \to v_*(t)$ слабо в $L^2_r(0, T)$. Покажем, что

$$v_* \in U_* = \{u \in U : y(t, v_*) = y(t) = y(t, u_*), \quad 0 \le t \le T\}.$$

Прежде всего заметим, что множество U сильно замкнуто в $L^2_r(0, T)$ — это доказывается так же, как была доказана сильная замкнутость U_* в теореме 3.1. Отсюда и из выпуклости U следует слабая замкнутость U [29]. Поскольку $u_{h_k} \in U$ и $\{u_{h_k}\} \to v_*$ слабо, то $v_* \in U$. Покажем, что $y(t, v_*) = y(t)$, $0 \le t \le T$. Из (4.4) при $t = t_{i+1}$ имеем

$$z_h(t_{i+1}) = z_h(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t_i, \widetilde{y}_i)u_i + g(t_i, \widetilde{y}_i)]d\tau, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

Суммируя эти равенства и учитывая, что $z_h(0) = \widetilde{y}_0$, получаем

$$z_h(t_i) = \widetilde{y}_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [f(t_j, \widetilde{y}_j)u_j + g(t_j, \widetilde{y}_j)]d\tau.$$

Введем кусочно-постоянные функции

$$t_h(\tau) = t_j, \quad \tau \in [t_j, t_{j+1}], \qquad y_h(\tau) = \tilde{y}_j, \quad \tau \in [t_j, t_{j+1}],$$

и перепишем полученное выражение для $z_h(t_i)$ в виде

$$z_h(t_i) = \tilde{y}_0 + \int_0^{t_i} [f(t_h(\tau), y_h(\tau))u_h(\tau) + g(t_h(\tau), y_h(\tau))]d\tau.$$

Сложив это равенство с $z_h(t)$ из (4.4), получим

$$z_h(t) = \tilde{y}_0 + \int_0^t [f(t_h(\tau), y_h(\tau))u_h(\tau) + g(t_h(\tau), y_h(\tau))]d\tau \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.19}$$

Совершим в (4.19) предельный переход при $h = h_k \to 0$. По доказанному $z_h(t)$ сходится к $y(t)$ равномерно на $[0,T]$, а из (4.2), (2.5) для $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$ имеем

$$|y_h(\tau) - y(\tau)| = |\tilde{y}_j - y(\tau)| \le |\tilde{y}_j - y(t_j)| + |y(t_j) - y(\tau)| \le \delta + M_0 h.$$

Это значит, что $y_h(\tau) \to y(\tau)$ равномерно на $[0,T]$. Аналогично $t_h(\tau) \to \tau$ равномерно на $[0,T]$. Вспоминая, что $u_{h_k} \to v_*$ слабо в $L^2_r(0,T)$, и рассуждая также, как при переходе от (2.11) к (2.13), из (4.19) при $h = h_k \to 0$ получим

$$y(t) = y_0 + \int_0^t [f(\tau, y(\tau))v_*(\tau) + g(\tau, y(\tau))]d\tau.$$

Это означает, что $y(t) = y(t, v_*)$, $0 \le t \le T$. Таким образом, $v_* \in U_*$. Отсюда, учитывая, что u_* — элемент из U_* с минимальной нормой, а также слабую полунепрерывность снизу нормы и условие $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0$, из неравенства (4.18) будем иметь

$$\|u_*\|^2_{L^2_r} \le \|v_*\|^2_{L^2_r} \le \varliminf_{k\to\infty} \|u_{h_k}\|^2_{L^2_r} \le \varlimsup_{k\to\infty} \|u_{h_k}\|^2_{L^2_r} \le \|u_*\|^2_{L^2_r}.$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_{h_k}\|_{L^2_r} = \|u_*\|_{L^2_r} = \|v_*\|_{L^2_r}$. Так как нормальное решение в U_* единственно, это возможно только при $u_* = v_*$. Таким образом, семейство $\{u_h(t)\}$ имеет единственную слабую в $L^2_r(0,T)$ предельную точку, равную u_*, причем $\lim\limits_{h\to 0} \|u_h\|_{L^2_r} = \|u_*\|_{L^2_r}$. Тогда

$$\|u_h - u_*\|^2_{L^2_r} = \|u_h\|^2_{L^2_r} - 2\langle u_*, u_h\rangle_{L^2_r} + \|u_*\|^2_{L^2_r} \to 0$$

$$\text{при} \quad h = h(\delta) \to 0.$$

Наконец, согласно (4.19)

$$z'_h(t) = f(t_h(t), y_h(t))u_h(t) + g(t_h(t), y_h(t)), \quad 0 \le t \le T. \tag{4.20}$$

Так как мы уже доказали, что

$$\|u_h - u_*\|_{L^2_r} \to 0, \qquad \|y_h - y\|_{C_n} \to 0, \qquad |t_h(t) - t|_C \to 0,$$

правая часть уравнения (4.20) сходится в норме $L^2_n(0,T)$ к $f(t, y(t))\, u_*(t) + g(t, y(t)) = y'(t)$. Это означает, что $\|z'_h - y'\|_{L^2_n} \to 0$ при $h = h(\delta) \to 0$. Теорема 4.1 доказана.

Данная теорема дает обоснование выбора элемента $\tilde{u}_\delta = u_{h(\delta)}$ в качестве приближенного решения обратной задачи (4.1), (4.2).

§ 5. Метод статической регуляризации

Рассмотрим обратную задачу из § 1, считая, что для получения ее приближенного решения используется вся совокупность измерений сразу. А именно: пусть в заданные дискретные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ проведены измерения значений траектории $y(t)$, $0 \le t \le T$, системы

$$y' = f(t,y)u(t) + g(t,y), \quad 0 \le t \le T, \quad y(0) = y_0, \tag{5.1}$$

при каком-то заранее неизвестном управлении

$$u = u(t) \in U = \{u \in L^\infty_r(0,T): \quad u(t) \in P \text{ п. в. на } [0,T]\}$$

и определены приближения $\widetilde{y}_i$ для $y(t_i)$, удовлетворяющие условиям

$$|\widetilde{y}_i - y(t_i)| \leq \delta, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \quad 0 < \delta \leq \delta_0. \tag{5.2}$$

Требуется, зная $f(t,y)$, $g(t,y)$, T, P, δ, $\widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_{N-1}$, построить приближение для управления $u = u_* \in U_* = \{u \in U : y(t,u) = y(t), 0 \leq t \leq T\}$, имеющего минимальную L^2_r-норму. Таким образом, в задаче (5.1), (5.2), в отличие от задачи (4.1), (4.2), измерения $\widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_{N-1}$ известны все сразу, и управление $\widetilde{u}_\delta(t)$, $0 \leq t \leq T$, являющееся приближением в $L^2_r(0,T)$ для нормального решения u_*, строится сразу на всем отрезке $[0,T]$.

Для решения этой задачи можно использовать метод, который, в отличие от метода динамической регуляризации из § 4, будем называть методом статической регуляризации. Ниже увидим, что этот метод по сути является разностной аппроксимацией метода регуляризации Тихонова для решения задачи (5.1), (5.2), записанной в вариационной форме.

Опишем метод статической регуляризации. Как и в § 4, в этом методе наряду с кусочно-постоянным управлением $u_h(t)$, $0 \leq t \leq T$, строится кусочно-линейная функция (поводырь) $z_h(t)$, $0 \leq t \leq T$, следующим образом. Сначала решается задача минимизации, представляющая собой задачу оптимального управления с дискретным временем:

$$t_\delta([v]) \equiv \max_{0 \leq i \leq N-1} |z_{i+1}([v]) - \widetilde{y}_{i+1}| + \alpha \sum_{i=0}^{N-1} h_i |v_i|^2 \to \inf, \quad [v] \in U_h, \tag{5.3}$$

где $[v] = (v_0, \ldots, v_{N-1})$ — дискретное управление, $U_h = \{[v] = (v_0, \ldots, v_{N-1}) : v_i \in P, i = \overline{0, N-1}\}$, $h_i = t_{i+1} - t_i$, $\alpha > 0$, $[z] = z([v]) = (z_0, \ldots, z_N)$ — траектория дискретной системы

$$z_{i+1} = z_i + [f(t_i, \widetilde{y}_i) v_i + g(t_i, \widetilde{y}_i)] h_i, \quad i = \overline{0, N-1} \quad z_0 = \widetilde{y}_0, \tag{5.4}$$

соответствующая управлению $[v] \in U_h$.

Заметим, что траектория $z([v])$ уравнения (5.4) линейно зависит от $[v]$ и задача (5.3), (5.4) является конечномерной задачей математического программирования с сильно выпуклой целевой функцией на выпуклом замкнутом ограниченном множестве U_h, она имеет (притом единственное) решение $[u] = (u_0, \ldots, u_{N-1}) \in U_h$ [10]. Важно заметить, что в точном определении минимума $[u]$ в задаче (5.3), (5.4) нет необходимости — достаточно найти $[u]$ из условий

$$[u] \in U_h, \quad t_\delta([u]) \leq \inf_{[v] \in U_h} t_\delta([v]) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.5}$$

Ниже предполагаем, что управление $[u] = (u_0, \ldots, u_{N-1})$ и соответствующая траектория $z([u]) = (z_0([u]), \ldots, z_N([u]))$, удовлетворяющие условиям (5.4), (5.5), уже известны. Полагаем

$$u_h(t) = u_i,$$

$$z_h(t) = z_h(t, u_h) = z_i([u]) + (f(t_i, \widetilde{y}_i) u_i + g(t_i, \widetilde{y}_i))(t - t_i),$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = \overline{0, N-1}. \tag{5.6}$$

Метод статической регуляризации описан.

Остается указать условия согласования параметров α, ε, $h = \max\limits_{0 \leq i \leq N-1} (t_{i+1} - t_i)$ с параметром погрешности δ, условия на задачу (5.1), (5.2), обеспечивающие его сходимость. Для простоты ниже ограничимся рассмотрением случая, когда сетка $\{t_i\} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ равномерная, т. е. $h = \frac{T}{N}$, $t_i = ih$, $i = \overline{0, N-1}$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 4.1. Тогда функции $u_h(t)$, $z_h(t)$, $0 \leq t \leq T$, определяемые методом (5.3)–(5.6), таковы, что*

$$\|u_{h(\delta)} - u_*\|_{L^2_r} \to 0, \quad \|z_{h(\delta)} - y\|_{C_n} \to 0, \quad \|z'_{h(\delta)} - y'\|_{L^2_n} \to 0$$

$$\text{при} \quad \delta \to 0,$$

где u_* — нормальное решение обратной задачи (5.1), (5.2), $y = y(t) = y(t, u_*)$, $0 \leq t \leq T$.

Доказательство. Для нормального решения u_* задачи (5.1), (5.2) составим дискретное приближение $[u_*] = (u_{*0}, \dots \dots, u_{*N-1})$, где

$$u_{*i} = \frac{1}{h} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} u_*(\tau) d\tau, \qquad i = \overline{0, N-1}.$$

Введем кусочно-постоянную функцию $u_{*h} = u_{*h}(t) : u_{*h}(t) = u_{*i}$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$. Поскольку

$$u_* \in U = \{u_* = u_*(t) \in L_r^\infty(0,T); \quad u_*(t) \in P \text{ п. в. на } [0,T]\},$$

множество P выпукло и замкнуто, заключаем, что $[u_*] \in U_h$, $u_{*h} \in U$. Отсюда и из условия (5.5) имеем

$$t_\delta([u]) \le \inf_{[v]\in U_h} t_\delta([v]) + \varepsilon \le t_\delta([u_*]) + \varepsilon. \tag{5.7}$$

Покажем, что

$$t_\delta([u_*]) + \varepsilon = \max_{0\le i\le N-1} |z_{i+1}([u_*]) - \widetilde{y}_{i+1}| + \alpha \sum_{i=0}^{N-1} h|u_{*i}|^2 + \varepsilon \le$$

$$\le C_0(h(\delta) + \varepsilon(\delta) + \delta) + \alpha(\delta)\|u_*\|^2_{L^2_r}. \tag{5.8}$$

Здесь и ниже через $C_0, C_1, \dots$ обозначаются постоянные, не зависящие от h, ε, δ, α. Заметим, что

$$|z_{i+1}([u_*]) - \widetilde{y}_{i+1}| \le |z_{i+1}([u_*]) - y(t_{i+1}, u_{*h})| + |y(t_{i+1}, u_{*h}) -$$

$$- y(t_{i+1}, u_*)| + |y(t_{i+1}, u_*) - \widetilde{y}_{i+1}|, \qquad i = \overline{0, N-1}. \tag{5.9}$$

Оценим второе слагаемое из правой части (5.9). Из (5.1) имеем

$$y(t_{i+1}, u_{*h}) = y_0 + \sum_{j=0}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} [f(\tau, y(\tau, u_{*h}))u_{*j} + g(\tau, y(\tau, u_{*h}))] d\tau,$$

$$y(t_{i+1}, u_*) = y_0 + \sum_{j=0}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} [f(\tau, y(\tau, u_*))u_*(\tau) + g(\tau, y(\tau, u_*))] d\tau,$$

поэтому

$$|y(t_{i+1}, u_{*h}) - y(t_{i+1}, u_*)| =$$

$$= \Bigg| \sum_{j=0}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \{[f(\tau, y(\tau, u_{*h}))u_{*j} - f(\tau, y(\tau, u_*))u_*(\tau)] +$$

$$+ [g(\tau, y(\tau, u_{*h})) - g(\tau, y(\tau, u_*))]\} d\tau \Bigg| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{i} \Bigg\{ \Bigg| \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Bigg[f(\tau, y(\tau, u_{*h})) \Bigg(\frac{1}{h} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} u_*(\xi) d\xi \Bigg) - f(\tau, y(\tau, u_*))u_*(\tau) \Bigg] d\tau \Bigg| +$$

$$+ \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |g(\tau, y(\tau, u_{*h})) - g(\tau, y(\tau, u_*))| \, d\tau \Bigg\}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Bigg(f(\tau, y(\tau, u_{*h})) \frac{1}{h} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} u_*(\xi) d\xi \Bigg) d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Bigg(\frac{1}{h} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(\xi, y(\xi, u_{*h})) d\xi \Bigg) u_*(\tau) d\tau,$$

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau, y(\tau, u_*))u_*(\tau) d\tau = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Bigg(\frac{1}{h} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau, y(\tau, u_*)) d\xi \Bigg) u_*(\tau) d\tau,$$

заключаем, что

$$|y(t_{i+1}, u_{*h}) - y(t_{i+1}, u_*)| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{i} \Bigg| \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Bigg(\frac{1}{h} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (f(\xi, y(\xi, u_{*h})) - f(\tau, y(\tau, u_*))) d\xi \Bigg) u_*(\tau) d\tau \Bigg| +$$

$$+ \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |g(\tau, y(\tau, u_{*h})) - g(\tau, y(\tau, u_*))| d\tau.$$

Отсюда, учитывая условие Липшица (2.3), (2.5) для $f(t,y)$, $g(t,y)$, $y(t,u)$ и неравенство $|u_*(\tau)| \le |P|$ п.в. на $[0,T]$, имеем

$$|y(t_{i+1},u_{*h}) - y(t_{i+1},u_*)| \le \sum_{j=0}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L|P|(|\xi-\tau|+$$

$$+|y(\xi,u_{*h})-y(\tau,u_*)|)d\xi)d\tau + \sum_{j=0}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L|y(\tau,u_{*h})-y(\tau,u_*)|d\tau \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\frac{1}{h}L|P| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (|\xi-\tau| + |y(\xi,u_{*h}) - y(t_j,u_{*h})|+$$

$$+|y(t_j,u_{*h}) - y(t_j,u_*)| + |y(t_j,u_*) - y(\tau,u_*)|)d\xi]d\tau+$$

$$+\sum_{j=0}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L(|y(\tau,u_{*h}) - y(t_j,u_{*h})| + |y(t_j,u_{*h}) - y(t_j,u_*)|+$$

$$+|y(t_j,u_*)-y(\tau,u_*)|)d\tau \le \sum_{j=0}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{1}{h}L|P| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (|\xi-\tau|+M_0|\xi-t_j|+$$

$$+|y(t_j,u_{*h})-y(t_j,u_*)|+M_0|\tau-t_j|)d\xi d\tau + \sum_{j=0}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L(2M_0|\tau-t_j|+$$

$$+|y(t_j,u_{*h}) - y(t_j,u_*)|)d\tau \le L(|P|+1) \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3}h^3 + 2M_0h^3+\right.$$

$$\left.+h^2|y(t_j,u_{*h}) - y(t_j,u_*)|\right) \le L(|P|+1) \sum_{j=0}^{i}(h^2 + 2M_0h^2+$$

$$+h|y(t_j,u_{*h}) - y(t_j,u_*)|) \le L(|P|+1)(T+2M_0T)h+$$

$$+L(|P|+1)h \sum_{j=0}^{i} |y(t_j,u_{*h}) - y(t_j,u_*)|, \qquad i = 0,1,\dots,N-1.$$

Далее, воспользуемся известным дискретным аналогом неравенства Гронуолла (см., например, [9, с. 110]): если $0 \le \varphi_{i+1} \le a + b \sum_{j=0}^{i} \varphi_j$, a, b — положительные постоянные, то справедлива оценка

$$0 \le \varphi_i \le a(1+b)^i, \qquad i = \overline{0,N}.$$

С помощью этого неравенства получим

$$\varphi_{i+1} = |y(t_{i+1},u_{*h}) - y(t_{i+1},u_*)| \le$$

$$\le hL(|P|+1)T(1+2M_0)(hL(|P|+1)+1)^{i+1}, \quad i = \overline{0,N-1}.$$

Учитывая, что $1+x \le e^x$ при $x \ge 0$, отсюда имеем

$$\begin{gathered} |y(t_{i+1},u_{*h}) - y(t_{i+1},u_*)| \le \\ \le hL(|P|+1)T(1+2M_0)e^{L(|P|+1)h(i+1)} \le \\ \le hL(|P|+1)T(1+2M_0)e^{L(|P|+1)T} \equiv C_1h \\ \forall i = \overline{0,N-1}. \end{gathered} \tag{5.10}$$

Далее, оценим первое слагаемое из правой части (5.9). Заметим, что

$$|z_{i+1}([u_*]) - y(t_{i+1},u_{*h})| = |z_i([u_*]) - y(t_i,u_{*h})-$$

$$-\int_{t_j}^{t_{j+1}} [f(t_i,\widetilde{y}_i)u_{*i}+g(t_i,\widetilde{y}_i)-f(\tau,y(\tau,u_{*h}))u_{*i}-g(\tau,y(\tau,u_{*h}))]d\tau| \le$$

$$\le |z_i([u_*])-y(t_i,u_{*h})|+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(|P|+1)(|t_i-\tau|+|\widetilde{y}_i-y(\tau,u_{*h})|) \le$$

$$\le |z_i([u_*]) - y(t_i,u_{*h})| + L(|P|+1)\left[\frac{1}{2}h^2 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (|\widetilde{y}_i - y(t_i,u_*)|+\right.$$

$$\left.+|y(t_i,u_*) - y(t_i,u_{*h})| + |y(t_i,u_{*h}) - y(\tau,u_{*h})|)d\tau\right].$$

Отсюда с учетом (2.5), (5.2), (5.10) получим

$$|z_{i+1}([u_*]) - y(t_{i+1}, u_{*h})| \leq$$
$$\leq |z_i([u_*]) - y(t_i, u_{*h})| + L(|P|+1)\left(\frac{h^2}{2} + h\delta + C_1h^2 + M_0h^2\right) \leq$$
$$\leq |z_i([u_*]) - y(t_i, u_{*h})| + C_2(h^2 + h\delta), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Суммируя эти неравенства, будем иметь

$$|z_{i+1}([u_*]) - y(t_{i+1}, u_{*h})| \leq$$
$$\leq |z_0([u_*]) - y(0, u_{*h})| + \sum_{j=0}^{i} C_2h(h+\delta) \leq$$
$$\leq |\tilde{y}_0 - y_0| + C_2T(h+\delta) \leq \delta + C_2T(h+\delta) \equiv C_3(h+\delta),$$
$$i = \overline{0, N-1}. \tag{5.11}$$

Для третьего слагаемого из правой части (5.9) в силу (5.2) имеем

$$|y(t_{i+1}, u_*) - \tilde{y}_{i+1}| \leq \delta. \tag{5.12}$$

Подставив оценки (5.10)-(5.12) в (5.9), получим

$$|z_{i+1}([u_*]) - \tilde{y}_{i+1}| \leq C_4(h+\delta), \quad i = \overline{0, N-1}. \tag{5.13}$$

Наконец, заметим, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} h|u_{*i}|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} h\left(\frac{1}{h}\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_*(\tau)d\tau\right)^2 \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} |u_*(\tau)|^2 d\tau = \int_0^T |u_*(\tau)|^2 d\tau = \|u_*\|^2_{L^2_r}. \tag{5.14}$$

Из оценки (5.13), (5.14) следует оценка (5.8). Из (5.7), (5.8) с учетом определения (5.3) функции $t_\delta([v])$ имеем

$$\max_{0\leq i\leq N-1} |z_{i+1}([u]) - \tilde{y}_{i+1}| + \alpha(\delta)\sum_{i=0}^{N-1} h_i|u_i|^2 \leq$$
$$\leq C_0(h(\delta) + \varepsilon(\delta) + \delta) + \alpha(\delta)\|u_*\|^2_{L^2_r}.$$

Отсюда следуют два важных неравенства:

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_i|u_i|^2 = \int_0^T |u_h(t)|^2 dt \leq C_0\frac{h(\delta)+\varepsilon(\delta)+\delta}{\alpha(\delta)} + \|u_*\|^2_{L^2_r}, \tag{5.15}$$

$$\max_{0\leq i\leq N-1} |z_{i+1}([u]) - \tilde{y}_{i+1}| \leq C_5(h(\delta) + \varepsilon(\delta) + \alpha(\delta) + \delta). \tag{5.16}$$

Покажем, что

$$\max_{0\leq t\leq T} |z_h(t) - y(t, u_*)| \leq C_6(h(\delta) + \varepsilon(\delta) + \alpha(\delta) + \delta). \tag{5.17}$$

С этой целью заметим, что в силу (5.2), (2.4)

$$|\tilde{y}_{i+1}| \leq |\tilde{y}_{i+1} - y(t_{i+1}, u_*)| + |y(t_{i+1}, u_*)| \leq K_0 + \delta_0,$$

а значит,

$$|f(t_i, \tilde{y}_i)u_i + g(t_i, \tilde{y}_i)| \leq$$
$$\leq \sup_{0\leq t\leq T;\ |y|\leq K_0+\delta_0} (|f(t,y)| + |g(t,y)|)(|P|+1) = K_2, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Отсюда и из (5.6) получаем

$$|z_h(t) - z_h(t_{i+1})| \leq |z_h(t) - z_h(t_i)| + |z_h(t_i) - z_h(t_{i+1})| \leq 2K_2h$$
$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = \overline{0, N-1}. \tag{5.18}$$

Зафиксируем произвольный момент $t \in [0, T]$. Пусть для определенности $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Тогда с учетом (5.2), (5.16), (5.18), (2.5) имеем

$$|z_h(t) - y(t, u_*)| \leq |z_h(t) - z_h(t_{i+1})| + |z_h(t_{i+1}) - \tilde{y}_{i+1}| +$$
$$+ |\tilde{y}_{i+1} - y(t_{i+1}, u_*)| + |y(t_{i+1}, u_*) - y(t, u_*)| \leq$$
$$\leq C_6(h(\delta) + \varepsilon(\delta) + \alpha(\delta) + \delta) \qquad \forall t \in [0, T].$$

Оценка (5.17) получена. Остается заметить, что оценки (5.15), (5.17) совпадают с оценками (4.16), (4.17), поэтому для завершения доказательства теоремы 5.1 достаточно повторить рассуждения из заключительной части доказательства теоремы 4.1.

Из теоремы 5.1 следует, что в качестве приближения в $L^2_r(0,T)$ нормального решения u_* обратной задачи (5.1), (5.2) можно взять элемент $\widetilde{u}_\delta = u_{h(\delta)}(t)$, $0 \le t \le T$.

Заметим, что метод (5.3)–(5.6) по сути представляет собой разностную аппроксимацию метода регуляризации Тихонова для следующей задачи оптимального управления [10; 36; 49; 50; 63; 109]:

$$J(u) = \max_{0\le t\le T} |y(t,u) - y(t)| \to \inf, \tag{5.19}$$

$$y' = f(t,y)u(t) + g(t,y), \quad 0 \le t \le T; \quad y(0) = y_0, \tag{5.20}$$

$$u = u(t) \in U = \{u(t) \in L^2_r(0,T) : u(t) \in P, \text{ п. в. на } [0,T]\}, \tag{5.21}$$

где $y(t)$, $0 \le t \le T$, — известная непрерывная функция.

Метод регуляризации Тихонова предполагает переход от задачи (5.19)–(5.21) к задаче минимизации функции

$$T(u) = J(u) + \alpha\|u\|^2_{L^2_r} \to \inf \tag{5.22}$$

при условиях (5.20), (5.21). На сетке

$$\{t_j\} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$$

задачу (5.22), (5.20), (5.21) можно заменить следующей аппроксимирующей разностной задачей:

$$t([v]) = \max_{0\le i\le N-1} |y_{i+1}([v]) - y(t_i)| + \alpha \sum_{i=0}^{N-1} h_i|v_i|^2 \to \inf, \tag{5.23}$$

$$y_{i+1}([v]) = y_i([v]) + [f(t_i, y_i([v]))v_i + g(t_i, y_i([v]))]h_i,$$

$$y_0([v]) = y_0, \qquad h_i = t_{i+1} - t_i, \tag{5.24}$$

$$[v] \in U_h = \{[v] = (v_0, \ldots, v_{N-1}) : \ v_i \in P, \ i = \overline{0, N-1}\}. \tag{5.25}$$

Остается заметить, что в задачах (5.19)–(5.21), (5.23)–(5.25) мы учли не всю информацию, предусмотренную в исходной обратной задаче (5.1), (5.2). Нам известно, что в (5.19) $y(t)$ — это не просто какая-то непрерывная функция, а траектория системы (5.20), соответствующая некоторому управлению

$$u = u(t) \in U_* = \{u(t) \in U, \quad y(t,u) = y(t), \quad 0 \le t \le T\},$$

в частности, $y(t) = y(t,u_*)$, где u_* — нормальное решение обратной задачи (5.1), (5.2) и $J_* = \inf\limits_{u\in U} J(u) = J(u_*) = 0$. С учетом этой информации сформулируем следующую задачу оптимального управления:

$$\max_{0\le t\le T} |z(t,u) - y(t)| \to \inf, \quad u \in U, \tag{5.26}$$

$$z' = f(t, y(t))u(t) + g(t, y(t)), \quad 0 \le t \le T; \quad z(0) = y_0. \tag{5.27}$$

Отметим, что система (5.27) линейна относительно $z = z(t,u)$. Нетрудно видеть, что при $y(t) = y(t,u_*)$ задачи (5.19)–(5.21) и (5.26), (5.27) равносильны, т. е. нижние грани целевых функционалов одинаковы и равны нулю, множества точек минимума в обеих задачах совпадают со множеством U_*. Применяя разностную схему Эйлера к задаче Коши (5.27), получим

$$z_{i+1} = z_i + [f(t, y(t_i))v_i + g(t, y(t_i))]h_i, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad z_0 = y_0.$$

Заменяя здесь и в (5.23) $y(t_i)$ на $\widetilde{y}_i$ из (5.2), $y_{i+1}([v])$ на $z_{i+1}([v]) = z_{i+1}$, приходим к задаче (5.3), (5.4). Таким образом, изложенный выше метод статической регуляризации для решения обратной задачи (5.1), (5.2) вполне может быть истолкован как разностная аппроксимация метода Тихонова для задачи (5.19)–(5.21) при дополнительной информации о том, что

$$J_* = J(u_*) = 0, \quad y(t) = y(t,u_*), \quad 0 \le t \le T,$$

и информации об измерениях траектории $y_0, \ldots, y_{N-1}$ из (5.2).

Заметим также, что в (5.19)–(5.21) функционал $J(u)$ можно было бы заменить, например, функционалом

$$J_1(u) = \int_0^T |y(t,u) - y(t)|^2 dt. \tag{5.28}$$

Тогда в приведенной цепочке (5.19)–(5.21) $\Rightarrow$ (5.22), (5.20), (5.21) $\Rightarrow$ (5.23)–(5.25) $\Rightarrow$ (5.26), (5.27) $\Rightarrow$ (5.3), (5.4), приведшей нас от задачи (5.19)–(5.21) к задаче (5.3), (5.4), мы могли бы заменить функционал (5.19) и его разностный аналог $\max\limits_{0\le i\le N-1} |y_{i+1}([v]) - y(t_{i+1})|$ на $J_1(u)$ и его разностный аналог $\sum\limits_{i=0}^{N-1} h_i|y_{i+1}([v]) - y(t_{i+1})|^2$, и в результате вместо (5.3), (5.4) пришли бы к задаче минимизации функции

$$t_{1\delta}([v]) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i|z_{i+1}([v]) - \widetilde{y}_{i+1}|^2 + \alpha \sum_{i=0}^{N-1} h|v_i|^2, \quad [v] \in U_h, \tag{5.29}$$

при условиях (5.4). Ради справедливости надо признать, что функция (5.29) имеет более высокую гладкость, чем функция (5.3), и поэтому задача (5.29), (5.4) более удобна для численного решения, чем задача (5.3), (5.4). Что касается сходимости метода статической регуляризации, основанной на задаче (5.29), (5.4), то справедлив полный аналог теоремы 5.1. Тем не менее следует заметить, что функционал (5.19) и метод (5.3), (5.4) позволяют полнее учитывать имеющийся способ задания информации: $\max\limits_{0\le i\le N-1} |\widetilde{y}_i - y(t_i)| \le \delta$ (5.2), в то время как для использования функционала (5.28) и метода (5.29), (5.4) было бы вполне достаточно иметь информацию о погрешностях измерений в более слабой норме:

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_i|\widetilde{y}_i - y(t_i)|^2 \le \delta^2.$$

Кроме того, успехи негладкого анализа последних лет (см., например, [22; 37]) позволяют надеяться, что негладкость функции (5.3) не является большим препятствием для численного решения задачи (5.3), (5.4) и определения управления $[u]$ из условия (5.5).

Вопрос о том, какой из методов регуляризации, изложенных в §§4, 5, лучше, особого смысла не имеет, так как выбор того или иного метода определяется заданными режимами поступления и обработки информации. Метод динамической регуляризации предназначен для применения в ситуации, когда нужно побыстрее, в режиме реального времени, определять неизвестную характеристику системы, оперативно используя всю информацию, поступившую к данному моменту. В случае, когда спешить не надо и времени достаточно, чтобы дождаться поступления полной информации о проведенных измерениях, можно пользоваться методом статической регуляризации. Разумеется, когда в задаче (5.1), (5.2) известны все измерения $y_0, \ldots, y_{N-1}$, в принципе возможно использование метода динамической регуляризации, однако в этом случае есть основания считать, что метод статической регуляризации, основанный на всей совокупности имеющейся информации, позволит точнее получать приближенные решения обратной задачи (5.1), (5.2). Об этом косвенно свидетельствует также и оценка скорости сходимости поводыря к измеряемой траектории: метод статической регуляризации согласно (5.17) имеет оценку порядка $h + \varepsilon + \alpha + \delta$, а метод динамической регуляризации согласно (4.17) — порядка $(h + \varepsilon + \alpha + \delta)^{1/2}$.

В заключение заметим, что реализация метода статической регуляризации при больших N может оказаться затруднительной из-за большой размерности задачи, требующей соответствующего объема памяти. И здесь возможно применение различных промежуточных вариантов метода регуляризации, когда информация об измерениях $y_0, \ldots$ $\ldots, y_{N-1}$ траектории используется отдельными порциями $(y_0, \ldots, y_{k_1})$, $(y_{k_1+1}, \ldots, y_{k_2})$, $\ldots$, $(y_{k_m+1}, \ldots, y_{N-1})$ и каждая отдельная порция служит для определения управления $u_h(t)$ последовательно на отрезках $[0, t_{k_1+1}]$, $[t_{k_1+1}, t_{k_2+1}], \ldots$ $\ldots, [t_{k_m+1}, T]$ с помощью метода статической регуляризации. С этой точки зрения методы из §§4, 5 занимают крайние положения: в § 4 рассмотрен случай, когда количество порций равно N и каждая из них состоит из одного измерения, в § 5 — всего одна порция, представляющая собой всю совокупную информацию об измерениях.

§ 6. О задаче численного дифференцирования

Пусть $y(t), 0 \le t \le T$, — непрерывно-дифференцируемая функция, производная $y'(t)$ которой ограничена:

$$|y'(t)| \le R, \qquad 0 \le t \le T, \qquad R = \mathrm{const} > 0.$$

Пусть в точках некоторой разностной сетки $\{t_i, i = \overline{0, N-1}\}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$, вычисляются (измеряются) значения этой функции. Предполагается, что вместо точных значений $y(t_i)$ известны их приближения $\widetilde{y}_i$, такие, что

$$|\widetilde{y}_i - y(t_i)| \le \delta, \qquad i = \overline{0, N-1}, \qquad 0 < \delta \le \delta_0. \tag{6.1}$$

Требуется, зная величины $R, \ \delta, \ \widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_{N-1}$, построить функцию $\widetilde{u}_\delta = \widetilde{u}_\delta(t) \in L^\infty(0,T)$, $|\widetilde{u}_\delta(t)| \le R$ п. в. на $[0,T]$, являющуюся приближением производной $y'(t)$, $0 \le t \le T$, в следующем смысле:

$$\lim_{\delta \to 0} \|\widetilde{u}_\delta - y'\|_{L^2} = 0, \tag{6.2}$$

причем подразумевается, что шаг сетки

$$h = \max_{0 \le i \le N-1} (t_{i+1} - t_i) = h(\delta) \to 0$$

при $\delta \to 0$; другие условия на $h(\delta)$ см. ниже.

Нетрудно убедиться в том, что сформулированная задача численного дифференцирования является частным случаем обратной задачи, рассмотренной выше в § 1. В самом деле, введем динамическую систему

$$y'(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T; \quad y(0) = y_0, \tag{6.3}$$

где $u = u(t) \in U = \{u(t) \in L^\infty(0,T) : |u(t)| \le R$ для п. в. $t \in [0,T]\}$ — множество допустимых управлений.

Задача восстановления допустимого управления по известной (наблюдаемой) траектории $y(t), 0 \le t \le T$, системы (6.3), очевидно, равносильна задаче определения производной $y'(t)$, $0 \le t \le T$. С другой стороны, эта задача представляет собой частный случай обратной задачи из § 1 при

$n = r = 1$, $f(t,y) \equiv 1$, $g(t,y) \equiv 0$, $P = \{u \in E^1 : \ |u| \le R\}$ и, следовательно, для ее решения могут быть использованы методы регуляризации, изложенные в §§4, 5.

Переформулируем эти методы применительно к задаче численного дифференцирования.

Начнем с метода динамической регуляризации, считая, что величины $\{\widetilde{y}_i\}$ определяются последовательно во времени и нам нужно в режиме реального времени оперативно организовать процесс восстановления производной (скорости движения) на частичных отрезках $[t_i, t_{i+1}]$ для $i = 0, 1, \ldots$ последовательно.

Согласно § 4 при $i = 0$ полагаем $z_h(0) = \widetilde{y}_0$ и, решая вспомогательную задачу минимизации

$$t_0(u) = 2(z_h(0) - \widetilde{y}_0)u + \alpha u^2 \equiv \alpha u^2 \to \inf, \quad |u| \le R, \quad \alpha > 0,$$

находим ее решение $u_0 = 0$; затем полагаем $u_h(t) \equiv u_0 = 0$, $z_h(t) = \widetilde{y}_0 + u_0(t - t_0) \equiv \widetilde{y}_0$ при всех $t \in [0, t_1]$. Пусть для некоторого i, $0 \le i < N - 1$, уже определены $u_h(t)$, $z_h(t)$, $0 \le t \le t_i$, и пусть нам известно приближение $\widetilde{y}_i$ из (6.1). Тогда решаем следующую вспомогательную задачу минимизации:

$$t_i(u) = 2(z_h(t_i) - \widetilde{y}_i)u + \alpha u^2 \to \inf, \quad |u| \le R, \quad \alpha > 0, \tag{6.4}$$

и определяем точку минимума u_i. Рассматривая различные возможные расположения графика квадратного трехчлена $t_i(u)$ относительно отрезка $|u| \le R$, нетрудно сообразить, что

$$u_i = \begin{cases} u_{i*}, & \text{если} \quad |u_{i*}| \le R, \quad \text{где} \quad t'(u_{i*}) = 0; \\ R, & \text{если} \quad t_i'(R) < 0; \\ -R, & \text{если} \quad t_i'(-R) > 0. \end{cases}$$

С учетом того, что $t_i'(u) = 2((z_h(t_i) - \widetilde{y}_i) + \alpha u)$, формулу для u_i можно представить в более удобной форме:

$$u_i = \begin{cases} \frac{z_h(t_i) - \widetilde{y}_i}{\alpha}, & \text{если} \quad |z_h(t_i) - \widetilde{y}_i| \le \alpha R; \\ -R\,\mathrm{sign}(z_h(t_i) - \widetilde{y}_i), & \text{если} \quad |z_h(t_i) - \widetilde{y}_i| > \alpha R. \end{cases}$$

Далее, зная u_i, полагаем

$$u_h(t) = u_i, \quad z_h(t) = z_h(t_i) + u_i(t - t_i) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Процесс определения $u_h(t)$, $z_h(t)$ заканчивается при $i = N-1$. Нетрудно видеть, что

$$z_h'(t) = u_h(t) \quad \text{и} \quad z_h(t) = \widetilde{y}_0 + \int\limits_0^t u_h(\tau)d\tau \quad \forall t \in [0, T].$$

Сходимость описанного метода следует из теоремы 4.1: если шаг сетки $h = h(\delta)$ и параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ таковы, что

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta + h(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0, \tag{6.5}$$

то для управления $\widetilde{u}_\delta = u_{h(\delta)}(t)$ справедливо равенство (6.2).

Метод статической регуляризации, как отмечалось выше, применяется в случае, когда известны результаты $\widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_{N-1}$ всех измерений из (6.1) и все они могут быть использованы при построении искомого приближения $\widetilde{u}_\delta = \widetilde{u}_\delta(t)$ со свойством (6.2). Согласно § 5 этот метод здесь сводится к решению задачи минимизации:

$$t_\delta([v]) = \max_{0 \le i \le N-1} |z_{i+1}([v]) - \widetilde{y}_{i+1}| + \alpha \sum_{i=0}^{N-1} h_i v_i^2 \to \inf, \quad [v] \in U_h, \tag{6.6}$$

где $[v] = (v_0, \ldots, v_{N-1})$ — дискретное управление, $U_h = \{[v] : v_i \in E^1, |v_i| \le R, i = \overline{0, N-1}\}$, $z([v]) = (z_0, \ldots, z_N)$ — траектория (поводырь) дискретной системы

$$z_{i+1} = z_i + v_i(t_{i+1} - t_i), \qquad i = \overline{0, N-1}, \qquad z_0 = \widetilde{y}_0.$$

В отличие от задачи (6.4) точку минимума $[u] = (u_0, \ldots, u_{N-1})$ задачи (6.6) явно представить через известные параметры не удается, и для решения этой задачи нужно использовать подходящие численные методы.

Как отмечалось в § 5, в точном определении точки минимума в задаче (6.6) нет необходимости, достаточно найти $[u]$ из условий: $[u] \in U_h$, $t_\delta([u]) \le \inf\limits_{[v] \in U_h} t_\delta([v]) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Далее, зная $[u]$, полагаем

$$u_h(t) = u_i, \quad z_h(t) = z_i + u_i(t - t_i) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Если выполнены условия (6.5) и условие согласования $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0$, то согласно теореме 5.1 метод статической регуляризации сходится и $\widetilde{u}_\delta = u_{h(\delta)}(t)$, $0 \le t \le T$, представляет собой приближение для производной $y'(t)$ в смысле равенства (6.2).

Различные методы регуляризации для решения задачи численного дифференцирования и другие аспекты этой задачи рассмотрены, например, в [24; 56; 91; 129; 159].

Завершая изложение основ техники применения и исследования сходимости метода динамической регуляризации в обратных задачах управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений, отметим, что ввиду учебного характера книги мы совершенно сознательно ограничились рассмотрением в гл. 1 лишь простейшей системы (1.1) с линейной по u и липшиц-непрерывной по (t, y) правой частью (условие (2.3)) при наличии информации о текущих измерениях полного набора фазовых координат $y(t)$. Читателям, интересующимся возможностями применения метода динамической регуляризации к другим, более сложным нелинейным управляемым системам, в которых требование липшиц-непрерывности по (t, y) может быть ослаблено до непрерывности и возможно поступление неполной информации о фазовой траектории, рекомендуем ознакомиться с работами [54–56; 58–62; 101–103; 147–149; 155; 159].

Глава II

Задача восстановления правой части параболического уравнения

§ 1. Постановка модельной задачи

В качестве модельной задачи сначала рассмотрим следующую краевую задачу для пространственно-одномерного уравнения теплопроводности [135]:

$$y_t = y_{xx} + u(t, x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < \ell; \tag{1.1}$$

$$y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=\ell} = 0, \quad 0 < t < T; \tag{1.2}$$

$$y|_{t=0} = y_0(x), \quad 0 < x < \ell; \tag{1.3}$$

где $u = u(t,\, x)$ — управление (мощность источника тепла), $y = y(t,x) = y(t,x;\,u)$ — температура стержня в момент t в точке x, соответствующая управлению $u = u(t,x)$; $y_0(x) \in L^2(0,\,\ell)$ — начальное распределение температуры стержня.

Управление $u = u(t,x)$, $(t,x) \in Q = (0,T) \times (0,\ell)$, будем называть допустимым, если $u(t,x) \in L^2(Q)$ и $u(t,\cdot) \in P$ для п. в. $t \in (0,\,T)$, где P — заданное выпуклое замкнутое множество из $L^2(0,\ell)$, например

$$P = \{v = v(x) \in L^2(0,\ell) : \|v\|^2_{L^2(0,\ell)} = \int\limits_0^l v^2(x)dx \le R^2\}$$

— шар в $L^2(0,\ell)$. Множество допустимых управлений будем обозначать через U.

Под прямой задачей будем понимать задачу определения решения краевой задачи (1.1)–(1.3) по известному допустимому управлению $u \in U$. Задачу определения допустимого управления по известному (наблюдаемому) решению $y(t,x)$ задачи (1.1)–(1.3) тогда естественно называть обратной задачей.

Будем предполагать, что измерения температуры $y = y(t,x;u_*) = y(t,x)$ проводятся в дискретные моменты времени $t_i = i\,h$, $i = \overline{0, N-1}$, где $h = T/N$, причем вместо точных значений $y(t_i,x)$, $0 \le x \le \ell$, известны некоторые их приближения $\widetilde{y}_i = \widetilde{y}_i(x)$, $0 \le x \le \ell$, удовлетворяющие условиям

$$\|\widetilde{y}_i(\cdot) - y(t_i,\cdot)\|_{L^2(0,\ell)} = \left(\int\limits_0^\ell (\widetilde{y}_i(x) - y(t_i,x))^2 dx\right)^{1/2} \le \delta, \quad 0 \le \delta \le \delta_0, \qquad i = \overline{0, N-1}. \tag{1.4}$$

Требуется, зная величины T, ℓ, δ и измерения $\widetilde{y}_i(x)$, $0 \le x \le \ell$, $i = \overline{0, N-1}$, построить управление $\widetilde{u}_\delta = \widetilde{u}_\delta(t,x) \in U$, такое что

$$\lim_{\delta\to 0} \|\widetilde{u}_\delta - u_*\|_{L^2(Q)} = 0. \tag{1.5}$$

При этом предполагается, что при построении приближенного управления $u_\delta = u_\delta(t,x)$ на каждом очередном частичном прямоугольнике $Q_i = (t_i, t_{i+1}) \times (0,\ell)$ используется информация только о фактически зарегистрированных к данному моменту наблюдениях $\widetilde{y}_0(x), \widetilde{y}_1(x), \ldots, \widetilde{y}_i(x)$, и не используются какие-либо сведения о результатах будущих измерений $\widetilde{y}_{i+1}(x), \ldots, \widetilde{y}_{N-1}(x)$, $0 \le x \le \ell$.

Как и в гл. I, для решения обратной задачи (1.1)–(1.5) будем применять метод динамической регуляризации, используя конструкции, аналогичные принятым в гл. I. Для того чтобы понять, как это делается, и чтобы подчеркнуть единство динамического подхода к решению обратных задач, связанных как с обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и с уравнениями в частных производных, запишем краевую задачу (1.1)–(1.3) в форме задачи Коши для операторного дифференциального уравнения, приняв следующую точку зрения. На управление $u(t,x)$ и решение $y(t,x)$ задачи (1.1)–(1.3) будем смотреть как на функции переменной t со значениями из подходящим образом выбранных функциональных пространств, представляющих собой множества функций, зависящих от x, т. е. $u = u(t) = u(t,\cdot)$, $y = y(t) = y(t,\cdot)$, $0 \le t \le T$. Введем оператор $Af = -f''(x)$ на множестве функций $f(x)$, $0 \le x \le \ell$, удовлетворяющих граничным условиям $f(0) = f(\ell) = 0$, обозначим $y_t(t,\cdot) = y'(t)$ и формально запишем краевую задачу (1.1)–(1.3) в следующем операторном виде:

$$y'(t) + Ay = u(t), \quad 0 \le t \le T; \quad y(0) = 0. \tag{1.6}$$

Разумеется, в записи (1.6) пока много неясного, так как пока еще не дано описание функциональных пространств, из которых взяты $u(t)$, $y(t)$, не объяснено, что понимается под производной $y'(t)$, требует уточнения и определение оператора A. Тем не менее уже можно заметить, что краевая задача (1.1)–(1.3), записанная в виде (1.6), по форме совпадает с задачей Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений из гл. I в случае линейных систем, когда в (1.1) гл. I $f(t,y) \equiv 1$, $g(t,y) = A(t)y$, $A(t)$ — матрица размера $n \times n$. Это обстоятельство поможет нам, опираясь на схему и конструкции гл. I, §4 и соответствующим образом развивая их, описать и исследовать метод динамической регуляризации для обратной задачи (1.1)–(1.5). А пока перейдем к строгому математическому изложению того, что понимается под задачей Коши (1.6) и ее решением, и как эта задача связана с исходной краевой задачей (1.1)–(1.3).

§ 2. Операторное параболическое уравнение. Задача Коши. Примеры

1. Приведенную выше модельную краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{gathered} y_t - y_{xx} = u(t,x), \qquad (t,x) \in Q = (0,T) \times (0,\ell), \\ y|_{x=0} = 0, \qquad y|_{x=\ell} = 0, \qquad 0 < t < T, \\ y|_{t=0} = y_0(x), \qquad 0 < x < \ell \end{gathered} \tag{2.1}$$

будем рассматривать при условиях $u = u(t,x) \in L^2(Q)$, $y_0 = y_0(x) \in L^2(0,\ell)$. Тогда из-за возможной негладкости функций $u(t,x)$ и $y_0(x)$ краевая задача (2.1) может не иметь классического решения и на этот случай следует позаботиться о его обобщенном толковании. В литературе описаны и исследованы различные подходы к понятию решения краевых задач вида (2.1) и других задач математической физики (см., например, [14; 15; 25; 26, 69; 70; 73; 74; 89; 90, 126; 127; 135]). При исследовании задач оптимального управления системами с распределенными параметрами, дифференциальных игр, обратных задач для таких систем широкое распространение получил подход, принятый в [15; 73; 74; 105]. Поэтому в настоящем учебном пособии, следуя [15; 73; 74; 105], мы будем интерпретировать краевую задачу (2.1) как задачу Коши для операторного дифференциального уравнения

$$y'(t) + Ay(t) = u(t), \qquad 0 < t < T, \qquad y(0) = y_0, \tag{2.2}$$

и решение задачи (2.2) в подходящем функциональном пространстве будем называть обобщенным решением краевой задачи (2.1).

Строгое определение решения задачи (2.2) и исследование вопросов его существования, единственности и регулярности требует привлечения различных дополнительных сведений из функционального анализа (пространства Соболева, теоремы вложения, интеграл Бохнера, распределения со значениями из гильбертова пространства и др.). Однако в отечественной учебной литературе отсутствует единый источник (учебное пособие), содержащий систематическое и доступное студентам изложение упомянутого дополнительного материала, а имеющаяся монографическая литература слишком трудна для первого ознакомления с предметом. Поэтому в настоящем учебном пособии приводятся сведения из функционального анализа, необходимые для строгого изложения элементов теории линейных операторных дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Чтобы не перегружать основной текст этой и следующей главы, часть вспомогательного материала вынесена в отдельную гл. IV, а здесь оставлены лишь основные определения и краткие пояснения к ним. Авторы надеются, что опытному читателю это обстоятельство не затруднит восприятия основного содержания книги, касающегося метода динамической регуляризации, а менее опытный, владеющий начальными главами функционального анализа в объеме стандартных университетских курсов, сумеет освоить материал, обращаясь при необходимости к гл. IV.

2. Итак, пусть в (2.1) $u = u(t, x) \in L^2(Q)$, $y_0 \in L^2(0, \ell)$. Поясним, как задачу (2.1) записать в виде задачи Коши (2.2), какой смысл можно придать каждой компоненте равенств (2.2), как понимать сами равенства (2.2). В качестве основного гильбертова пространства H возьмем лебегово пространство $L^2(0, \ell)$ с обычным скалярным произведением $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int\limits_0^\ell f(x)g(x)dx$ и нормой $\|f\|_{L^2} = \left(\int\limits_0^\ell f^2(x)dx\right)^{1/2}$ и функции $u = u(t, x)$, $y = y(t, x)$ будем истолковывать как функции переменной t со значениями из H, т. е. $u = u(t) = u(t, \cdot) \in L^2(0, \ell)$, $y = y(t) = y(t, \cdot) \in L^2(0, \ell)$. Сразу заметим, что для функции $u = u(t, x) \in L^2(Q)$ возможность такого толкования вытекает из известной теоремы Фубини [39; 89; 142], согласно которой $u(t, x)$ как функция переменной x при почти всех (п. в.) $t \in (0, T)$ принадлежит пространству $L^2(0, \ell)$. Удобно ли так толковать $y(t, \cdot)$, как понимать значения $y_{xx}(t, \cdot)$, $y_t(t, \cdot)$ — будет уточнено ниже.

Далее, сравнение (2.1) и (2.2) наводит на мысль, что оператор A, по-видимому, следует определить так:

$$Af = -f''(x) = -\frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad f(0) = 0, \quad f(\ell) = 0, \tag{2.3}$$

полагая, что при каждом фиксированном t роль $f(x)$ играет $y(t, x)$. Областью определения оператора (2.3) можем считать множество $D(A) = \{f = f(x) \in C^2[0, \ell] : f(0) = 0, f(\ell) = 0\}$. Отметим, что $D(A)$ образует линейное многообразие в $H = L^2(0, \ell)$, плотное в H [39; 136; 142]. Оператор A, очевидно, линейный. Подчеркнем, что оператор A, если его истолковать как оператор, действующий из H в H, является неограниченным. В самом деле, последовательность $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\frac{\pi n x}{\ell} \in D(A)$, $\|e_k\|_{L^2} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, но $Ae_k = -e_k''(x) = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 e_k(x)$ и $\|Ae_k\|_{L^2} = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Если разумным образом расширить область определения $D(A)$ оператора A и при этом дать соответствующее толкование его значениям в подходящем функциональном пространстве, то можно прийти к одному из известных понятий обобщенного решения задачи (2.1) (см., например, [15; 25; 26; 69; 74; 89; 126]). Ниже мы будем следовать построениям из [15].

При этих построениях важную роль играют следующие два важных свойства оператора A:

1) симметричность

$$\langle Af, g\rangle_{L^2} = \langle f, Ag\rangle_{L^2} \qquad \forall f, g \in D(A), \tag{2.4}$$

и

2) положительная определенность

$$\langle Af, f\rangle_{L^2} = \int\limits_0^\ell |f'(x)|^2 dx \geq \mu \|f\|^2_{L^2} \quad \forall f \in D(A), \ \mu = \mathrm{const} > 0. \tag{2.5}$$

Симметричность вытекает из равенств

$$\langle Af, g\rangle_{L^2} = \int\limits_0^\ell (-f''(x))g(x)\,dx = \int\limits_0^\ell f'(x)g'(x)dx,$$

$$\langle f, Ag\rangle_{L^2} = \int\limits_0^\ell f(x)(-g''(x))dx = \int\limits_0^\ell f'(x)g'(x)dx$$

$$\forall f, g \in D(A). \tag{2.6}$$

При проверке свойства положительной определенности используется равенство $f(x) = \int\limits_0^x f'(\xi)d\xi$ (2.6) и неравенство

Коши–Буняковского:

$$\|f\|^2_{L^2} = \int\limits_0^\ell |f(x)|^2 dx = \int\limits_0^\ell \left(\int\limits_0^x f'(\xi)d\xi\right)^2 dx \le$$
$$\le \int\limits_0^\ell \left(\int\limits_0^x 1^2 d\xi\right)\left(\int\limits_0^x |f'(\xi)|^2 d\xi\right) dx \le \int\limits_0^\ell x\left(\int\limits_0^\ell |f'(\xi)|^2 d\xi\right) dx =$$
$$= \tfrac{\ell^2}{2}\|f'\|^2_{L^2} = \tfrac{\ell^2}{2}\langle Af, f\rangle_{L^2} \qquad \forall f \in D(A). \qquad (2.7)$$

Из (2.7) вытекает неравенство (2.5) с $\mu = 2/\ell^2$.

Из (2.4), (2.5) следует, что линейное многообразие $D(A)$ образует евклидово пространство со скалярным произведением $\langle f,g\rangle_A = \langle Af,g\rangle_{L^2}$ и нормой $\|f\|_A = \left(\int\limits_0^\ell |f'(x)|^2dx\right)^{1/2}$. Нетрудно убедиться, что это пространство не является полным. Его пополнение в метрике, задаваемой нормой $\|f\|_A$, порождает гильбертово пространство (см. гл. IV, §2), которое обозначим V. Пространство V называется энергетическим пространством, порожденным оператором A. Выясним, «кто же живет» в энергетическом пространстве V. Для этого нам понадобится обобщение понятия производной.

Обобщенной производной по Соболеву (о. п.) функции $f(x) \in L^1(a,b)$ называется такая функция $f_1(x) \in L^1(a,b)$, для которой выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_a^b f_1(x)g(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx \quad \forall g = g(x) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty[a,b],$$

где $\overset{\bullet}{C}{}^\infty[a,b]$ — пространство бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций, финитных на этом отрезке, т. е. обращающихся в нуль в окрестности концевых точек $x=a$, $x=b$ этого отрезка. Для о. п. используются обычные обозначения: $f_1(x) = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Заметим, что если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна [39] и ее обычная (поточечная) производная $f'(x) \in L^1(a,b)$, то $f'(x)$ является о. п. функции $f(x)$.

Оказывается, энергетическое пространство V, порожденное оператором (2.3), изометрично пространству Соболева $H^1_0(0,\ell)$ (см. гл. IV, §1) и состоит из непрерывных на отрезке $[0,\ell]$ функций со свойством $f(0) = f(\ell) = 0$, обладающих о. п. по Соболеву $f'(x) \in L^2(0,\ell)$; скалярное произведение и норма в V определяются так:

$$\langle f,g\rangle_V = \int\limits_0^\ell f'(x)g'(x)dx, \qquad \|f\|_V = \left(\int\limits_0^\ell |f'(x)|^2dx\right)^{1/2};$$

$\overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,\ell]$ плотно в $V = H^1_0(0,\ell)$ и в $H = L^2(0,\ell)$; V плотно в H.

Далее заметим, что правая часть равенства (2.6) имеет смысл при произвольных f, $g \in V$. Это обстоятельство позволяет доопределить оператор A на все пространство V, а именно под значением Af оператора A на элементе $f \in V$ будем понимать функционал, определенный на V и действующий на элементы $g \in V$ по правилу

$$\langle Af,g\rangle \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^\ell f'(x)g'(x)dx \qquad \forall g \in V. \qquad (2.8)$$

Такое расширение оператора с $D(A)$ на все энергетическое пространство V называется энергетическим расширением оператора A. Сохраним за энергетическим расширением оператора прежнее обозначение A. Из (2.8) следует, что $\langle Af,f\rangle = \|f\|^2_V$ $\forall f \in V$. Через V^* будем обозначать сопряженное к V пространство линейных непрерывных функционалов, определенных на V [39; 136]. Убедимся, что $Af \in V^*$. Легко проверить (см. (2.8)), что расширенный оператор A — линейный:

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag \qquad \forall f,g \in V, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathrm{R}.$$

Кроме того,

$$|\langle Af,g\rangle| = \left|\int\limits_0^\ell f'(x)g'(x)dx\right| \le \|f'\|_{L^2}\|g'\|_{L^2} = \|f\|_V\|g\|_V,$$
$$\forall f,g \in V. \qquad (2.9)$$

Отсюда следует, что функционал Af — линейный, ограниченный на V, т. е. действительно $Af \in V^*$ при $f \in V$. Из (2.9) также следует, что
$$\|Af\|_{V^*} = \sup_{g\in V,\ \|g\|_V\le 1} \langle Af, g\rangle \le \|f\|_V,$$
т. е. A — линейный ограниченный оператор с нормой $\|A\| \le 1$. Таким образом, установлен следующий замечательный факт: расширенный оператор A принадлежит пространству $L(V \to V^*)$ линейных непрерывных операторов, действующих из V в V^*. Кроме того, свойства (2.4), (2.5) симметричности и положительной определенности сохраняются и для расширенного оператора A в виде

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle \qquad \forall f, g \in V, \tag{2.10}$$
$$\langle Af, f\rangle = \|f\|_V^2 \ge \mu\|f\|_H^2 \qquad \forall f \in V. \tag{2.11}$$

Здесь под $\langle f, Ag\rangle = \langle Ag, f\rangle$ понимается значение функционала $Ag \in V^*$ на элементе $f \in V$.

Подводя некоторые итоги, можем сказать, что получили объяснение две компоненты уравнения (2.2): $u(t)$ и $Ay(t)$. Правда, здесь обнаруживается некоторая неувязка — значения $u(t)$ и $Ay(t)$ принадлежат разным пространствам: $u(t) \in H$, $Ay(t) \in V^*$, и поэтому равенство (2.2) может показаться неправдоподобным. К счастью, возникающие сомнения разрешить просто. Для этого прежде всего нужно вспомнить, что каждый элемент $f \in H$ можно истолковать как линейный функционал на H со значениями $\langle f, g\rangle_H$ и что согласно теореме Рисса [39; 136] такими функционалами исчерпывается все пространство H^* линейных непрерывных функционалов на H и пространства H и H^* изометричны. Затем нужно заметить, что в силу (2.11)

$$|\langle f, g\rangle_H| \le \|f\|_H\|g\|_H \le \|f\|_H\mu^{-1/2}\|g\|_V \quad \forall g \in V.$$

Это означает, что если $f \in H^*$, то $f \in V^*$, причем $\|f\|_{V^*} \le \mu^{-1/2}\|f\|_H$ $\forall f \in H^*$. Отождествляя изометричные пространства H и H^* и обозначая такое отождествление $H \simeq H^*$, получаем следующую цепочку вложений:

$$V = H_0^1(0,\ell) \subset H = L^2(0,\ell) \simeq H^* = (L^2(0,\ell))^* \subset V^* = (H_0^1(0,\ell))^*. \tag{2.12}$$

Оказывается, включения (2.12) являются плотными и непрерывными; подробнее о таких включениях см. гл. IV, §2. Для нас пока важен вывод: $H \subset V^*$, поэтому можем считать, что $u(t) \in H \subset V^*$ при п. в. $t \in [0,T]$.

3. Теперь поясним, что понимается под символом $y'(t)$ в уравнении (2.2). Для этого следует обратиться к таким понятиям, как интеграл Бохнера и обобщенные функции (распределения) со значениями в гильбертовом пространстве. Эти понятия подробнее обсуждаются в гл. IV, а здесь мы ограничимся тем, что приведем основные определения и дадим некоторые пояснения.

Пусть X — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle f, g\rangle_X$ и нормой $\|f\|_X = \langle f, f\rangle_X^{1/2}$. Пусть $f = f(t) : [0,T] \to X$ — функция переменной t, определенная п. в. (в смысле меры Лебега) на отрезке $[0,T]$ и принимающая свои значения $f(t)$ из X.

Функция $f : [0,T] \to X$ называется простой, если отрезок $[0,T]$ можно представить в виде конечного объединения $\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = [0,T]$ попарно непересекающихся измеримых по Лебегу множеств Ω_i, на каждом из которых функция $f(t)$ постоянна: $f(t) = f_i \in X$ для п. в. $t \in \Omega_i$, $i = \overline{1,N}$.

Функция $f : [0,T] \to X$ называется измеримой по Бохнеру (или, короче, В-измеримой) на отрезке $[0,T]$, если существует последовательность простых функций $\{f_k(t)\}$, таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k(t) - f(t)\|_X = 0$ для п. в. $t \in [0,T]$.

Интегралом Бохнера от простой функции $f : [0,T] \to X$ называют сумму $\sum\limits_{i=1}^{N} f_i\mu(\Omega_i)$, где $\mu(\Omega_i)$ — мера Лебега множества Ω_i; эту сумму обозначают через $(B)\int\limits_0^T f(t)dt$.

Функция $f : [0,T] \to X$ называется интегрируемой по Бохнеру (или, короче, В-интегрируемой) на $[0,T]$, если существует последовательность простых функций $\{f_k(t)\}$, таких, что:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k(t) - f(t)\|_X = 0$ для п. в. $t \in [0,T]$ (т. е. $f(t)$ В-измерима на $[0,T]$);

2) числовые функции $\|f_k(t) - f(t)\|_X$ интегрируемы по Лебегу на $[0,T]$ и $\lim\limits_{k\to\infty}(L)\int\limits_0^T \|f_k(t)-f(t)\|_X dt = 0$, где символ $(L)\int\limits_0^T$ означает операцию интегрирования по Лебегу. Тогда интегралом Бохнера функции $f(t)$ на отрезке $[0,T]$ называется элемент пространства X, равный сильному (по норме $\|\cdot\|_X$) пределу $\lim\limits_{k\to\infty}(B)\int\limits_0^T f_k(t)dt$, и его обозначают через $(B)\int\limits_0^T f(t)dt$.

Корректность определения интеграла Бохнера и его свойства обсуждаются в гл. IV, §3. Здесь мы лишь упомянем критерий B-интегрируемости:

Функция $f:[0,T]\to X$ B-интегрируема на $[0,T]$ тогда и только тогда, когда она B-измерима, а ее норма $\|f(t)\|_X$ интегрируема по Лебегу на $[0,T]$. Если $f:[0,T]\to X$ B-интегрируема на $[0,T]$, то произведение $f(t)\varphi(t)$ B-интегрируемо на $[0,T]$ для любой непрерывной на $[0,T]$ функции $\varphi(t):[0,T]\to \mathrm{R}$.

Введем функциональное пространство $L^2(0,T;X)$ — это гильбертово пространство B-интегрируемых на $[0,T]$ функций, у которых $\|f(t)\|^2_X$ интегрируема по Лебегу на $[0,T]$, со скалярным произведением $\langle f,g\rangle_{L^2} = (L)\int\limits_0^T\langle f(t),g(t)\rangle_X dt$ и нормой $\|f\|_{L^2} = \left((L)\int\limits_0^T\|f(t)\|^2_X dt\right)^{1/2}$. Если X,Y — два вещественных сепарабельных гильбертовых пространства, $X\subset Y$, причем это вложение плотное и непрерывное, т. е. $\|x\|_Y \le C\|x\|_X$ $\forall x\in X$, то $L^2(0,T;X)\subset L^2(0,T;Y)$ и $\|f\|_{L^2(0,T;Y)}\le C\|f\|_{L^2(0,T;X)}$ $\forall f\in L^2(0,T;X)$.

Далее кратко остановимся на понятии обобщенной функции (распределения) со значениями в гильбертовом пространстве X. Пусть $\overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,T]$ — линейное пространство бесконечно дифференцируемых и финитных на отрезке $[0,T]$ функций. Для каждой функции $\varphi=\varphi(t)\in \overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,T]$ введем множество $\operatorname{supp}\varphi = \{t\in[0,T]:\varphi(t)\ne 0\}$ — носитель функции φ. По определению финитности функции $\operatorname{supp}\varphi\subset$ $\subset[\delta,T-\delta]$ для некоторого $\delta>0$, причем величина δ зависит от φ. В линейном пространстве $\overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,T]$ введем следующее понятие сходимости последовательности.

Говорят, что последовательность $\varphi_k(t) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,T]$ сходится к функции $\varphi(t)\in\overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,T]$, если существует отрезок $[a,b]$, $0<a<b<T$, такой, что $\operatorname{supp}\varphi_k\subset[a,b]$ $\forall k=1,2,\ldots$, и

$$\|\varphi_k^{(m)}-\varphi^{(m)}\|_{C[a,b]}=\max_{a\le t\le b}|\varphi_k^{(m)}(t)-\varphi^{(m)}(t)|\to 0 \quad \text{при } k\to\infty$$

для всех $m=0,1,2,\ldots$, где $\varphi^{(m)}=\frac{d^m\varphi}{dt^m}$ — m-я производная функции φ, $\varphi^{(0)}\overset{\mathrm{def}}{=}\varphi$. Пространство $\overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,T]$, оснащенное таким понятием сходимости последовательностей, называют основным пространством и обозначают через $D(0,T)$.

Обобщенной функцией (о. ф.) или распределением со значением в гильбертовом пространстве X называется всякий линейный оператор f с областью определения $D(f)=$ $=D(0,T)$ и областью значений $R(f)\subset X$:

$$f(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha f(\varphi)+\beta f(\psi)\quad \forall\varphi,\psi\in D(0,T),\quad \forall\alpha,\beta\in\mathrm{R},$$

являющийся непрерывным отображением в следующем смысле: $f(\varphi_k)\to f(\varphi)$ слабо в H для любой последовательности $\varphi_k\in D(0,T)$, сходящейся в пространстве $D(0,T)$ к φ.

Множество всех о. ф. со значениями в X будем обозначать через $D'(0,T;X)$. Всякую B-интегрируемую на $[0,T]$ функцию $f(t)$ можно истолковать как о. ф. f, действующую на основную функцию $\varphi\in D(0,T)$ по следующему правилу:

$$f(\varphi)\overset{\mathrm{def}}{=}(B)\int\limits_0^T f(t)\varphi(t)dt\quad \forall\varphi\in D(0,T). \tag{2.13}$$

О. ф. $f\in D'(0,T;X)$, представимая в интегральном виде (2.13) посредством некоторой B-интегрируемой на $[0,T]$ функции $f(t)$, называется регулярной о. ф.

Производной порядка m $(m = 0,1,2,\ldots)$ о.ф. $f \in D'(0,T;X)$ называется о.ф. $f^{(m)} \in D'(0,T;X)$, действующая на основные функции по правилу

$$f^{(m)}(\varphi) = (-1)^{(m)} f\left(\varphi^{(m)}\right) \qquad \forall\varphi \in D(0,T).$$

Всякая о.ф. из $D'(0,T;X)$ обладает производной любого порядка. Корректность введенных определений, свойства о.ф. и примеры подробнее рассмотрены в гл. IV, §4.

Вернемся к операторному дифференциальному уравнению (2.2) и придадим смысл символу $y'(t)$. Будем считать, что $y = y(t,\cdot) : [0,T] \to V = H_0^1(0,\ell)$. Пусть $y = y(t)$ B-интегрируема на $[0,T]$ и $y(t) \in L^2(0,T;V)$. Так как $V \subset V^*$, причем это вложение плотное и непрерывное, то $y(t) \in L^2(0,T;V^*)$. Тогда согласно (2.13) и определению регулярности функцию $y(t)$ можно истолковать как регулярную о.ф. из $D'(0,T;V^*)$, имеющую производную первого порядка $y' \in D'(0,T;V^*)$.

Допустим, что y' является регулярной о.ф., точнее, пусть существует $y'(t) \in L^2(0,T;V^*)$, такая, что

$$y'(\varphi) = (B)\int_0^T y'(t)\varphi(t)dt \qquad \forall\varphi \in D(0,T).$$

Именно этот смысл будем придавать символу $y'(t)$ из (2.2): $y'(t) \in V^*$ п.в. на $(0,T)$, $y'(t) \in L^2(0,T;V^*)$. Таким образом, все компоненты равенства (2.2) п.в. на $(0,T)$ принадлежат V^* и такое равенство теперь естественно понимать как равенство функционалов из V^*, т.е.

$$\langle y'(t) + Ay(t), \varphi\rangle = \langle u(t), \varphi\rangle \quad \forall\varphi \in V \quad \text{для п.в.} \quad t \in (0,T). \tag{2.14}$$

Заметим также, что если $y(t) \in L^2(0,T;V)$, $y'(t) \in L^2(0,T;V^*)$, то $y(t) \in C([0,T];H)$ (гл. IV, теорема 8) и имеет смысл говорить о значениях $y(t) \in H$ при всех $t \in [0,T]$, в частности, обретает смысл равенство $y(0) = y_0$. Теперь можно дать строгое определение решения задачи Коши (2.2).

Определение. Решением задачи (2.2) называется регулярная о.ф. $y(t) \in L^2(0,T;V)$, имеющая регулярную производную $y'(t) \in L^2(0,T;V^*)$, удовлетворяющая уравнению (2.2) при п.в. $t \in (0,T)$ (в смысле равенства (2.14)) и начальному условию $y(0) = y_0$.

4. Сделаем важное замечание. Выше при обсуждении постановки задачи Коши (2.2) мы все время оглядывались на исходную модельную краевую задачу (2.1), записанную в традиционной форме. Однако задачу (2.2) можно рассматривать и вне связи с краевой задачей (2.1) и конкретными пространствами $V = H_0^1(0,\ell)$, $H = L^2(0,\ell)$, $V^* = (H_0^1(0,\ell))^*$. А именно: пусть H — произвольное вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle f,g\rangle_H$ и нормой $\|f\|_H = (\langle f,f\rangle)^{1/2}$. Пусть $A : H \to H$ — некоторый линейный неограниченный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H, причем A — симметричный, т.е. (ср. (2.4))

$$\langle Af,g\rangle_H = \langle f,Ag\rangle_H \qquad \forall f,g \in D(A), \tag{2.15}$$

и положительно определенный, т.е. (ср. с (2.5))

$$\langle Af,f\rangle_H \geq \mu\|f\|_H^2 \quad \forall f \in D(A) \quad (\mu = \mathrm{const} > 0). \tag{2.16}$$

Для такого оператора A, оказывается, можно провести все вышеописанные построения, последовавшие за формулами (2.4), (2.5), на абстрактном уровне. Строгое изложение этих построений читатель может найти в гл. IV, а здесь мы лишь наметим схему соответствующих рассуждений. Опираясь на свойства (2.15), (2.16) исходного оператора A, в $D(A)$ вводим скалярное произведение $\langle Af,g\rangle_H$ и строим энергетическое гильбертово пространство V, являющееся пополнением $D(A)$ в норме $\|f\|_V = \langle Af,f\rangle_H^{1/2}$. Затем устанавливаем вложения (ср. с (2.12))

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*,$$

где V^* — сопряженное к V пространство, т.е. пространство линейных непрерывных функционалов на V, и показываем, что эти вложения плотные и непрерывные, т.е.

$$\|f\|_H \leq C\|f\|_V \qquad \forall f \in V,$$

$$\|f\|_{V^*} \le C\|f\|_H \qquad \forall f \in H, \qquad C = 1/\sqrt{\mu}.$$

Далее оператор A продолжаем по непрерывности с $D(A)$ на все энергетическое пространство V. В результате получаем энергетическое расширение исходного оператора, которое по-прежнему будем обозначать A ($A \in L(V \to V^*)$). Расширенный оператор A обладает свойствами симметричности и положительной определенности, которые записываются в уже знакомой нам форме (2.10), (2.11). Далее, вводим пространства обобщенных функций (о. ф.) $D'(0,T;V)$, $D'(0,T;V^*)$, выделяем в них классы регулярных В-интегрируемых о. ф. $y(t) \in L^2(0,T;V) \subset L^2(0,T;V^*)$ с регулярными производными $y'(t) \in L^2(0,T;V^*)$.

Теперь можем написать операторное дифференциальное уравнение $y'(t) + Ay(t) = u(t)$, $0 < t < T$, которое называется параболическим, и поставить для нее задачу Коши (2.2) при любых $u(t) \in L^2(0,T;V^*)$, $y_0 \in V$. Определение обобщенного решения такой задачи, данное выше для конкретных пространств $H = L^2(0,\ell)$, $V = H_0^1(0,\ell)$ имеет смысл и в общем случае для абстрактных пространств $V \subset H$. Как видим, задача (2.2) может быть поставлена для энергетического расширения любого линейного неограниченного оператора A с плотной в H областью определения и со свойствами (2.15), (2.16). Остается заметить, что наряду с задачей (2.1) многие другие важные для приложений краевые задачи для параболических уравнений укладываются в схему абстрактной задачи Коши (2.2) и допускают единообразное исследование в рамках этой задачи. Проиллюстрируем сказанное на нескольких примерах.

Пример 1. Пусть динамическая система описывается краевой задачей третьего рода для уравнения теплопроводности [69; 89; 135]:

$$\begin{gathered} y_t = y_{xx} + u(t,x), \qquad (t,x) \in Q = (0,T) \times (0,\ell); \\ (-y_x + y)|_{x=0} = 0, \qquad (y_x + y)|_{x=\ell} = 0, \qquad 0 < t < T; \\ y\,|_{t=0} = y_0(x), \qquad 0 < x < \ell. \end{gathered}$$

Запишем эту задачу в виде задачи Коши (2.2). Введем оператор $Af = -f''(x)$, $0 < x < \ell$, с областью определения

$$D(A) = \{f = f(x) \in C^2[0,\ell] : -f'(0) + f(0) = 0,\ f'(\ell) + f(\ell) = 0\},$$

плотной в $H = L^2(0,\ell)$. Оператор $A : H \to H$ линейный, симметричный:

$$\langle Af, g\rangle_H = \int\limits_0^\ell (-f''(x))g(x)\,dx =$$

$$= f(\ell)g(\ell) + f(0)g(0) + \int\limits_0^\ell f'(x)g'(x)dx \qquad \forall f,g \in D(A).$$

Неограниченность A следует из того, что $\|Ae_k\|_{L^2} = \lambda_k \to \to \infty$, где $e_k = e_k(x)$ — собственные функции оператора A, соответствующие собственным числам $\lambda_k > 0$, т. е. $Ae_k = = \lambda_k e_k$, $\|e_k\|_{L^2} = 1$. Положительная определенность оператора A является следствием того, что

$$\|f\|_{H^1} = \left(\int\limits_0^\ell (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2)dx\right)^{1/2}$$

и

$$\langle Af, f\rangle_H^{1/2} = \left(f^2(0) + f^2(\ell) + \int\limits_0^\ell |f'(x)|^2\right)^{1/2}$$

являются эквивалентными нормами пространства $H^1(0,\ell)$ (см. гл. IV, §1) и $\|f\|_{H^1} \ge \|f\|_{L^2}$. Энергетическое пространство V, получаемое пополнением $D(A)$ в метрике $\langle Af, f\rangle_H^{1/2}$, здесь совпадает с пространством $H^1(0,\ell)$. Энергетическое расширение $A : V \to V^* = (H^1(0,\ell))^*$ исходного оператора A определяется равенством

$$\langle Af, g\rangle = f(0)g(0) + f(\ell)g(\ell) + \int\limits_0^\ell f'(x)g'(x)dx \quad \forall f,g \in H^1(0,\ell).$$

Таким образом, рассматриваемая краевая задача может быть записана в виде задачи Коши (2.2).

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу второго рода (задачу Неймана) для уравнения теплопроводности [69; 89; 135]:

$$z_t = z_{xx} + v(t,x), \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times (0,\ell);$$
$$z_x|_{x=0} = 0, \quad z_x|_{x=\ell} = 0, \quad 0 < t < T;$$
$$z|_{t=0} = z_0(x), \quad 0 < x < \ell.$$

Для приведения этой задачи к виду (2.2) сначала преобразуем ее, переходя от z к новой функции $y = y(t,x) = z(t,x)\exp(t)$. Получим

$$y_t = y_{xx} - y + u(t,x), \quad (t,x) \in Q;$$
$$y_x|_{x=0} = 0, \quad y_x|_{x=\ell} = 0, \quad 0 < t < T;$$
$$y|_{t=0} = y_0(x), \quad 0 < x < \ell,$$

где $u(t,x) = v(t,x)\exp(t)$, $y_0(x) = z_0(x)$.

Далее, введем оператор A:

$$Af = -f''(x) + f(x), \quad 0 < x < \ell,$$

с областью определения

$$D(A) = \{f = f(x) \in C^2[0,\ell] : f'(0) = 0, \ f'(\ell) = 0\},$$

плотной в $H = L^2(0,\ell)$. Этот оператор, очевидно, линейный. Для доказательства его неограниченности как оператора из H в H достаточно взять последовательность $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\frac{\pi k x}{\ell} \in D(A)$ и заметить, что

$$Ae_k(x) = \left(1 + \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2\right) e_k, \quad \|e_k\|_H = 1,$$
$$\|Ae_k\|_H = 1 + \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Оператор A симметричный:

$$\langle Af, g\rangle_H = \int_0^\ell (-f''(x) + f(x))g(x)dx =$$
$$= \int_0^\ell (f'(x)g'(x) + f(x)g(x))\,dx = \langle f, Ag\rangle_H \qquad \forall f,g \in D(A)$$

и положительно определенный:

$$\langle Af, f\rangle_H = \int_0^\ell \left(|f'(x)|^2 + |f(x)|^2\right) dx \geq \|f\|_H^2 \qquad \forall f \in D(A).$$

Энергетическое пространство V, полученное пополнением $D(A)$ в метрике $\langle Af, f\rangle_H^{1/2} = \|f\|_{H^1}$, совпадает с пространством $H^1(0,\ell)$. Энергетическое расширение $A : V \to V^* = (H^1(0,\ell))^*$ определяется равенством

$$\langle Af, g\rangle = \int_0^\ell (f'(x)g'(x) + f(x)g(x))\,dx \quad \forall f,g \in V = H^1(0,\ell).$$

Таким образом, следуя описанной выше схеме, рассматриваемую краевую задачу можем записать в форме задачи Коши (2.2).

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу первого рода (задачу Дирихле) для параболического уравнения с переменными коэффициентами со многими пространственными переменными $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$y_t = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)y_{x_j})_{x_i} + a_0(x)\,y + u(t,x),$$
$$(t,x) \in Q = (0,T) \times \Omega,$$
$$y|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 < t < T, \qquad y|_{t=0} = y_0(x), \quad x \in \Omega,$$

где Ω — заданное ограниченное множество из R^n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $a_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ для п. в. $x \in \Omega$, $\mu_0\,|\xi|^2_{\mathrm{R}^n} \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu_1\,|\xi|^2_{\mathrm{R}^n}$ $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathrm{R}^n$, μ_0, μ_1 — положительные постоянные, $u(t,x) \in L^2(Q)$, $y_0(x) \in L^2(\Omega)$. Оператор A здесь вводится так:

$$Af = -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)f_{x_j}(x))_{x_i} + a_0(x)f(x), \qquad x \in \Omega;$$

область его определения $D(A) = \{f = f(x) \in C^2(\overline{\Omega}) : f|_{\partial\Omega} = 0\}$ плотна в $L^2(\Omega)$. Симметричность A устанавливается с помощью формулы Гаусса–Остроградского

$$\langle Af, g\rangle_H = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_j}(x) g_{x_i}(x) + a_0(x) f(x) g(x)\Big) dx$$
$$\forall f, g \in D(A);$$

положительная определенность A следует из неравенства

$$\langle Af, f\rangle_H = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_j}(x) f_{x_i}(x) + a_0(x) |f(x)|^2\Big) dx \geq$$
$$\geq \mu_0 \, \|\mathrm{grad} f\|_H^2 \quad \forall f \in D(A)$$

и из того, что [69; 89; 90]

$$\|f\|_H \leq C_0 \|\mathrm{grad} f\|_H \quad \forall f \in D(A) \quad (C_0 = \mathrm{const} > 0).$$

Энергетическое пространство V, получаемое из $D(A)$ пополнением в метрике $\langle Af, f\rangle_H^{1/2}$, совпадает с пространством $H_0^1(\Omega)$; энергетическое расширение $A : V \to V^* = (H_0^1(\Omega))^*$ определяется равенством

$$\langle Af, g\rangle = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_j}(x) g_{x_i}(x) + a_0(x) f(x) g(x)\Big) dx$$
$$\forall f, g \in H_0^1(\Omega);$$

подробнее см. [69; 89]. Таким образом, рассматриваемая краевая задача также может быть записана в форме операторной задачи Коши (2.2).

Другие примеры краевых задач для линейных параболических уравнений, которые также могут быть записаны в форме (2.2), читатель найдет в [14; 15; 25; 26; 69; 70; 73; 74; 89; 90]. Более общие операторные дифференциальные параболические уравнения рассмотрены в [15; 25; 70; 74].

§ 3. Существование и единственность решения задачи Коши для операторного параболического уравнения

1. Рассмотрим задачу Коши

$$y'(t) + Ay(t) = u(t), \qquad 0 \leq t \leq T; \qquad y(0) = y_0. \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что оператор A является энергетическим расширением линейного неограниченного симметричного положительно определенного оператора с областью определения, плотной в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Это значит, что $A \in L(V \to V^*)$, где V — энергетическое гильбертово пространство, V^* — пространство, сопряженное к V, $D(A) = V$ — область определения и $R(A) = V^*$ — область значений оператора A. Свойства симметричности и положительной определенности оператора A записываются соответственно в виде

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \quad \forall u, v \in V, \tag{3.2}$$

и

$$\langle Au, u\rangle \geq \mu \|u\|_H^2 \quad \forall u \in V, \quad \mu = \mathrm{const} > 0. \tag{3.3}$$

Здесь и ниже через $\langle f, v\rangle$ обозначается результат применения линейного функционала $f \in V^*$ к элементу $v \in V$; считается, что $\langle f, v\rangle = \langle v, f\rangle$. Оператор A осуществляет взаимно однозначное отображение V на V^*; обратный оператор $A^{-1} \in L\,(V^* \to V)$, $\|A\| = \|A^{-1}\| = 1$. Скалярное произведение в V равно $\langle u, v\rangle_V = \langle Au, v\rangle$ $\forall u, v \in V$, норма — $\|u\|_V = \langle Au, u\rangle^{1/2}$ $\forall u \in V$; скалярное произведение в V^* равно $\langle f, g\rangle_{V^*} = \langle A^{-1}f, A^{-1}g\rangle_V = \langle f, A^{-1}g\rangle$ $\forall f, g \in V^*$, норма — $\|f\|_{V^*} = \|A^{-1}f\|_V$ $\forall f \in V^*$. Имеют место вложения

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*, \tag{3.4}$$

причем эти вложения плотные и непрерывные, т. е.

$$\|f\|_H \leq C\|f\|_V \qquad \forall f \in V$$

и

$$\|f\|_{V^*} \leq C\|f\|_H \qquad \forall f \in H, \qquad C = 1/\sqrt{\mu}.$$

Если о функционале $f \in V^*$ дополнительно известно, что $f \in H$ или $f \in V$, то, как это следует из (3.4), $\langle f, v\rangle = (f, v)_H$ для всех $v \in H$ и тем более для всех $v \in V$.

От оператора A дополнительно будем требовать, чтобы порождаемое им энергетическое пространство V вкладывалось в H компактно. Компактность вложения $V \subset H$ означает, что из любого множества $M \subset V$, ограниченного в V, можно извлечь последовательность, сильно сходящуюся в пространстве H. Заметим, что компактность вложений в H энергетических пространств V во всех приведенных выше примерах краевых задач для параболических уравнений (см. §2, примеры 1–3, задачу (2.1)) следует из теорем вложения для соответсвующих функциональных пространств (подробнее об этом см. в гл. IV, §1, например, теорема 1.8).

Собственным элементом оператора A, соответствующим собственному числу λ, называют элемент $e \in V$, $e \neq 0$, такой, что

$$Ae = \lambda e. \tag{3.5}$$

Так как $Ae \in V^*$ и в силу (3.4) элемент $e \in V$ также принадлежит V^*, равенство (3.5) понимается как равенство двух линейных функционалов над V: $\langle Ae, v\rangle = \lambda\langle e, v\rangle\ \forall v \in V$.

Последовательность элементов $\{e_k\} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ называется ортонормированной системой (ОНС) в H, если $e_k \in H$, $\|e_k\|_H = 1$, $(e_i, e_j)_H = 0\ \forall i \neq j$. Последовательность $\{e_k\}$ называется ортонормированным базисом в H, если $\{e_k\}$ — ОНС и любой элемент $u \in H$ может быть представлен в виде сильно в H сходящегося ряда Фурье: $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k e_k$, где $u_k = (u, e_k)_H$ — коэффициенты Фурье элемента u. Аналогично определяются ОНС, ОНБ в пространствах V, V^*.

При сделанных выше предположениях A обладает счетной системой собственных чисел $\{\lambda_k\}$ и соответствующей ей системой собственных элементов $\{e_k\} \in V$, таких, что $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$, $\{e_k\}$ ортогональны в пространствах H, V, V^*, причем $\{e_k\}$ — ОНБ в H, $\{e_k/\sqrt{\lambda_k}\}$ — ОНБ в V, $\{e_k\sqrt{\lambda_k}\}$ — ОНБ в V^*. Для элементов и их норм в пространствах H, V, V^* имеют место представления:

$$\text{если}\quad u \in H,\quad \text{то}\quad u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k,\quad \|u\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2,$$
$$\text{где}\quad u_k = (u, e_k)_H,$$
$$\text{если}\quad u \in V,\quad \text{то}\quad u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k,\quad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2,$$
$$\text{где}\quad u_k = (u, e_k)_H = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(u, \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}})_V,$$
$$\text{если}\quad u \in V^*,\quad \text{то}\quad u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k,\quad \|u\|_{V^*}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k^2,$$
$$\text{где}\quad u_k = \langle u, e_k\rangle = \sqrt{\lambda_k}(u, \sqrt{\lambda_k} e_k)_{V^*} \tag{3.6}$$

(подробнее см. гл. IV, §2).

2. Существование и единственность обобщенного решения задачи (3.1) докажем в предположении, что $u = u(t) \in L^2(0, T; V^*)$, $y_0 \in H$. Решение будем искать в виде ряда Фурье по собственным элементам e_k оператора A:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) e_k, \qquad 0 \le t \le T. \tag{3.7}$$

Так как $y_0 \in H$, а $\{e_k\}$ — ОНБ в H, то $y_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_{0k} e_k$, $y_{0k} = (y_0, e_k)_H$, $k = 1, 2, \ldots$, причем ряд сходится сильно в H. Аналогично из того, что $u(t) \in V^*$ для п. в. $t \in [0, T]$, $\{\sqrt{\lambda_k} e_k\}$ — ОНБ в V^*, имеем $u(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k$, $u_k(t) = \langle u(t), e_k\rangle \in L^2(0, T)$, $k = 1, 2, \ldots$, причем ряд сходится сильно в V^* для п. в. $t \in [0, T]$ и сильно в $L^2(0, T; V^*)$ (гл. IV, теорема 3.8). Формально подставим ряд (3.7) и ряды для y_0, $u(t)$ в (3.1) и с учетом того, что $\{\sqrt{\lambda_k} e_k\}$ — ОНБ в V^*, для $y_k(t)$ получим задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y_k'(t) + \lambda_k y_k(t) = u_k(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad y_k(0) = y_{0k}.$$

Отсюда имеем

$$y_k(t) = y_{0k}e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Заметим, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ функция $y_k(t)$ абсолютно непрерывна и п. в. на $[a, b]$ имеет поточечную производную $y'_k(t) \in L^2(0, T)$. Остается показать, что ряд (3.7) с коэффициентами (3.8) в самом деле является решением задачи (3.1) в смысле определения § 2.

Теорема 3.1. *Пусть $A \in L(V \to V^*)$ — энергетическое расширение линейного неограниченного симметричного положительно определенного оператора с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве H, и вложение пространств $V \subset H$ компактно. Тогда для любых $u = u(t) \in L^2(0, T; V^*)$ и $y_0 \in H$ существует, притом единственное, решение задачи (3.1); оно представимо в виде ряда (3.7) с коэффициентами (3.8); справедлива оценка*

$$\|y\|_{C([0,T];H)} + \|y\|_{L^2(0,T;V)} + \|y'\|_{L^2(0,T;V^*)} \le \\ \le C_0(\|y_0\|_H + \|u\|_{L^2(0,T;V^*)}), \quad (3.9)$$

где $C_0 > 0$ — постоянная, не зависящая от y_0, u.

Доказательство. Введем конечные суммы Фурье

$$y_0^N = \sum_{k=1}^N y_{0k}e_k, \quad u^N(t) = \sum_{k=1}^N u_k(t)e_k, \quad y^N(t) = \sum_{k=1}^N y_k(t)e_k.$$

Так как $e_k \in V$, $y_k(t) \in C[0,T]$, $y'_k(t) \in L^2(0,T)$, то $y_k(t)e_k$, $y'_k(t)e_k \in L^1(0,T;V)$ (гл. IV, §3, свойство B 10) или, точнее, $y_k(t)e_k \in C([0,T];V)$, а ее поточечная производная (гл. IV, §3, определение 6) $y'_k(t)e_k$ регулярна (гл. IV, §4, тождество (4.4)) и принадлежит $L^2(0,T;V)$, следовательно, $y^N(t) \in C([0,T];V)$, $y^{N\prime}(t) = \sum\limits_{k=1}^N y'_k(t)e_k \in L^2(0,T;V)$. Кроме того, $Ay^N(t) = \sum\limits_{k=1}^N y_k(t)\lambda_k e_k \in C([0,T];V)$, $u^N(t) \in L^2(0,T;V)$.

Отсюда и из (3.8) ясно, что $y^N(t)$ является решением задачи Коши:

$$y^{N\prime}(t) + Ay^N(t) = u^N(t), \quad 0 \le t \le T; \quad y^N(0) = y_0^N. \quad (3.10)$$

Оба равенства в (3.10) представляют собой равенства элементов из пространства V, которые в силу включений (3.4) могут рассматриваться и как элементы из более широких пространств H или V^*. Умножим обе части первого равенства (3.10) на $y^N(t)$ или, точнее, равные функционалы $y^{N\prime}(t)+Ay^N(t)$ и $u^N(t)$ из V^* применим к элементу $y^N(t) \in V$ и проинтегрируем полученное равенство на отрезке $[0,t]$:

$$\int\limits_0^t \langle y^{N\prime}(\tau), y^N(\tau)\rangle d\tau + \int\limits_0^t \langle Ay^N(\tau), y^N(\tau)\rangle d\tau = \int\limits_0^t \langle u^N(\tau), y^N(\tau)\rangle d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что функция $\|y^N(t)\|_H^2$ в силу (3.8) абсолютно непрерывна и поэтому

$$\int\limits_0^t \langle y^{N\prime}(\tau), y^N(\tau)\rangle d\tau = \int\limits_0^t (y^{N\prime}(\tau), y^N(\tau))_H d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\|y^N(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|y^N(0)\|_H^2,$$

$$\int\limits_0^t \langle Ay^N(\tau), y^N(\tau)\rangle d\tau = \int\limits_0^t \|y^N(\tau)\|_V^2 d\tau,$$

$$\left|\int\limits_0^t \langle u^N(\tau), y^N(\tau)\rangle d\tau\right| \le \int\limits_0^t \|u^N(\tau)\|_{V^*}\|y^N(\tau)\|_V d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u^N(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|y^N(\tau)\|_V^2 d\tau, \quad y^N(0) = y_0^N,$$

имеем

$$\|y^N(t)\|_H^2 + \|y^N\|_{L^2(0,t;V)}^2 \le \|y_0^N\|_H^2 + \|u^N\|_{L^2(0,T;V^*)}^2,$$

$$t \in [0,T], \qquad N = 1, 2, \dots,$$

или

$$\max_{0\le t\le T}\|y^N(t)\|^2_H+\|y^N\|^2_{L^2(0,T;V)}\le 2(\|y^N_0\|^2_H+\|u^N\|^2_{L^2(0,T;V^*)}),\quad N=1,2,\ldots \tag{3.11}$$

Из уравнения (3.10) с учетом того, что $\|A\|=1$, получаем

$$\|y^{N'}\|_{L^2(0,T;V^*)}\le\|y^N\|_{L^2(0,T;V)}+\|u^N\|_{L^2(0,T;V^*)}.$$

Отсюда и из (3.11) следует

$$\|y^N\|_{C([0,T];H)}+\|y^N\|_{L^2(0,T;V)}+\|y^{N'}\|_{L^2(0,T;V^*)}\le$$
$$\le C_0(\|y^N_0\|_H+\|u^N\|_{L^2(0,T;V^*)}),\qquad N=1,2,\ldots \tag{3.12}$$

Разность $z^{NM}(t)=y^N(t)-y^M(t)=\sum\limits_{k=M}^N y_k(t)e_k$ является решением задачи

$$z^{NM'}(t)+Az^{NM}(t)=u^N(t)-u^M(t),$$
$$0\le t\le T,\qquad z^{NM}(0)=y^N_0-y^M_0,$$

того же вида, что и (3.10), поэтому по аналогии с (3.12) здесь будем иметь

$$\|y^N-y^M\|_{C([0,T];H)}+\|y^N-y^M\|_{L^2(0,T;V)}+\|y^{N'}-y^{M'}\|_{L^2(0,T;V^*)}\le$$
$$\le C_0\left(\|y^N_0-y^M_0\|_H+\|u^N-u^M\|_{L^2(0,T;V^*)}\right),$$
$$\forall N,\ M=1,2,\ldots \tag{3.13}$$

Из оценки (3.13) следует, что последовательность $\{y^N(t)\}$ фундаментальна в пространствах $C([0,T];H)$, $L^2(0,T;V)$, а $\{y^{N'}(t)\}$ фундаментальна в $L^2(0,T;V^*)$. Поэтому существует функция $y(t)\in C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V)$ с регулярной производной $y'(t)\in L^2(0,T;V^*)$, такая, что $\{y^N(t)\}\to y(t)$ сильно в $C([0,T];H)$ и $L^2(0,T;V)$, $\{y^{N'}(t)\}\to y'(t)$ сильно в $L^2(0,T;V^*)$ (гл. IV, теорема 4.8). Так как $A\in L(V\to V^*)$,

то $\{Ay^N(t)\}\to Ay(t)$ сильно в $L^2(0,T;V^*)$. Совершая в (3.10) предельный переход при $N\to\infty$, убеждаемся, что $y(t)$ — решение задачи (3.1). Устремляя в (3.12) $N\to\infty$, получаем оценку (3.9). Таким образом, показано, что решение задачи (3.1) существует, представимо в виде ряда Фурье (3.7) с коэффициентами (3.8), который сходится сильно в $C([0,T];H)$ и $L^2(0,T;V^*)$; установлена оценка (3.9).

Докажем, что задача (3.1) других решений не имеeет. В самом деле, пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения (3.1). Разность $z(t)=y_1(t)-y_2(t)$ является решением задачи

$$z'(t)+Az(t)=0\quad \text{для п. в.}\quad t\in[0,T];\quad z(0)=0.$$

Применим нулевой функционал $z'(t)+Az(t)\in V^*$ к элементу $z(t)\in V$ и результат проинтегрируем на отрезке $[0,t]$:

$$\int_0^t\langle z'(\tau),z(\tau)\rangle d\tau+\int_0^t\langle Az(\tau),z(\tau)\rangle d\tau=0,\quad t\in[0,T].$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_0^t\langle z'(\tau),z(\tau)\rangle d\tau=\frac12\|z(t)\|^2_H-\frac12\|z(0)\|^2_H=\frac12\|z(t)\|^2_H,$$

(см. гл. IV, (4.32))

$$\int_0^t\langle Az(\tau),z(\tau)\rangle d\tau=\int_0^t\|z(\tau)\|^2_V=\|z\|^2_{L^2(0,t;V)},$$

имеем $\|z(t)\|^2_H+2\|z\|^2_{L^2(0,t;V)}=0$, $t\in[0,T]$. Это значит, что $z(t)\equiv0$, или $y_1(t)=y_2(t)$ для п. в. $t\in[0,T]$. Единственность решения задачи (3.1) установлена. Теорема 3.1 доказана.

3. Покажем, что если в (3.1) элементы $y_0,u(t)$ более «гладкие», то решение $y(t)$ задачи (3.1) удовлетворяет условию Гельдера.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1 и $y_0 \in V$, $u(t) \in L^2(0,T;H)$. Тогда*

$$\|y(t) - y(s)\|_H \le 2|t-s|^{1/2}(\|y_0\|_V + \|u\|_{L^2(0,T;H)})$$

$$\forall s,t \in [0,T]. \tag{3.14}$$

Доказательство. Пользуясь представлением решения задачи (3.1) в виде ряда (3.7) с коэффициентами (3.8) и ортонормированностью системы $\{e_k\}$ в H, имеем

$$\|y(t) - y(s)\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(y_k(t) - y_k(s))^2 \qquad \forall s,t \in [0,T]. \tag{3.15}$$

Из формулы (3.8) следует

$$|y_k(t) - y_k(s)| \le |y_{0k}(e^{-\lambda_k t} - e^{-\lambda_k s})| +$$
$$+ |\int_0^s [e^{-\lambda_k(t-\tau)} - e^{-\lambda_k(s-\tau)}]u_k(\tau)d\tau| + |\int_s^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau|. \tag{3.16}$$

Пусть для определенности $t > s$. Так как

$$\lambda_k > 0, \qquad 0 \le 1 - e^{-x} \le 1, \qquad 0 \le 1 - e^{-x} \le x \qquad \forall x \ge 0,$$

то

$$|e^{-\lambda_k t} - e^{-\lambda_k s}| =$$
$$= e^{-\lambda_k s}|1 - e^{-\lambda_k(t-s)}| \le (1 - e^{-\lambda_k(t-s)})^{1/2} \le (\lambda_k|t-s|)^{1/2};$$

$$\left|\int_0^s [e^{-\lambda_k(t-\tau)} - e^{-\lambda_k(s-\tau)}]u_k(\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le \int_0^s (1 - e^{-\lambda_k(t-s)})e^{-\lambda_k(s-\tau)}|u_k(\tau)|d\tau \le$$

$$\le \left(1 - e^{-\lambda_k(t-s)}\right)\left(\int_0^s e^{-2\lambda_k(s-\tau)}d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^s |u_k(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \le$$

$$\le (\lambda_k|t-s|)^{1/2}\left(\frac{1 - e^{-2\lambda_k s}}{2\lambda_k}\right)^{1/2}\left(\int_0^T |u_k(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \le$$

$$\le |t-s|^{1/2}\left(\int_0^T |u_k(\tau)|^2\, d\tau\right)^{1/2};$$

$$\left|\int_s^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le \left(\int_s^t e^{-2\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right)^{1/2}\left(\int_s^t |u_k(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\frac{1 - e^{-2\lambda_k(t-s)}}{2\lambda_k}\right)^{1/2}\left(\int_s^t |u_k(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \le$$

$$\le |t-s|^{1/2}\left(\int_0^T |u_k(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

Подставив эти оценки в (3.16), получим

$$|y_k(t) - y_k(s)|^2 \le$$

$$\le \left(|y_{0k}|\sqrt{\lambda_k} + 2\left(\int_0^T |u_k(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}\right)^2 |t-s| \le$$

$$\le 4\left(\lambda_k y_{0k}^2 + \int_0^T |u_k(\tau)|^2 d\tau\right)|t-s| \qquad \forall t,s \in [0,T].$$

Отсюда и из (3.15) с учетом формул (3.6) имеем

$$\|y(t) - y(s)\|_H^2 \le 4|t-s|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k y_{0k}^2 + \int_0^T |u_k(t)|^2 dt\right) =$$

$$= 4|t-s|\left(\|y_0\|_V^2 + \int\limits_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(t)|^2\right) dt\right) =$$

$$= 4|t-s|\left(\|y_0\|_V^2 + \|u\|^2_{L^2(0,T;H)}\right).$$

Эта оценка и неравенство $(a^2+b^2)^{1/2} \le a+b$, $a,b \ge 0$, приводят к требуемой оценке (3.14).

Замечание 1. Если для п. в. $t \in [0,T]$

$$\|y_0\|_V \le R_0, \quad \|u(t)\|_H \le R_1, \quad R_0, R_1 = \text{const} > 0, \tag{3.17}$$

то из оценки (3.14) следует, что все решения $y = y(t) = y(t; u, y_0)$ задачи (3.1), соответствующие $y_0, u(t)$ из (3.17), удовлетворяют условию Гельдера

$$\|y(t) - y(s)\|_H \le L|t-s|^{1/2} \quad \forall t, s \in [0,T] \tag{3.18}$$

с одной и той же константой $L = 2(R_0 + R_1 T^{1/2})$.

§ 4. Метод динамической регуляризации

Обобщая модельную обратную задачу, сформулированную в §1, переформулируем ее для динамической системы, описываемой абстрактной задачей Коши

$$y'(t) + Ay(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T, \quad y(0) = y_0, \tag{4.1}$$

рассмотренной в §3. Введем множество

$$P = \{v : v \in H,\ \|v\|_H \le R_1\}, \qquad R_1 = \text{const} > 0.$$

Управление $u = u(t)$ будем называть допустимым, если

$$u \in U = \{u = u(t) \in L^2(0,T;H) : u(t) \in P \quad \text{п. в. на } [0,T]\}, \tag{4.2}$$

U — множество допустимых управлений. Согласно теореме 3.1 каждому допустимому управлению $u \in U$ и начальному условию $y_0 \in V$ соответствует, причем единственное,

решение $y = y(t)$, причем оно удовлетворяет условию Гельдера (3.18) с константой L, не зависящей от выбора $u \in U$, $y_0 \in V$, $\|y_0\|_V \le R_0$.

Предполагаем, что ведется наблюдение за некоторой траекторией $y(t) = y(t; u_*)$, $0 \le t \le T$, системы (4.1), соответствующей какому-то неизвестному допустимому управлению $u_* = u_*(t)$. Измерения значений траектории $y(t) = y(t; u_*)$ проводятся в заданные дискретные моменты времени $t_i = ih$, $i = \overline{0, N-1}$, $h = T/N$, причем вместо точных $y(t_i)$ известны лишь их приближения $\tilde{y}_i \in H$, такие, что

$$\|\tilde{y}_i - y(t_i)\|_H \le \delta, \qquad 0 < \delta \le \delta_0. \tag{4.3}$$

Требуется, зная оператор A, величины T, R_1, δ и значения $\tilde{y}_0, \ldots, \tilde{y}_{N-1}$, построить управление $\tilde{u}_\delta = \tilde{u}_\delta(t) \in U$, такое, чтобы

$$\lim_{\delta \to 0} \|\tilde{u}_\delta - u_*\|_{L^2(0,T;H)} = 0. \tag{4.4}$$

При этом управление $u_\delta = u_\delta(t)$, $0 \le t \le T$, определяется последовательно на каждом частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, и при построении u_δ на $[t_i, t_{i+1}]$ используются только значения $\tilde{y}_0, \ldots, \tilde{y}_i$ уже произведенных наблюдений (измерений).

Для решения сформулированной обратной задачи (4.1)–(4.4) будем применять метод динамической регуляризации. Внешнее сходство системы (4.1) с системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) гл. I с $f \equiv 1$, $g(t,y) = -Ay$, наводит на мысль использовать конструкции, аналогичные тем, какие были использованы при описании метода динамической регуляризации в гл. I, §4.

Перейдем к индуктивному описанию этого метода применительно к задаче (4.1)–(4.4). Пусть $i = 0$ и известно приближенное значение $\tilde{y}_0$ начальной точки y_0 точной траектории $y(t) = y(t; u_*)$. Положим $z_h(0) = \tilde{y}_0$ и затем, решая задачу минимизации

$$t_0(u) = 2\langle z_h(0) - \tilde{y}_0, u\rangle_H + \alpha\|u\|_H^2 \to \inf, \quad u \in P, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

находим точку $u_0 \in P$, такую, что $t_0(u_0) = \inf\limits_{u \in P} t_0(u)$. Далее, полагаем $u_h(t) = u_0$, $t \in [0, t_1]$, и строим вспомогательную сопровождающую траекторию (поводырь) $z_h(t)$, $0 \le t \le t_1$, определяя ее из условий: $z_h'(t) + Az_h(t) = u_h(t)$, $0 \le t \le t_1$. Пусть для некоторого i, $0 \le i \le N-1$, используя измерения $\widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_{i-1}$, мы уже определили u_h, z_h, $0 \le t \le t_i$, и пусть нам стало известно измерение $\widetilde{y}_i$ наблюдаемой траектории при $t = t_i$. Тогда решаем вспомогательную задачу минимизации

$$t_i(u) = 2\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, u\rangle_H + \alpha\|u\|_H^2 \to \inf, \qquad u \in P, \quad (4.5)$$

и определяем точку $u_i \in P$, $t_i(u_i) = \inf\limits_{u \in P} t_i(u)$. Затем полагаем $u_h(t) = u_i$, $t_i < t \le t_{i+1}$, и находим $z_h(t)$, $t_i \le t \le t_{i+1}$, из условий

$$z_h'(t) + Az_h(t) = u_h(t), \qquad t_i \le t \le t_{i+1}; \qquad (4.6)$$

начальное условие $z_h(t_i)$ для дифференциального уравнения (4.6) берется с предыдущего шага. Далее, по мере поступления новых измерений $\widetilde{y}_{i+1}, \ldots, \widetilde{y}_{N-1}$ последовательно определяются $u_h(t)$, $z_h(t)$ на отрезках $[t_{i+1}, t_{i+2}], \ldots, [t_{N-1}, t_N = T]$. При реализации описанного метода нет необходимости в точном определении точки u_i из (4.5), достаточно найти точку u_i из условий

$$u_i \in P, \qquad t_i(u_i) \le \inf_{u \in P} t_i(u) + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0, \qquad i = \overline{0, N-1}. \qquad (4.7)$$

В дальнейшем предполагается, что функции $u_h(t)$, $z_h(t)$, $0 \le t \le T$, уже определены условиями (4.6) с использованием u_i из (4.7). Покажем, что если параметры α, ε, h описанного метода (4.5)–(4.7) подходящим образом согласованы с параметром погрешности δ из (4.3), то построенное управление $u_h(t)$, $0 \le t \le T$, при $h = h(\delta)$ может быть взято в качестве приближения $\widetilde{u}_\delta$ искомого управления u_* в смысле равенства (4.4).

Теорема 4.1. *Пусть выполнены все условия теорем 3.1, 3.2 и условия (4.3), пусть параметры $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $h = h(\delta)$, $0 < \delta \le \delta_0$, метода (4.5)–(4.7) положительны и*

$$\lim_{\delta \to 0}\left(\alpha(\delta) + \varepsilon(\delta) + h(\delta) + \frac{\delta + \varepsilon(\delta) + \sqrt{h(\delta)}}{\alpha(\delta)}\right) = 0. \qquad (4.8)$$

Тогда функции $u_h(t)$, $z_h(t)$, $0 \le t \le T$, определенные методом (4.5)–(4.7) таковы, что

$$\lim_{\delta \to 0} \|u_{h(\delta)} - u_*\|_{L^2(0,T;H)} = 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \|z_{h(\delta)} - y(\cdot; u_*)\|_{C([0,T];H)} = 0.$$

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 4.1 (гл. I §4) введем функцию Ляпунова для задачи (4.1)–(4.4) следующим образом:

$$V(t) = \|z_h(t) - y(t; u_*)\|_H^2 + \alpha \int_0^t \|u_h(s)\|_H^2 ds, \qquad 0 \le t \le T.$$

Зафиксируем произвольный момент времени $t \in [0, T]$ и вычислим производную $V'(t)$. Пусть для определенности $t \in$ $\in [t_i, t_{i+1}]$. С учетом (4.1), (4.6) имеем

$$V'(t) = 2\langle z_h(t) - y(t; u_*), z_h'(t) - y'(t; u_*)\rangle + \alpha\|u_h(t)\|_H^2 =$$
$$= 2\langle z_h(t) - y(t; u_*), -Az_h(t) + u_h(t) + Ay(t; u_*) - u_*(t)\rangle +$$
$$+ \alpha\|u_h(t)\|_H^2 = -2\langle A(z_h(t) - y(t; u_*)), z_h(t) - y(t; u_*)\rangle +$$
$$+ 2\langle z_h(t) - y(t; u_*), u_i - u_*(t)\rangle_H + \alpha\|u_i\|_H^2 =$$
$$= -2\|z_h(t) - y(t; u_*)\|_V^2 + 2\langle z_h(t) - z_h(t_i), u_i - u_*(t)\rangle_H +$$
$$+ [2\langle z_h(t_i) - \widetilde{y}_i, u_i - u_*(t)\rangle_H + \alpha\|u_i\|_H^2] +$$
$$+ 2\langle \widetilde{y}_i - y(t_i, u_*), u_i - u_*(t)\rangle_H + 2\langle y(t_i, u_*) - y(t, u_*), u_i - u_*(t)\rangle_H. \qquad (4.9)$$

Оценим сверху каждое слагаемое из правой части равенства (4.9). Первое слагаемое, очевидно, неположительно. Решение $y(t)$ задачи (4.1), соответствующее фиксированным $u(t)$ и y_0, далее нам удобно будет обозначать через $y(t; u, y_0)$. Тогда

$$y(t; u_*) = y(t; u_*, y_0), \qquad z_h(t) = y(t; u_h, \widetilde{y}_0), \qquad 0 \le t \le T.$$

Заметим, что $\|\tilde{y}_0\|_V \le \|y_0\|_V + \delta_0 = R_0$, $\|y_0\|_V \le R_0$, $\|u_h(t)\|_H \le R_1$, $\|u_*(t)\|_H \le R_1$ п. в на $[0,T]$. Отсюда и из замечания 1 к теореме 3.2 следует, что $y(t;u_*)$, $z_h(t)$ удовлетворяют условию Гельдера (3.18) с одной и той же константой L. Поэтому для второго и пятого слагаемого из правой части (4.9) имеем оценки

$$2\langle z_h(t) - z_h(t_i), u_i - u_*(t)\rangle_H \le 4LR_1\sqrt{h},$$

$$2\langle y(t_i,u_*) - y(t,u_*), u_i - u_*(t)\rangle_H \le 4LR_1\sqrt{h}.$$

Четвертое слагаемое из (4.9) оцениваем с помощью условий (4.2), (4.3):

$$2\langle \tilde{y}_i - y(t_i,u_*), u_i - u_*(t)\rangle_H \le 4R_1\delta.$$

Наконец, третье слагаемое из правой части (4.9) оценим с помощью условия (4.7):

$$2\langle z_h(t_i) - \tilde{y}_i, u_i - u_*(t)\rangle_H + \alpha\|u_i\|_H^2 =$$
$$= t_i(u_i) - t_i(u_*(t)) + \alpha\|u_*(t)\|_H^2 \le$$
$$\le \inf_{u\in P} t_i(u) + \varepsilon - t_i(u_*(t)) + \alpha\|u_*(t)\|_H^2 \le \varepsilon + \alpha\|u_*(t)\|_H^2.$$

Полученные оценки подставим в правую часть (4.9):

$$V'(t) \le 0 + 8LR_1\sqrt{h} + 4R_1\delta + \varepsilon + \alpha\|u_*(t)\|_H^2 \le$$
$$\le C(\sqrt{h} + \delta + \varepsilon) + \alpha\|u_*(t)\|_H^2 \quad \forall t \in [0,T].$$

Интегрируя это неравенство на отрезке $[0,t]$, с учетом начального условия $V(0) = \|\tilde{y}_0 - y_0\|_H^2 \le \delta^2$ будем иметь

$$V(t) \le \delta^2 + CT(\sqrt{h} + \delta + \varepsilon) + \alpha\int_0^T \|u_*(t)\|_H^2 dt \qquad \forall t \in [0,T].$$

Отсюда, учитывая определение функции Ляпунова $V(t)$, получаем две важные оценки:

$$\|z_h(t) - y(t;u_*)\|_{C([0,T];H)}^2 \le C_1(\sqrt{h} + \delta + \varepsilon) + \alpha\|u_*\|_{L^2(0,T;H)}^2, \tag{4.10}$$

$$\|u_h\|_{L^2(0,T;H)}^2 \le C_1\frac{(\sqrt{h} + \delta + \varepsilon)}{\alpha} + \|u_*\|_{L^2(0,T;H)}^2, \tag{4.11}$$

аналогичные оценкам (4.17), (4.18) гл. I. Из (4.10), (4.11) и условия (4.8) следует, что

$$\lim_{\delta\to 0}\|z_{h(\delta)} - y(\cdot;u_*)\|_{C([0,T];H)} = 0,$$
$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\|u_{h(\delta)}\|_{L^2(0,T;H)} \le \|u_*\|_{L^2(0,T;H)}. \tag{4.12}$$

Так как множество U из (4.2) выпукло, замкнуто и ограничено в норме гильбертова пространства $L^2(0,T;H)$, оно слабо компактно в $L^2(0,T;H)$. Поэтому семейство $\{u_{h(\delta)}(t)\} \in U$ при $\delta \to 0$ имеет хотя бы одну слабую предельную точку $v_* = v_*(t)$, причем $v_* \in U$. Пусть v_* — одна из таких слабых предельных точек, пусть $\delta_k \to 0$, $h_k = h(\delta_k)$ и $u_{h_k} \to v_*$ слабо в $L^2(0,T;H)$. Убедимся, что тогда $z_{h_k} \to y(t;v_*)$ слабо в $L^2(0,T;H)$. Для этого воспользуемся представлением $z_h(t) = y(t;u_h,\tilde{y}_0) = y(t;0,\tilde{y}_0) + y(t;u_h,0)$, $0 \le t \le T$. Так как разность $y(t;0,\tilde{y}_0) - y(t;0,y_0)$, $0 \le t \le T$, есть решение задачи (4.1) при $u = 0$, $y(0) = \tilde{y}_0 - y_0$, пользуясь оценкой (3.9), получаем

$$\|y(t;0,\tilde{y}_0) - y(t;0,y_0)\|_{L^2(0,T;H)} \le C_2\|\tilde{y}_0 - y_0\| \le C_2\delta,$$

т. е. $y(t;0,\tilde{y}_0) \to y(t;0,y_0)$ при $\delta \to 0$ сильно в $L^2(0,T;H)$ и тем более слабо в $L^2(0,T;H)$. Далее введем оператор $Bu \equiv y(t;u,0)$, $0 \le t \le T$. Из соотношений (4.1), (3.9) и неравенства $\|u\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C\|u\|_{L^2(0,T;H)}$ (см. гл. IV, (4.21)) следует, что B — линейный непрерывный оператор, действующий из $L^2(0,T;H)$ в $L^2(0,T;H)$. Тогда, учитывая, что $u_{h_k} \to v_*$ слабо в $L^2(0,T;H)$, имеем

$$\langle y(t;u_{h_k},0),\varphi\rangle_{L^2(0,T;H)} = \langle Bu_{h_k},\varphi\rangle_{L^2(0,T;H)} =$$
$$= \langle u_{h_k}, B^*\varphi\rangle_{L^2(0,T;H)} \to \langle v_*, B^*\varphi\rangle_{L^2(0,T;H)} =$$
$$= \langle Bv_*,\varphi\rangle_{L^2(0,T;H)} = \langle y(t;v_*,0),\varphi\rangle_{L^2(0,T;H)} \quad \forall\varphi \in L^2(0,T;H),$$

т. е. $y(t; u_{h_k}, 0) \to y(t; v_*, 0)$ при $\delta \to 0$ слабо в $L^2(0,T;H)$. Следовательно, $z_{h_k} = y(t, u_{h_k}, \widetilde{y}_0) \to y(t; 0, y_0) + y(t; v_*, 0) = y(t, v_*, y_0)$ при $\delta \to 0$ слабо в $L^2(0,T;H)$. Отсюда и из (4.12) вытекает, что $y(t; u_*, y_0) = y(t; v_*, y_0) \forall t \in [0,T]$. Как видно из уравнения (4.1), это возможно только при $v_* = u_*$. Таким образом, установлено, что семейство $\{u_{h(\delta)}(t)\}$ при $\delta \to +0$ имеет единственную слабую предельную точку, т. е. $u_{h(\delta)} \to u_*$ слабо в $L^2(0,T;H)$. Тогда из (4.12) и слабой полунепрерывности нормы имеем

$$\|u_*\|_{L^2(0,T;H)} \le \varliminf_{\delta\to 0} \|u_{h(\delta)}\|_{L^2(0,T;H)} \le \varlimsup_{\delta\to 0} \|u_{h(\delta)}\|_{L^2(0,T;H)} \le$$

$$\le \|u_*\|_{L^2(0,T;H)},$$

т. е. существует предел $\lim\limits_{\delta\to 0} \|u_{h(\delta)}\|_{L^2(0,T;H)} = \|u_*\|_{L^2(0,T;H)}$. Отсюда и из слабой сходимости $u_{h(\delta)} \to u_*$ получаем сильную в $L^2(0,T;H)$ сходимость при $\delta \to 0$:

$$\|u_{h(\delta)} - u_*\|^2_{L^2(0,T;H)} =$$

$$= \|u_{h(\delta)}\|^2_{L^2(0,T;H)} - 2\langle u_{h(\delta)}, u_*\rangle_{L^2(0,T;H)} + \|u_*\|^2_{L^2(0,T;H)} \to 0.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что в качестве искомого приближения $\widetilde{u}_\delta$ к решению задачи (4.1)–(4.4) можно взять элемент $\widetilde{u}_\delta = u_{h(\delta)}$.

Глава III

Задача восстановления правой части гиперболического уравнения

§ 1. Постановка прямой задачи. Примеры

1. Будем рассматривать процесс, описываемый операторным дифференциальным уравнением второго порядка

$$y''(t) + Ay(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \tag{1.1}$$

где оператор A представляет собой энергетическое расширение линейного, неограниченного, симметричного, положительно определенного оператора с областью определения, плотной в некотором гильбертовом пространстве H.

Как и выше, через V будем обозначать энергетическое гильбертово пространство, полученное пополнением области определения исходного оператора в энергетической метрике $\|v\|_V = \langle Av, v\rangle^{1/2}$, V^* — сопряженное к V пространство. Напомним, что $V \subset H \simeq H^* \subset V^*$, причем эти включения являются плотными и непрерывными; $\langle f, v\rangle$ — результат действия линейного непрерывного функционала $f \in V^*$ на элемент $v \in V$; $\langle u, v\rangle_V = \langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ — скалярное произведение в V; $\langle f, g\rangle_{V^*} = \langle A^{-1}f, A^{-1}g\rangle_V$ — скалярное произведение в V^*; $\|f\|_{V^*} = \|A^{-1}f\|_V$ — норма в V^*; $\langle f, v\rangle = \langle f, v\rangle_H$ $\forall f \in H \simeq H^*$ $\forall v \in H$; $\|v\|_{V^*} \le C\|v\|_H$ $\forall v \in H$; $\|v\|_H \le C\|v\|_V$ $\forall v \in V$. Будем также предполагать, что вложение $V \subset H$ компактно, управление $u = u(t) \in L^2(0,T;H)$, начальные условия в (1.1) таковы, что $y_0 \in V$, $y_1 \in H$. Приведем несколько примеров, показывающих, как многие встречающиеся в приложениях конкретные краевые задачи для гиперболических уравнений [14; 15; 25; 26; 69; 74; 89; 90; 126; 135] могут быть записаны в виде задачи Коши (1.1) для операторного дифференциального уравнения второго порядка, которое по аналогии с приложениями также будем называть гиперболическим.

Пример 1. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения колебаний струны [135]:

$$y_{tt} = y_{xx} + u(t,x), \qquad (t,x) \in Q = (0,T) \times (0,\ell), \quad (1.2)$$
$$y|_{x=0} = 0, \qquad y|_{x=\ell} = 0, \qquad 0 < t < T, \quad (1.3)$$
$$y|_{t=0} = y_0(x), \qquad y_t|_{t=0} = y_1(x), \qquad 0 \le x \le \ell. \quad (1.4)$$

Как и в случае краевой задачи (1.1)–(1.3) из гл. II, исходный оператор A здесь вводится так: $Af = -f''(x)$, $0 \le x \le \ell$, и его область определения $D(A) = \{f = f(x) \in C^2[0,\ell] : f(0) = f(\ell) = 0\}$ плотна в $H = L^2(0,\ell)$. В гл. II были изучены свойства оператора A, показано, что его энергетическое расширение, которое будем обозначать той же буквой A, действует из $V = H_0^1(0,\ell)$ в $V^* = (H_0^1(0,\ell))^*$ по правилу

$$\langle Av, \varphi\rangle = \int_0^\ell v'(x)\varphi'(x)dx \quad \forall v,\varphi \in V, \qquad A \in L(V \to V^*),$$

A — симметрический, положительно определенный оператор, а вложение $V \subset H$ компактно. Как видим, краевая задача (1.2)–(1.4) полностью укладывается в схему задачи Коши (1.1).

Пример 2. Третья краевая задача для уравнения колебаний струны [135]:

$$y_{tt} = y_{xx} + u(t,x), \qquad (t,x) \in Q = (0,T) \times (0,\ell),$$
$$(-y_x + y)|_{x=0} = 0,\ (y_x + y)|_{x=\ell}, \qquad 0 \le t \le T,$$
$$y|_{t=0} = y_0(x), \qquad y_t|_{t=0} = y_1(x), \qquad 0 \le x \le \ell,$$

также является частным случаем задачи (1.1). Здесь A представляет собой энергетическое расширение оператора $Af = -f''(x)$ с областью определения

$$D(A) = \{f = f(x) \in C^2[0,l] : -f'(0) + f(0) = 0,\ f'(\ell) + f(\ell) = 0\},$$

$$\langle Av, \varphi\rangle = \int_0^\ell v'(x)\varphi'(x)dx + v(\ell)\varphi(\ell) + v(0)\varphi(0) \qquad \forall v,\varphi \in V,$$

где $V = H^1(0,\ell)$, $V^* = (H^1(0,\ell))^*$ (см. гл. II, §2, пример 1).

Пример 3. Процессы поперечных колебаний стержней и балок описываются краевой задачей [135]

$$y_{tt} + y_{xxxx} = u(t,x), \qquad (t,x) \in Q = (0,T) \times (0,\ell),$$

$$y|_{x=0} = 0, \quad y_x|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=\ell} = 0, \quad y_x|_{x=\ell} = 0, \quad 0 < t < T,$$

(случай жесткого закрепления концов стержня)

$$y|_{t=0} = y_0(x), \quad y_t|_{t=0} = y_1(x), \quad 0 \le x \le \ell,$$

которая тоже может быть записана в форме (1.1). Здесь исходный оператор A вводится так: $Af = \frac{d^4}{dx^4} f(x)$, $0 \le x \le \ell$, его область определения

$$D(A) = \{f = f(x) \in C^4[0,l] : f(0) = f(\ell) = 0,\ f'(0) = f'(\ell) = 0\}$$

плотна в $H = L^2(0,\ell)$. Оператор $A : H \to H$ не ограничен, симметричен:

$$(Af, g)_H = \int_0^\ell \frac{d^4 f(x)}{dx^4} g(x)dx = \int_0^\ell f''(x)g''(x)dx \quad \forall f,g \in D(A)$$

и положительно определен:

$$(Af, f)_H = \int_0^\ell |f''(x)|^2 dx = \|f''\|^2_{L^2(0,\ell)} \ge \mu \|f\|^2_H,$$

так как норма $\|f''\|_{L^2}$ эквивалентна стандартной норме $\|f\|_{H^2} = \left(\int\limits_0^\ell \sum\limits_{i=0}^2 \left|\frac{d^i}{dx^i} f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}$ пространства $H^2(0,\ell)$ для всех функций

$$f(x) \in H_0^2(0,\ell) =$$
$$= \{f(x) \in H^2(0,\ell) : f(0) = f(\ell) = 0,\ f'(0) = f'(\ell) = 0\}.$$

Такой оператор A после энергетического расширения будет действовать из пространства $V = H_0^2(0,\ell)$ в сопряженное пространство $V^* = (H_0^2(0,\ell))^*$ по правилу

$$\langle Af, \varphi\rangle = \int_0^\ell f''(x)\varphi''(x)dx \qquad \forall f, \varphi \in V,$$

$A \in L(V \to V^*)$ — непрерывный, симметричный, положительно определенный оператор.

Пример 4. Деформации и колебания, возникающие в изотропных упругих телах, описываются следующей краевой задачей [135]:

$$\rho y_{tt} = \nu\Delta y + (\lambda+\nu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\, y) + u(t,x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$y|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \quad y|_{t=0} = y_0(x),\ y_t|_{t=0} = y_1(x), \quad x \in \Omega,$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ — пространственные переменные, t — время, Ω — замкнутое ограниченное множество из E^3 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $y = y(t,x) = (y_1(t,x), y_2(t,x), y_3(t,x))$ — вектор смещения точки x в момент t, $u = u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ — вектор объемных сил, действующих на тело Ω (управление), Δ — оператор Лапласа, $\mathrm{div}\, y = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y_i}{\partial x_i}$ — дивергенция вектора y, ρ — плотность среды, λ, ν — постоянные Ламэ.

В этой задаче в качестве H можно взять пространство $H = L_3^2(\Omega)$ вектор-функций $f = f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, $x \in \Omega$, со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle_H = \int_\Omega \langle f(x), g(x)\rangle_{E^3} dx.$$

Исходный оператор $A: H \to H$ вводим так:

$$Af = -\nu\Delta f - (\lambda+\nu)\mathrm{grad}(\mathrm{div} f),$$

$$f \in D(A) =$$

$$= \{f = (f_1, f_2, f_3) : f_i = f_i(x) \in C^2(\Omega), f_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1,2,3\}.$$

Такой оператор после энергетического расширения будет действовать из пространства

$$V = H_0^1(\Omega) =$$

$$= \left\{f = (f_1, f_2, f_3) \in L_3^2(\Omega), \mathrm{grad} f_i \in L_3^2(\Omega),\ i = 1,2,3;\ f|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \langle \mathrm{grad} f_i(x), \mathrm{grad} g_i(x)\rangle_{E^3} dx$$

в пространство $V^* = (H_0^1(\Omega))^*$ по правилу

$$\langle Af, \varphi\rangle = \frac{\nu}{\rho}\int_\Omega \left(\langle \mathrm{grad} f_i(x), \mathrm{grad}\varphi_i(x)\rangle_{E^3} + \frac{\lambda+\nu}{\rho}(\mathrm{div} f)(\mathrm{div}\varphi)\right) dx$$

$$\forall f, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Отсюда видно, что A — симметричный оператор. С помощью теорем вложения Соболева [89; 126] получаем положительную определенность оператора A:

$$\langle Af, f\rangle \geq \frac{\nu}{\rho}\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} |\mathrm{grad} f_i(x)|_{E^3}^2 dx = \frac{\nu}{\rho}\|f\|_{H_0^1}^2 \geq \mu\|f\|_{L_3^2}^2 \quad \forall f \in V.$$

Другие примеры краевых задач, укладывающихся в дифференциально-операторную схему задачи (1.1), читатель найдет в [14; 15; 25; 26; 69; 74; 89; 90; 126; 135].

2. Вернемся к задаче (1.1) и исследуем вопросы существования и единственности ее решения при сделанных выше предположениях.

Определение. Решением задачи (1.1) будем называть функцию $y = y(t) = y(t, u, y_0, y_1)$, $0 \leq t \leq T$, такую, что $y(t) \in\in C([0,T]; V)$, $y'(t) \in C([0,T]; H)$, $y''(t) \in L^2(0,T; V^*)$, и удовлетворяющую дифференциальному уравнению (1.1) почти всюду на $[0,T]$ (в смысле равенства функционалов из V^*) и начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.

Решение задачи (1.1) будем искать в виде ряда Фурье по собственным элементам $\{e_k\}$ оператора A:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) e_k, \qquad 0 \le t \le T. \tag{1.5}$$

Так как $y_0 \in V$, $y_1 \in H$, $u = u(t) \in L^2(0,T;H)$, а $\{e_k\}$ — ортонормированный базис (ОНБ) в H, $\left\{\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}$ — ОНБ в V, имеют место разложения (см. гл. IV, теоремы 2.2, 3.8)

$$y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} y_{0k} e_k, \qquad y_{0k} = \langle y_0, e_k \rangle_H,$$

$$y_1 = \sum_{k=1}^{\infty} y_{1k} e_k, \qquad y_{1k} = \langle y_1, e_k \rangle_H,$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k, \qquad u_k(t) = \langle u(t), e_k \rangle_H \in L^2(0,T),$$

причем ряд для y_0 сходится сильно в V, ряд для y_1 — сильно в H, ряд для $u(t)$ — сильно в H при почти всех $t \in [0,T]$ и в норме $L^2(0,T;H)$. Формально подставим ряд (1.5) и ряды для y_0, y_1, $u(t)$ в (1.1) и с учетом ортонормированности системы $\{\sqrt{\lambda_k} e_k\}$ в V^* для $y_k(t)$ получим задачу Коши:

$$y_k''(t) + \lambda_k y_k(t) = u_k(t), \quad 0 \le t \le T, \quad y_k(0) = y_{0k}, \quad y_k'(0) = y_{1k}.$$

Отсюда имеем

$$y_k(t) =$$

$$= y_{0k} \cos\sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} y_{1k} \sin\sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t u_k(\tau) \sin\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau,$$

$$k = 1, 2, \dots \tag{1.6}$$

Покажем, что ряд (1.5) с коэффициентами (1.6) в самом деле является решением задачи Коши (1.1). Точнее, здесь верна

Теорема 1.1. *Пусть $A \in L(V \to V^*)$ — энергетическое расширение линейного, симметричного, положительно определенного оператора с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве H. Кроме того, пусть вложение $V \subset H$ компактно и $y_0 \in V$, $y_1 \in H$, $u = u(t) \in L^2(0,T;H)$.*

Тогда существует, причем единственное, решение задачи (1.1); оно представимо в виде ряда (1.5) с коэффициентами (1.6); справедлива оценка

$$\|y\|_{C([0,T];V)} + \|y'\|_{C([0,T];H)} + \|y''\|_{L^2(0,T;V^*)} \le$$
$$\le C_0(\|y_0\|_V + \|y_1\|_H + \|u\|_{L^2(0,T;H)}), \tag{1.7}$$

где $C_0 > 0$ — постоянная, не зависящая от y_0, y_1, u.

Доказательство. Воспользуемся той же схемой доказательства, что и в аналогичной теореме 3.1 гл. II. Введем конечные суммы Фурье:

$$y_0^N = \sum_{k=1}^{N} y_{0k} e_k, \qquad y_1^N = \sum_{k=1}^{N} y_{1k} e_k,$$

$$u^N(t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(t) e_k, \qquad y^N(t) = \sum_{k=1}^{N} y_k(t) e_k.$$

Нетрудно видеть, что $y^N(t)$ — решение задачи Коши:

$$y^{N''}(t) + Ay^N(t) = u^N(t), \qquad 0 \le t \le T;$$

$$y^N(0) = y_0^N, \quad y^{N'}(0) = y_1^N, \tag{1.8}$$

причем $y^N(t)$, $y^{N'}(t)$, $Ay^N(t) \in C([0,T];V)$, $u^N(t)$, $y^{N''}(t) \in L^2(0,T,V)$. Умножим обе части уравнения (1.8) на $y^{N'}(t)$, или, точнее говоря, равные функционалы $y^{N''}(t) + Ay^N(t)$ и $u^N(t)$ из V^* применим к элементу $y^{N'}(t) \in V$ и полученное равенство проинтегрируем на отрезке $[0,t]$:

$$\int_0^t \langle y^{N''}(\tau), y^{N'}(\tau) \rangle d\tau + \int_0^t \langle Ay^N(\tau), y^{N'}(\tau) \rangle d\tau =$$

$$= \int_0^t \langle u^N(\tau), y^{N'}(\tau) \rangle d\tau.$$

Функция $\left\|y^{N'}(t)\right\|_H^2$ является абсолютно непрерывной, поэтому

$$\int_0^t \langle y^{N''}(\tau), y^{N'}(\tau)\rangle d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\left\|y^{N'}(\tau)\right\|_H^2\right)' d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|y^{N'}(t)\right\|_H^2 - \frac{1}{2}\left\|y^{N'}(0)\right\|_H^2.$$

Аналогично с учетом непрерывности и симметричности оператора A имеем

$$\int_0^t \langle Ay^N(\tau), y^{N'}(\tau)\rangle d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\langle Ay^N(\tau), y^N(\tau)\rangle d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left\|y^N(\tau)\right\|_V^2 d\tau = \frac{1}{2}\left\|y^N(t)\right\|_V^2 - \frac{1}{2}\left\|y^N(0)\right\|_V^2.$$

Кроме того,

$$\int_0^t \langle u^N(\tau), y^{N'}(\tau)\rangle d\tau \le \int_0^t \left\|u^N(\tau)\right\|_H \left\|y^{N'}\right\|_H d\tau \le$$

$$\le \max_{0\le t\le T}\left\|y^{N'}(t)\right\|_H \int_0^t \left\|u^N(\tau)\right\|_H d\tau \le \frac{1}{4}\max_{0\le t\le T}\left\|y^{N'}(t)\right\|_H^2 +$$

$$+\left(\int_0^t \left\|u^N(\tau)\right\|_H d\tau\right)^2 \le \frac{1}{4}\max_{0\le t\le T}\left\|y^{N'}(t)\right\|_H^2 + T\int_0^T \left\|u^N(t)\right\|_H^2 dt.$$

Суммируя полученные оценки и учитывая начальные условия

$$y^N(0) = y_0^N, \quad y^{N'}(0) = y_1^N,$$

получаем

$$\left\|y^{N'}(t)\right\|_H^2 + \left\|y^N(t)\right\|_V^2 \le$$

$$\le \left\|y_1^N\right\|_H^2 + \left\|y_0^N\right\|_V^2 + \frac{1}{2}\max_{0\le t\le T}\left\|y^{N'}(t)\right\|_H^2 + 2T\left\|u^N\right\|_{L^2(0,T;H)}^2$$

$$\forall t \in [0, T],$$

и, следовательно,

$$\left\|y^{N'}(t)\right\|_{C([0,T];H)}^2 + \left\|y^N(t)\right\|_{C([0,T];V)}^2 \le$$

$$\le C_1\left(\left\|y_1^N\right\|_H^2 + \left\|y_0^N\right\|_V^2 + T\left\|u^N\right\|_{L^2(0,T;H)}^2\right). \tag{1.9}$$

Из уравнения (1.8) с учетом оценки (1.9) и непрерывности вложения $H \subset V^*$ имеем

$$\left\|y^{N''}\right\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \le 2\left(\left\|Ay^N\right\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 + \left\|u^N\right\|_{L^2(0,T;V^*)}^2\right) \le$$

$$\le 2\left(\|A\|^2\left\|y^N\right\|_{L^2(0,T;V)}^2 + C\left\|u^N\right\|_{L^2(0,T;H)}^2\right) \le$$

$$\le 2\left(\|A\|^2\max_{0\le t\le T}\left\|y^N(t)\right\|_V^2 T + C\left\|u^N\right\|_{L^2(0,T;H)}^2\right) \le$$

$$\le C_2\left(\left\|y_1^N\right\|_H^2 + \left\|y_0^N\right\|_V^2 + \left\|u^N\right\|_{L^2(0,T;H)}^2\right). \tag{1.10}$$

Объединяя оценки (3.9), (3.10), получим

$$\left\|y^N\right\|_{C([0,T];V)} + \left\|y^{N'}\right\|_{C([0,T];H)} + \left\|y^{N''}\right\|_{L^2(0,T;V^*)} \le$$

$$\le C_0\left(\left\|y_0^N\right\|_V + \left\|y_1^N\right\|_H + \left\|u^N\right\|_{L^2(0,T;H)}\right), \qquad N = 1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

Далее заметим, что разность

$$z^{NM}(t) = y^N(t) - y^M(t) = \sum_{k=M}^{N} y_k(t)e_k$$

является решением задачи

$$z^{NM''}(t) + Az^{NM}(t) = u^N(t) - u^M(t), \qquad 0 \le t \le T;$$

$$z^{NM}(0) = y_0^N - y_0^M, \qquad z^{NM'}(0) = y_1^N - y_1^M,$$

того же вида, что и (1.8), поэтому в силу (3.11) для всех N, $M = 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$\left\|y^N - y^M\right\|_{C([0,T];V)} + \left\|y^{N'} - y^{M'}\right\|_{C([0,T];H)} + \left\|y^{N''} - y^{M''}\right\|_{L^2(0,T;V^*)} \le$$

$$\le C_0 \left(\left\|y_0^N - y_0^M\right\|_V + \left\|y_1^N - y_1^M\right\|_H + \left\|u^N - u^M\right\|_{L^2(0,T;H)}\right). \tag{1.12}$$

Из оценки (1.12) следует, что последовательность $\{y^N(t)\}$ фундаментальна в пространстве $C([0,T];V)$, $\{y^{N'}(t)\}$ фундаментальна в $C([0,T];H)$, $\{y^{N''}(t)\}$ — в $L^2(0,T;V^*)$. Поэтому существует функция $y(t) \in C([0,T];V)$ с производными $y'(t) \in C([0,T];H)$, $y''(t) \in L^2(0,T;V^*)$, причем $\{y^N(t)\} \to y(t)$ сильно в $C([0,T];V)$, $\{y^{N'}(t)\} \to y'(t)$ сильно в $C([0,T];H)$, $\{y^{N''}(t)\} \to y''(t)$ сильно в $L^2(0,T;V^*)$, $\{Ay^N(t)\} \to Ay(t)$ сильно в $L^2(0,T;V^*)$. Совершая в (1.8) предельный переход при $N \to \infty$, убеждаемся, что $y(t)$ — решение задачи (1.1). Из (1.11) при $N \to \infty$ получаем оценку (1.7). Тем самым доказано, что решение задачи (1.1) существует, представимо в виде ряда Фурье (1.5) с коэффициентами (1.6), который сходится сильно в $C([0,T];V)$, ряд $y'(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k'(t)e_k$ сходится сильно в $C([0,T];H)$, ряд $y''(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k''(t)e_k$ сходится сильно в $L^2(0,T;V^*)$; установлена оценка (1.7).

Докажем, что задача (1.1) других решений не имеет.

Пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения задачи (1.1). Тогда разность $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$ является решением задачи

$$z''(t) + Az(t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \quad z(0) = 0, \; z'(0) = 0. \tag{1.13}$$

Применим функционал $z''(t) + Az(t) \in V^*$ к элементу $w(t) = A^{-1}z'(t) \in V$ и получившуюся функцию проинтегрируем на отрезке $[0,t]$. С учетом (1.13) имеем

$$\int\limits_0^t \langle z''(\tau) + Az(\tau), A^{-1}z'(\tau)\rangle d\tau = 0 \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{1.14}$$

Так как

$$\langle z''(\tau), A^{-1}z'(\tau)\rangle = \langle AA^{-1}z''(\tau), A^{-1}z'(\tau)\rangle = \langle Aw'(\tau), w(\tau)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\langle Aw(\tau), w(\tau)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\|w(\tau)\|_V^2\right),$$

$$\langle Az(\tau), A^{-1}z'(\tau)\rangle = \langle z(\tau), AA^{-1}z'(\tau)\rangle = \langle z'(\tau), z(\tau)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|z(\tau)\|_H^2,$$

из (1.13), (1.14) следует

$$\|w(t)\|_V^2 + \|z(t)\|_H^2 = \|w(0)\|_V^2 + \|z(0)\|_H^2 =$$

$$= \|A^{-1}z'(0)\|_V^2 + \|z(0)\|_H^2 = 0 \qquad \forall t \in [0,T].$$

Это означает, что $z(t) \equiv 0 \; \forall t \in [0,T]$. Теорема 1.1 доказана.

3. Покажем, что решение задачи (1.1) удовлетворяет условию Липшица по переменной t.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда* $\forall t, s \in [0,T]$

$$\|y(t) - y(s)\|_H \le C_2(\|y_0\|_V + \|y_1\|_H + \|u\|_{L^2(0,T;H)}) \cdot |t - s|,$$

$$C_2 = \sqrt{3}\left(1 + 2\sqrt{T}\right), \tag{1.15}$$

$$\|y'(t) - y'(s)\|_{V^*} \le 2\left(1 + \sqrt{T}\right)(\|y_0\|_V + \|y_1\|_H +$$

$$+ \|u\|_{L^2(0,T;H)} + \|u\|_{L^\infty(0,T;V^*)}) \cdot |t - s|; \tag{1.16}$$

в (1.16) предполагается, что $u \in L^2(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V^*)$.

Доказательство. Воспользуемся представлением решения $y(t)$ задачи (1.1) в виде ряда (1.5) с коэффициентами (1.6). Ряд (1.1) сходится сильно в $C([0,T];H)$. С учетом того, что $\{e_k\}$ — ОНБ в H, имеем

$$\|y(t)-y(s)\|_H^2=\sum_{k=1}^{\infty}(y_k(t)-y_k(s))^2. \tag{1.17}$$

Из формулы (1.6) следует

$$|y_k(t)-y_k(s)|\le$$

$$\le\left|y_{0k}\left(\cos\sqrt{\lambda_k}t-\cos\sqrt{\lambda_k}s\right)\right|+\left|\frac{y_{1k}}{\sqrt{\lambda_k}}\left(\sin\sqrt{\lambda_k}t-\sin\sqrt{\lambda_k}s\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\left|\int_0^t u_k(\tau)\left(\sin\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)-\sin\sqrt{\lambda_k}(s-\tau)\right)d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_s^t u_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k}(s-\tau)d\tau\right|\le$$

$$\le|y_{0k}|\sqrt{\lambda_k}|t-s|+|y_{1k}||t-s|+\int_0^t|u_k(\tau)||t-s|d\tau+$$

$$+\left|\int_s^t|u_k(\tau)||t-s|d\tau\right|\le$$

$$\le|t-s|\left(|y_{0k}|\sqrt{\lambda_k}+|y_{1k}|+2\int_0^t|u_k(t)dt|\right).$$

Отсюда с помощью неравенства $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|\right)^2\le n\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)$ при $n=3$ получаем

$$|y_k(t)-y_k(s)|^2\le|t-s|^2\cdot 3(\lambda_k y_{0k}^2+y_{1k}^2+4T\int_0^T|u_k(t)|^2dt).$$

Подставляя это неравенство в (1.17), приходим к оценке (1.15). Для доказательства оценки (1.16) воспользуемся представлением производной $y'(t)$ в виде ряда

$$y'(t)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k'(t)e_k,\qquad 0\le t\le T,$$

сходящегося сильно в $C([0,T];H)$ и тем более в $L^2(0,T;V^*)$. Отсюда, учитывая, что система $\{\sqrt{\lambda_k}e_k\}$ является ОНБ в V^*, имеем

$$\|y'(t)-y'(s)\|_{V^*}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}|y_k'(t)-y_k'(s)|^2. \tag{1.18}$$

Здесь

$$y_k'(t)=-\sqrt{\lambda_k}y_{0k}\sin\sqrt{\lambda_k}t+y_{1k}\cos\sqrt{\lambda_k}t+\int_0^t u_k(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)d\tau,$$

поэтому

$$|y_k'(t)-y_k'(s)|\le$$

$$\le\sqrt{\lambda_k}|y_{0k}|\left|-\sin\sqrt{\lambda_k}t+\sin\sqrt{\lambda_k}s\right|+|y_{1k}|\left|\cos\sqrt{\lambda_k}t-\cos\sqrt{\lambda_k}s\right|+$$

$$+\left|\int_0^t u_k(\tau)(\cos\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)-\cos\sqrt{\lambda_k}(s-\tau))d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_s^t u_k(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k}(s-\tau)d\tau\right|\le$$

$$\le\lambda_k|y_{0k}||t-s|+\sqrt{\lambda_k}|y_{1k}||t-s|+$$

$$\sqrt{\lambda_k}|t-s|\int_0^t|u_k(\tau)|d\tau+\left|\int_s^t|u_k(\tau)|d\tau\right|\le$$

$$\leq |t-s|\left(\lambda_k|y_{0k}| + \sqrt{\lambda_k}|y_{1k}| + \sqrt{\lambda_k}T\left(\int\limits_0^T |u_k(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}\right) +$$

$$+\left(\left|\int\limits_s^t |u_k(\tau)|^2 d\tau\right| |t-s|\right)^{1/2}.$$

Подставим эту оценку в (1.18):

$$\|y'(t) - y'(s)\|^2_{V^*} \leq$$

$$\leq (t-s)^2 \cdot 4\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k y_{0k}^2 + y_{1k}^2 + T\int\limits_0^T |u_k(\tau)|^2 d\tau\right) +\right.$$

$$\left. + \underset{0\leq t\leq T}{\mathrm{vraimax}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}|u_k(t)|^2\right)\right] \leq$$

$$\leq (t-s)^2 \cdot 4\left(1+\sqrt{T}\right)^2 \times$$

$$\times\left(\|y_0\|^2_V + \|y_1\|^2_H + \|u\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|u\|^2_{L^\infty(0,T;V^*)}\right).$$

Отсюда следует оценка (1.16). Теорема 1.2 доказана.

§ 2. Постановка обратной задачи. Метод динамической регуляризации

Пусть процесс описывается задачей Коши для операторного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(t) + Ay(t) = u(t), \quad 0 \leq t \leq T, \; y(0) = y_0, \; y'(0) = y_1, \tag{2.1}$$

рассмотренной в предыдущем параграфе. Пусть множество P определено следующим образом:

$$P = \{v \in H : \|v\|_H \leq R_1\}, \qquad R_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{2.2}$$

Управление $u = u(t)$, $0 \leq t \leq T$, будем называть допустимым, если

$$u \in U = \{u = u(t) \in L^2(0,T;H) : u(t) \in P \text{ п. в. на } [0,T]\}. \tag{2.3}$$

Согласно теореме 1.1 каждому допустимому управлению $u \in U$ и начальным условиям $y_0 \in V$, $y_1 \in H$ соответствует, притом единственное, решение $y = y(t) = y(t;u)$ задачи (2.1). Предполагается, что ведется наблюдение за траекторией $y = y(t;u_*)$, $0 \leq t \leq T$, системы (2.1), соответствующей некоторому допустимому управлению $u = u_*$. А именно: пусть в заданные дискретные моменты $t_i = ih$, $i = \overline{0, N-1}$, $h = T/N$, производятся измерения значений скорости $y'(t) = y'(t;u_*)$, причем вместо точных значений $y'(t_i)$ удается получить лишь их приближения $\widetilde{y}'_i \in H$, такие, что

$$\|\widetilde{y}'_i - y'(t_i)\|_{V^*} \leq \delta, \qquad 0 < \delta \leq \delta_0, \quad i = \overline{0, N-1}. \tag{2.4}$$

Требуется, зная оператор A, величины T, R_1, δ, приближенное значение $\widetilde{y}_0 \in V$ начального условия $y_0 \in V$ с погрешностью $\|\widetilde{y}_0 - y_0\|_H \leq \delta$ и значения $\widetilde{y}'_0, \ldots, \widetilde{y}'_{N-1}$ из (2.4) и построить управление $\widetilde{u}_\delta \in U$, такое, что

$$\lim_{\delta\to 0}\|\widetilde{u}_\delta - u_*\|_{L^2(0,T;H)} = 0. \tag{2.5}$$

При этом предполагается, что управление $\widetilde{u}_\delta = \widetilde{u}_\delta(t)$, $0 \leq t \leq T$, определяется последовательно на каждом частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ $i = \overline{0, N-1}$, и для построения u_δ на $[t_i, t_{i+1}]$ используются лишь значения $\widetilde{y}_0, \widetilde{y}'_0, \ldots, \widetilde{y}'_i$ уже зарегистрированных измерений.

Для решения сформулированной обратной задачи (2.1)–(2.5) будем применять метод динамической регуляризации. Опишем его. Пусть $i = 0$ и известны $\widetilde{y}_0$, $\widetilde{y}'_0$. Положим $z_h(0) = \widetilde{y}_0$, $z'_h(0) = \widetilde{y}'_0$ и, решая задачу минимизации

$$t_0(v) = 2\langle A^{-1}(z'_h(0) - \widetilde{y}'_0), v\rangle_H + \alpha\|v\|^2_H \to \inf_{v\in P}, \qquad \alpha > 0,$$

найдем точку $v = u_0 \in P$, $t_0(u_0) = \inf\limits_{v\in P} t_0(v)$. Далее полагаем $u_h(t) = u_0$ при $t \in [t_0 = 0, t_1]$ и находим сопровождающую траекторию (поводырь) $z_h(t)$ и ее производную $z_h'(t)$, $0 \le \le t \le t_1$, решая вспомогательную задачу Коши:

$$z_h''(t)+Az_h(t) = u_h(t), \quad 0 \le t \le t_1, \quad z_h(0) = \widetilde{y}_0, \quad z_h'(0) = \widetilde{y}_0'.$$

Допустим, что для некоторого i, $0 < i \le N-1$, по измерениям $\widetilde{y}_0, \widetilde{y}_0', \ldots, \widetilde{y}_{i-1}'$ уже построены $u_h(t)$, $z_h'(t)$, $0 \le t \le t_i$, и пусть к этому моменту нам стало известно измерение $\widetilde{y}_i'$ скорости наблюдаемой траектории при $t = t_i$. Тогда, решая задачу минимизации

1

$$t_i(v) = 2\langle A^{-1}(z_h'(t_i) - \widetilde{y}_i'), v\rangle_H + \alpha\|v\|_H^2 \to \inf_{v\in P}, \quad \alpha > 0, \quad (2.6)$$

определим точку $v = u_i \in P$, $t_i(u_i) = \inf_{v\in P} t_i(v)$. Затем положим

$$u_h(t) = u_i, \qquad t_i < t \le t_{i+1}, \qquad (2.7)$$

2

и, решая задачу Коши

$$z_h''(t) + Az_h(t) = u_h(t), \qquad t_i \le t \le t_{i+1}, \qquad (2.8)$$

3

с начальными условиями $z_h(t_i)$, $z_h'(t_i)$, известными с предыдущего шага, определяем $z_h'(t)$, $t_i \le t \le t_{i+1}$. Далее, по мере поступления информации $\widetilde{y}_{i+1}', \ldots, \widetilde{y}_{N-1}'$, последовательно определяются $u_h(t), z_h'(t)$ на промежутках $(t_{i+1}, t_{i+2}], \ldots \ldots, (t_{N-1}, t_N = T]$. При реализации описанного метода нет необходимости в точном решении задачи минимизации (2.6), достаточно найти точку u_i из условий

$$u_i \in P, \quad t_i(u_i) \le \inf_{v\in P} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (2.9)$$

4

Будем предполагать, что функции $u_h(t), z_h'(t)$, $0 \le t \le T$, уже определены по вышеуказанным правилам (2.7)–(2.8) с использованием значений u_i из (2.9). Покажем, что если параметры α, ε, h метода (2.6)–(2.9) подходящим образом согласованы с параметром погрешности δ из (2.4), то построенное управление $u_h(t)$ при $h = h(\delta)$ может быть взято в качестве приближения $\widetilde{u}_\delta$ искомого управления u_* в смысле равенства (2.5).

Теорема 2.1. *Пусть выполнены все условия теорем 1.1, 1.2 и условия (2.4), пусть параметры $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $h = h(\delta)$, $0 < \delta \le \delta_0$, метода (2.6)–(2.9) положительны и*

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\alpha(\delta) + \varepsilon(\delta) + h(\delta) + \frac{\delta + \varepsilon(\delta) + h(\delta)}{\alpha(\delta)}\right) = 0. \quad (2.10)$$

5

Тогда функции $u_h(t)$, $z_h(t)$, $0 \le t \le T$, определенные методом (2.6)–(2.9), таковы, что

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\|z_{h(\delta)} - y(\cdot\,; u_*)\|_{C([0,T];H)} + \|z_{h(\delta)}' - y'(\cdot\,; u_*)\|_{C([0,T];V^*)}\right) = 0,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\|u_{h(\delta)} - u_*\|_{L^2(0,T;H)} = 0. \quad (2.11)$$

6

Доказательство. Обозначим $w(t) = z_h(t) - y(t, u_*)$. Из (2.1), (2.8) следует, что $w(t)$ — решение задачи Коши:

$$\begin{gathered} w''(t) + Aw(t) = u_h(t) - u_*(t), \quad 0 \le t \le T; \\ w(0) = \widetilde{y}_0 - y_0, \quad w'(0) = \widetilde{y}_0' - y_0'. \end{gathered} \quad (2.12)$$

7

Введем функцию Ляпунова для задачи (2.1)–(2.5) следующим образом:

$$V(t) = \|w(t)\|_H^2 + \|w'(t)\|_{V^*}^2 + \alpha\int_0^t \|u_h(\xi)\|_H^2 d\xi, \quad 0 \le t \le T. \quad (2.13)$$

8

Производная (поточечная) этой функции равна

$$V'(t) = 2\langle w'(t), w(t)\rangle_H + \tfrac{d}{dt}\|w'(t)\|_{V^*}^2 + \alpha\|u_h(t)\|^2, \quad 0 \le t \le T. \quad (2.14)$$

9

Преобразуем второе слагаемое из правой части (2.14). Вспомним, что $\|g\|_{V^*} = \|A^{-1}g\|_V$, $\langle u, v\rangle_V = \langle Au, v\rangle$, $\|v\|_V = \langle Av, v\rangle^{1/2}$ $\forall g \in V^*\ \forall v \in V$. Поэтому с учетом (2.12) имеем

$$\frac{d}{dt}\|w'(t)\|_{V^*}^2 = \frac{d}{dt}\left\|A^{-1}w'(t)\right\|_V^2 = 2\langle A^{-1}w''(t), A^{-1}w'(t)\rangle_V =$$

$$= 2\langle AA^{-1}w''(t), A^{-1}w'(t)\rangle = 2\langle w''(t), A^{-1}w'(t)\rangle =$$
$$= 2\langle -Aw(t) + u_h(t) - u_*(t), A^{-1}w'(t)\rangle =$$
$$= -2\langle w(t), AA^{-1}w'(t)\rangle + 2\langle u_h(t) - u_*(t), A^{-1}w'(t)\rangle =$$
$$= -2\langle w'(t), w(t)\rangle_H + 2\langle u_h(t) - u_*(t), A^{-1}w'(t)\rangle_H.$$

Подставив полученное выражение в (2.14), получим

$$V'(t) = 2\langle A^{-1}w'(t), u_h(t) - u_*(t)\rangle_H + \alpha\|u_h(t)\|_H^2, \quad 0 \le t \le T.$$

Пусть для определенности $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Тогда

$$V'(t) = 2\langle A^{-1}w'(t), u_i - u_*(t)\rangle_H + \alpha\|u_i\|_H^2 =$$
$$= 2\langle A^{-1}\left[(z_h'(t) - y'(t,u_*)) - (z_h'(t_i) - y'(t_i,u_*))\right], u_i - u_*(t)\rangle_H -$$
$$-2\langle A^{-1}\left(y'(t_i,u_*) - \widetilde{y}_i'\right), u_i - u_*(t)\rangle_H +$$
$$+ \left[2\langle A^{-1}\left(z_h'(t_i) - \widetilde{y}_i'\right), u_i\rangle_H + \alpha\|u_i\|_H^2\right] -$$
$$- \left[2\langle A^{-1}\left(z_h'(t_i) - \widetilde{y}_i'\right), u_*(t)\rangle_H + \alpha\|u_*(t)\|_H^2\right] + \alpha\|u_*(t)\|_H^2 =$$
$$= 2\langle A^{-1}\left(z_h'(t) - z_h'(t_i)\right), u_i - u_*(t)\rangle_H -$$
$$-2\langle A^{-1}\left(y'(t,u_*) - y'(t_i,u_*)\right), u_i - u_*(t)\rangle_H -$$
$$-2\langle A^{-1}\left(y'(t_i;u_*) - \widetilde{y}_i'\right), u_i - u_*(t)\rangle_H +$$
$$+ \left[t_i(u_i) - t_i(u_*(t))\right] + \alpha\|u_*(t)\|_H^2, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}]. \qquad (2.15)$$
10

Оценим каждое слагаемое из правой части (2.15). Сначала заметим, что из оценки(1.16) для $y(t,u_*)$, $u_* \in U$ с учетом (2.2), (2.3) и неравенства $\|u\|_{V^*} \le C\|u\|_H$ $\forall u \in H$ имеем

$$\|y'(t;u_*) - y'(t_i;u_*)\|_{V^*} \le$$
$$\le 2\left(1 + \sqrt{T}\right)\left(\|y_0\|_V + \|y_1\|_H + TR_1 + CR_1\right)h = C_1 h,$$
$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, N-1}. \qquad (2.16)$$
11

Здесь и ниже через C_j, $j = 1, 2, \ldots$, будем обозначать постоянные, зависящие лишь от $\|y_0\|_V$, $\|y_1\|_H$, δ_0, R_1, T, но не зависящие от $u_i \in P$, $u, u_* \in U$, $0 < \delta \le \delta_0$.

Далее, заметим, что из описания метода (2.6)–(2.9) следует, что $z_h(t)$ является решением задачи Коши:

$$z_h'' + Az_h = u_h(t), \qquad 0 \le t \le T; \qquad z(0) = \widetilde{y}_0, \qquad z'(0) = \widetilde{y}_0',$$

и поэтому для $z_h(t)$ сохраняют силу оценки (1.15), (1.16). В частности, оценка (1.16) с учетом (2.2)–(2.4) дает

$$\|z_h'(t) - z_h'(t_i)\|_{V^*} \le$$
$$\le 2\left(1 + \sqrt{T}\right)\left(\|\widetilde{y}_0\|_V + \|\widetilde{y}_0'\|_H +\right.$$
$$\left.+\|u_h\|_{L^2(0,T;H)} + C\|u_h\|_{L^\infty(0,T;H)}\right)|t - t_i| \le$$
$$\le 2\left(1 + \sqrt{T}\right)\left(\|y_0\|_V + \|y_1\|_H + 2\delta_0 + TR_1 + CR_1\right)h = C_2 h$$
$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = \overline{0, N-1}. \qquad (2.17)$$
12

Напомним неравенства:

$$\|v\|_H \le C\|v\|_V \qquad \forall v \in V,$$
$$\|A^{-1}v\|_H \le C\|A^{-1}v\|_V = C\|v\|_{V^*} \qquad \forall v \in V^*. \qquad (2.18)$$
13

Первое слагаемое из правой части (2.15) с помощью (2.2), (2.17), (2.18) оценивается так:

$$\left|2\langle A^{-1}\left(z_h'(t) - z_h'(t_i)\right), u_i - u_*(t)\rangle_H\right| \le$$
$$\le 2\|A^{-1}\left(z_h'(t) - z_h'(t_i)\right)\|_H \|u_i - u_*(t)\|_H \le$$
$$\le 4R_1 C\,\|z_h'(t) - z_h'(t_i)\|_{V^*} \le C_3 h \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Аналогично с помощью (2.16), (2.18) оценивается второе слагаемое:

$$\left|2\langle A^{-1}(y'(t;u_*) - y'(t_i;u_*)), u_i - u_*(t)\rangle_H\right| \le C_4 h$$

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Для оценки третьего слагаемого правой части (2.15) воспользуемся (2.2)–(2.4), (2.18):

$$\left|2\langle A^{-1}\left(y'(t_i; u_*) - \widetilde{y}_i'\right), u_i - u_*(t)\rangle_H\right| \le$$

$$\le 4R_1 C \,\|y'(t_i; u_*) - \widetilde{y}_i'\|_{V^*} \le C_5 \delta$$

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = \overline{0, N-1}.$$

Наконец, четвертое слагаемое оценим с помощью условия (2.9):

$$t_i(u_i) - t_i\left(u_*(t)\right) \le \inf_{v \in V} t_i(v) + \varepsilon - t_i\left(u_*(t)\right) \le \varepsilon$$

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = \overline{0, N-1}.$$

Подставив полученные оценки в (2.15), получим

$$V'(t) \le C_6(\delta + h + \varepsilon) + \alpha \|u_*(t)\|_H^2 \qquad \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = \overline{0, N-1}. \tag{2.19}$$ 14

Кроме того, из $\|\widetilde{y}_0 - y_0\| \le \delta$ и (2.4), (2.13) следует, что

$$V(0) = \|w(0)\|_H^2 + \|w'(0)\|_{V^*}^2 = \|\widetilde{y}_0 - y_0\|_H^2 + \|\widetilde{y}_0' - y_0'\|_{V^*}^2 \le 2\delta^2.$$

Интегрируя (2.19), получаем

$$0 \le V(t) =$$

$$= \|z_h(t) - y(t; u_*)\|_H^2 + \|z_h'(t) - y'(t; u_*)\|_{V^*}^2 + \alpha \int_0^t \|u_h(\tau)\|_H^2 d\tau =$$

$$= V(0) + \int_0^t V'(\tau) d\tau \le 2\delta^2 + C_6 T(\delta + h + \varepsilon) + \alpha \int_0^t \|u_*(\tau)\|_H^2 d\tau,$$

$$\forall t \in [0, T].$$

Отсюда вытекают две важные оценки

$$\|z_h - y(\cdot\,; u_*)\|_{C([0,T]; H)}^2 + \|z_h' - y'(\cdot\,; u_*)\|_{C([0,T]; V^*)}^2 \le$$

$$\le C_7\left(\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta) + \alpha(\delta)\right), \tag{2.20}$$ 15

$$\|u_h\|_{L^2(0,T;H)}^2 \le \|u_*\|_{L^2(0,T;H)}^2 + C_8 \frac{\delta + h(\delta) + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)}, \tag{2.21}$$ 16

вполне аналогичные оценкам (4.10), (4.11) из гл. II.

Дальнейшее доказательство опирается на полученные оценки (2.20), (2.21) и ничем не отличается от доказательства теоремы 4.1 гл. II. Поэтому мы лишь наметим схему дальнейших рассуждений. Сначала выбираем последовательности $\{\delta_k\} \to 0$, $\{u_{h(\delta_k)}\} \to v_*$ слабо в $L^2(0,T;H)$, затем показываем, что $z_{h(\delta_k)}(t) \to y(t, v_*)$ слабо в $L^2(0,T;H)$. Пользуясь оценкой (2.20) при $\delta = \delta_k \to 0$, устанавливаем, что $y(t, v_*) = y(t, u_*)$ $\forall t \in [0,T]$, откуда посредством уравнения (2.1) заключаем, что $v_* = u_*$. Это означает, что семейство функций $\{u_{h(\delta)}(t)\}$ при $\delta \to 0$ сходится к $u_* = u_*(t)$ слабо в $L^2(0,T;H)$. Кроме того, из (2.21) имеем

$$\lim_{\delta \to 0} \|u_{h(\delta)}\|_{L^2(0,T;H)} = \|u_*\|_{L^2(0,T;H)}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\delta \to 0} \|u_{h(\delta)} - u_*\|_{L^2(0,T;H)} = 0.$$

Первое из соотношений (2.11) является следствием оценки (2.20). Теорема 2.1 доказана.

Из теоремы 2.1 следует, что в качестве искомого приближения $\widetilde{u}_\delta$ решения задачи (2.1)–(2.5) можно взять $\widetilde{u}_\delta = u_{h(\delta)}(t)$, $0 \le t \le T$.

Глава IV

Вспомогательные сведения

Строгое исследование вопросов существования и единственности решения краевых задач, записанных в форме задачи Коши для операторных дифференциальных уравнений, требует привлечения различных дополнительных сведений, несколько выходящих за рамки основных университетских курсов по функциональному анализу (функциональные пространства Соболева, интеграл Бохнера, обобщенные функции со значениями из гильбертова пространства и др.). Однако в отечественной литературе отсутствует единый источник, содержащий систематическое и доступное студентам изложение необходимого дополнительного материала, а имеющаяся монографическая литература (например, [15]) слишком трудна для первого знакомства с предметом.

В этой главе приводятся сведения из функционального анализа, необходимые для строгого изложения теории задач Коши для операторных дифференциальных уравнений первого и второго порядка, рассмотренных в гл. II, III. Предполагается, что читатель владеет элементами теории функций и функционального анализа в объеме стандартных университетских курсов по этому предмету [39; 136; 142].

§ 1. Пространства Соболева

1. Сначала рассмотрим функции одной переменной. Будем пользоваться обозначениями $L^p(a,b)$, $1 \le p < \infty$, $C^\infty[a,b]$, $\overset{\bullet}{C^\infty}[a,b]$, $C^{(k)}[a,b]$, $\overset{\bullet}{C^k}[a,b]$, $k = 1,2,\ldots$, и др., приведенными в списке обозначений.

Определение 1. Пусть функция $f(x) \in L^1(a,b)$. Функцию $\omega(x) \in L^1(a,b)$ называют обобщенной производной по Соболеву (о. п.) функции $f(x)$, если

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b \omega(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi = \varphi(x) \in \overset{\bullet}{C^\infty}[a,b]. \tag{1.1}$$

Обобщенную производную принято обозначать так же, как классическую:

$$\omega(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Если $f(x) \in C^1[a,b]$, то ее классическая поточечная производная $f'(x)$ одновременно является и ее о. п. Предлагаем читателю убедиться в том, что функции

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \max\{0;x\}$$

на отрезке $[-1,1]$ имеют о. п., равные соответственно $f_1' = \operatorname{sign} x$, $f_2'(x) = 1$ при $x > 0$, $f_2'(x) = 0$ при $x < 0$, но они не имеют классической производной в точке $x = 0$; функция $f_3(x) = \operatorname{sign} x$ не имеет о. п. на $[-1,1]$.

Напомним, что две измеримые (по Лебегу) функции $f(x)$ и $g(x)$, $a \le x \le b$, называются эквивалентными, если $f(x) = g(x)$ почти всюду (п. в.) на $[a,b]$. Как видно из формулы (1.1), если функция $f(x)$ имеет о. п. $f'(x)$, то любая функция $g(x)$, эквивалентная $f(x)$, также имеет о. п., равную $f'(x)$, и любая функция, эквивалентная $f'(x)$, является о. п. для $f(x)$ и $g(x)$. Так например, известная из классического анализа функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально},\\ 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \end{cases}$$

имеет о. п. $D'(x) \equiv 0$. Отметим, что о. п. определяется однозначно с точностью до эквивалентной функции. В самом деле, если функция $f(x)$ имеет две о. п. $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$, то из формулы (1.1) имеем

$$\int_a^b (f_1'(x) - f_2'(x))\varphi(x)dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \overset{\bullet}{C^\infty}[a,b],$$

но $\overset{\bullet}{C}^\infty [a,b]$ плотно в $L^1(a,b)$, поэтому последнее равенство возможно лишь тогда, когда $f_1'(x) = f_2'(x)$ п. в. на $[a,b]$.

Остановимся на следующих свойствах о. п.:

1) если $f(x), g(x) \in L^1(a,b)$ и имеют о. п. $f'(x)$, $g'(x)$, то функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ при всех $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ также имеет о. п., причем $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$;

2) если $f(x) \equiv \mathrm{const}$, то о. п. $f'(x) \equiv 0$;

3) если $f'(x)$ — о. п. функции $f(x)$ на $[a,b]$, то $f'(x)$ — о. п. функции $f(x)$ на произвольном отрезке $[c,d]$, $a < c < d < b$;

4) если $f(x) \in L^1(a,b)$ финитна на $[a,b]$ и имеет о. п. $f'(x)$ на $[a,b]$, то $f'(x)$ также финитна на $[a,b]$;

5) если функция $f(y) \in L^1(a,b)$ имеет о. п. $f'(y)$, то функция $F(x) = f(Ax+B)$ имеет о. п. $F'(x)$ на $[a_1,b_1]$, $a_1 = \frac{a-B}{A}$, $b_1 = \frac{b-B}{A}$, причем $F'(x) = Af'(Ax+B)$.

В самом деле, возьмем произвольную функцию

$$\varphi(x) \in \overset{\bullet}{C}^\infty [a_1, b_1].$$

Тогда $\varphi(\frac{y-B}{A}) \in \overset{\bullet}{C}^\infty [a,b]$ и поэтому

$$\int_{a_1}^{b_1} F(x)\varphi'(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} f(Ax+B)\frac{d\varphi(x)}{dx}dx =$$

$$= [\text{замена} \quad y = Ax + B] =$$

$$= \int_a^b f(y)\frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x=\frac{y-B}{A}}\frac{dy}{A} = \int_a^b f(y)\frac{d\varphi\left(\frac{y-B}{A}\right)}{dy}dy =$$

$$= -\int_a^b f'(y)\varphi\left(\frac{y-B}{A}\right)dy =$$

$$= \left[\text{замена} \quad x = \frac{y-B}{A}\right] = -\int_{a_1}^{b_1}(f'(Ax+B)A)\,\varphi(x)dx;$$

6) если функции $f_k(x) \in L^2(a,b)$ имеют о. п. $f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, причем $f_k(x) \to f(x)$ слабо в $L^2(a,b)$, а $f_k'(x) \to \omega(x)$ слабо в $L^2(a,b)$, то $f(x)$ имеет о. п. на $[a,b]$ и $f'(x) = \omega(x)$. В самом деле, по определению $f_k'(x)$

$$\int_a^b f_k(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b f_k'(x)\varphi(x)dx \qquad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда, устремляя $k \to \infty$, приходим к равенству (1.1);

7) пусть $f_k(x) \in L^2(a,b)$, $k = 1, 2, \ldots$, $f_k(x) \to f(x)$ слабо в $L^2(a,b)$, существуют о. п. $f_k'(x) \in L^2(a,b)$, $\|f_k'\|_{L^2(a,b)} \le R < \infty$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ Тогда функция $f(x)$ имеет о. п. $f'(x) \in L^2(a,b)$, причем $f_k'(x) \to f'(x)$ слабо в $L^2(a,b)$.

В самом деле, из ограниченности норм $\|f_k'\|_{L^2(a,b)}$ следует существование [39; 136] подпоследовательности $f_{k_m}'(x) \to \omega(x)$ слабо в $L^2(a,b)$. Из свойства 6) тогда следует, что $\omega(x) = f'(x)$ — о. п. $f(x)$. Так как о. п. определяется однозначно (с точностью до эквивалентных функций), то $\omega(x)$ — единственная слабая предельная точка последовательности $f_k'(x)$ и, следовательно, вся последовательность $f_k'(x) \to \omega(x)$ слабо в $L^2(a,b)$.

2. Пусть $\omega(t)$ – какая-либо бесконечно дифференцируемая четная неотрицательная функция переменной $t \in (-\infty, +\infty)$, равная нулю при $|t| \ge 1$ и такая, что

$$\int_{-1}^{1} \omega(t)\,dt = 1.$$

В качестве $\omega(t)$ можно, например, взять функцию

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}\exp(-\frac{1}{1-t^2}), & |t| < 1, \\ 0, & |t| \ge 1, \end{cases} \qquad \gamma = \int_{-1}^{1}\omega(t)dt. \qquad (1.2)$$

Тогда при всех $h > 0$

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h}\omega\left(\frac{|x|}{h}\right) \ge 0, \quad \omega_h(x) \in C^\infty(\mathrm{R}), \quad \omega_h(x) \equiv 0 \ \text{при} \ |x| \ge h;$$

$$\int\limits_{|x|\le h} \omega_h(x)dx = 1, \qquad |\omega_h^{(m)}(x)| \le \frac{c_m}{h^{m+1}} \qquad \forall x \in \mathrm{R},$$

$$c_m = \mathrm{const} > 0, \qquad m = 0, 1, \dots$$

Пусть $f(x) \in L^1(a,b)$. Положим

$$f_h(x) = \int\limits_a^b f(y)\omega_h(x-y)dy, \qquad h > 0 \tag{1.3}$$

и назовем функцию $f_h(x)$ из (1.3) средней для функции $f(x)$ с ядром усреднения $\omega_h(x)$. Нетрудно видеть, что средняя функция определена при всех $x \in \mathrm{R}$, причем $f_h(x) \equiv 0$ вне отрезка $[a-h, b+h]$. Оказывается, $f_h(x) \in C^\infty(\mathrm{R})$ при любом фиксированном $h > 0$, причем

$$\frac{d^m f_h(x)}{dx^m} = \int\limits_a^b f(y)\frac{d^m\omega_h(x-y)}{dx^m}dy, \qquad m = 1, 2, \dots \tag{1.4}$$

В самом деле,

$$\frac{\Delta f_h(x)}{\Delta x} = \frac{f_h(x+\Delta x) - f_h(x)}{\Delta x} = \int\limits_a^b f(y)\frac{\Delta\omega_h(x-y;\Delta x)}{\Delta x}dy, \tag{1.5}$$

где

$$\Delta\omega_h(x-y;\Delta x) = \omega_h(x+\Delta x-y) - \omega_h(x-y).$$

Можем считать, что $|\Delta x| < h$. Так как

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\omega_h(x-y;\Delta x)}{\Delta x} = \frac{d\omega_h(x-y)}{dx}, \qquad \left|\frac{d\omega_h(x-y)}{dx}\right| \le \frac{c_1}{h^2},$$

то

$$\left|f(y)\frac{\Delta\omega_h(x-y;\Delta x)}{\Delta x}\right| \le \frac{\mathrm{const}}{h^2}|f(y)|$$

и, кроме того, при $\Delta x \to 0$ для п. в. $y \in [a,b]$

$$f(y)\frac{\Delta\omega_h(x-y;\Delta x)}{\Delta x} \to f(y)\frac{d\omega_h(x-y)}{dx}.$$

Тогда из (1.5) с помощью теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега [39; 136; 142] при $\Delta x \to 0$ получим формулу (1.4) при $m = 1$. Аналогично доказывается формула (1.4) при $m = 2, 3, \dots$

С помощью операции усреднения (1.3) можно получить различные функции из $C^\infty[a,b]$ со специфическими свойствами.

Функция $\xi_\delta(x)$ называется срезающей функцией отрезка $[a,b]$, если $\xi_\delta(x) \in C^\infty[a,b]$ и

$$\begin{cases} \xi_\delta(x) \equiv 1 & \text{при } x \in [a+2\delta, b-2\delta], \\ 0 \le \xi_\delta(x) \le 1 & \text{при } x \in [a+\delta, a+2\delta] \cup [b-2\delta, b-\delta], \\ \xi_\delta(x) \equiv 0 & \text{вне } [a+\delta, b-\delta]. \end{cases}$$

Например, если взять функцию $\xi(x) \equiv 1$ при $x \in [a+\frac{3}{2}\delta, b-\frac{3}{2}\delta]$, $\xi \equiv 0$ вне $[a+\frac{3}{2}\delta, b-\frac{3}{2}\delta]$, то ее усреднение

$$\xi_h(x) = \int\limits_a^b \xi(y)\omega_h(x-y)dy, \qquad 0 < h < \frac{\delta}{2}, \tag{1.6}$$

будет срезающей функцией отрезка $[a,b]$.

Теорема 1.1. *Если $f(x) \in L^p(a,b)$, $1 \le p < \infty$, то*

$$\lim_{h\to 0}\|f_h - f\|_{L^p(a,b)} = 0.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится одно важное свойство функций $f(x) \in L^p(a,b)$, $1 \le p < \infty$. Функция $f(x) \in L^p(a,b)$ (продолженная нулем вне $[a,b]$) называется непрерывной в целом в норме $L^p(a,b)$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\gamma > 0: \quad \|f(x+z) - f(x)\|_{L^p(a,b)} < \varepsilon \quad \forall z, \quad |z| < \gamma.$$

Лемма 1.1. *Любая функция $f(x)$ из $L^p(a,b)$, $1 \le p < \infty$, непрерывна в целом в норме $L^p(a,b)$.*

Доказательство. Возьмем число r столь большим, чтобы $-r < a < b < r$, и положим

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b], \\ 0, & x \in [-2r,2r] \setminus [a,b]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $F(x) \in L^p(-2r,2r)$. Так как $C[-2r,2r]$ плотно в $L^p(-2r,2r)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $G(x) \in C[-2r,2r]$, такая, что $\|F - G\|_{L^p(-2r,2r)} < \varepsilon$. Возьмем срезающую функцию $\xi_\delta(x)$ вида (1.6) для отрезка $[-r,r]$, считая $\delta > 0$ столь малым, что $-r+\delta < a < b < r-\delta$, и положим $G_\delta(x) = \xi_\delta(x)G(x)$, $-2r \le x \le 2r$. Тогда $G(x) \equiv G_\delta(x)$ при $|x| \le r - 2\delta$, $G_\delta(x) \equiv F(x) \equiv 0$ при $r - \delta \le |x| \le 2r$, поэтому

$$\|G_\delta - G\|^p_{L^p(-2r,2r)} = \int\limits_{-2r}^{2r} |G_\delta(x) - G(x)|^p dx =$$

$$= \int\limits_{r-2\delta \le |x| \le r-\delta} |G_\delta(x) - G(x)|^p dx + \int\limits_{r-\delta \le |x| \le 2r} |G_\delta(x) - G(x)|^p dx =$$

$$= \int\limits_{r-2\delta \le |x| \le r-\delta} |\xi_\delta(x) - 1|^p |G(x)|^p dx + \int\limits_{r-\delta \le |x| \le 2r} |F(x) - G(x)|^p dx \le$$

$$\le \int\limits_{r-2\delta \le |x| \le r-\delta} |G(x)|^p dx + \|F - G\|^p_{L^p(-2r,2r)}.$$

Так как в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\int\limits_{r-2\delta \le |x| \le r-\delta} |G(x)|^p dx \le \varepsilon^p \quad \text{при всех} \quad \delta, \quad 0 < \delta < \delta_0,$$

то с учетом выбора $G(x)$ имеем

$$\|G_\delta - G\|_{L^p(-2r,2r)} \le (\varepsilon^p + \varepsilon^p)^{1/p} \le 2\varepsilon.$$

Тогда

$$\|G_\delta - F\|_{L^p(-2r,2r)} \le \|G_\delta - G\|_{L^p(-2r,2r)} + \|G - F\|_{L^p(-2r,2r)} \le 3\varepsilon.$$

Далее, считая $|z| \le \delta$, получаем $G_\delta(x+z) \equiv F(x+z) \equiv 0$ при $r \le |x| \le 2r$, поэтому

$$\|G_\delta(x+z) - F(x+z)\|_{L^p(-2r,2r)} =$$

$$= \left(\int\limits_{|x| \le r} |G_\delta(x+z) - F(x+z)|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \|G_\delta - F\|_{L^p(-2r,2r)} < 3\varepsilon.$$

Наконец, так как $G_\delta(x)$ равномерно непрерывна на $[-2r,2r]$ при фиксированном δ, $0 < \delta < \delta_0$, то

$$\|G_\delta(x+z) - G_\delta(x)\|_{L^p(-2r,2r)} < \varepsilon \quad \forall z, \quad |z| \le \delta.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\|f(x+z) - f(x)\|_{L^p(a,b)} = \|F(x+z) - F(x)\|_{L^p(-2r,2r)} \le$$

$$\le \|F(x+z) - G_\delta(x+z)\|_{L^p(-2r,2r)} + \|G_\delta(x+z) - G_\delta(x)\|_{L^p(-2r,2r)} +$$

$$+ \|G_\delta(x) - F(x)\|_{L^p(-2r,2r)} \le 7\varepsilon \quad \forall z, \quad |z| \le \delta.$$

Лемма 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Можем считать, что $f(x) \equiv 0$ вне $[a,b]$. Тогда

$$|f_h(x) - f(x)| = \left| \int\limits_{|x-y| \le h} (f(y) - f(x))\omega_h(x-y)dy \right| \le$$

$$\le \int\limits_{|z| \le h} |f(x+z) - f(x)||\omega_h(z)|dz. \qquad (1.7)$$

При $p > 1$, пользуясь неравенством Гельдера [39; 136; 142], из формулы (1.7) получаем

$$|f_h(x) - f(x)| \le \left(\int\limits_{|z|\le h} |f(x+z) - f(x)|^p dz\right)^{1/p} \left(\int\limits_{|z|\le h} \omega_h^q(z) dz\right)^{1/q},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Так как $|\omega_h(z)| \le \frac{c_0}{h}$ при всех $z \in \mathbb{R}$ и

$$\left(\int\limits_{|z|\le h} \omega_h^q(z) dz\right)^{1/q} \le \left(h\left(\frac{c_0}{h}\right)^q\right)^{1/q} = \frac{c_0}{h^{1/p}},$$

то

$$|f_h(x) - f(x)|^p \le \int\limits_{|z|\le h} |f(x+z) - f(x)|^p dz \cdot \frac{c_0^p}{h} \qquad \forall x \in [a,b].$$

Это неравенство сохраняет силу и при $p = 1$, что непосредственно видно из формулы (1.7), поэтому

$$\|f_h - f\|^p_{L^p(a,b)} = \int\limits_a^b |f_h(x) - f(x)|^p dx \le$$

$$\le \frac{c_0^p}{h} \int\limits_a^b \left(\int\limits_{|z|\le h} |f(x+z) - f(x)|^p dz\right) dx, \quad 1 \le p < \infty.$$

Изменив согласно теореме Фубини [39; 89; 136; 142] в повторном интеграле порядок интегрирования, получим

$$\|f_h - f\|^p_{L^p(a,b)} \le \frac{c_0^p}{h} \int\limits_{|z|\le h} \left(\int\limits_a^b |f(x+z) - f(x)|^p dx\right) dz.$$

В силу леммы 1.1 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \gamma > 0$

$$\|f(x+z) - f(x)\|_{L^p(a,b)} \le \varepsilon \quad \forall z, \quad |z| \le h < \gamma,$$

следовательно,

$$\|f_h - f\|_{L^p(a,b)} \le c_0 \varepsilon \quad \forall h, \quad 0 < h < \gamma,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.2. *Пусть функция $f(x) \in L^p(a,b)$, $1 \le p < \infty$, имеет о. п. $f'(x) \in L^p(a,b)$ и пусть $f_h(x)$, $(f')_h(x)$ — соответствующие им средние функции. Тогда для всех x, $a < x < b$, при достаточно малом h справедливо равенство*

$$f_h'(x) = (f')_h(x) \tag{1.8}$$

и, кроме того,

$$\lim_{h\to 0} \|f_h' - f'\|_{L^p(c,d)} = 0 \tag{1.9}$$

для любого отрезка $[c,d]$, $a < c < d < b$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное значение x, $a < x < b$. Тогда функция $\varphi(y) = \omega_h(x-y) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty [a,b]$ при всех h, $0 < h < \min\{x-a, b-x\}$, поэтому в тождестве (1.1) можем положить $\varphi(y) = \omega_h(x-y)$. С учетом равенства $\frac{d\omega_h(x-y)}{dx} = -\frac{d\omega_h(x-y)}{dy}$ и формулы (1.4) при $m = 1$ из формулы (1.1) тогда получим

$$f_h'(x) = \int\limits_a^b f(y) \frac{d\omega_h(x-y)}{dx} dy =$$

$$= -\int\limits_a^b f(y) \frac{d\omega_h(x-y)}{dy} dy = \int\limits_a^b f'(y) \omega_h(x-y) dy = (f')_h(x).$$

Утверждение (1.8) доказано. Если $a < c < d < b$, то формула (1.8) верна для всех $x \in [c,d]$ и всех $h < \min\{c-a;\ b-d\}$. По теореме 1.1 при $h \to 0$ $\|(f')_h - f'\|_{L^p(c,d)} \to 0$. Отсюда и из (1.8) следует (1.9).

Теорема 1.3. *Если функция $f(x) \in L^1(a,b)$ и ее о. п. $f'(x) \equiv 0$ на $[a,b]$, то $f(x) \equiv \mathrm{const}$ на $[a,b]$ (обращение свойства 2) о. п.).*

Доказательство. Из $f'(x) \equiv 0$ на $[a,b]$ следует, что $(f')_h(x) \equiv 0$ на $[a,b]$. В силу (1.8) тогда $(f')_h(x) = f_h'(x) \equiv 0$ $\forall x \in [c,d]$, $a < c < d < b$, при достаточно малых h. Это значит, что $f_h(x) \equiv c(h) = \mathrm{const}$ при всех $x \in [c,d]$. С другой стороны, в силу теоремы 1.1

$$\lim_{h\to 0} \|f_h(x) - f(x)\|_{L^1(c,d)} = 0,$$

поэтому семейство функций-констант $\{f_h(x) \equiv c(h)\}$ фундаментально при $h \to 0$ в метрике $L^1(c,d)$ и даже в $C[c,d]$:

$$\|f_{h_1} - f_{h_2}\|_{L^1(c,d)} = |c(h_1) - c(h_2)|(d-c) \to 0 \quad \text{при} \quad h_1, h_2 \to 0.$$

Следовательно, средние $f_h(x)$ сходятся на $[c,d]$ равномерно и тем более в норме $L^1(c,d)$ к некоторой постоянной C. В силу произвольности отрезка $[c,d]$ отсюда заключаем, что $f(x) \equiv C$ на $[a,b]$.

Теорема 1.4. *Пусть функции $f(x)$, $g(x) \in L^2(a,b)$ и имеют о. п. $f'(x)$, $g'(x) \in L^2(a,b)$. Тогда произведение $f(x)g(x)$ имеет о. п. и справедлива формула*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad x \in [a,b]. \tag{1.10}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $\varphi(x) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty [a,b]$. Тогда $\varphi(x) \equiv 0$ вне некоторого отрезка $[a_1,b_1]$, $a < a_1 < b_1 < b$. Образуем средние функции $f_h(x)$, $g_h(x)$. Поскольку классическая производная $(f_h g_h)' = f_h' g_h + f_h g_h'$ одновременно является обобщенной, то

$$\int_a^b f_h(x)g_h(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b [f_h'(x)g_h(x) + f_h(x)g_h'(x)]\varphi(x)dx. \tag{1.11}$$

Убедимся в том, что

$$\int_a^b f_h'(x)g_h(x)\varphi(x)dx \to \int_a^b f'(x)g(x)\varphi(x)dx \qquad \text{при} \quad h \to 0.$$

В самом деле,

$$\left|\int_a^b (f_h'g_h - f'g)\varphi dx\right| = \left|\int_{a_1}^{b_1} (f_h'g_h - f'g)\varphi dx\right| \le$$

$$\le \|\varphi\|_{C[a,b]} \left(\int_{a_1}^{b_1} |f_h' - f'||g_h|dx + \int_{a_1}^{b_1} |f'||g_h - g|dx\right) \le$$

$$\le \|\varphi\|_{C[a,b]} \Big(\|f_h' - f'\|_{L^2(a_1,b_1)}\|g_h\|_{L^2(a_1,b_1)} +$$

$$+ \|f'\|_{L^2(a_1,b_1)}\|g_h - g\|_{L^2(a_1,b_1)}\Big) \to 0 \qquad \text{при} \quad h \to 0$$

в силу теорем 1.1, 1.2. Аналогично доказывается, что

$$\int_a^b f_h(x)g_h'(x)\varphi(x)dx \to \int_a^b f(x)g'(x)\varphi(x)dx,$$

$$\int_a^b f_h(x)g_h(x)\varphi'(x)dx \to \int_a^b f(x)g(x)\varphi'(x)dx \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Отсюда и из (1.11) при $h \to 0$ получим

$$\int_a^b f(x)g(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\varphi(x)dx.$$

Это равенство верно для любой функции $\varphi(x) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty [a,b]$. Отсюда и из определения 1 следует формула (1.10).

Опираясь на теорему 1.2, построим в дополнение к (1.6) еще один пример срезающей функции, которая нам понадобится ниже. Возьмем δ, $0 < \delta < \frac{2}{7}(b-a)$, и определим функцию

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a + \frac{7}{4}\delta, b - \frac{7}{4}\delta], \\ \frac{2}{\delta}(x - a - \frac{5}{4}\delta), & x \in [a + \frac{5}{4}\delta, a + \frac{7}{4}\delta], \\ -\frac{2}{\delta}(x - b + \frac{5}{4}\delta), & x \in [b - \frac{7}{4}\delta, b - \frac{5}{4}\delta], \\ 0, & x \in [a,b] \setminus [a + \frac{5}{4}\delta, b - \frac{5}{4}\delta]. \end{cases}$$

Предлагаем читателю проверить, что эта функция имеет кусочно-постоянную о. п., причем $|\xi'(x)| \le \frac{2}{\delta}$. Средняя функция $\xi_h(x)$ при всех h, $0 < h < \frac{1}{4}\delta$, будет срезающей функцией отрезка $[a,b]$ и, кроме того, в силу формулы (1.8) обладает дополнительным свойством

$$|\xi_h'(x)| = |(\xi')_h(x)| = \left| \int\limits_{|x-y|\le h} \xi'(y)\omega_h(x-y)dy \right| \le \frac{2}{\delta} \quad \forall x \in [a,b]. \tag{1.12}$$

3. Через $H^1(a,b)$ обозначим линейное пространство функций $f(x) \in L^2(a,b)$, имеющих о. п. $f'(x) \in L^2(a,b)$, в котором введены скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle_{H^1(a,b)} = \int\limits_a^b (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))dx \tag{1.13}$$

и норма

$$\|f\|_{H^1(a,b)} = (\langle f,f\rangle_{H^1(a,b)})^{1/2} = \left(\int\limits_a^b (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2)\,dx\right)^{1/2}. \tag{1.14}$$

Нетрудно проверить, что все аксиомы скалярного произведения и нормы здесь выполняются. Докажем полноту пространства $H^1(a,b)$. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $f_k \in H^1(a,b)$:

$$\|f_k - f_m\|^2_{H^1(a,b)} = \|f_k - f_m\|^2_{L^2(a,b)} + \|f_k' - f_m'\|^2_{L^2(a,b)} \to 0$$

при $m,k \to \infty$. Отсюда следует, что последовательности f_k, f_k' фундаментальны в $L^2(a,b)$. В силу полноты $L^2(a,b)$ существуют функции $f = f(x) \in L^2(a,b)$, $g = g(x) \in L^2(a,b)$, такие, что

$$\|f_k - f\|_{L^2(a,b)} \to 0, \quad \|f_k' - g\|_{L^2(a,b)} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Тогда $g(x) = f'(x)$ — о. п. функции $f(x)$ (свойство 6) о. п.). Таким образом, нашлась функция $f(x) \in H^1(a,b)$, такая, что $\|f_k - f\|_{H^1(a,b)} \to 0$ при $k \to \infty$. Полнота $H^1(a,b)$ доказана. Следовательно, $H^1(a,b)$ — гильбертово пространство. Это пространство введено С. Л. Соболевым [126; 127]; в литературе его обозначают также через $W_2^1(a,b)$ [69; 70; 126].

Теорема 1.5. *Пространство $C^\infty[a,b]$ плотно в $H^1(a,b)$.*

Доказательство. Заметим, что если $f(y) \in H^1(a,b)$, то $F(x) = f(Ax+B) \in H^1(a_1,b_1)$, где $a_1 = \frac{a-B}{A}$, $b_1 = \frac{b-B}{A}$ (свойство 5) о. п.). Поэтому, сделав линейную замену переменных, в дальнейших рассуждениях вместо промежутка (a,b) можем рассматривать симметричный промежуток $\Pi_a = (-a,a)$. Возьмем произвольную функцию $f(x) \in H^1(\Pi_a)$ и любое число $\varepsilon > 0$. Так как пространство $C(\overline{\Pi}_a)$ плотно в $L^2(\Pi_a)$, то для функций $f(x) \in L^2(\Pi_a)$, $f'(x) \in L^2(\Pi_a)$ найдутся функции $g_0(x) \in C(\overline{\Pi}_a)$ и $g_1(x) \in C(\overline{\Pi}_a)$, такие, что

$$\|f - g_0\|_{L^2(\Pi_a)} < \varepsilon, \quad \|f' - g_1\|_{L^2(\Pi_a)} < \varepsilon. \tag{1.15}$$

Возьмем число $\sigma > 1$ и введем функцию $F_\sigma(x) = f(\frac{x}{\sigma})$, определенную на отрезке $\overline{\Pi}_{a\sigma} = [-a\sigma, a\sigma]$. Функция $F_\sigma(x) \in H^1(\Pi_{a\sigma})$, и ее о. п. равна $F_\sigma'(x) = \frac{1}{\sigma}f'\left(\frac{x}{\sigma}\right) \in L^2(\Pi_{a\sigma})$ (свойство 5) о. п.). Покажем, что

$$\lim_{\sigma\to 1+0} \|F_\sigma - f\|_{H^1(\Pi_a)} = 0.$$

Пользуясь неравенством треугольника, запишем оценку

$$\|f - F_\sigma\|_{L^2(\Pi_a)} \le \|f - g_0\|_{L^2(\Pi_a)} +$$

$$+ \left\|g_0(x) - g_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\|_{L^2(\Pi_a)} + \left\|g_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - f\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\|_{L^2(\Pi_a)}.$$

Первое слагаемое в правой части полученного неравенства меньше ε в силу (1.15); второе слагаемое также меньше ε при всех σ, $1 < \sigma < 1+\gamma$, так как функция $g_0(x)$ равномерно непрерывна на $\overline{\Pi}_a$, а $\left|x - \frac{x}{\sigma}\right| \le |x|\frac{\sigma-1}{\sigma} \le a\gamma$ (здесь $\gamma > 0$ — достаточно малое число); третье слагаемое также оценивается с помощью (1.15):

$$\left\|g_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - f\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\|_{L^2(\Pi_a)} \le \left(\int\limits_{-a\sigma}^{a\sigma} \left|g_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - f\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right|^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left[\text{замена } \frac{x}{\sigma} = y\right] =$$

$$= \left(\int_{-a}^{a} (g_0(y) - f(y))^2 \sigma dy \right)^{1/2} \leq 2\|f - g_0\|_{L^2(\Pi_a)} < 2\varepsilon.$$

Поэтому имеем

$$\|F_\sigma - f\|_{L^2(\Pi_a)} < 4\varepsilon \qquad \forall \sigma, \quad 1 < \sigma < 1 + \gamma. \tag{1.16}$$

Далее, аналогично оцениваем разность первых производных:

$$\|f' - F'_\sigma\|_{L^2(\Pi_a)} \leq \|f' - g_1\|_{L^2(\Pi_a)} + \left\| g_1(x) - g_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right\|_{L^2(\Pi_a)} +$$

$$+ \left\| g_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) - f'\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right\|_{L^2(\Pi_a)} + \left\| f'\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{f'(x/\sigma)}{\sigma} \right\|_{L^2(\Pi_a)}.$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства меньше ε в силу (1.15); второе слагаемое меньше ε в силу равномерной непрерывности $g_1(x)$ и близости аргументов $\left|x - \frac{x}{\sigma}\right| \leq \leq a\gamma$; в силу (1.15) для третьего слагаемого справедлива оценка

$$\left\| g_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) - f'\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right\|_{L^2(\Pi_a)} \leq$$

$$\leq \left[\text{замена } \frac{x}{\sigma} = y\right] \leq \left(\int_{-a}^{a} |g_1(y) - f'(y)|^2 \, dy \, \sigma \right)^{1/2} < 2\varepsilon;$$

четвертое слагаемое оценивается так:

$$\left\| f'\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{f'(x/\sigma)}{\sigma} \right\|_{L^2(\Pi_a)} \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \left(\int_{-a\sigma}^{a\sigma} \left| f'\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \gamma \|f'\|_{L^2(\Pi_a)}$$

и будет меньше ε при достаточно малых значениях γ. Поэтому при таких γ

$$\|F'_\sigma - f'\|_{L^2(\Pi_a)} \leq 5\varepsilon \qquad \forall \sigma, \quad 1 < \sigma < 1 + \gamma. \tag{1.17}$$

Из (1.16), (1.17) следует, что

$$\|F_\sigma - f\|_{H^1(\Pi_a)} \leq 7\varepsilon \qquad \forall \sigma, \quad 1 < \sigma < 1 + \gamma.$$

Зафиксируем одно из таких значений σ и возьмем среднюю функцию $(F_\sigma)_h(x)$, $x \in \Pi_{a\sigma}$. Так как $-a\sigma < -a < a < a\sigma$, из теорем 1.1, 1.2 имеем

$$\|(F_\sigma)_h - F_\sigma\|_{L^2(\Pi_a)} \to 0, \qquad \|(F_\sigma)'_h - F'_\sigma\|_{L^2(\Pi_a)} \to 0$$

$$\text{при} \quad h \to 0,$$

следовательно,

$$\|(F_\sigma)_h - f\|_{H^1(\Pi_a)} \leq \|(F_\sigma)_h - F_\sigma\|_{H^1(\Pi_a)} + \|F_\sigma - f\|_{H^1(\Pi_a)} <$$

$$< \varepsilon + 7\varepsilon = 8\varepsilon \qquad \text{при всех } h, \quad 0 < h < h_0 < \gamma.$$

Остается напомнить, что $(F_\sigma)_h(x) \in C^\infty(\overline{\Pi}_a)$. Теорема 1.5 доказана.

Так как

$$C^\infty[a,b] \subset C^k[a,b] \subset \ldots \subset C^1[a,b] \subset H^1(a,b), \tag{1.18}$$

из теоремы 1.5 следует, что пространство $C^k[a,b]$ при любом целом $k \geq 1$ также плотно в $H^1(a,b)$.

Теорема 1.6. *Пространство $H^1(a,b)$ совпадает с пополнением пространств $C^\infty[a,b]$, $C^k[a,b]$, $k = 1, 2, \ldots$, в норме $H^1(a,b)$.*

Доказательство. С одной стороны, из вложения $C^\infty[a,b] \subset H^1(a,b)$ следует, что любая фундаментальная в норме $H^1(a,b)$ последовательность $f_k \in C^\infty[a,b]$ будет сходиться в норме пространства $H^1(a,b)$ к некоторому элементу $f \in H^1(a,b)$. Это значит, что, пополняя $C^\infty[a,b]$ в норме $H^1(a,b)$, мы не получим каких-либо новых элементов, выходящих за пределы $H^1(a,b)$. С другой стороны, в силу теоремы 1.5 каждый элемент $f \in H^1(a,b)$ является пределом последовательности $f_k \in C^\infty[a,b]$, сходящейся к f в норме $H^1(a,b)$. Отсюда заключаем, что $H^1(a,b)$ совпадает с пополнением $C^\infty[a,b]$ в норме $H^1(a,b)$. Пополнение пространств $C^k[a,b]$, $k = 1, 2, \ldots$, в метрике $H^1(a,b)$ также совпадает с $H^1(a,b)$, что следует из цепочки включений (1.18).

Теорема 1.7. *Любая функция $f(x) \in H^1(a,b)$ эквивалентна непрерывной функции $F(x)$, причем*

$$\|F\|_{C[a,b]} \le M\|f\|_{H^1(a,b)}, \qquad M = \left(1 + \frac{1}{b-a}\right)^{1/2}, \quad (1.19)$$

и справедлива формула

$$\int\limits_\alpha^\beta f'(\xi)d\xi = F(\beta) - F(\alpha) \qquad \forall \alpha, \beta \in [a,b]. \quad (1.20)$$

Доказательство. Покажем, что для любой функции $g(x) \in C^\infty[a,b]$ справедливо неравенство

$$\|g\|_{C[a,b]} \le M\|g\|_{H^1(a,b)}. \quad (1.21)$$

В самом деле, сначала с помощью формулы Ньютона–Лейбница и неравенства $2ab \le a^2 + b^2$ выведем оценку

$$g^2(x) = g^2(y) + \int\limits_y^x 2g'(\xi)g(\xi)d\xi \le$$

$$\le g^2(y) + \left|\int\limits_y^x |g'(\xi)|^2 d\xi\right| + \left|\int\limits_y^x |g(\xi)|^2 d\xi\right| \le$$

$$\le g^2(y) + \int\limits_a^b |g(\xi)|^2 d\xi + \int\limits_a^b |g'(\xi)|^2 d\xi,$$

а затем, интегрируя ее по переменной y на $[a,b]$, получим

$$(b-a)g^2(x) \le \int\limits_a^b |g(y)|^2 dy + (b-a)\left(\int\limits_a^b |g(\xi)|^2 d\xi + \int\limits_a^b |g'(\xi)|^2 d\xi\right) \le$$

$$\le (b-a)M^2\|g\|^2_{H^1(a,b)} \qquad \forall x \in [a,b].$$

Отсюда следует неравенство (1.21).

Зафиксируем какую-либо функцию $f(x) \in H^1(a,b)$. Согласно теореме 1.5 найдется последовательность $f_k \in C^\infty[a,b]$, такая, что $\|f_k - f\|_{H^1(a,b)} \to 0$ при $k \to \infty$. К разности $f_k(x) - f_m(x) \in C^\infty[a,b]$ применим неравенство (1.21):

$$\|f_k - f_m\|_{C[a,b]} \le M\|f_k - f_m\|_{H^1(a,b)}.$$

Так как $\|f_k - f_m\|_{H^1(a,b)} \to 0$, отсюда следует фундаментальность $f_k(x)$ в норме $C[a,b]$. В силу полноты пространства $C[a,b]$ тогда существует функция $F = F(x) \in C[a,b]$, такая, что $\|f_k - F\|_{C[a,b]} \to 0$ при $k \to \infty$. Тем более $\|f_k - F\|_{L^2(a,b)} \to 0$. В то же время $\|f_k - f\|_{L^2(a,b)} \le \|f_k - f\|_{H^1(a,b)} \to 0$ при $k \to \infty$. В силу единственности предела последовательности $f_k(x)$ в $L^2(a,b)$ заключаем, что $F(x) = f(x)$ п. в. на $[a,b]$. Таким образом, показано, что функция $f(x)$ эквивалентна непрерывной функции $F(x)$. Отметим, что такая функция $F(x)$ определяется однозначно, так как две эквивалентные непрерывные функции тождественно совпадают. Из эквивалентности $f(x)$ и $F(x)$ следует, что $F(x)$ также имеет о. п. и $F'(x) = f'(x)$ п. в. на $[a,b]$, так что $F(x) \in H^1(a,b)$. Далее, из неравенства (1.21) имеем

$$\|f_k\|_{C[a,b]} \le M\|f_k\|_{H^1(a,b)}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда при $k \to \infty$ получаем неравенство (1.19). Наконец, для функций $f_k(x) \in C^\infty[a,b]$ справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_\alpha^\beta f_k'(\xi)d\xi = f_k(\beta) - f_k(\alpha) \qquad \forall \alpha, \beta \in [a,b], \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда при $k \to \infty$ приходим к формуле (1.20), так как $f_k(\beta) \to F(\beta)$, $f_k(\alpha) \to F(\alpha)$ в силу равномерной сходимости $\{f_k(x)\}$ к $F(x)$ на $[a,b]$, и, кроме того,

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta f_k'(\xi)d\xi - \int\limits_\alpha^\beta f'(\xi)d\xi\right| \le \left|\int\limits_\alpha^\beta |f_k'(\xi) - f'(\xi)|d\xi\right| \le$$

$$\le (b-a)^{1/2}\|f_k' - f'\|_{L^2(a,b)} \to 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Теорема 1.7 доказана.

Таким образом, установлено, что в каждом классе эквивалентных функций $f(x)$ из $H^1(a,b)$ существует, причем единственная, непрерывная функция $F(x)$. Иначе говоря, определен оператор $I : H^1(a,b) \to C[a,b]$, который каждому классу эквивалентных функций $f = \{f(x)\} \in H^1(a,b)$ ставит в соответствие непрерывную функцию $F = F(x) = If \in H^1(a,b)$. Оператор I называют оператором вложения пространства $H^1(a,b)$ в пространство $C[a,b]$, а теорему 1.7 — теоремой вложения. Нетрудно видеть, что оператор I линейный:

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha If + \beta Ig \qquad \forall f, g \in H^1(a,b) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}.$$

Неравенство (1.19) можно переписать в виде

$$\|F\|_{C[a,b]} = \|If\|_{C[a,b]} \le M\|f\|_{H^1(a,b)}.$$

Это значит, что оператор I ограничен, а следовательно, непрерывен. Более того, справедлива

Теорема 1.8. *Оператор вложения $I : H^1(a,b) \to C[a,b]$ является компактным (вполне непрерывным). Компактно также вложение $H^1(a,b) \subset L^2(a,b)$.*

Доказательство. В соответствии с определением компактности (вполне непрерывности) [39; 136; 142] отображения $I : H^1(a,b) \to C[a,b]$ нужно установить, что образ $I(G)$ любого ограниченного в $H^1(a,b)$ множества G является предкомпактным в пространстве $C[a,b]$. По известной теореме Арцела [39; 136; 142] для этого достаточно, чтобы множество $I(G)$ было ограниченным в $C[a,b]$ и состояло из равностепенно непрерывных функций. Ограниченность множества $I(G)$ следует из оценки (1.19) и ограниченности множества G. Далее, согласно формуле (1.20) для любых $x, y \in [a,b]$ имеем оценку

$$|(If)(x) - (If)(y)| = \left|\int\limits_y^x f'(\xi)d\xi\right| \le |x-y|^{1/2}\left(\int\limits_a^b |f'(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \le$$

$$\le |x-y|^{1/2}\|f\|_{H^1(a,b)} \qquad \forall f \in G,$$

которая в силу ограниченности множества G означает равностепенную непрерывность множества функций $I(G)$. Таким образом, вложение $H^1(a,b) \subset C[a,b]$ компактно. Отсюда и из непрерывности вложения $C[a,b] \subset L^2(a,b)$ следует компактность вложения $H^1(a,b) \subset L^2(a,b)$. Теорема 1.8 доказана.

Поскольку удобнее работать с функциями, а не с классами функций, каждый класс $\{f(x)\}$ эквивалентных функций из $H^1(a,b)$ принято отождествлять с непрерывной функцией $F(x) = I\{f(x)\}$, которая сама тоже принадлежит этому же классу. Более того, предполагая, что такое отождествление уже проведено, обычно считают, что пространство $H^1(a,b)$ состоит из непрерывных на $[a,b]$ функций $f(x)$, имеющих о. п. $f'(x) \in L^2(a,b)$. После такого соглашения соотношения (1.19), (1.20) можно переписать в виде

$$\|f\|_{C[a,b]} \le M\|f\|_{H^1(a,b)},$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f'(\xi)d\xi = f(\beta) - f(\alpha) \qquad \forall \alpha, \beta \in [a,b], \tag{1.22}$$

а теорему 1.8 можно переформулировать так: из всякого ограниченного в норме $H^1(a,b)$ множества можно извлечь последовательность, сходящуюся равномерно на $[a,b]$ к некоторой функции из $H^1(a,b)$. В частности, если $f_k(x) \to f(x)$ в норме $H^1(a,b)$, то $f_k(x) \to f(x)$ в норме $C[a,b]$ и тем более в $L^2(a,b)$.

Формула (1.22) представляет собой обобщение классической формулы Ньютона–Лейбница на функции из $H^1(a,b)$. В частности, из (1.22) следует, что

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(\xi)d\xi \qquad \forall x \in [a,b] \quad \forall f \in H^1(a,b).$$

Это означает, что [39; 136; 142] функция $f(x) \in H^1(a,b)$ абсолютно непрерывна, у нее почти всюду на $[a,b]$ существует классическая поточечная производная

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

совпадающая с о. п. $f'(x)$ п. в. на $[a,b]$.

Далее, в $H^1(a,b)$ сохраняет силу и известная формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \qquad (1.23)$$

В самом деле, согласно теореме 1.5 существуют последовательности f_k, $g_k \in C^\infty[a,b]$, такие, что $\|f_k - f\|_{H^1(a,b)} \to 0$, $\|g_k - g\|_{H^1(a,b)} \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и из теоремы 1.8 следует, что при $k \to \infty$

$$\|f_k - f\|_{C[a,b]} \to 0, \qquad \|g_k - g\|_{C[a,b]} \to 0,$$
$$\|f_k' - f'\|_{L^2(a,b)} \to 0, \qquad \|g_k' - g'\|_{L^2(a,b)} \to 0.$$

Для получения формулы (1.23) остается написать формулу интегрирования по частям из классического анализа [27; 28] для функций $f_k, g_k \in C^\infty[a,b]$:

$$\int_a^b f_k'(x)g_k(x)dx = f_k(x)g_k(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f_k(x)g_k'(x)dx,$$
$$k = 1, 2, \ldots,$$

и совершить предельный переход при $k \to \infty$.

Заметим, что в $H^1(a,b)$ наряду с (1.13), (1.14) часто рассматривают другие скалярные произведения и нормы. Так, например, можно использовать скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle_1 = f(a)g(a) + \int_a^b f'(x)g'(x)dx \qquad (1.24)$$

и соответствующую норму

$$\|f\|_1 = (\langle f, f\rangle_1)^{1/2} = \left(|f(a)|^2 + \int_a^b |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \qquad (1.25)$$

Нетрудно проверить, что все аксиомы скалярного произведения и нормы здесь выполняются. В частности, если $\|f\|_1 = 0$, то $f(a) = 0$, $f'(x) = 0$ п. в. на $[a,b]$, откуда с помощью теоремы 1.3 имеем $f(x) \equiv \mathrm{const} = f(a) = 0$ $\forall x \in [a,b]$. Убедимся в том, что нормы $\|\cdot\|_{H^1(a,b)}$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны, т. е. существуют числа $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, такие, что

$$M_1\|f\|_1 \le \|f\|_{H^1(a,b)} \le M_2\|f\|_1 \qquad \forall f \in H^1(a,b). \qquad (1.26)$$

В самом деле, из (1.25) и (1.19) имеем

$$\|f\|_1^2 \le M^2\|f\|^2_{H^1(a,b)} + \|f'\|^2_{L^2(a,b)} \le (M_0^2 + 1)\|f\|^2_{H^1(a,b)},$$

т. е. левое неравенство (1.26) выполняется при

$$M_1 = (M_0^2 + 1)^{-1/2}.$$

Справедливость правого неравенства (1.26) следует из оценки

$$\|f\|^2_{H^1(a,b)} = \int_a^b \left(f(a) + \int_a^x f'(\xi)d\xi\right)^2 dx + \int_a^b |f'(x)|^2 dx \le$$
$$\le \int_a^b \left(2f^2(a) + 2\left(\int_a^x |f'(\xi)|d\xi\right)^2\right) dx + \|f'\|^2_{L^2(a,b)} \le$$
$$\le 2(b-a)f^2(a) + (b-a)^2\|f'\|^2_{L^2(a,b)} + \|f'\|^2_{L^2(a,b)} \le M_2^2\|f\|_1^2,$$
$$M_2 = [1 + 2(b-a)^2]^{1/2}.$$

Из эквивалентности норм (1.14), (1.25) следует, что пространства $C^\infty[a,b]$, $C^k[a,b]$, $k = 1, 2, \ldots$, плотны в $H^1(a,b)$ в норме $\|\cdot\|_1$ и пополнение этих пространств в норме $\|\cdot\|_1$ дает то же самое пространство $H^1(a,b)$.

Приведем еще один пример скалярного произведения и эквивалентной нормы в $H^1(a,b)$:

$$\langle f, g\rangle_2 = f(a)g(a) + f(b)g(b) + \int_a^b f'(x)g'(x)dx,$$

$$\|f\|_2 = \left(f^2(a) + f^2(b) + \int_a^b |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Наличие различных эквивалентных метрик в $H^1(a,b)$ позволяет выбирать из них те, которые оказываются более удобными в тех или иных обстоятельствах.

4. Введем множество функций

$$H_0^1(a,b) = \{f = f(x) \in H^1(a,b) : f(a) = f(b) = 0\},$$

являющееся подпространством в $H^1(a,b)$. Здесь уже учтено то обстоятельство, что функция $f(x)$ из $H^1(a,b)$ непрерывна на $[a,b]$ и потому определены ее значения во всех точках $x \in [a,b]$, в частности в точках $x = a$, $x = b$. Убедимся в том, что подпространство $H_0^1(a,b)$ замкнуто в норме $H^1(a,b)$. Возьмем произвольную последовательность $f_k(x) \in H_0^1(a,b)$, $f_k(x) \to f(x)$ в норме $H^1(a,b)$. Тогда $f_k(x) \to f(x)$ равномерно на $[a,b]$, в частности, $f_k(a) = 0 \to \to 0 = f(a)$, $f_k(b) = 0 \to 0 = f(b)$. Следовательно, предельная функция $f(x) \in H_0^1(a,b)$, т.е. $H_0^1(a,b)$ замкнуто в норме $H^1(a,b)$. Это значит, что множество $H_0^1(a,b)$ само является гильбертовым пространством со скалярным произведением (1.13).

Теорема 1.9. *Пространство* $\overset{\bullet}{C}{}^\infty[a,b]$ *плотно в* $H_0^1(a,b)$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f(x) \in \in H_0^1(a,b)$ и срезающую функцию $\xi_\delta(x)$ отрезка $[a,b]$ со свойством (1.12) $|\xi_\delta'(x)| \le \frac{c}{\delta}$, $x \in [a,b]$. Согласно теореме 1.4 функция $f_\delta(x) = f(x)\xi_\delta(x)$ имеет о. п. $f_\delta'(x) = f'(x)\xi_\delta(x) + +f(x)\xi_\delta'(x)$. Кроме того, ясно, что $f_\delta(x)$ финитна на $[a,b]$ и $f_\delta \in H_0^1(a,b)$. Убедимся в том, что $\|f_\delta - f\|_{H^1(a,b)} \to 0$ при $\delta \to 0$. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, \delta_0 > 0$: $\forall \delta$, $0 < \delta < \delta_0$,

$$\|f_\delta - f\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b |f(x)|^2(1-\xi_\delta(x))^2 dx \le$$
$$\le \int_a^{a+2\delta} |f(x)|^2 dx + \int_{b-2\delta}^b |f(x)|^2 dx < \varepsilon^2$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Далее, из формулы Ньютона–Лейбница (1.22) с учетом равенств $f(a) = f(b) = 0$ имеем

$$f(x) = \int_a^x f'(\xi)d\xi = \int_b^x f'(\xi)d\xi.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши–Буняковского получим

$$|f(x)|^2 \le (x-a)\int_a^x |f'(\xi)|^2 dx,$$
$$|f(x)|^2 \le (b-x)\int_x^b |f'(\xi)|^2 d\xi \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{1.27}$$

С учетом свойств выбранной срезающей функции, формулы для $f_\delta'(x)$, абсолютной непрерывности интеграла Лебега и неравенств (1.27) будем иметь

$$\|f_\delta' - f'\|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |f'(x) - f'(x)\xi_\delta(x) - f(x)\xi_\delta'(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int_a^b |f'(x)|^2(1-\xi_\delta(x))^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |f(x)|^2|\xi_\delta'(x)|^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_a^{a+2\delta} |f'(x)|^2(1-\xi_\delta(x))^2 dx + \int_{b-2\delta}^b |f'(x)|^2(1-\xi_\delta(x))^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_{a+\delta}^{a+2\delta} (x-a)\left(\int_a^x |f'(\xi)|^2 d\xi\right)\frac{c^2}{\delta^2}dx + \right.$$

$$\left. + \int_{b-2\delta}^{b-\delta} (b-x)\left(\int_x^b |f'(\xi)|^2 d\xi\right)\frac{c^2}{\delta^2}dx\right)^{1/2} \le$$

$$\leq \varepsilon + c\left(2\int\limits_a^{a+2\delta}|f'(\xi)|^2 d\xi + 2\int\limits_{b-2\delta}^{b}|f'(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} < 2\varepsilon$$

$$\forall\delta, \qquad 0<\delta<\delta_0.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\|f_\delta - f\|_{H^1(a,b)} < 3\varepsilon \qquad \forall\delta, \quad 0<\delta<\delta_0.$$

Зафиксируем одно из таких значений δ и возьмем среднюю функцию $(f_\delta)_h(x)$. Ясно, что $(f_\delta)_h(x) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty[a,b]$ $\forall h$, $0<h<\frac{\delta}{2}$. Согласно теоремам 1.1, 1.2 при $h\to 0$

$$\|(f_\delta)_h - f_\delta\|_{L^2(a,b)} \to 0,$$

$$\|(f_\delta)'_h - f'_\delta\|_{L^2(a,b)} = \|(f_\delta)'_h - f'_\delta\|_{L^2(a+\delta/2,b-\delta/2)} \to 0,$$

поэтому

$$\|(f_\delta)_h - f_\delta\|_{H^1(a,b)} < \varepsilon \qquad \forall h, \quad 0<h<h_0<\delta,$$

следовательно,

$$\|(f_\delta)_h - f\|_{H^1(a,b)} \leq \|(f_\delta)_h - f_\delta\|_{H^1(a,b)} + \|f_\delta - f\|_{H^1(a,b)} < 4\varepsilon$$

$$\forall h, \qquad 0<h<h_0<\delta.$$

Теорема 1.9 доказана.

Теорема 1.10. *Пространство $H_0^1(a,b)$ совпадает с пополнением пространств $\overset{\bullet}{C}{}^\infty[a,b]$, $\overset{\bullet}{C}{}^k[a,b]$, $k=1,2,\ldots$, в норме $H^1(a,b)$.*

Доказательство опирается на теорему 1.9 и проводится так же, как доказательство аналогичной теоремы 1.6.

В пространстве $H_0^1(a,b)$ наряду с (1.13), (1.14) можно ввести более удобные во многих случаях скалярное произведение и норму

$$(f,g)_{H_0^1(a,b)} = \int\limits_a^b f'(x)g'(x)dx, \qquad \|f\|_{H_0^1(a,b)} = \left(\int\limits_a^b |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

получающиеся из (1.24), (1.25) при $f(a)=g(a)=0$. Такая норма в $H_0^1(a,b)$ эквивалентна норме (1.14), так как

$$\|f\|_{H_0^1(a,b)} \leq \|f\|_{H^1(a,b)} \leq (1+(b-a)^2)^{1/2}\|f\|_{H_0^1(a,b)}$$

$$\forall f \in H_0^1(a,b).$$

Из эквивалентности указанных норм следует, что пространства $\overset{\bullet}{C}{}^\infty[a,b]$, $\overset{\bullet}{C}{}^k[a,b]$, $k=1,2,\ldots$, плотны в $H_0^1(a,b)$ в норме $H_0^1(a,b)$ и пополнение этих пространств в норме $H_0^1(a,b)$ совпадает с $H_0^1(a,b)$.

Теорема 1.11. *Пространства $H^1(a,b)$, $H_0^1(a,b)$ сепарабельны, т. е. они содержат счетные всюду плотные подмножества.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

Лемма 1.2. *Пусть функция $g(x)\in \overset{\bullet}{C}{}^\infty[-\pi,\pi]$. Тогда ряд Фурье этой функции по ортонормированной в $L^2(-\pi,\pi)$ системе $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx},\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ сходится абсолютно и равномерно на $[-\pi,\pi]$. Абсолютно и равномерно на $[-\pi,\pi]$ будут сходиться и все ряды, полученные почленным дифференцированием этого ряда любое число раз.*

Доказательство. Напомним, что рядом Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}\}$ называется ряд

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad g_m = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\frac{e^{-imx}}{\sqrt{2\pi}}dx. \tag{1.28}$$

Интегрируя p раз по частям выражение для g_m с учетом равенств $g^{(k)}(\pi) = g^{(k)}(-\pi) = 0$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, имеем

$$g_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i^p m^p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g^{(p)}(x)e^{-imx}dx$$

$$\forall p = 0,1,\ldots, \qquad \forall m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Отсюда следует оценка

$$|g_m| \le \frac{\sqrt{2\pi}}{m^p} \left\| g^{(p)} \right\|_{C[-\pi,\pi]}$$

$$\forall p = 0, 1, \ldots, \qquad \forall m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{1.29}$$

В частности, при $p = 2$ имеем

$$|g_m| \le \frac{\sqrt{2\pi}}{m^2} \|g''\|_{C[-\pi,\pi]} \qquad \forall m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

По известному признаку Вейерштрасса [27; 28] тогда ряд (1.28) сходится абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функции $g(x)$. Далее, при $p = 3$ из (1.29) следует, что $|g_m| \le \le \frac{\sqrt{2\pi}}{m^3} \| g''' \|_{C[-\pi,\pi]}$, поэтому абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$ сходится к $g'(x)$ ряд, полученный почленным дифференцированием ряда (1.28). Аналогично доказывается, что ряд, полученный s-кратным дифференцированием ряда (1.28), сходится к производной $g^{(s)}(x)$ абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство теоремы 1.11. Сделав при необходимости линейную замену переменной, перейдем от отрезка $[a, b]$ к более удобному промежутку $[-\pi, \pi]$. Возьмем произвольную функцию $f(x) \in H^1(-\pi, \pi)$ и положим

$$F(x) = f(x) - f(-\pi) - \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi))(x + \pi), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Ясно, что $F(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1_0(-\pi, \pi)$. Согласно теореме 1.9 $\forall \varepsilon > 0$ найдется функция $g(x) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty [-\pi, \pi]$, такая, что

$$\|g(x) - F(x)\|_{H^1(-\pi,\pi)} < \varepsilon.$$

По лемме 1.2 функцию $g(x)$ можно приблизить в норме $H^1(-\pi, \pi)$ конечными суммами

$$G_N(x) = \sum_{|m| \le N} g_m \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}},$$

так, что $\|G_N - g\|_{H^1(-\pi,\pi)} < \varepsilon$. Наконец, фиксируя один из таких номеров N, функцию $G_N(x)$ аппроксимируем в норме $H^1(-\pi, \pi)$ функцией $R_N(x)$, являющейся линейной комбинацией функций $\{e^{imx}, |m| \le N\}$ с коэффициентами, имеющими рациональные действительные и мнимые части, так, что $\|G_N - R_N\|_{H^1(-\pi,\pi)} < \varepsilon$. В итоге имеем

$$\|F - R_N\|_{H^1(-\pi,\pi)} < 3\varepsilon.$$

Приведенные рассуждения сохраняют силу для любой функции $F(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1_0(-\pi, \pi)$, следовательно, счетное множество $\{R_N(x)\}$ плотно в $\overset{\circ}{H}{}^1_0(-\pi, \pi)$. Сепарабельность пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_0(-\pi, \pi)$ установлена.

Вспомним теперь, что

$$f(x) = F(x) + f(-\pi) + \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi))(x + \pi),$$

выберем рациональные числа A, B так, чтобы

$$\left\|f(-\pi) + \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi))(x + \pi) - (Ax + B)\right\|_{H^1(-\pi,\pi)} < \varepsilon,$$

и положим $r_N(x) = R_N(x) + Ax + B$. Тогда $\|f - r_N\|_{H^1(-\pi,\pi)} < < 4\varepsilon$. Это значит, что счетное множество $\{r_N(x)\}$ плотно в $H^1(-\pi, \pi)$. Теорема 1.11 доказана.

5. Кратко рассмотрим пространства функций, имеющих о. п. высших порядков.

Определение 2. Пусть функция $f(x) \in L^1(a, b)$. Функцию $\omega(x) \in L^1(a, b)$ называют обобщенной производной по Соболеву (о. п.) m-го порядка функции $f(x)$, если

$$\int_a^b f(x)\varphi^{(m)}(x)dx = (-1)^m \int_a^b \omega(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi = \varphi(x) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty [a, b].$$

О. п. m-го порядка принято обозначать

$$\omega(x) = \frac{d^m f(x)}{dx^m} = f^{(m)}(x).$$

Нетрудно доказать, что, если функция $f(x)$ имеет о. п. $f^{(m)}(x) = g(x)$, а функция $g(x)$ имеет о.,п. $g^{(n)}$, то $f(x)$ имеет о. п.
$f^{(n+m)}(x) = g^{(n)}(x)$.

Через $H^k(a,b)$ обозначим линейное пространство функций $f(x) \in L^2(a,b)$, имеющих о. п. $f^{(m)}(x) \in L^2(a,b)$, $m = 1, 2, ..., k$, в котором введено скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle_{H^k(a,b)} = \int_a^b \left(\sum_{m=0}^{k} f^{(m)}(x) g^{(m)}(x)\right) dx \quad (f^{(0)}(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)) \tag{1.30}$$

и норма

$$\|f\|_{H^k(a,b)} = \left(\langle f, f\rangle_{H^k(a,b)}\right)^{1/2} = \left(\int_a^b \sum_{m=0}^{k} |f^{(m)}(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{1.31}$$

Пространство $H^k(a,b)$ является гильбертовым; оно введено С. Л. Соболевым [126; 127], в литературе его обозначают также через $W_2^k(a,b)$. Перечислим некоторые свойства пространства $H^k(a,b)$.

1) Пространства $C^\infty[a,b], C^m[a,b], m = k, k+1, ...,$ плотны в $H^k(a,b)$.

2) В каждом классе $\{f(x)\}$ эквивалентных функций из $H^k(a,b)$ существует, притом единственная, функция $F(x) \in \in C^{k-1}[a,b]$; справедливо неравенство

$$\|F\|_{C^{k-1}[a,b]} \le M_k \|F\|_{H^k(a,b)}.$$

Тем самым определен оператор $I: F = I\{f\}$, называемый оператором вложения пространства $H^k(a,b)$ в $C^{k-1}[a,b]$. Оператор I линейный, ограниченный и, следовательно, непрерывный. Класс эквивалентных функций $\{f\}$ из $H^k(a,b)$ принято отождествлять с функцией $F = I\{f\}$. Предполагая, что такое отождествление уже проведено, обычно считают, что пространство $H^k(a,b)$ состоит из непрерывных функций $f(x)$, имеющих классические непрерывные производные $f^{(m)}(x)$, $m = 1, 2, ..., k-1$, а производная $f^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и имеет о. п. $f^{(k)}(x) \in L^2(a,b)$.

3) Из любого множества $G \subset H^k(a,b)$, ограниченного в норме $H^k(a,b)$, можно извлечь последовательность, сходящуюся к некоторой функции $f(x) \in C^{k-1}[a,b] \bigcap H^k(a,b)$ в норме $C^{k-1}[a,b]$ (компактность вложения $H^k(a,b)$ в $C^{k-1}[a,b]$). В частности, если последовательность $f_k \to f$ в норме $H^k(a,b)$, то $f_k \to f$ в норме $C^{k-1}[a,b]$.

4) Пространство $H^k(a,b)$ совпадает с пополнением пространств $C^\infty[a,b], C^m[a,b], m = k, k+1, ...,$ в норме $H^k(a,b)$.

5) В пространстве $H^k(a,b)$ можно ввести различные другие, эквивалентные (1.30), (1.31) скалярные произведения и нормы, например

$$\langle f, g\rangle_1 = \sum_{m=0}^{k-1} f^{(m)}(a) g^{(m)}(a) + \int_a^b f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) dx,$$

$$\|f\|_1 = \left(\sum_{m=0}^{k-1} |f^{(m)}(a)|^2 + \int_a^b |f^{(k)}(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

6) Множество $H_0^k(a,b) = \{f(x) \in H^k(a,b) : f^{(m)}(a) = = f^{(m)}(b) = 0, m = 0, 1, ..., k-1\}$ является замкнутым подпространством пространства $H^k(a,b)$. Пространства $\overset{\bullet}{C}{}^\infty [a,b]$, $\overset{\bullet}{C}{}^m [a,b]$, $m = k, k+1, ...,$ плотны в $H_0^k(a,b)$, и пополнения этих пространств в норме $H^k(a,b)$ совпадают с пространством $H_0^k(a,b)$. В пространстве $H_0^k(a,b)$ можно ввести эквивалентные (1.30), (1.31) скалярное произведение и норму, например, так:

$$\langle f, g\rangle_{H_0^k(a,b)} = \int_a^b f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) dx, \quad \|f\|_{H_0^k(a,b)} = \|f^{(k)}\|_{L^2[a,b]}.$$

7) Пространства $H^k(a,b)$, $H_0^k(a,b)$ сепарабельны.

Перечисленные утверждения доказываются аналогично теоремам 1.1–1.11 с использованием математической индукции.

6. Кратко рассмотрим пространства Соболева для функций многих переменных. Пусть $\Pi = \{x = (x_1, ..., x_n) : |x_i| < a_i, i = 1,..,n\}$ — n-мерный параллелепипед.

Определение 3. Пусть функция $f(x) \in L^1(\Pi)$. Функцию $\omega_i(x) \in L^1(\Pi)$ называют частной обобщенной производной (о. п.) по переменной x_i, если

$$\int_\Pi f(x)\varphi_{x_i}(x)dx = -\int_\Pi \omega_i(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi(x) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\overline{\Pi}).$$

За частными о. п. принято сохранять обычные обозначения:

$$\omega_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i} = f_{x_i}(x).$$

Нетрудно проверить, что функция $f(x) = \operatorname{sign} x_1$ имеет в Π о. п. по $x_2, ..., x_n$, но не имеет о.п. по x_1.

Как и в п. 1, можно убедиться, что о. п. определяется однозначно (с точностью до эквивалентных функций), можно также показать справедливость свойств частных о. п., аналогичных свойствам 1)–7). По аналогии с (1.3) для функций $f(x) \in L^1(\Pi)$ можно ввести среднюю функцию

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_\Pi f(y)\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)dy,$$

где $\omega(t)$ взята, например, из (1.2). Средняя функция определена и бесконечно дифференцируема при всех $x \in E^n$. Как и в теоремах 1.1, 1.2, можно доказать [89], что если $f(x) \in L^p(\Pi)$, $1 \le p < \infty$, то

$$\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_{L^p(\Pi)} = 0,$$

а если у $f(x)$ существует о. п. $f_{x_i} \in L^p(\Pi)$, то при любом $\delta > 0$

$$\lim_{h\to 0} \|f_{h_{x_i}} - f_{x_i}\|_{L^p(\Pi_\delta)} = 0,$$

где $\Pi_\delta = \{x : |x_i| < a_i - \delta, i = 1, \ldots, n\}$.

Введем пространство $H^1(\Pi)$ функций $f(x) \in L^2(\Pi)$, имеющих о. п. $f_{x_i} \in L^2(\Pi)$ для всех $i = 1, ..., n$, со скалярным произведением и нормой

$$\langle f, g\rangle_{H^1(\Pi)} = \int_\Pi \left(f(x)g(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)\rangle\right)dx,$$

$$\|f\|_{H^1(\Pi)} = \left(\langle f, f\rangle_{H^1(\Pi)}\right)^{1/2},$$

где $\operatorname{grad} f(x) \overset{\text{def}}{=} (f_{x_1}(x), ..., f_{x_n}(x))$. Как и выше, доказывается, что $H^1(\Pi)$ — гильбертово пространство. Пространства $C^\infty(\overline{\Pi})$, $C^k(\overline{\Pi})$, $k = 1, 2, ...$, плотны в $H^1(\Pi)$ и пополнение этих пространств в норме $H^1(\Pi)$ совпадает с $H^1(\Pi)$. Однако теорема вложения, аналогичная теореме 1.7, для функций n переменных при $n \ge 2$ неверна, так как при $n \ge 2$ не всякая функция $f(x) \in H^1(\Pi)$ эквивалентна непрерывной на $\overline{\Pi}$ функции. Так, например, функция

$$f(x_1, x_2) = \ln\ln\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right) \in H^1(\Pi),$$

где $\Pi = \{|x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, и в то же время $f(x_1, x_2)$ разрывна в точке $x = 0$. Однако, если условиться понимать непрерывность функции в другой, более слабой форме, можно получить аналог теоремы 1.7 и при $n \ge 2$. Для перехода к более строгим формулировкам нам понадобится понятие следа функции [6; 69; 89]. Выделим одну из переменных $x_1, ..., x_n$, например x_1, и переобозначим $t = x_1$, $y = (x_2, ..., x_n)$, $f(x) = f(t, y)$. Можем считать, что $t \in (0, T)$, $y \in \Omega = \{|x_i| < a_i, i = 2, ..., n\}$, $(t, x) \in Q = (0, T) \times \Omega$.

Определение 4. Пусть функция $f(t, y) \in L^2(Q)$, пусть зафиксировано некоторое $t_0 \in [0, T]$. Функция $g = g(y) \in L^2(\Omega)$ называется следом функции $f(t, y)$ при $t = t_0$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, t_0, f) > 0$, такое, что

$$\int_\Omega |f(t, y) - g(y)|^2 dy < \varepsilon \qquad \text{для п. в. } t, \quad |t - t_0| < \delta. \quad (1.32)$$

(существование интеграла в (1.32) для п. в. t следует из теоремы Фубини).

Отметим, что след функции, если он существует, определяется однозначно (с точностью до эквивалентных функций). В самом деле, если $g_1(y)$ и $g_2(y)$ — два следа функции $f(t,y)$ при $t = t_0$, то в силу (1.32)

$$\|g_1 - g_2\|_{L^2(\Omega)} \le$$

$$\le \left(\int\limits_\Omega |g_1(y) - f(t,y)|^2 dy\right)^{1/2} + \left(\int\limits_\Omega |f(t,y) - g_2(y)|^2 dy\right)^{1/2} < 2\sqrt{\varepsilon}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это может быть только при совпадении значений $g_1(y) = g_2(y)$ п. в. на Ω. Заметим также, что если $f_1(t,y) = f_2(t,y)$ п. в. на Q, то след $g(y)$ функции $f_1(t,y)$ при $t = t_0$ будет следом и для $f_2(t,y)$ при $t = t_0$. Если $f(t,y) \in C(\overline{Q})$, то при любом $t = t_0 \in [0,T]$ след функции $f(t,y)$ существует и равен ее значению при $t = t_0$: $g(y) = f(t_0,y)$. Однако если функция $f(t,y) \in L^2(Q)$ и о ней мы больше ничего не знаем, то полагать $g(y) = f(t_0,y)$ у нас нет никаких оснований прежде всего потому, что множество $\{(t,y) : t = t_0,\, y \in \Omega\}$ имеет нулевую n-мерную меру и на нем функция $f(t,y)$ может быть определена как угодно или даже вовсе не определена. У функции $f(t,y) \in L^2(Q)$ в общем случае и не обязан существовать след в смысле определения 4. Например, пусть

$$f(t,y) = \begin{cases} 0, & (t,y) \in Q_1 = \{(t,y) :\ 0 \le t \le \frac{T}{2},\ y \in \Omega\}, \\ 1, & (t,y) \in Q_2 = \{(t,y) :\ \frac{T}{2} < t \le T,\ y \in \Omega\}. \end{cases}$$

Эта функция определена всюду на $Q = Q_1 \bigcup Q_2$, принадлежит $L^2(Q)$, но при $t_0 = \frac{T}{2}$ не имеет следа.

Выделим класс функций, обладающих следами при всех $t \in [0,T]$. Именно, пусть

$$H^{1,0}(Q) = \{f = f(t,y) \in L^2(Q) :\ \exists \text{ о. п. } f_t(t,y) \in L^2(Q)\}$$

— гильбертово пространство со скалярным призведением и нормой

$$\langle f, g\rangle_{H^{1,0}(Q)} = \int\limits_Q (fg + f_t g_t)\,dt\,dy, \quad \|f\|_{H^{1,0}(Q)} = \left(\langle f, f\rangle_{H^{1,0}(Q)}\right)^{1/2}.$$

Далее пусть $C([0,T]; L^2(\Omega))$ — линейное пространство функций $f(t,y)$, значения которых при каждом $t \in [0,T]$ определены и принадлежат пространству $L^2(\Omega)$, а также непрерывны по t в метрике $L^2(\Omega)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_\Omega |f(t + \Delta t, y) - f(t,y)|^2 dy = 0 \quad \text{при всех } t \in [0,T];$$

это пространство является банаховым с нормой

$$\|f\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} = \max_{t \in [0,T]} \left(\int\limits_\Omega f^2(t,y)\,dy\right)^{1/2}.$$

Функция из $C([0,T]; L^2(\Omega))$ при каждом $t \in [0,T]$ имеет след, совпадающий с ее значением.

Теорема 1.12. *Для каждой функции $f(t,y) \in H^{1,0}(Q)$ существует единственная эквивалентная ей функция $F(t,y) \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, такая, что:*

1) значения $F(t,y)$ при каждом $t \in [0,T]$ являются следами функции $f(t,y)$;

2) справедлива оценка

$$\|F\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \le M\|f\|_{H^{1,0}(Q)}, \quad M = \left(1 + \frac{1}{b-a}\right)^{1/2}; \tag{1.33}$$

3) для любых $\alpha, \beta \in [0,T]$ верна формула

$$\int\limits_\alpha^\beta f_t(t,y)\,dt = F(\beta,t) - F(\alpha,y) \quad \text{при п. в.} \quad y \in \Omega. \tag{1.34}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для каждой функции $g(t,y) \in C^\infty(\overline{Q})$ справедливо неравенство

$$\|g\|_{C([0,T];\,L^2(\Omega))} \le M\|g\|_{H^{1,0}(Q)}, \tag{1.35}$$

которое доказывается так же, как аналогичное (1.21). Далее, зафиксируем функцию $f(t,y) \in H^{1,0}(Q)$. Так же, как в теореме 1.5, доказывается что $C^\infty(\overline{Q})$ плотно в $H^{1,0}(Q)$, поэтому существует последовательность $f_k(t,y) \in C^\infty(\overline{Q})$, которая сходится к $f(t,y)$ в норме $H^{1,0}(Q)$. Подставив в неравенство (1.35) разность $f_k(t,y) - f_m(t,y)$, получим

$$\|f_k - f_m\|_{C([0,T];\,L^2(\Omega))} \le M\|f_k - f_m\|_{H^{1,0}(Q)} \to 0 \quad \text{при } k,\, m \to 0,$$

т.е. $\{f_k\}$ фундаментальна в $C([0,T];L^2(\Omega))$. В силу полноты пространства $C([0,T];\ L^2(\Omega))$ существует функция $F(t,y) \in C([0,T];\ L^2(\Omega))$, такая, что при $k \to \infty$ $\|f_k - F\|_{C([0,T];\,L^2(\Omega))} \to 0$ и тем более $\|f_k - F\|_{L^2(Q)} \to 0$. В то же время $\|f_k - f\|_{L^2(Q)} \le \|f_k - f\|_{H^{1,0}(Q)} \to 0$, поэтому $F(t,y) = f(t,y)$ п.в. на Q и, следовательно, $F(t,y) \in H^{1,0}(Q)$. По теореме Фубини при п.в. $t \in [0,T]$ справедливо равенство $F(t,y) = f(t,y)$ для п.в. $y \in \Omega$. Отсюда и из определения 4 следа функции заключаем, что при каждом $t = t_0 \in [0,T]$ функция $f(t,y)$ имеет след, равный $F(t_0,y)$. Далее, из (1.35) следует, что

$$\|f_k\|_{C([0,T];\,L^2(\Omega))} \le M\|f_k\|_{H^{1,0}(Q)}$$

при всех $k = 1,2,\dots$ Отсюда при $k \to \infty$ получим неравенство (1.33). Наконец, для функции $f_k(t,y) \in C^\infty(\overline{Q})$ справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f_{kt}(t,y)\,dt = f_k(\beta,y) - f_k(\alpha,y) \qquad \forall y \in \Omega, \quad k = 1,2,\dots,$$

из которой при $k \to \infty$ получаем формулу (1.34). Требуемая функция $F(t,y)$ построена. Остается заметить, что $F(t,y)$ однозначно определяется функцией $f(t,y)$, точнее, классом эквивалентных функций $\{f(t,y)\}$, так как две функции $F_1(t,y)$, $F_2(t,y)$ из $C([0,T];L^2(\Omega))$, эквивалентные функции $f(t,y)$, эквивалентны между собой как элементы пространства $C([0,T];L^2(\Omega))$, т.е. $F_1(t,y) = F_2(t,y)$ п.в. на Ω для всех $t \in [0,T]$. Теорема 1.12 доказана.

Замечание 1. По ходу доказательства теоремы 1.12 было отмечено, что при п.в. $t \in [0,T]$ справедливо равенство

$$F(t,y) = f(t,y) \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Omega.$$

Это означает, что функция $f(t,y)$ из $H^{1,0}(Q)$ почти для всех $t_0 \in [0,T]$ совпадает со своим следом $F(t_0,y)$. Для остальных $t_0 \in [0,T]$, мера (одномерная) которых равна нулю, функцию $f(t,y)$ можно переопределить (или доопределить, если она при $t = t_0$ не определена), взяв ее равной $F(t_0,y)$. После такого переопределения на множестве n-мерной меры нуль сама функция $f(t,y)$ уже может играть роль $F(t,y)$ из теоремы 1.12. Это означает, что каждая функция $f(t,y)$ из $H^{1,0}(Q)$ изначально достаточно хорошо «устроена» и после незначительного (на множестве меры нуль) исправления она будет принадлежать $C([0,T];L^2(\Omega))$ и при всех $t \in [0,T]$ будет иметь следы, совпадающие с ее значениями при тех же t.

Отождествляя каждый класс $\{f(t,y)\}$ эквивалентных функций из $H^{1,0}(\Omega)$ с соответствующей функцией

$$F(t,y) \in C([0,T];L^2(\Omega)),$$

можем считать, что формула Ньютона–Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f_t(t,y)dt = f(\beta,y) - f(\alpha,y) \qquad \forall \alpha,\beta \in [0,T]$$

$$\text{для п.в.} \quad y \in \Omega,$$

верна для всех $f(t,y) \in H^{1,0}(Q)$. На классе $H^{1,0}(Q)$ справедлива также и формула интегрирования по частям

$$\int_0^T f_t(t,y)g(t,y)dt = f(t,y)g(t,y)\Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T f(t,y)g_t(t,y)dt$$

$$\text{для п.в.} \quad y \in \Omega.$$

Вернемся к исходным переменным $x = (x_1,\dots,x_n) \in \Pi$ и введенному выше пространству $H^1(\Pi)$. Из теоремы 1.12 и замечания к ней следует, что каждую функцию $f(x) \in H^1(\Pi)$

можно переопределить на множестве меры нуль так, что она будет иметь следы

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i0}, x_{i+1}, ..., x_n) \in L^2(\Pi_i),$$

$$\Pi_i = \{|x_j| < a_j,\ j = \overline{1,n},\ j \neq i\},$$

совпадающие с ее значениями при всех $x_{i0} \in [-a_i, a_i]$.

Можно также доказать [69; 89; 126], что из всякого множества $G \subset H^1(\Pi)$, ограниченного в норме $H^1(\Pi)$, можно извлечь последовательность $f_k(x)$, которая сходится к некоторой функции $f(x)$ в норме $L^2(\Pi)$, причем последовательность следов $f_k(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i0}, x_{i+1}, ..., x_n)$ будет сходиться к следу $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i0}, x_{i+1}, ..., x_n)$ в норме $L^2(\Pi_i)$, $i = 1, 2, ..., n$.

В $H^1(\Pi)$ можно ввести подпространство $H^1_0(\Pi)$ функций, следы которых при $x_i = \pm a_i$, $i = 1, 2, ..., n$, равны нулю. Класс функций $H^1_0(\Pi)$ замкнут в $H^1(\Pi)$ и сам образует гильбертово пространство с тем же скалярным произведением, что и $H^1(\Pi)$. В $H^1_0(\Pi)$ можно ввести и другое, эквивалентное исходному, скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle_{H^1_0(\Pi)} = \int\limits_{\Pi} \langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)\rangle dx$$

и соответствующую норму

$$\|f\|_{H^1_0(\Pi)} = \left(\int\limits_{\Pi} |\operatorname{grad} f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Пространства $\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\overline{\Pi})$, $\overset{\bullet}{C}{}^{k}(\overline{\Pi})$, $k = 1, 2, ...$, плотны в $H^1_0(\Pi)$ и пополнения этих пространств в норме $H^1(\Pi)$ совпадают с $H^1_0(\Pi)$. Пространства $H^1(\Pi)$, $H^1_0(\Pi)$ сепарабельны. Эти и другие свойства пространств $H^1(\Pi)$, $H^1_0(\Pi)$, а также пространств $H^k(\Pi)$, $H^k_0(\Pi)$, $k = 2, 3, ...$, функций с о. п. более высокого порядка для случая более общих множеств Π и другие обобщения читатель найдет, например, в [6; 69; 70; 74; 89; 90; 126; 127].

§ 2. Энергетическое расширение неограниченного симметричного положительно определенного оператора

Пусть H — произвольное вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle f, g\rangle$ и нормой $\|f\|_H = (\langle f, f\rangle)^{1/2}$. Пусть $A : H \to H$ — линейный неограниченный оператор $\left(\sup_{\|f\|_H \leq 1} \|Af\|_H = +\infty\right)$ с областью определения $D(A)$, плотной в H. Будем предполагать, что оператор A симметричный:

$$\langle Af, \varphi\rangle_H = \langle f, A\varphi\rangle_H \qquad \forall f, \varphi \in D(A) \tag{2.1}$$

и положительно определенный:

$$\langle Af, f\rangle_H \geq \mu\|f\|^2_H \qquad \forall f \in D(A), \quad \mu = \text{const} > 0. \tag{2.2}$$

Опишем процесс энергетического расширения такого оператора A, которое выше было использовано в постановках задач Коши для операторных дифференциальных уравнений, включающих в себя, в частности, многие классы краевых задач математической физики (см. гл. II, задача (1.1)–(1.3) и §2, примеры 1–3; гл. III, §1, примеры 1–4).

1. Через H^* обозначим сопряженное к H пространство [39; 136; 142] линейных непрерывных функционалов, определенных на H. Если $f \in H^*$, обозначим $\langle f, \varphi\rangle$ значение функционала f на элементе $\varphi \in H$. Согласно теореме Рисса [39; 136; 142] для любого $f \in H^*$ существует, притом единственный, элемент $\eta \in H$, такой, что

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle \eta, \varphi\rangle_H \qquad \forall \varphi \in H, \qquad \|f\|_{H^*} = \|\eta\|_H.$$

Равенство $\eta = R_H f$ определяет оператор $R_H : H^* \to H$, называемый оператором Рисса. Перечислим некоторые свойства оператора R_H:

1) $\langle f, \varphi\rangle = \langle R_H f, \varphi\rangle_H \quad \forall f \in H^*, \qquad \forall \varphi \in H;$

2) R_H — линейный оператор:

$$R_H(\alpha f + \beta g) = \alpha R_H f + \beta R_H g \qquad \forall f, g \in H^*, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

3) R_H — ограниченный оператор с нормой $\|R_H\| = 1$, более того, R_H — изометричный (сохраняющий норму) оператор:

$$\|R_H f\|_H = \|f\|_{H^*} \qquad \forall f \in H^*;$$

4) сопряженное пространство H^* является гильбертовым; скалярное произведение $\langle f, g\rangle_{H^*}$ в нем с помощью оператора R_H представимо в виде

$$\langle f, g\rangle_{H^*} = \langle R_H f, R_H g\rangle_H \qquad \forall f, g \in H^*; \tag{2.3}$$

формула (2.3) является следствием изометричности R_H и равенства

$$\langle f, g\rangle_{H^*} = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2_{H^*} - \|f-g\|^2_{H^*}) =$$

$$= \frac{1}{4}(\|R_H(f+g)\|^2_H - \|R_H(f-g)\|^2_H) = \langle R_H f, R_H g\rangle_H;$$

5) R_H взаимно однозначно отображает H^* на H, обратный оператор $R_H^{-1} : H \to H^*$ ограничен, имеет норму $\|R_H^{-1}\| = 1$ и изометричен:

$$\|R_H^{-1}\eta\|_{H^*} = \|\eta\|_H \qquad \langle R_H^{-1}\eta, \varphi\rangle = \langle \eta, \varphi\rangle_H \qquad \forall \eta, \varphi \in H;$$

6) справедливо равенство $R_H^* = R_H^{-1}$.

В самом деле, в силу (2.3) $\langle f, g\rangle_{H^*} = \langle R_H f, R_H g\rangle_H = \langle R_H^* R_H f, g\rangle_{H^*}$ $\forall f, g \in H^*$, поэтому $f = R_H^* R_H f$ $\forall f \in H^*$, т. е. $R_H^* R_H = I$ — тождественный оператор.

Таким образом, оператор Рисса R_H устанавливает взаимно однозначное изометричное соответствие между пространствами H и H^*. Это соответствие обозначают $H \simeq H^*$. Более того, имея в виду указанное соответствие, во многих вопросах анализа принято отождествлять пространства H и H^* и писать просто $H^* = H$, не различая элементы $R_H f$ и f, $R_H^{-1}\eta$ и η и опуская в формулах и рассуждениях символы R_H, R_H^{-1}.

2. В предыдущем параграфе были рассмотрены примеры вложения одного функционального пространство в другое. Обобщим понятие вложения на случай абстрактных гильбертовых пространств.

Определение 1. Пусть V, H — два гильбертовых пространства. Говорят, что вложение $V \subset H$ плотно и непрерывно, если:

1) имеет место поэлементное вложение: $v \in V \Rightarrow v \in H$;

2) $\forall f \in H$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists v = v_\varepsilon \in V : \|f - v_\varepsilon\|_H < \varepsilon$ (плотность вложения);

3) справедливо неравенство

$$\|v\|_H \le C\|v\|_V \qquad \forall v \in V, \qquad C = \mathrm{const} > 0 \tag{2.4}$$

(непрерывность вложения).

Пусть V^* — сопряженное к V пространство. Если вложение $V \subset H$ непрерывно, то, оказывается, можно говорить о вложении $H \subset V^*$. В самом деле, возьмем произвольный элемент $f \in H$. Тогда $R_H^{-1} f \in H^*$, причем $\langle R_H^{-1} f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle_H$ $\forall \varphi \in H$. Так как $V \subset H$, это равенство, в частности, выполняется при всех $\varphi \in V$. Отсюда с учетом (2.4) имеем

$$\left|\langle R_H^{-1} f, v\rangle\right| = |\langle f, v\rangle_H| \le \|f\|_H \|v\|_H \le \|f\|_H C\|v\|_V \quad \forall v \in V. \tag{2.5}$$

Это значит, что $R_H^{-1} f$ является линейным непрерывным функционалом на V, т. е. $R_H^{-1} f \in V^*$. Поскольку при отождествлении $H = H^*$ элементы f и $R_H^{-1} f$ мы не различаем, можно считать, что $f \in V^*$ и $\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle_H$ $\forall \varphi \in V$, $\forall f \in H$. Таким образом, вложение $H \subset V^*$ действительно имеет смысл, и мы приходим к цепочке вложений

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1. *Если вложение $V \subset H$ плотно и непрерывно, то вложение $H \subset V^*$ также плотно и непрерывно.*

Доказательство. Прежде всего нужно убедиться, что вложение $H \subset V^*$ поэлементное, т. е. разные элементы $f, g \in H$ при описанном вложении порождают разные функционалы из V^*. В самом деле, если два элемента $f, g \in H$ порождают один и тот же функционал, то $\langle f, v\rangle = \langle g, v\rangle$ или, иначе, $\langle R_H^{-1} f, v\rangle_H = \langle R_H^{-1} g, v\rangle_H \ \forall v \in V$. Следовательно,

$$\langle R_H^{-1}(f-g), v\rangle_H = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Отсюда и из плотности вложения $V \subset H$ следует $R_H^{-1}(f-g) = 0$, или $f = g$.

Нетрудно убедиться в том, что вложение $H \subset V^*$ непрерывно. Действительно, из определения нормы функционала

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{v\in V, \|v\|_V \le 1} |\langle f, v\rangle|$$

и соотношений (2.5) имеем

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{v\in V, \|v\|_V \le 1} |\langle R_H^{-1} f, v\rangle| \le C\|f\|_H \quad \forall f \in H. \qquad (2.7)$$

Покажем, что вложение $V \subset V^*$ плотное. Для этого достаточно установить, что $\overline{R_H^{-1}(V)} = V^*$, где $\overline{R_H^{-1}(V)}$ — замыкание множества $R_H^{-1}(V) = \{u \in V^* : \exists v \in V, \text{ что } u = R_H^{-1} v\}$ в норме V^*. Будем рассуждать от противного: пусть $\overline{R_H^{-1}(V)} \neq V^*$. Так как $R_H^{-1}(V) \subset V^*$, по теореме Хана–Банаха [39; 136; 142] найдется функционал $f_0 \in V^{**}$, такой, что $f_0 \neq 0$, но $\langle f_0, R_H^{-1} v\rangle = 0 \ \ \forall v \in V$. Путь R_V и R_{V^*} — операторы Рисса в пространствах V и V^* соответственно. Тогда отображение $R_{V^*}^{-1} R_V^{-1} : V \to V^{**}$ устанавливает изоморфизм между V и V^*. Поэтому найдется элемент $h_0 \in V$, такой, что $f_0 = R_{V^*}^{-1} R_V^{-1} h_0$. С учетом свойств операторов Рисса R_V, R_{V^*} для всех $v \in V$ имеем

$$0 = \langle f_0, R_H^{-1} v\rangle = \langle R_{V^*}^{-1} R_V^{-1} h_0, R_H^{-1} v\rangle = \langle R_V^{-1} h_0, R_H^{-1} v\rangle_{V^*} =$$

$$= \langle h_0, R_V R_H^{-1} v\rangle_V = \langle h_0, R_V^{-1} R_V R_H^{-1} v\rangle = \langle h_0, R_H^{-1} v\rangle = \langle h_0, v\rangle_H.$$

Таким образом, $\langle h_0, v\rangle_H = 0 \ \forall v \in V$. Учитывая плотность вложения $V \subset H$, заключаем, что $h_0 = 0$, а тогда и $f_0 = 0$, что противоречит выбору элемента f_0. Следовательно, $\overline{R_H^{-1}(V)} = V^*$, т. е. вложение $V \subset V^*$ плотное. Из цепочки (2.6) тогда следует и плотность вложения

$$H \simeq H^* = R_H^{-1}(H) \subset V^*.$$

Теорема 2.1 доказана.

Попутно выяснилось, что V^* является пополнением пространств $R_H^{-1}(V)$ и $R_H^{-1}(H)$ в норме $\|f\|_{V^*} = \|R_H f\|_H$.

3. Рассмотрим цепочку вложений (2.6) для случая, когда пространство V представляет собой так называемое энергетическое пополнение области определения $D(A)$ линейного неограниченного оператора A со свойствами (2.1), (2.2) и опишем расширение оператора A на пространство V. Заметим, что линейное многообразие $D(A)$ превращается в евклидово пространство, если в нем ввести скалярное произведение

$$\langle u, v\rangle_A \overset{\text{def}}{=} \langle Au, v\rangle_H \qquad \forall u,\ v \in D(A); \qquad (2.8)$$

$\|u\|_A = (\langle Au, u\rangle_H)^{1/2}$— норма в $D(A)$. Справедливость аксиом скалярного произведения и нормы следует из линейности оператора A и его свойств (2.1), (2.2). Пространство $D(A)$ пополним в норме $\|u\|_A$, и получившееся в результате пополнения гильбертово пространство обозначим через H_A. Как известно [39; 136; 142], пространство H_A состоит из идеальных элементов, представляющих собой классы $\mathcal{U}$ эквивалентных фундаментальных в норме $\|u\|_A$ последовательностей $\{u_k\} \in D(A)$. Напомним, что последовательность $\{u_k\} \in D(A)$ фундаментальна в норме $\|u\|_A$, если $\|u_k - u_m\|_A \to 0$ при $k, m \to \infty$; две фундаментальные последовательности $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ эквивалентны, если $\|u_k - v_k\|_A \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in H_A$. Линейные операции $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, $\alpha\mathcal{U}$ в H_A определены так: берутся произвольные фундаментальные последовательности $\{u_k\} \in \mathcal{U}$, $\{v_k\} \in \mathcal{V}$ и в качестве $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, $\alpha\mathcal{U}$ принимаются классы последовательностей, эквивалентных последовательностям

$\{u_k + v_k\}$ и $\{\alpha u_k\}$ соответственно; скалярное произведение и норма в H_A вводятся как

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{V}\rangle_A = \lim_{k\to\infty} \langle u_k, v_k\rangle_A \qquad \text{и} \qquad \|\mathcal{U}\|_A = (\langle \mathcal{U}, \mathcal{U}\rangle_A)^{1/2}.$$

Исходное пространство $D(A)$ является подпространством в H_A в следующем смысле. Каждый элемент $u \in D(A)$ порождает класс $\mathcal{U}$ фундаментальных последовательностей, эквивалентных стационарной последовательности $\{u_k = u, k = 1, 2, \ldots\}$. Ясно, что такой класс $\mathcal{U}$ состоит из последовательностей $\{u_k\} \in D(A)$, сходящихся к элементу u в норме $\|\cdot\|_A$. Пусть $\widetilde{D}(A)$ — множество классов фундаментальных последовательностей, эквивалентных какой-либо стационарной последовательности из $D(A)$. Если классы $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \widetilde{D}(A)$ порождены стационарными последовательностями, соответствующими элементам $u, v \in D(A)$, то

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{V}\rangle_A = \langle u, v\rangle_A = \langle Au, v\rangle_H.$$

Ясно, что $\widetilde{D}(A)$ представляет собой подпространство в H_A, изоморфное $D(A)$ и плотное в H_A. Пространство H_A описано. Следует заметить, что с классами фундаментальных последовательностей работать неудобно, поэтому дадим другое, более удобное, описание пространства H_A.

Покажем, что каждому классу $\mathcal{U} \in H_A$ можно поставить в соответствие элемент $u \in H$ следующим образом. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $\{u_k\} \in \mathcal{U}$. Из неравенства (2.2) следует, что

$$\|u_k - u_m\|_H^2 \le \frac{1}{\mu}\|u_k - u_m\|_A^2 \to 0$$

при k, $m \to \infty$. Это значит, что последовательность $\{u_k\}$ фундаментальна в H и в силу полноты H сходится к некоторому элементу $u \in H$:

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_H = 0.$$

Нетрудно видеть, что элемент u не зависит от выбора $\{u_k\}$ из $\mathcal{U}$. Искомый элемент $u \in H$, соответствующий классу $\mathcal{U}$, построен. Это соответствие кратко будем обозначать так: $\mathcal{U} \Rightarrow u$. Построенное соответствие, очевидно, линейное: если $\mathcal{U} \Rightarrow u$, $\mathcal{V} \Rightarrow v$, то $W = \alpha\mathcal{U} + \beta\mathcal{V} \Rightarrow w = \alpha u + \beta v \in H$ $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}$. Важно убедиться, что разным классам $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in H_A$ соответствуют разные элементы $u, v \in H$. Допустим, что $u = v$. Тогда в силу линейности построенного соответствия классу $W = \mathcal{U} - \mathcal{V}$ соответствует элемент $w = u - v = 0 \in H$. Покажем, что это возможно только в том случае, когда $W = 0$ — класс фундаментальных последовательностей, эквивалентных стационарной нулевой последовательности $\{u_k = 0, k = 1, 2, \ldots\}$. Возьмем произвольный элемент $Z \in \widetilde{D}(A)$. По определению $\widetilde{D}(A)$ существует элемент $z \in D(A)$, такой, что стационарная последовательность $\{z_k = z, k = 1, 2, \ldots\} \in Z$. Пусть $\{w_k\} \in W$. Так как $W \Rightarrow w = 0$, то $\{w_k\} \to 0$ в норме $\|\cdot\|_H$. Тогда с учетом равенства (2.1) имеем

$$\langle W, Z\rangle_A = \lim_{k\to\infty} \langle w_k, z_k\rangle_A = \lim_{k\to\infty} \langle Aw_k, z\rangle_H =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle w_k, Az\rangle_H = \langle 0, Az\rangle_H = 0.$$

Таким образом, $\langle W, Z\rangle_A = 0$ $\forall Z \in \widetilde{D}(A)$. Так как $\widetilde{D}(A)$ плотно в H_A, последнее равенство возможно только при $W = 0$, следовательно, $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Тем самым доказано, что если $\mathcal{U} \ne \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \Rightarrow u$, $\mathcal{V} \Rightarrow v$, то $u \ne v$.

Через V_A обозначим множество, состоящее из тех элементов $u \in H$, которые соответствуют какому-либо классу $\mathcal{U} \in H_A$. Линейность построенного соответствия $\mathcal{U} \Rightarrow u$ гарантирует, что V_A — линейное подпространство пространства H с операциями, совпадающими с операциями исходного пространства H, причем V_A изоморфно H_A. В V_A введем скалярное произведение по правилу $\langle u, v\rangle_{V_A} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{V}\rangle_A$, где $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in H_A$, $\mathcal{U} \Rightarrow u$, $\mathcal{V} \Rightarrow v$. В результате линейное пространство V_A превращается в евклидово пространство, изометричное гильбертову пространству H_A, следовательно, V_A также является полным пространством.

Гильбертово пространство V_A принято называть энергетическим пространством, соответствующим симметричному положительному оператору $A : H \to H$. Так как

$\widetilde{D}(A) \Rightarrow D(A)$, $\widetilde{D}(A)$ плотно в H_A, то $D(A)$ — подпространство в V_A, плотное в V_A. В дальнейшем построенные изометричные гильбертовы пространства H_A и V_A будем отождествлять и использовать в качестве основного обозначение V_A.

Энергетическое пространство V_A по самому построению поэлементно вкладывается в пространство H. Это вложение плотное, так как $D(A) \subset V_A \subset H$ и $D(A)$ плотно в H по определению оператора A. Кроме того, это вложение непрерывно, что вытекает из неравенства

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\|u\|_A \qquad \forall u \in V_A. \tag{2.9}$$

Справедливость этого неравенства для $u \in D(A)$ непосредственно следует из (2.2), (2.8). Если же $u \in V_A$, $u \notin D(A)$, то в силу построения V_A и плотности $D(A)$ в V_A следует существование последовательности $\{u_k\} \in D(A)$, такой, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_H = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_A = 0.$$

Отсюда, зная, что (2.9) верно для $u = u_k \in D(A)$, $k = 1, 2, \ldots$, и переходя к пределу при $k \to \infty$, с учетом непрерывности норм в H и V_A получим (2.9) для всех $u \in V_A$.

Итак, вложение $V_A \subset H$ двух гильбертовых пространств является поэлементным, плотным и непрерывным. Тогда справедлива цепочка вложений (2.6):

$$V = V_A \subset H^* \simeq H \subset V_A^* = V^*, \tag{2.10}$$

в которой согласно теореме 2.1 вложение $H^* \subset V_A^*$ также поэлементное, плотное и непрерывное. Неравенство (2.7) здесь имеет вид

$$\|u\|_{V_A^*} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\|u\|_H \qquad \forall u \in H. \tag{2.11}$$

4. Пользуясь (2.9)–(2.11), доопределим оператор A на все пространство V_A. Напомним, что оператор A пока что определен на линейном многообразии $D(A)$, плотном в V_A, его значения $Af \in H$ $\forall f \in D(A)$ и, кроме того, он обладает свойствами (2.1), (2.2).

Пользуясь приведенной выше трактовкой включения (2.10), будем считать, что

$$Af \in H \simeq H^* \subset V_A^*,$$

т. е. Af — это линейный непрерывный функционал над V_A, определенный так (напоминаем, что элементы $R_H^{-1}(Af)$ и Af отождествляются):

$$\langle Af, \varphi\rangle = \langle Af, \varphi\rangle_H = \langle f, \varphi\rangle_A \quad \forall \varphi \in V_A \subset H, \quad \forall f \in D(A) \subset V_A, \tag{2.12}$$

и, следовательно, оператор A действует из V_A в V_A^*. Этот оператор является ограниченным. В самом деле, из (2.12) имеем

$$|\langle Af, \varphi\rangle| = |\langle f, \varphi\rangle_A| \leq \|f\|_A \|\varphi\|_A \quad \forall \varphi \in V_A, \quad \forall f \in D(A).$$

Это означает, что

$$\|Af\|_{V_A^*} = \sup_{\varphi\in V_A, \|\varphi\|_A \leq 1} \langle Af, \varphi\rangle \leq \|f\|_A \qquad \forall f \in D(A), \tag{2.13}$$

т. е. $\|A\| \leq 1$. Таким образом, $A \in L(V_A \to V_A^*)$, область определения $D(A)$ плотна в H_A. Тогда существует оператор $\widetilde{A}$ с областью определения $D(\widetilde{A}) = V_A$, областью значений $R(\widetilde{A}) \subset V_A^*$, являющийся расширением оператора A [39; 136]. Оператор $\widetilde{A}$ строится так. Если $f \in D(A)$, то полагается $\widetilde{A}f = Af$. Если $f \in V_A$, но $f \neq D(A)$, то в силу построения V_A существует последовательность $\{f_k\} \in D(A)$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_A = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_H = 0.$$

Тогда

$$\|Af_k - Af_m\|_{V_A^*} = \|A(f_k - f_m)\|_{V_A^*} \leq \|A\|\|f_k - f_m\|_A \to 0$$

при $k, m \to \infty$. Это значит, что последовательность $\{Af_k\}$ фундаментальна в V_A^* и в силу полноты V_A^* найдется элемент $y \in V_A^*$, такой, что $\lim_{k\to\infty} \|Af_k - y\|_{V_A^*} = 0$. Нетрудно видеть, что элемент y зависит лишь от f, но не зависит от последовательности $\{f_k\}$, аппроксимирующей f. Положим по определению $\widetilde{A}f = y$. Построенный оператор $\widetilde{A}$ определен на всем пространстве V_A и является линейным. Кроме того, из неравенства (2.13), справедливого при $f = f_k$, $k = 1, 2, \ldots$, предельным переходом при $k \to \infty$ получим $\|\widetilde{A}f\|_{V_A^*} \le \|f\|_A$ $\forall f \in V_A$, следовательно, $\widetilde{A} \in L(V_A \to V_A^*)$, причем $\|\widetilde{A}\| \le 1$. Устремляя в равенстве (2.12), записанном для $f = f_k$, $k \to \infty$, получаем

$$\langle \widetilde{A}f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_A \qquad \forall f, \varphi \in V_A. \tag{2.14}$$

В (2.14) переменные f, φ равноправны, поэтому $\langle \widetilde{A}f, \varphi \rangle = \langle \varphi, f \rangle_A$. Отсюда и из равенства $\langle f, \varphi \rangle_A = \langle \varphi, f \rangle_A$ следует, что $\langle \widetilde{A}f, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{A}\varphi \rangle$ $\forall f, \varphi \in V_A$, т. е. $\widetilde{A}$ — симметричный оператор (здесь и далее символы $\langle \widetilde{A}f, \varphi \rangle$ и $\langle \varphi, \widetilde{A}f \rangle$, выражающие значения функционала $\widetilde{A}f \in V_A^*$ на элементе $\varphi \in V_A$, считаются равноправными). Далее, из (2.9), (2.14) вытекает положительная определенность оператора $\widetilde{A}$:

$$\mu \|f\|_H^2 \le \|f\|_A^2 = \langle f, f \rangle_A = \langle \widetilde{A}f, f \rangle \qquad \forall f \in V_A.$$

Полученный оператор $\widetilde{A}$ часто называют энергетическим расширением оператора A [15; 90].

Заметим, что равенство (2.14) можно интерпретировать как явное определение расширенного оператора $\widetilde{A}$, так как оно задает правило действия значения $\widetilde{A}f$ оператора $\widetilde{A}$ на произвольный элемент $\varphi \in V_A$ при каждом $f \in V_A$. Более того, из (2.14) следует тесная связь между оператором $\widetilde{A}$ и оператором Рисса $R_{V_A} : V^* \to V$ пространства V^*:

$$\widetilde{A} = R_{V_A}^{-1}. \tag{2.15}$$

В самом деле, для оператора R_{V_A} имеем (см. свойство 5)):

$$\langle R_{V_A}^{-1} f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_A \qquad \forall f, \varphi \in V_A.$$

Отсюда и из (2.14) получаем

$$\langle \widetilde{A}f, \varphi \rangle = \langle R_{V_A}^{-1} f, \varphi \rangle \quad \forall f, \varphi \in V_A,$$

что равносильно (2.15). Из (2.15) и свойств оператора Рисса следует, что область значений $R(\widetilde{A})$ оператора $\widetilde{A}$ совпадает с V_A^*, оператор $\widetilde{A}$ взаимно однозначно отображает V_A на V_A^*, обратный оператор $\widetilde{A}^{-1} = R_{V_A} \in L(V_A^* \to V_A)$, $\|\widetilde{A}\| = \|\widetilde{A}^{-1}\| = 1$, скалярное произведение в V_A^* с учетом формул (2.3), (2.15) может быть представленно в виде

$$\langle f, g \rangle_{V_A^*} = \langle R_{V_A} f, R_{V_A} g \rangle_{V_A} = \langle \widetilde{A}^{-1} f, \widetilde{A}^{-1} g \rangle_{V_A} \qquad \forall f, g \in V_A.$$

5. При доказательстве существования решения задачи Коши для операторных дифференциальных уравнений в гл. II, III были использованы ортонормированные базисы в пространствах V_A, H, V_A^*, составленные из собственных элементов оператора $\widetilde{A}$. Ниже будет исследовано существование счетной системы собственных элементов оператора $\widetilde{A}$. Для удобства изложения оператор $\widetilde{A}$ переобозначим снова через A, область его определения $D(A) = V_A$ будем обозначать просто через V. Иначе говоря, будем предполагать, что описанные выше процедуры расширения уже проведены и сам оператор A является энергетическим расширением некоторого линейного, неограниченного, симметричного, положительно определенного оператора с областью определения, плотной в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Таким образом, $A \in L(V \to V^*)$, где V — энергетическое гильбертово пространство, V^* — сопряженное к V пространство, $D(A) = V$ — область определения A, $R(A) = V^*$ — область значений A. Оператор A симметричен:

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \qquad \forall u, v \in V, \tag{2.16}$$

положительно определен:

$$\langle Au, u \rangle \ge \mu \|u\|_H^2 \qquad \forall u \in V, \quad \mu = \mathrm{const} > 0, \tag{2.17}$$

и осуществляет взаимно однозначное отображение V на V^*; обратный оператор $A^{-1} \in L(V^* \to V)$, $\|A\| = \|A^{-1}\| = 1$. Скалярное произведение и норма в V равны соответственно $\langle u, v\rangle_V = \langle Au, v\rangle$ и $\|u\|_V = \langle Au, u\rangle^{1/2}$, а скалярное произведение и норма в V^* определяются как

$$\langle f, g\rangle_{V^*} = \langle A^{-1}f, A^{-1}g\rangle_V = \langle f, A^{-1}g\rangle \quad \text{и} \quad \|f\|_{V^*} = \|A^{-1}f\|_V.$$

Имеют место вложения

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*, \tag{2.18}$$

причем эти вложения плотные и непрерывные, т. е.

$$\|f\|_H \le C\|f\|_V \qquad \forall f \in V$$

и

$$\|f\|_{V^*} \le C\|f\|_H \qquad \forall f \in H, \qquad C = \mu^{-1/2}.$$

Напоминаем также, что в (2.16), (2.17) и далее запись $\langle f, v\rangle$ означает результат применения функционала $f \in V^*$ к элементу $v \in V$; считается, что $\langle f, v\rangle = \langle v, f\rangle$. Если о функционале $f \in V^*$ дополнительно известно, что $f \in H$ или $f \in V$, то, как следует из определения вложения (2.18), $\langle f, v\rangle = \langle f, v\rangle_H$ для любых $v \in H$ и, тем более, для любых $v \in V$.

От оператора A дополнительно будем требовать, чтобы порождаемое им энергетическое пространство V вкладывалось в H компактно.

Определение 2. Вложение пространств $V \subset H$ называется компактным, если из любого множества $M \subset V$, ограниченного в норме V, можно извлечь последовательность, сходящуюся в норме H.

Определение 3. Собственным элементом оператора A, соответствующим собственному числу λ, называется элемент $e \in V$, $e \neq 0$, такой, что

$$Ae = \lambda e. \tag{2.19}$$

Так как $Ae \in V^*$ и в силу (2.18) $V \subset V^*$, равенство (2.19) понимается как равенство двух линейных функционалов над V, т. е.

$$\langle Ae, \varphi\rangle = \lambda\langle e, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in V.$$

Определение 4. Последовательность элементов $\{e_k\} = \{e_1, e_2, \dots\}$ называется ортономированной системой (ОНС) в гильбертовом пространстве H, если $\|e_k\|_H = 1$, $\langle e_i, e_k\rangle_H = 0$ $\forall i \neq k$, $k = 1, 2, \dots$ Последовательность $\{e_k\}$ называется ортонормированным базисом (ОНБ) в H, если $\{e_k\}$ — ОНС в H и любой элемент $u \in H$ может быть представлен в виде сильно в H сходящегося ряда Фурье:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k,$$

где $u_k = \langle u, e_k\rangle_H$ — коэффициенты Фурье элемента u, $k = 1, 2, \dots$ Аналогично определяются ОНС, ОНБ в пространствах V, V^*.

Теорема 2.2. *Пусть $A \in L(V \to V^*)$ — энергетическое расширение линейного, неограниченного, симметричного, положительно определенного оператора с областью определения, плотной в H, и пусть вложение $V \subset H$ компактно. Тогда оператор A обладает счетной системой собственных чисел λ_k,*

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_k \le \dots, \qquad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty,$$

а соответствующая система $\{e_k\}$ собственных элементов $e_k \in V$ образует ОНБ в H. При этом система $\{\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\}$ является ОНБ в V, а система $\{e_k\sqrt{\lambda_k}\}$ — ОНБ в V^*. Для элементов и их норм в пространствах H, V, V^* имеют место представления:

если $u \in H$, то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k, \qquad \|u\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2, \qquad u_k = \langle u, e_k\rangle_H; \tag{2.20}$$

если $u \in V$, то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k, \qquad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2,$$

$$u_k = \langle u, e_k\rangle_H = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\langle u, \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\rangle_V; \tag{2.21}$$

если $u \in V^*$, *то*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k, \qquad \|u\|_{V^*}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k^2,$$

$$u_k = \langle u, e_k \rangle = \sqrt{\lambda_k}(u, \sqrt{\lambda_k} e_k)_{V^*}; \tag{2.22}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации

$$J(u) = \langle Au, u \rangle = \|u\|_V^2 \to \inf, \quad u \in U_1 = \{u \in V : \|u\|_H = 1\}. \tag{2.23}$$

Из (2.17) следует, что $\lambda_1 = \inf_{u \in U_1} J(u) \geq \mu > 0$.

Пусть $\{u_n\}$ — произвольная минимизирующая последовательность задачи (2.23)

$$u_n \in V, \qquad \|u_n\|_H = 1, \qquad n = 1, 2, ...,$$

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_V^2 = \lambda_1.$$

Это значит, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена в норме V. В силу компактности вложения $V \subset H$ из $\{u_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая сходится в норме H к некоторому элементу $e_1 \in H$. Без умаления общности можем считать, что сама последовательность $\{u_n\}$ сходится к e_1 сильно в H. Из $\|u_n\|_H = 1$, $n = 1, 2, ...$, в силу непрерывности нормы имеем $\|e_1\|_H = 1$.

Покажем, что $e_1 \in V$ и $\|u_n - e_1\|_V \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого сначала установим, что последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в V. С этой целью возьмем произвольный элемент $v \in V$ и положим

$$w_n = (u_n + tv)\|u_n + tv\|_H^{-1}, \qquad k = 1, 2, ..., \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Так как $w_n \in U_1$, то $J(w_n) \geq \lambda_1$, что равносильно неравенству

$$\|u_n + tv\|_V^2 \geq \lambda_1 \|u_n + tv\|_H^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

или

$$t^2(\|v\|_V^2 - \lambda_1\|v\|_H^2) + 2t[(u_n, v)_V - \lambda_1(u_n, v)_H] + J(u_n) - \lambda_1 \geq 0$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \forall v \in V. \tag{2.24}$$

Если коэффициент при t^2 в (2.24) отличен от нуля, то для выполнения неравенства (2.24) при всех $t \in \mathbb{R}$ необходимо, чтобы

$$((u_n, v)_V - \lambda_1(u_n, v)_H)^2 - (\|v\|_V^2 - \lambda_1\|v\|_H^2)(J(u_n) - \lambda_1) \leq 0. \tag{2.25}$$

Если коэффициент при t^2 в (2.24) равен нулю, то (2.24) имеет место лишь тогда, когда коэффициент при t также равен нулю, что снова приводит к (2.25). Таким образом, неравенство (2.25) верно во всех случаях и выполняется $\forall v \in V$. Кроме того, из (2.24) следует, что

$$\|v\|_V^2 - \lambda_1\|v\|_H^2 \geq 0 \qquad \forall v \in V. \tag{2.26}$$

Возьмем в (2.25), (2.26) $v = u_n - u_m \in V$. Учитывая, что $J(u_n) \geq \lambda_1 > 0$, получим

$$|(u_n, u_n - u_m)_V - \lambda_1(u_n, u_n - u_m)_H| \leq$$
$$\leq (\|u_n - u_m\|_V^2 - \lambda_1\|u_n - u_m\|_H^2)^{1/2}(J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} \leq$$
$$\leq \|u_n - u_m\|_V(J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} \leq C_0(J(u_n) - \lambda_1)^{1/2},$$
$$n, m = 1, 2, ..., \quad C_0 = \text{const}.$$

Поменяв ролями n и m, получим

$$|(u_m, u_m - u_n)_V - \lambda_1(u_m, u_m - u_n)_H| \leq C_0(J(u_m) - \lambda_1)^{1/2},$$

поэтому

$$\|u_n - u_m\|_V^2 - \lambda_1\|u_n - u_m\|_H^2 = ((u_n, u_n - u_m)_V - \lambda_1(u_n, u_n - u_m)_H) -$$
$$-((u_m, u_n - u_m)_V - \lambda_1(u_m, u_n - u_m)_H) \leq$$
$$\leq C_0\left[(J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} + (J(u_m) - \lambda_1)^{1/2}\right]$$

или

$$\|u_n - u_m\|_V^2 \leq \lambda_1\|u_n - u_m\|_H^2 +$$
$$+C_0\left[(J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} + (J(u_m) - \lambda_1)^{1/2}\right], \qquad n, m = 1, 2, ...$$

Правая часть этого неравенства при $n, m \to \infty$ стремится к нулю, так как $\{u_n\}$ фундаментальна в H и минимизирует $J(u)$ на U_1, следовательно, $\{u_n\}$ фундаментальна в V и потому сильно в V сходится к некоторому элементу $\widetilde{e}_1 \in V$. В силу (2.17) из сходимости в V следует сходимость в H, что влечет совпадение элементов $e_1 = \widetilde{e}_1 \in V$. Таким образом, $u_n \to e_1$ в норме V и тогда

$$J(u_n) = \|u_n\|_V^2 \to \|e_1\|_V^2 = J(e_1) = \lambda_1,$$

$$e_1 \in U_1, \qquad J(e_1) = \lambda_1 = \|e_1\|_V^2,$$

т. е. e_1 — решение задачи (2.23). Покажем, что e_1 — собственный элемент оператора A, соответствующий собственному числу λ_1. С этой целью совершим в (2.24) предельный переход при $n \to \infty$. С учетом равенства $\|e_1\|_V^2 = \lambda_1$ получим неравенство

$$t^2(\|v\|_V^2 - \lambda_1\|v\|_H^2) + 2t(\langle e_1, v\rangle_V - \lambda_1\langle e_1, v\rangle_H) \geq 0$$

$$\forall t \in \mathrm{R}, \qquad \forall v \in V,$$

выполнение которого при всех $t \in \mathrm{R}$ возможно только тогда, когда коэффициент при t равен нулю:

$$\lambda_1\langle e_1, v\rangle_H = \langle e_1, v\rangle_V = \langle Ae_1, v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{2.27}$$

Это означает, что λ_1 — собственное число оператора A, а e_1 — соответствующий ему собственный элемент.

Для доказательства существования следующего собственного числа $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq \mu > 0$ и соответствующего собственного элемента e_2 в V возьмем подпространство

$$V^1 = \{v \in V : \langle e_1, v\rangle_V = 0\}$$

и в V^1 рассмотрим вспомогательную задачу минимизации, аналогичную задаче (2.23):

$$J(u) = \langle Au, u\rangle = \|u\|_V^2 \to \inf, \quad u \in U_2 = \{u \in V^1 : \|u\|_H = 1\}. \tag{2.28}$$

Полезно заметить, что $V^1 = V \bigcap H^1$, где $H^1 = \{v \in H : \langle e_1, v\rangle_H = 0\}$. В самом деле, если $v \in V$, то, как видно из (2.27), равенство $\langle e_1, v\rangle_V = 0$ имеет место только тогда, когда $\langle e_1, v\rangle_H = 0$. Так как $U_2 \subset U_1$, то $\lambda_2 = \inf_{u \in U_2} J(u) \geq \geq \lambda_1 \geq \mu > 0$. Рассуждая так же, как при исследовании задачи (2.23) с заменой V на V^1, λ_1 на λ_2, устанавливаем, что существует элемент $e_2 \in U_2$, $J(e_2) = \lambda_2$, λ_2 — собственное число оператора A, e_2 — соответствующий собственный элемент, причем

$$\langle e_1, e_2\rangle_V = 0, \quad \langle e_1, e_2\rangle_H = 0, \quad \|e_2\|_H = 1, \quad \|e_2\|_V^2 = \lambda_2.$$

Далее, сделаем индуктивное предположение: пусть уже построены собственные элементы $e_1, ..., e_k$, соответствующие собственным числам

$$\lambda_k \geq \lambda_{k-1} \geq ... \geq \lambda_1 \geq \mu > 0,$$

такие, что

$$e_i \in V, \quad \langle e_i, e_j\rangle_H = 0, \quad \langle e_i, e_j\rangle_V = 0, \quad i \neq j, \quad \|e_i\|_H = 1,$$

$$\|e_i\|_V^2 = \lambda_i, \qquad i, j = 1, ..., k.$$

Тогда вводим в V подпространство

$$V^k = \{v \in V : \langle e_1, v\rangle_V = 0, ..., \langle e_k, v\rangle_V = 0\}$$

и рассматриваем задачу минимизации

$$J(u) = \langle Au, u\rangle = \|u\|_V^2 \to \inf,$$

$$u \in U_{k+1} = \{u \in V^k : \|v\|_H = 1\}. \tag{2.29}$$

Аналогично (2.23), (2.28) доказываем существование элемента

$$e_{k+1} \in U_{k+1}, \quad J(u_{k+1}) = \lambda_{k+1} = \inf_{u \in U_{k+1}} J(u) \geq \lambda_k,$$

где λ_{k+1} — собственное число оператора A, e_{k+1} — соответствующий собственный элемент, причем

$$\langle e_i, e_{k+1}\rangle_V = 0, \qquad \langle e_i, e_{k+1}\rangle_H = 0 \qquad \forall i = 1, ..., k,$$

$$\|e_{k+1}\|_H = 1, \qquad \|e_{k+1}\|_V^2 = \lambda_{k+1}.$$

6 Зак. 397

В бесконечномерном пространстве V этот процесс построения собственных элементов может быть продолжен неограниченно, и в результате мы получим последовательность собственных чисел оператора A

$$0 < \mu \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k \le \ldots,$$

и последовательность соответствующих им собственных элементов $e_1, \ldots, e_k, \ldots$, причем

$$e_k \in V, \qquad \|e_k\|_H = 1, \qquad \|e_k\|_V^2 = \lambda_k,$$

$$\langle e_k, e_j\rangle_H = 0, \quad \langle e_k, e_j\rangle_V = 0, \quad k \ne j, \quad k, j = 1, 2, \ldots,$$

т. е. $\{e_k\}$ — ОНС в H, $\{\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\}$ — ОНС в V. Убедимся в том, что $\{\sqrt{\lambda_k} e_k\}$ — ОНС в V^*. В самом деле, так как

$$\langle f, g\rangle_{V^*} = \langle A^{-1}f, A^{-1}g\rangle_V, \qquad A^{-1}e_k = \frac{1}{\lambda_k}e_k,$$

при $i \ne k$

$$\langle e_i, e_k\rangle_{V^*} = \langle A^{-1}e_i, A^{-1}e_k\rangle_V = \frac{1}{\lambda_i\lambda_k}\langle e_i, e_k\rangle_V = 0,$$

а при $i = k$ отсюда же имеем

$$\|e_k\|_{V^*}^2 = \frac{1}{\lambda_k^2}\|e_k\|_V^2 = \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2} = \frac{1}{\lambda_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Покажем, что на самом деле система $\{e_k\}$ образует ортонормированный базис (ОНБ) в H, система $\{\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\}$ — ОНБ в V, а система $\{\sqrt{\lambda_k} e_k\}$ — ОНБ в V^*. Для этого сначала покажем, что $\lambda_k \to +\infty$. Если бы неубывающая последовательность $\{\lambda_k\}$ имела конечный предел λ, то из равенств $\|e_k\|_V^2 = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, следовало бы, что $\|e_k\|_V^2 \to \lambda < \infty$, т. е. последовательность $\{e_k\}$ была бы ограничена в V. По условию вложение $V \subset H$ компактно, поэтому из $\{e_k\}$ можно было бы выделить подпоследовательность $\{e_{k_m}\}$, сильно сходящуюся в H. Однако $\{e_k\}$ — ОНС в H и $\{e_{k_m}\}$ не может быть фундаментальной в H. Полученное противоречие

означает, что на самом деле $\lambda_k \to +\infty$. Далее докажем, что система $\{e_k\}$ полна в V, т. е. если для некоторого $v \in V$ выполняется равенство $\langle e_k, v\rangle_V = 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, то $v = 0$. Будем рассуждать от противного: пусть существует элемент $e \in V$, $e \ne 0$, такой, что $\langle e_k, e\rangle_V = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$e \in V^\infty = \{v \in V : \langle e_k, v\rangle_V = 0, \ k = 1, 2, \ldots\},$$

где V^∞ — подпространство в V. По аналогии с (2.23), (2.28), (2.29) рассмотрим задачу минимизации

$$J(u) = \|u\|_V^2 \to \inf, \qquad u \in U_\infty = \{u \in V^\infty : \|u\|_H = 1\}.$$

Рассуждая так же, как и выше, показываем, что существует собственный элемент $e_\infty \in U_\infty$ оператора A, отвечающий собственному числу

$$\lambda_\infty = J(u_\infty) = \|u_\infty\|_V^2 = \inf_{u \in U_\infty} J(u).$$

Так как $U_\infty \subset U_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, то $\lambda_k \le \lambda_\infty < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$, однако это противоречит уже установленному соотношению

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty.$$

Полнота системы $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ в пространстве V доказана. Это значит [136], что линейная оболочка элементов $\{e_k\}$ плотна в V, и в силу плотности вложений $V \subset H \simeq H^* \subset V^*$ эта линейная оболочка будет плотна также и в пространствах H и V^*. Отсюда следует, что ОНС $\{\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\}$ полна в V, ОНС $\{e_k\}$ полна в H, ОНС $\{\sqrt{\lambda_k} e_k\}$ полна в V^* и, следовательно, $\{\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\}$ — ОНБ в V, $\{e_k\}$ — ОНБ в H, $\{\sqrt{\lambda_k} e_k\}$ — ОНБ в V^*, а любой элемент из пространств V, H, V^* разлагается в сильно сходящийся ряд Фурье по соответствующей системе. Так, если $u \in H$, то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k, \qquad u_k = \langle u, e_k\rangle_H,$$

а равенство $\|u\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2$ представляет собой обычное равенство Парсеваля–Стеклова [39; 136; 142]. Если $u \in V$, то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \left(\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right),$$

$$v_k = \langle u, \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} \rangle_V = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \langle Ae_k, u \rangle = \sqrt{\lambda_k} \langle u, e_k \rangle_H = \sqrt{\lambda_k} u_k,$$

а равенство Парсеваля–Стеклова в пространстве V записывается в виде

$$\|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2.$$

Наконец, если $u \in V^*$, то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} w_k (\sqrt{\lambda_k} e_k), \qquad w_k = \langle u, \sqrt{\lambda_k} e_k \rangle_{V^*} =$$

$$= \langle u, A^{-1}(\sqrt{\lambda_k} e_k) \rangle = \langle u, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \langle u, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} u_k,$$

а равенство Парсеваля–Стеклова принимает вид

$$\|u\|_{V^*}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k^2.$$

Справедливость соотношений (2.20)–(2.22) установлена. Теорема 2.2 доказана.

Заметим, что в некоторых случаях собственные числа λ_k и собственные элементы e_k оператора A удается выписать в явном виде. В задаче (2.1) гл. II они равны

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell} \right)^2, \qquad e_k = e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{\pi k x}{\ell}, \qquad 0 \le x \le \ell;$$

в примере 2 гл. II имеют вид

$$\lambda_k = 1 + \left(\frac{\pi k}{\ell} \right)^2, \qquad e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos \frac{\pi k x}{\ell}, \qquad 0 \le x \le \ell.$$

В примере 1 гл. II собственные числа и функции равны

$$\lambda_k = w_k^2, \quad e_k(x) = C_k(\sin w_k x + w_k \cos w_k x), \quad 0 \le x \le \ell,$$

где w_k — положительные упорядоченные по возрастанию решения уравнения

$$\operatorname{tg}(w\ell) = \frac{w}{-1 + w^2},$$

$C_k > 0$ — нормирующие множители, обеспечивающие равенства $\|e_k\|_H = 1$.

§ 3. Интеграл Бохнера

1. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle f, g \rangle_H$ и нормой $\|f\|_H = \sqrt{\langle f, f \rangle_H}$. Будем рассматривать функции $f : [a, b] \to \to H$ переменной t, определенные почти всюду (в смысле меры Лебега) на конечном отрезке $[a, b]$ и принимающие свои значения $f(t)$ из H (H-значные функции).

Определение 1. Функция $f(t) : [a, b] \to H$ называется простой, если отрезок $[a, b]$ можно представить в виде конечного объединения $\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = [a, b]$ попарно непересекающихся измеримых по Лебегу (короче, L-измеримых) множеств Ω_i, на каждом из которых функция $f(t)$ постоянна: $f(t) = f_i \in H$ для почти всех (п. в.) $t \in \Omega_i$, $i = \overline{1, N}$. Простая функция называется ступенчатой, если $\Omega_i = (a_{i-1}, a_i)$, $i = \overline{1, N}$; $a_0 = a$, $a_N = b$.

Определение 2. Функция $f(t) : [a, b] \to H$ называется измеримой по Бохнеру на $[a, b]$ (короче, B-измеримой), если существует последовательность простых функций $f_k(t)$, таких, что

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k(t) - f(t)\|_H = 0 \qquad \text{для п. в.} \quad t \in [a, b].$$

Определение 3. Функция $f(t) : [a,b] \to H$ называется слабо измеримой по Бохнеру на $[a,b]$ (короче, слабо B-измеримой), если для любого элемента $h \in H$ числовая функция $\langle f(t), h\rangle_H$ измерима по Лебегу (L-измерима) на $[a,b]$.

Справедлива следующая замечательная

Теорема 3.1. (Петтис). *Функция $f(t):[a,b]\to H$ B-измерима тогда и только тогда, когда она слабо B-измерима.*

Доказательство этой теоремы см., например, в [29].

Следствие 1. Функция $f(t) : [a,b] \to H$ B-измерима тогда и только тогда, когда для любого $h \in H$ числовая функция $\|f(t)-h\|_H$ L-измерима на $[a,b]$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(t)$ B-измерима на $[a,b]$. Согласно теореме 3.1 функция $\langle f(t), h\rangle_H$ L-измерима на $[a,b]$ при всех $h \in H$. Пусть $\{e_k\}$ — полная ортонормированная система в H. Тогда для п. в. $t \in [a,b]$ $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle f(t), e_k\rangle_H e_k$ и выполняется равенство Парсеваля–Стеклова:

$$\|f(t)\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f(t), e_k\rangle_H^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\langle f(t), e_k\rangle_H^2.$$

Таким образом, функция $\|f(t)\|^2$ является пределом последовательности L-измеримых функций и потому сама является L-измеримой. Тогда для каждого фиксированного $h \in H$ будет L-измеримой функция $\|f(t)-h\|_H^2 = \|f(t)\|_H^2 - 2\langle f(t), h\rangle_H + \|h\|_H^2$ как сумма L-измеримых функций.

Достаточность. Пусть $\|f(t)-h\|_H^2$ L-измерима при $h \in H$. Тогда функция $2\langle f(t), h\rangle_H = \|f(t)-h\|_H^2 - \|f(t)\|_H^2 - \|h\|_H^2$ будет L-измеримой как сумма L-измеримых функций, и, следовательно, по теореме 3.1 функция $f(t)$ B-измерима.

Перечислим некоторые свойства B-измеримых функций.

М 1. Если $f(t), g(t) : [a,b] \to H$ B-измеримы на $[a,b]$, то $\alpha f(t) + \beta g(t)$ B-измерима на $[a,b]$ при любых $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$.

М 2. Если $f(t):[a,b]\to H$ B-измерима и $\alpha(t):[a,b]\to \mathrm{R}$ L-измерима, то функция $\alpha(t)f(t)$ B-измерима на $[a,b]$.

М 3. Если $f_k(t)$ — последовательность B-измеримых функций на $[a,b]$ и $f_k(t) \to f(t)$ слабо в H п. в. на $[a,b]$, то $f(t)$ B-измерима.

Доказательства свойств М 1–М 3 вполне элементарны и опираются на аналогичные свойства L-измеримых числовых функций [39; 136; 142] и теорему 3.1. Для примера докажем свойство М 2. Согласно теореме 3.1 из B-измеримости $f(t)$ следует L-измеримость $\langle f(t), h\rangle_H$ при любых $h \in H$. Тогда числовая функция $\langle \alpha(t)f(t), h\rangle_H = \alpha(t)\langle f(t), h\rangle_H$ при $h \in H$ будет L-измеримой как произведение двух L-измеримых функций. Отсюда и из теоремы 3.1 получаем B-измеримость функции $\alpha(t)f(t)$.

М 4. Если $f(t), g(t) : [a,b] \to H$ B-измеримы, то числовая функция $\langle f(t), g(t)\rangle_H$ L-измерима. В частности, если $f(t)$ B-измерима, то функции $\|f(t)\|_H^2$ и $\|f(t)\|_H$ L-измеримы.

Доказательство. Пусть $\{e_k\}$ — полная ортонормированная система в H. Тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f(t), e_k\rangle_H e_k, \qquad g(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle g(t), e_k\rangle_H e_k$$

и функция

$$\langle f(t), g(t)\rangle_H =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\langle f(t), e_k\rangle_H\langle g(t), e_k\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\langle f(t), e_k\rangle_H\langle g(t), e_k\rangle_H$$

будет L-измеримой как предел п. в. конечных сумм L-измеримых на $[a,b]$ функций.

М 5. Если функция $f(t) : [a,b] \to H$ слабо непрерывна на $[a,b]$, то $f(t)$ B-измерима на $[a,b]$.

Действительно, по определению слабой непрерывности числовая функция $\langle f(t), h\rangle_H$ непрерывна на $[a,b]$ и, следовательно, L-измерима на $[a,b]$ при любом $h \in H$. Отсюда и из теоремы 3.1 следует B-измеримость $f(t)$ на отрезке $[a,b]$.

2. Перейдем к описанию конструкции и свойств интеграла Бохнера, являющегося обобщением интеграла Лебега [39; 136; 142] на случай H-значных функций.

Определение 4. Интегралом Бохнера от простой функции $f(t):[a,b]\to H$ называют сумму $\sum\limits_{i=1}^{N}\mu(\Omega_i)f_i$, где $\mu(\Omega_i)$ — мера Лебега множества Ω_i, и обозначают $(B)\int\limits_a^b f(t)dt$ (см. определение 1). Функция $f(t):[a,b]\to H$ называется интегрируемой по Бохнеру (B-интегрируемой) на $[a,b]$, если существует последовательность простых функций $f_k(t)$, $k=1,2,\ldots$, таких, что

1) $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k(t)-f(t)\|_H=0$ п. в на $[a,b]$ (т. е. $f(t)$ B-измерима на $[a,b]$);

2) числовые функции $\|f_k(t)-f(t)\|_H$ интегрируемы по Лебегу (L-интегрируемы) на $[a,b]$ при всех $k=1,2,\ldots$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}(L)\int\limits_a^b\|f_k(t)-f(t)\|_H dt=0$, где символ $(L)\int\limits_a^b$ означает операцию интегрирования по Лебегу.

Интегралом Бохнера (короче, B-интегралом) от $f(t)$ на $[a,b]$ при этом называют элемент пространства H, равный пределу $\lim\limits_{k\to\infty}(B)\int\limits_a^b f_k(t)dt$, и обозначают его $(B)\int\limits_a^b f(t)dt$.

Убедимся в корректности этого определения и покажем, что при сделанных предположениях 1)–3) относительно последовательности $f_k(t)$ сильный предел $\lim\limits_{k\to\infty}(B)\int\limits_a^b f_k(t)dt$ существует и не зависит от выбора последовательности $f_k(t)$ со свойствами 1)–3). Рассмотрим последовательность $F_k=(B)\int\limits_a^b f_k(t)dt$ и покажем, что она фундаментальна в H. Зафиксируем два номера k и m. Им соответствуют разбиения $\{\Omega_i^k,\ i=\overline{1,N_k}\}$ и $\{\Omega_i^m,\ i=\overline{1,N_m}\}$ отрезка $[a,b]$ на области постоянства функций $f_k(t)$ и $f_m(t)$. Тогда на множествах $\Omega_{ij}=\Omega_i^k\bigcap\Omega_j^m$, $i=\overline{1,N_k}$, $j=\overline{1,N_m}$, обе функции $f_k(t)$ и $f_m(t)$ принимают некоторые постоянные значения f_{ij}^k и f_{ij}^m соответственно и поэтому

$$\|F_k-F_m\|_H=\Big\|\sum_{i,j}f_{ij}^k\mu(\Omega_{ij})-\sum_{i,j}f_{ij}^m\mu(\Omega_{ij})\Big\|_H\le$$

$$\le\sum_{i,j}\|f_{ij}^k-f_{ij}^m\|\mu(\Omega_{ij})=(L)\int\limits_a^b\|f_k(t)-f_m(t)\|_H dt\le$$

$$\le(L)\int\limits_a^b\|f_k(t)-f(t)\|_H dt+(L)\int\limits_a^b\|f_m(t)-f(t)\|_H dt\to 0$$

при $k,m\to\infty$ в силу свойства 3). Фундаментальность последовательности F_k установлена. В силу полноты H существует сильный предел $\lim\limits_{k\to\infty}F_k=F$. Остается показать, что этот предел F не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $f_k(t)$ со свойствами 1)–3). Пусть $g_k(t)$ — какая-либо другая последовательность простых функций с этими свойствами:

$$\lim_{k\to\infty}\|g_k(t)-f(t)\|_H=0\quad\text{п. в. на }[a,b],$$

$$\|g_k(t)-f(t)\|_H\ L\text{—интегрируемы на }[a,b]\quad\forall k=1,2,\ldots,$$

$$\lim_{k\to\infty}(L)\int\limits_a^b\|g_k(t)-f(t)\|_H=0.$$

Пусть $G_k=(B)\int\limits_a^b g_k(t)dt\to G$ в H. Повторяя рассуждения, с помощью которых мы установили фундаментальность F_k, доказываем, что $\|F_k-G_k\|_H\to 0$. Тогда

$$\|F-G\|_H\le\|F-F_k\|_H+\|F_k-G_k\|_H+\|G_k-G\|_H\to 0$$

при $k\to\infty$, т. е. $F=G$. Корректность определения 4 установлена.

По определению

$$(B)\int\limits_a^b f(t)dt=-(B)\int\limits_b^a f(t)dt.$$

Замечание 1. Из теории интеграла Лебега известно [89; 142], что для всякой L-интегрируемой функции $\varphi(t): [a,b] \to \mathrm{R}$ существует последовательность ступенчатых функций $\varphi_k(t): [a,b] \to \mathrm{R}$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что $\varphi_k(t) \to \varphi(t)$ п. в. на $[a,b]$ и $(L)\int\limits_a^b |\varphi_k(t) - \varphi(t)|dt \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и из определения 4 при $H = \mathrm{R}$ следует, что функция $\varphi(t)$ B-интегрируема, причем $(B)\int\limits_a^b \varphi(t)dt = (L)\int\limits_a^b \varphi(t)dt$. Таким образом, понятие интеграла Бохнера является естественным обобщением интеграла Лебега на случай H-значных функций.

Следующая теорема содержит удобный критерий B-интегрируемости [15].

Теорема 3.2. (Бохнер). *Функция $f(t): [a,b] \to H$ B-интегрируема на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда она B-измерима на $[a,b]$ и ее норма $\|f(t)\|_H$ L-интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $f(t)$ B-интегрируема. Тогда $f(t)$ B-измерима, а функция $\|f(t)\|_H$ L-измерима (следствие к теореме 3.1 при $h = 0$). Кроме того, $\|f(t)\|_H \le \|f(t) - f_k(t)\|_H + \|f_k(t)\|_H$, где $f_k(t)$ — функция, взятая из определения 4, причем функция $\|f(t) - f_k(t)\|_H$ L-интегрируема по условию 2) этого определения, а $\|f_k(t)\|_H$ L-интегрируема, так как $f_k(t)$ — простая функция. Таким образом, измеримая функция $\|f(t)\|_H$ мажорируется L-интегрируемой функцией, следовательно она сама L-интегрируема.

Достаточность. Пусть $f(t)$ B-измерима и $\|f(t)\|_H$ L-интегрируема на $[a,b]$. Тогда существует последовательность $f_k(t)$ простых функций, таких, что $\|f_k(t) - f(t)\|_H \to 0$ для п. в. $t \in [a,b]$. Положим

$$g_k = g_k(t) = \begin{cases} f_k(t), & \text{если } \|f_k(t)\| \le 2\|f(t)\|_H, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $g_k(t)$ — тоже простая функция и п. в. на $[a,b]$ $\|g_k(t) - f(t)\|_H \to 0$.

Далее, из B-измеримости $g_k(t) - f(t)$ следует L-измеримость $\|g_k(t) - f(t)\|_H$ (следствие к теореме 3.1 при $h = 0$). Кроме того, $\|g_k(t) - f(t)\|_H \le 3\|f(t)\|_H$, $t \in [a,b]$. Отсюда с помощью теоремы Лебега о предельном переходе под знаком L-интеграла заключаем, что функции $\|g_k(t) - f(t)\|_H$ L-интегрируемы и $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_a^b \|g_k(t) - f(t)\|_H dt = 0$. Это значит, что построенная последовательность $g_k(t)$ удовлетворяет условиям 1)–3) определения 4 и, следовательно, функция $f(t)$ B-интегрируема. Теорема 3.2 доказана.

Определим интеграл Бохнера на любом L-измеримом подмножестве A отрезка $[a,b]$. Через $\chi_A(t)$ будем обозначать характеристическую функцию множества A:

$$\chi_A(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \in A; \qquad \chi_A(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \notin A.$$

Определение 5. Пусть функция $f(t): [a,b] \to H$ B-интегрируема на $[a,b]$, а множество $A \subset [a,b]$ L-измеримо. Тогда интегралом Бохнера (B-интегралом) от функции $f(t)$ по множеству A называется элемент $(B)\int\limits_a^b \chi_A(t)f(t)dt$ пространства H, который обозначается $(B)\int\limits_A f(t)dt$.

Корректность этого определения следует из цепочки импликаций: множество A L-измеримо $\Rightarrow$ функция $\chi_A(t)$ L-измерима $\Rightarrow$ функция $\chi_A(t)f(t)$ B-измерима на $[a,b]$ (свойство М 2) $\Rightarrow$ числовая функция $\|\chi_A(t)f(t)\|_H$ L-измерима (свойство М 4) и L-интегрируема на $[a,b]$ (имеет L-интегрируемую мажоранту $\|f(t)\|$, теорема 3.2) $\Rightarrow$ функция $\chi_A(t)f(t)$ B-интегрируема на $[a,b]$ (теорема 3.2).

Перечислим некоторые свойства интеграла Бохнера.

В 1. Если функции $f(t), g(t): [a,b] \to H$ B-интегрируемы на $[a,b]$, то функция $\alpha f(t) + \beta g(t)$ B-интегрируема на $[a,b]$ при любых $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, причем для любых L-измеримых множеств $A \subset [a,b]$

$$(B)\int\limits_A (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha(B)\int\limits_A f(t)dt + \beta(B)\int\limits_A g(t)dt$$

(линейность B-интеграла).

В 2. Если функция $f(t) : [a,b] \to H$ B-интегрируема на $[a,b]$, A и B — любые L-измеримые непересекающиеся множества из $[a,b]$, то

$$(B)\int\limits_{A\bigcup B} f(t)dt = (B)\int\limits_A f(t)dt + (B)\int\limits_B f(t)dt$$

(конечная аддитивность B-интеграла).

В 3. Если функция $f(t) : [a,b] \to H$ B-интегрируема на $[a,b]$, то функция $\|f(t)\|_H$ L-интегрируема на $[a,b]$ (теорема 3.2) и для любых L-измеримых множеств $A \subset [a,b]$

$$\left\|(B)\int\limits_A f(t)dt\right\|_H \leq (L)\int\limits_A \|f(t)\|_H dt. \tag{3.1}$$

В 4. Пусть H_1 и H_2 — два гильбертовых пространства, $T : H_1 \to H_2$ — линейный ограниченный оператор и функция $f(t) : [a,b] \to H_1$ B-интегрируема. Тогда функция $T\big(f(t)\big) : [a,b] \to H_2$ также B-интегрируема, причем

$$(B)\int\limits_a^b T\big(f(t)\big)dt = T\left((B)\int\limits_a^b f(t)dt\right). \tag{3.2}$$

В 5. Если функция $f(t) : [a,b] \to H$ B-интегрируема на $[a,b]$, то

$$\left\langle (B)\int\limits_a^b f(t)dt, h\right\rangle_H = (L)\int\limits_a^b \langle f(t), h\rangle_H dt \qquad \forall h \in H. \tag{3.3}$$

В 6. Если функция $f(t) : [a,b] \to H$ B-интегрируема на $[a,b]$. то существует сильный предел

$$\lim_{E\subset[a,b],\mu(E)\to 0}(B)\int\limits_E f(t)dt = 0$$

(абсолютная непрерывность B-интеграла).

В 7. Если функция $f(t) : [a,b] \to H$ B-интегрируема на $[a,b]$ и $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где $E_1, \ldots, E_k, \ldots$ — измеримые попарно непересекающиеся подмножества отрезка $[a,b]$, то

$$(B)\int\limits_E f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}(B)\int\limits_{E_k} f(t)dt,$$

причем ряд сходится сильно в H (счетная аддитивность B-интеграла).

В 8. Если функция $f(t) : [a,b] \to H$ непрерывна на $[a,b]$, т. е. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\|f(t+\Delta t) - f(t)\|_H = 0$ $\forall t \in [a,b]$, то $f(t)$ B-интегрируема на $[a,b]$.

В 9. Если числовая функция $\varphi(t) \in C[a,b]$, а H-значная функция $f(t)$ B-интегрируема на $[a,b]$, то H-значная функция $\varphi(t)f(t)$ B-интегрируема на $[a,b]$.

В 10. Если $\varphi(t) \in L^1(a,b)$, $h \in H$, то функция $\varphi(t)h$ B-интегрируема на $[a,b]$ и справедливо равенство

$$\left((L)\int\limits_a^b \varphi(t)dt\right) h = (B)\int\limits_a^b \varphi(t)h\, dt.$$

Свойство В 1 следует непосредственно из определения B-интеграла; при доказательстве свойства В 2 помимо определения используется также равенство $\chi_{A\bigcup B}(t) = \chi_A(t) + \chi_B(t)$.

Свойство В 3 в случае $A = [a,b]$ для простых функций очевидно, а для других B-интегрируемых функций получается предельным переходом. Если $A \subset [a,b]$, то свойство В 3 следует из определения B-интеграла по множеству A.

Доказательство свойства В 4. Согласно определению 4 для B-интегрируемой функции $f(t)$ существует последовательность простых функций $f_k(t)$ со свойствами 1)–3). Тогда функции $Tf_k(t) : [a,b] \to H_2$ также будут простыми, причем

$$\|Tf_k(t) - Tf(t)\|_{H_2} \leq \|T\|\|f_k(t) - f(t)\|_{H_1} \to 0 \quad \text{п. в. на } [a,b],$$

т. е. функция $Tf(t)$ B-измерима. Функции $\|Tf_k(t)-Tf(t)\|_{H_2}$ L-измеримы (свойство М 4) и L-интегрируемы, поскольку мажорируются L-интегрируемыми функциями $\|T\|\|f_k(t)-f(t)\|_{H_1}$. Кроме того,

$$(L)\int\limits_a^b \|Tf_k(t)-Tf(t)\|_{H_2}dt \le \|T\|(L)\int\limits_a^b \|f_k(t)-f(t)\|_{H_1}dt \to 0$$

при $k\to\infty$. Таким образом, простые функции $Tf_k(t)$ обладают всеми свойствами 1)–3) определения 4 и, следовательно, $Tf(t)$ B-интегрируема на $[a,b]$. Равенство (3.2) вытекает из линейности и непрерывности оператора T:

$$(B)\int\limits_a^b Tf(t)dt = \lim_{k\to\infty}(B)\int\limits_a^b Tf_k(t)dt = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N_k}\left(Tf_i^k\right)\mu\left(\Omega_i^k\right)\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} T\left(\sum_{i=1}^{N_k}(f_i^k\mu\left(\Omega_i^k\right)\right) = T\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{N_k} f_i^k\mu\left(\Omega_i^k\right)\right) =$$

$$= T\left(\lim_{k\to\infty}(B)\int\limits_a^b f_k(t)dt\right) = T\left((B)\int\limits_a^b f(t)dt\right).$$

Свойство В 5 является следствием свойства В 4; для его доказательства достаточно в (3.2) взять линейный оператор (функционал) $T: H\to \mathrm{R}$, определенный по правилу $Tf = \langle f,h\rangle_H$.

Свойство В 6 вытекает из неравенства (3.1) и абсолютной непрерывности интеграла Лебега для числовых функций $\|f(t)\|_H$. Свойство В 7 является следствием свойств В 2, В 6 и счетной аддитивности меры Лебега.

Доказательство свойства В 8. Из непрерывности $f(t)$ на $[a,b]$ следует ее слабая непрерывность на $[a,b]$. Тогда $f(t)$ B-измерима на $[a,b]$ (свойство М 5). Кроме того, числовая функция $\|f(t)\|_H$ непрерывна и, следовательно, L-интегрируема на $[a,b]$. Отсюда и из теоремы 3.2 следует, что $f(t)$ B-интегрируема на $[a,b]$.

Свойство В 9 является следствием свойства М 2 и теоремы 3.2.

Для доказательства свойства В 10 достаточно заметить, что функции $f_k(t)=\varphi_k(t)h$, $k=1,2,\ldots$, где $\varphi_k(t)$ взяты из замечания 1, образуют последовательность ступенчатых H-значных функций, обладающих свойствами 1)–3) из определения 4 интеграла Бохнера функции $f(t)=\varphi(t)h$, а затем перейти к пределу при $k\to\infty$ в равенстве $(B)\int\limits_a^b \varphi_k(t)hdt = \left((L)\int\limits_a^b\varphi_k(t)dt\right)h$, $k=1,2,\ldots$, справедливом для ступенчатых функций.

Приведем теорему о предельном переходе под знаком интеграла Бохнера.

Теорема 3.3. *Пусть функции $f_k(t):[a,b]\to H$ B-интегрируемы на $[a,b]$, $k=1,2,\ldots$, и $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k(t)-f(t)\|_H=0$ п. в. на $[a,b]$. Пусть существует неотрицательная L-интегрируемая на $[a,b]$ функция $F(t):[a,b]\to\mathrm{R}$, такая, что*

$$\|f_k(t)\|_H \le F(t) \qquad \text{п. в. на } [a,b], \qquad k=1,2,\ldots \tag{3.4}$$

Тогда функция $f(t)$ B-интегрируема на $[a,b]$ и

$$(B)\int\limits_a^b f(t)dt = \lim_{k\to\infty}(B)\int\limits_a^b f_k(t)dt, \tag{3.5}$$

причем предел здесь понимается в смысле сходимости по норме пространства H.

Доказательство. Так как функции $f_k(t)$ B-измеримы, предельная функция $f(t)$ также B-измерима (свойство М 3), а функция $\|f(t)\|_H$ L-измерима на $[a,b]$ (следствие к теореме 3.1 при $h=0$). В пределе при $k\to\infty$ из (3.4) получим, что $\|f(t)\|_H\le F(t)$ п. в. на $[a,b]$, следовательно, функция $\|f(t)\|_H$ L-интегрируема. Отсюда и из теоремы 3.2 следует B-интегрируемость функции $f(t)$ на $[a,b]$. Таким образом, функции $f_k(t)-f(t)$ B-интегрируемы (свойство В 1), а функции $\|f_k(t)-f(t)\|_H$ L-интегрируемы (теорема 3.2) и

$\|f_k(t)-f(t)\|_H \le 2F(t)$ п. в. на $[a,b]$. Применяя теорему о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, с учетом поточечной сходимости $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k(t)-f(t)\|=0$ п. в. на $[a,b]$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}(L)\int_a^b \|f_k(t)-f(t)\|dt=(L)\int_a^b 0\,dt=0.$$

Отсюда и из свойства B 3 получим, что

$$\|(B)\int_a^b f_k(t)dt-(B)\int_a^b f(t)dt\|_H=\|(B)\int_a^b (f_k(t)-f(t))dt\|\le$$

$$\le (L)\int_a^b \|f_k(t)-f(t)\|_H dt\to 0 \quad \text{при } k\to\infty,$$

что и доказывает равенство (3.5).

Замечание 2. Если в теореме 3.3 условие сильной сходимости $f_k(t)$ к $f(t)$ заменить условием слабой сходимости $f_k(t)$ к $f(t)$ п. в. на $[a,b]$, то утверждения теоремы 3.3 остаются в силе, однако предельное равенство (3.5) в этом случае следует понимать в слабом смысле.

3. Сформулируем теорему о дифференцировании интеграла Бохнера с переменным верхним пределом. Сначала дадим

Определение 6. Функция $f(t):[a,b]\to H$ называется дифференцируемой в точке $t\in[a,b]$, если существует элемент $f'(t)\in H$, такой, что

$$\lim_{\Delta t\to 0,\, t+\Delta t\in[a,b]}\left\|\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}-f'(t)\right\|_H=0.$$

Функция $f(t)$ называется дифференцируемой на $[a,b]$, если она дифференцируема в каждой точке $t\in[a,b]$, при этом функцию $f'(t):[a,b]\to H$ называют поточечной производной функции $f(t)$ на $[a,b]$. Функция $f(t)$ называется дифференцируемой п. в. на $[a,b]$, если $f'(t)$ существует для п. в. $t\in[a,b]$.

Теорема 3.4. *Пусть функция $f(t):[a,b]\to H$ B-интегрируема на $[a,b]$. Тогда функция $F(t)=(B)\int_a^t f(s)ds:[a,b]\to$ $\to H$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема п. в. на $[a,b]$, причем*

$$F'(t)=f(t) \qquad \text{п.в. на } [a,b]. \tag{3.6}$$

Если $f(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то равенство (3.6) справедливо при всех $t\in[a,b]$.

Доказательство. Заметим, что приращение

$$\Delta F(t)\overset{\text{def}}{=}F(t+\Delta t)-F(t)$$

функции $F(t)$ представимо в виде

$$\Delta F(t)=(B)\int_t^{t+\Delta t} f(s)ds$$

(свойство B 2). Отсюда и из абсолютной непрерывности B-интеграла следует непрерывность $F(t)$ на $[a,b]$. Далее, для произвольного $h\in H$ с учетом (3.3) имеем

$$\left\langle\frac{\Delta F}{\Delta t},h\right\rangle_H=\left\langle\frac{1}{\Delta t}(B)\int_t^{t+\Delta t} f(s)ds,\,h\right\rangle_H=\frac{1}{\Delta t}(L)\int_t^{t+\Delta t}\langle f(s),h\rangle_H ds.$$

В силу свойств интеграла Лебега [39; 136; 142]

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(L)\int_t^{t+\Delta t}\langle f(s),h\rangle_H ds=\langle f(t),h\rangle_H \quad \text{п. в. на } [a,b],$$

поэтому

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\frac{\Delta F}{\Delta t},h\right\rangle_H=\langle f(t),h\rangle_H \quad \text{для п. в.} \quad t\in[a,b] \quad \forall h\in H, \tag{3.7}$$

и, кроме того,

$$\overline{\lim_{\Delta t\to 0}}\left\|\frac{\Delta F(t)}{\Delta t}\right\|_H = \overline{\lim_{\Delta t\to 0}}\left\|\frac{1}{\Delta t}(B)\int\limits_t^{t+\Delta t} f(s)ds\right\|_H \leq$$

$$\leq \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(L)\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f(s)\|_H ds\right| = \|f(t)\|_H \quad \text{для п. в. } t\in[a,b].$$

Отсюда и из (3.7) следует, что для п. в. $t \in [a,b]$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{\Delta F(t)}{\Delta t} - f(t)\right\|_H^2 =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\left\|\frac{\Delta F(t)}{\Delta t}\right\|_H^2 + \|f(t)\|_H^2 - 2\left\langle\frac{\Delta F}{\Delta t}, f(t)\right\rangle_H\right) \leq 0.$$

Теорема 3.4 доказана.

Теорема 3.5. *Пусть функция $f(t) : [a,b] \to H$ непрерывна на $[a,b]$ и имеет на $[a,b]$ поточечную производную $f'(t)$, непрерывную на $[a,b]$. Тогда справедлива формула Ньютона–Лейбница*

$$(B)\int\limits_\alpha^\beta f'(t)dt = f(\beta) - f(\alpha) \qquad \forall\alpha,\beta\in[a,b]. \tag{3.8}$$

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $h \in \in H$ и положим $g(t) = \langle f(t), h\rangle_H$. Эта числовая функция непрерывна на $[a,b]$, имеет непрерывную на $[a,b]$ производную $g'(t) = \langle f'(t), h\rangle_H$, поэтому для нее справедлива формула Ньютона–Лейбница из классического анализа [27; 28]:

$$\int\limits_\alpha^\beta g'(t)dt = g(\beta) - g(\alpha),$$

или

$$\langle f(\beta), h\rangle_H - \langle f(\alpha), h\rangle_H = \int\limits_\alpha^\beta \langle f'(t), h\rangle_H dt \qquad \forall\alpha,\beta\in[a,b].$$

Отсюда с учетом свойств В 5, В 8 интеграла Бохнера имеем

$$\langle f(\beta) - f(\alpha), h\rangle_H = \left\langle (B)\int\limits_\alpha^\beta f'(t)dt, h\right\rangle_H$$

$$\forall\alpha,\beta\in[a,b], \qquad \forall h\in H.$$

В силу произвола $h \in H$ это равенство возможно тогда и только тогда, когда справедлива формула (3.8).

Исходя из определения 6, для H-значных функций $f(t)$, как и в классическом анализе, можно по индукции ввести понятия поточечной производной $f^{(m)}(t)$ порядка m и m-кратной дифференцируемости при всех $m = 1, 2, \ldots$

По аналогии с пространствами $C^k[a,b]$ вещественнозначных функций для H-значных функций можно ввести функциональные пространства $C^k([a,b]; H)$, $k = 0, 1, \ldots$ Пространство $C([a,b]; H) = C^0([a,b]; H)$ состоит из непрерывных на $[a,b]$ H-значных функций с естественными линейными операциями и нормой $\|f\|_{C([a,b];H)} = \max\limits_{a\leq t\leq b}\|f(t)\|_H$; пространства $C^k([a,b]; H)$ при $k \geq 1$ состоят из k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ H-значных функций с нормой

$$\|f\|_{C^k([a,b];H)} = \sum_{m=0}^k \max_{a\leq t\leq b}\|f^{(m)}(t)\|_H,$$

где $f^{(0)}(t) \overset{\text{def}}{=} f(t)$. Эти пространства являются банаховыми, доказательство их полноты проводится по аналогии с доказательством полноты классов $C^k[a,b]$, $k = 0, 1, \ldots$ (см., например, [15]). Обозначим через $C^\infty([a,b]; H)$ линейное пространство H-значных функций, имеющих поточечные непрерывные производные всех порядков. Примером таких функций являются многочлены $p_N(t) = \sum\limits_{j=0}^N a_j t^j$, $t \in [a,b]$, $a_j \in H$, множество которых всюду плотно в $C([a,b]; H)$ (теорема Вейерштрасса; доказательство см. в [15]).

В пространствах $C^k([a,b]; H)$, $1 \leq k \leq \infty$, верны обычные правила дифференцирования произведения и интегрирования по частям.

Например, если $f(t),\ g(t) \in C^1([a,b];H)$, а $\varphi(t) \in C^1[a,b]$, то

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)\varphi(t)\right) = f'(t)\varphi(t) + f(t)\varphi'(t) \qquad \forall t \in [a,b],$$

$$\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle_H = \langle f'(t), g(t)\rangle_H + \langle f(t), g'(t)\rangle_H \qquad \forall t \in [a,b]. \tag{3.9}$$

Отсюда с помощью классической формулы Ньютона–Лейбница и ее обобщения (3.8) для всех $\alpha, \beta \in [a,b]$ имеем

$$(B)\int\limits_{\alpha}^{\beta} f'(t)\varphi(t)dt = f(t)\varphi(t)\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} - (B)\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\varphi'(t)dt,$$

$$(L)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\langle f'(t), g(t)\rangle_H dt = \langle f(t), g(t)\rangle_H\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} - (L)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\langle f(t), g'(t)\rangle_H dt. \tag{3.10}$$

Для функций $f(t) \in C^\infty([a,b];H)$, $\varphi(t) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty[a,b]$ из (3.10) можно вывести равенства интегралов

$$(B)\int\limits_a^b f^{(m)}(t)\varphi(t)dt = (-1)^m (B)\int\limits_a^b f(t)\varphi^{(m)}(t)dt, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.11}$$

При $f(t) = g(t)$ из (3.9), (3.10) следует, что

$$\frac{d}{dt}\|f(t)\|_H^2 = 2\langle f'(t), f(t)\rangle_H \qquad \forall t \in [a,b],$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\langle f'(t), f(t)\rangle_H dt = \frac{1}{2}\|f(\beta)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|f(\alpha)\|_H^2 \qquad \forall \alpha, \beta \in [a,b]. \tag{3.12}$$

Таким образом, на основе интеграла Бохнера построено дифференциальное и интегральное исчисление, являющееся естественным обобщением аналогичных исчислений, известных из анализа и опирающихся на интегралы Римана и Лебега [27; 28; 39; 142].

4. На множестве интегрируемых по Бохнеру функций можно ввести функциональные пространства, обобщающие лебеговы пространства $L^p(a,b)$ на случай H-значных функций. Это банаховы пространства $L^p(a,b;H)$, $1 \le p < \infty$, состоящие из B-интегрируемых на $[a,b]$ функций, у которых $\|f(t)\|_H \in L^p(a,b)$, наделенные естественными линейными операциями и нормой

$$\|f\|_{L^p(a,b;H)} = \left(\int\limits_a^b \|f(t)\|_H^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = 2$ пространство $L^p(a,b;H)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle f(t), g(t)\rangle_{L^2(a,b;H)} = \int\limits_a^b \langle f(t), g(t)\rangle_H dt.$$

Доказательство полноты пространств $L^p(a,b;H)$ см., например, в [15]. Нетрудно видеть, что при $1 \le s \le p \le \infty$ имеют место непрерывные вложения $L^p(a,b;H) \subset L^s(a,b;H)$.

Теорема 3.6. *Пространство $C([a,b];H)$ плотно в $L^p(a,b;H)$ при любом p, $1 \le p < \infty$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

Лемма 3.1. *Множества простых функций и ступенчатых функций плотны в $L^p(a,b;H)$ при $1 \le p < \infty$.*

Доказательство. Если $p = 1$, то для любой функции $f = f(t) \in L^1(a,b;H)$ по определению 4 существует последовательность $f_k(t)$ простых функций, такая, что $\|f_k - f\|_{L^1(a,b;H)} \to 0$ при $k \to \infty$. Если $1 < p < \infty$, то определим функции

$$g_k = g_k(t) = \begin{cases} f_k(t), & \text{если } \|f_k(t)\|_H \le 2\|f(t)\|_H, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функции $g_k(t)$ являются простыми и $\|g_k(t) - f(t)\|_H \to 0$ п. в. на $[a,b]$. Кроме того, $\|g_k(t) - f(t)\|_H^p \le$

$\leq (3\|f(t)\|_H)^p$, $t \in [a,b]$. Отсюда и из теоремы 3.3 следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_a^b \|g_k(t) - f(t)\|_H^p dt = 0$. Плотность простых функций в $L^p(a,b;H)$ при всех $1 \leq p < \infty$ установлена.

Покажем, что простые функции можно с любой точностью аппроксимировать в $L^p(a,b;H)$ ступенчатыми. Для этого воспользуемся тем, что любое измеримое множество $\Omega \subset \subset [a,b]$ можно с точностью до множества сколь угодно малой меры аппроксимировать конечным числом попарно непересекающихся интервалов [142, с. 163], т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют попарно непересекающиеся интервалы $S_1, S_2, \ldots, S_m \in [a,b]$, такие, что

$$\mu\left(\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m S_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^m S_i \setminus \Omega\right)\right) < \varepsilon.$$

Фиксируем некоторый элемент $x \in H$ и определим простую функцию

$$h(t) = x, \text{ если } t \in \Omega, \qquad h(t) = 0, \text{ если } t \in [a,b] \setminus \Omega, \tag{3.13}$$

и ступенчатую функцию

$$h_\varepsilon(t) = x, \quad \text{если } t \in \bigcup_{i=1}^m S_i,$$

$$h_\varepsilon(t) = 0, \quad \text{если } t \in [a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^m S_i.$$

Ясно, что $\|h - h_\varepsilon\|_{L^p(a,b;H)} \leq \|x\|_H \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Остается заметить, что простые функции $g_k(t)$, будучи конечными суммами функций вида (3.13), допускают аппроксимацию в $L^p(a,b;H)$ с любой точностью ступенчатыми функциями. Отсюда следует утверждение леммы 3.1.

Доказательство теоремы 3.6. Возьмем произвольную функцию $f(t) \in L^p(a,b;H)$, $1 \leq p < \infty$. Согласно лемме 3.1 найдется последовательность ступенчатых функций $f_k(t)$, такая, что

$$\|f_k - f\|_{L^p(a,b;H)} \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty.$$

Пусть $S_{ik} = (a_{ik}, a_{i+1k})$, $i = \overline{0, N_k}$; $a_{0k} = a$, $a_{N_k+1\,k} = b$, — интервалы постоянства функции $f_k(t)$, на которых $f_k(t) = x_{ik}$. Возьмем достаточно малые $\delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и определим функции $g_k(t) = x_{ik}$ на укороченных интервалах $\tilde{S}_{ik}$, где $\tilde{S}_{0k} = (a, a_{1k} - \delta_k)$, $\tilde{S}_{ik} = (a_{ik} + \delta_k, a_{i+1k} - \delta_k)$ при $i = \overline{1, N_k}$ и $\tilde{S}_{N_k k} = (a_{N_k k} + \delta_k, b)$, а между этими интервалами используем обычную линейную интерполяцию:

$$g_k(t) = x_{i-1k} + (x_{ik} - x_{i-1k})\frac{(t - a_{ik} + \delta_k)}{2\delta_k}$$

$$\text{при} \quad a_{ik} - \delta_k \leq t \leq a_{ik} + \delta_k.$$

Функции $g_k(t)$ будут кусочно-линейными и непрерывными на $[a,b]$. Нетрудно подсчитать, что

$$\|g_k - f_k\|_{L^p(a,b;H)} = M_k \delta_k^{\frac{1}{p}}, \qquad M_k = \left(\sum_{i=1}^{N_k} \frac{\|x_{ik} - x_{i-1k}\|^p}{2^{p-1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Возьмем теперь $\delta_k \to 0$, $\delta_k = o\left(\frac{1}{M_k^p}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$ При $k \to \infty$ $\|g_k - f_k\|_{L^p(a,b;H)} \to 0$ и, следовательно, $\|g_k - f\|_{L^p(a,b;H)} \to 0$. Теорема 3.6 доказана.

Теорема 3.7. *Множество $C^\infty([a,b];H)$ всюду плотно в $L^p(a,b;H)$, $1 \leq p < \infty$.*

Доказательство. Возьмем любую функцию

$$f(t) \in L^p(a,b;H)$$

и построим ее средние функции

$$f_h(t) = (B)\int_a^b f(s)\omega_h(t-s)ds, \tag{3.14}$$

где $\omega_h(t) = \frac{1}{h}\omega\left(\frac{t}{h}\right)$, функция $\omega(t)$ взята из (1.2). Существование поточечных производных

$$f_h^{(m)}(t) = (B)\int_a^b f(s)\omega_h^{(m)}(t-s)ds$$

любых порядков доказывается с помощью теоремы 3.3 аналогично подобным утверждениям из § 1. Таким образом, $f_h(t) \in C^\infty([a,b]; H)$.

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1.1, устанавливаем, что $\|f_h - f\|_{L^p(a,b;H)}$ при $h \to 0$.

Теорема 3.8. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H, пусть $u = u(t) \in L^2(a,b;H)$. Тогда функция $u(t)$ представима в виде ряда Фурье*

$$u(t) = \sum_{k=1}^\infty u_k(t) e_k, \qquad u_k(t) = \langle u(t), e_k \rangle_H \in L^2(a,b),$$

который сходится п. в. на $[a,b]$ и в норме пространства $L^2(a,b;H)$.

Доказательство. Из B-измеримости функции $u(t)$ следует ее слабая B-измеримость, поэтому функции $u_k(t) = \langle u(t), e_k\rangle_H$ L-измеримы на $[a,b]$ и, кроме того, $|u_k(t)| \le \|u(t)\|_H$ п. в. на $[a,b]$. Отсюда и из включения $\|u(t)\|_H \in L^2(a,b)$, справедливого в силу теоремы 3.2, следует, что $u_k(t) \in L^2(a,b)$. Далее, из равенства Парсеваля–Стеклова $\|u(t)\|_H^2 = \sum\limits_{k=1}^\infty u_k^2(t)$ имеем поточечную сходимость

$$\|u(t) - \sum_{k=1}^N u_k(t) e_k\|_H^2 = \|u(t)\|_H^2 - \sum_{k=1}^N u_k^2(t) \to 0$$

и оценку

$$\|u(t) - \sum_{k=1}^N u_k(t) e_k\|_H^2 \le \|u(t)\|_H^2 \quad \text{для п. в. } t \in [a,b].$$

Отсюда и из теоремы 3.3 при $N \to \infty$ получим утверждение теоремы 3.8.

5. Для иллюстрации изложенной в пп. 1–4 теории рассмотрим пространство $L^2(0,T;H)$ при $H = L^2(0,\ell)$ и сравним его с родственным $L^2(Q)$, $Q = (0,T) \times (0,\ell)$.

Напомним, что выше (см. гл. II, §2, п. 2) каждая функция $f = f(t,x) \in L^2(Q)$ с помощью теоремы Фубини была истолкована как функция $F(t) \in L^2(0,T;H)$ переменной t со значениями $f(t,\cdot)$ из $H = L^2(0,\ell)$. С другой стороны, каждую

функцию $F = F(t)$ из $L(0,T;L^2(0,\ell))$ можем рассматривать как функцию двух переменных $f_F = f_F(t,x)$, имея в виду, что ее значения $f_F(t,\cdot) \overset{\text{def}}{=} F(t)$ при п. в. $t \in (0,T)$ принадлежат пространству $L^2(0,\ell)$, т. е. являются функциями переменной x, определенными п. в. на $(0,\ell)$. В силу замечания 1 и теоремы Фубини

$$(L)\int_0^T f(t,x)dt = (B)\int_0^T f(t,x)dt = (B)\int_0^T f_F(t,x)dt$$

$$\text{для п. в.} \quad x \in (0,\ell).$$

Возникают следующие естественные вопросы: будет ли такая функция $f_F(t,x)$ измеримой на Q? Принадлежит ли $f_F(t,x)$ пространству $L^2(Q)$? Можно ли сказать, что пространства $L^2(Q)$ и $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$ совпадают? Для ответа на поставленные вопросы прежде всего подчеркнем, что каждое из этих пространств состоит из элементов, которые на самом деле представляют собой классы эквивалентных функций, причем в $L^2(Q)$ две функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ эквивалентны, если $f(t,x) = g(t,x)$ п. в. на Q (в смысле двумерной меры), а в $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$ функции $F(t) = f_F(t,\cdot)$ и $G(t) = g_G(t,\cdot)$ эквивалентны, если значения $F(t) = G(t)$ при п. в. $t \in (0,T)$ как элементы пространства $L^2(0,\ell)$, т. е. при п. в. $t \in (0,T)$ выполняется равенство $f_F(t,x) = g_G(t,x)$ для п. в. $x \in (0,\ell)$ (в смысле одномерной меры). Верна

Теорема 3.9. *Справедливо равенство*

$$L^2(Q) = L^2(0,T;L^2(0,\ell)),$$

понимаемое в следующем смысле: между классами эквивалентных функций из $L^2(Q)$ и $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$ существует взаимно однозначное линейное изометричное соответствие.

Доказательство. Сначала покажем, что

$$L^2(Q) \subset L^2(0,T;L^2(0,\ell)).$$

Возьмем произвольную функцию $f(t,x) \in L^2(Q)$. Согласно теореме Фубини для п.в. $t \in (0,T)$ функция $f(t,x) \in L^2(0,\ell)$, т.е. п.в. на $(0,T)$ определена функция

$$F(t) = f(t,\cdot) : (0,T) \to H = L^2(0,\ell). \tag{3.15}$$

Покажем, что $F(t) \in L^2(0,T;L^2(0,\ell))$. Прежде всего убедимся в том, что $F(t)$ слабо B-измерима. Возьмем произвольную функцию $h = h(x) \in L^2(0,\ell)$. Тогда функция $f(t,x)h(x)$ измерима на Q и принадлежит $L^1(Q)$, а по теореме Фубини, примененной к произведению $f(t,x)h(x)$, функция $\langle F(t),h\rangle_H = \int\limits_0^\ell f(t,x)h(x)dx$ измерима на $(0,T)$ и принадлежит $L^1(0,T)$. Таким образом, функция $F(t)$ слабо B-измерима, следовательно, по теореме 3.1 она B-измерима. По теореме Фубини числовая функция $\|F(t)\|^2_{L^2(0,\ell)} = \int\limits_0^\ell |f(t,x)|^2dx : (0,T) \to \mathrm{R}$ L-интегрируема на $(0,T)$. Отсюда и из теоремы 3.2 следует, что

$$F = F(t) \in L^2(0,T;L^2(0,\ell)),$$

причем

$$\|F\|^2_{L^2(0,T;H)} = \int\limits_0^T \|F(t)\|^2_{L^2(0,\ell)}dt = \int\limits_0^T dt \int\limits_0^\ell |f(t,x)|^2dx =$$

$$= \iint\limits_Q |f(t,x)|^2dx\,dt = \|f\|^2_{L^2(Q)}. \tag{3.16}$$

Таким образом, равенство (3.15) определяет линейное отображение $F = If$, действующее из $L^2(Q)$ в $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$, которое согласно (3.16) изометрично: $\|If\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} = \|f\|_{L^2(Q)}$. Отсюда имеем, что $If = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$, и, следовательно, отображение I взаимно однозначно, т.е. если $f,g \in L^2(Q)$ и $f = g$, то $If = Ig$ и обратно. Это отображение сохраняет и скалярное произведение:

$$\langle If, Ig\rangle_{L^2(0,T;H)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|I(f-g)\|^2_{L^2(0,T;H)} - \|If\|^2_{L^2(0,T;H)} - \|Ig\|^2_{L^2(0,T;H)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|f-g\|^2_{L^2(Q)} - \|f\|^2_{L^2(Q)} - \|g\|^2_{L^2(Q)}\right) = \langle f,g\rangle_{L^2(Q)}$$

$$\forall\, f,\,g \in L^2(Q).$$

Теперь докажем, что $L^2(0,T;L^2(0,\ell)) \subset L^2(Q)$. Возьмем произвольную функцию $F = F(t) \in L^2(0,T;L^2(0,\ell))$. Покажем, что найдется функция $F_0 = F_0(t) \in L^2(0,T;L^2(0,\ell))$, эквивалентная $F(t)$, и функция $f_0 = f_0(t,x) \in L^2(Q)$, такие, что $F_0 = If_0$. Так как F B-измерима и $\|F(t)\|_{L^2(0,\ell)} \in L^2(0,T)$, существует последовательность $F_k(t)$ простых $L^2(0,\ell)$-значных функций, таких, что $\|F_k(t) - F(t)\|_{L^2(0,\ell)} \to 0$ для п.в. $t \in (0,T)$, $\|F_k - F\|_{L^1(0,T;H)} \to 0$ и, кроме того,

$$\|F_k - F\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} = \int\limits_0^T \|F_k(t) - F(t)\|^2_{L^2(0,\ell)}dt \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности F_k в пространстве $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$: $\|F_k - F_m\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} \to 0$ при $k,m \to \infty$. По определению 1 простой функции $F_k = F_k(t)$ существуют L-измеримые множества $\Omega_{ik} \in (0,T)$, $i = \overline{1,N_k}$, такие, что $(0,T) = \bigcup\limits_{i=1}^{N_k} \Omega_{ik}$, $\Omega_{ik} \cap \Omega_{jk} = \emptyset$ $\forall i \neq j$, и существуют функции $F_{ik} = F_{ik}(x) \in L^2(0,\ell)$, такие, что $F_k(t) = F_{ik}(x)$ при $t \in \Omega_{ik}$, $i = \overline{1,N_k}$. Рассмотрим функции двух переменных $f_k = f_k(t,x) \overset{\text{def}}{=} F_{ik}(x)$, $x \in (0,\ell)$, $t \in \Omega_{i,k}$, $i = \overline{1,N_k}$. Эти функции определены и измеримы на Q, так как они составлены из конечного числа функций $F_{ik}(x)$, измеримых по совокупности переменных (t,x) на измеримых множествах $(0,\ell) \times \Omega_{ik}$. Кроме того, согласно (3.15), (3.16)

$$F_k(t) = f_k(t,\cdot) = If_k$$

и

$$\|f_k - f_m\|_{L^2(Q)} = \|F_k - F_m\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} \to 0 \quad \text{при} \quad k,m \to \infty,$$

так что последовательность $f_k(t,x)$ фундаментальна в $L^2(Q)$. В силу полноты $L^2(Q)$ существует функция $f_0 = f_0(t,x) \in L^2(Q)$, такая, что $\|f_k - f_0\|_{L^2(Q)} \to 0$ при $k \to \infty$. Выше мы доказали, что у функции f_0 существует образ $F_0 = F_0(t) = If_0 = If_0(t,\cdot)$ из $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$.

Заметим, что

$$\|F - F_0\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} \le$$

$$\|F - F_k\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} + \|F_k - F_0\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} \to 0$$

$$\text{при} \quad k \to \infty,$$

так как $\|F - F_k\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} \to 0$ по выбору простых функций F_k, а

$$\|F_k - F_0\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} =$$

$$= \|If_k - If_0\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} = \|f_k - f_0\|_{L^2(Q)} \to 0$$

по определению f_0. Это значит, что $F_0(t) = F(t)$ п.в. на $(0,T)$, т.е. элементы F и F_0 находятся в одном классе эквивалентных функций $\{F\}$, причем в этом классе $\{F\}$ мы обнаружили функцию $F_0 = If_0$, которая порождается функцией $f_0 = f_0(t,x)$, измеримой по совокупности переменных (t,x) на Q. Обратное включение $L^2(0,T;L^2(0,\ell)) \subset L^2(Q)$ доказано, взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных функций в $L^2(Q)$ и $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$ установлено.

Замечание 3. Из доказанного, однако, нельзя сделать вывод о полном поэлементном совпадении соответствующих классов из $L^2(Q)$ и $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$. Можно лишь утверждать, что, если $f \in L^2(Q)$, то $If \in L^2(0,T;L^2(0,\ell))$. Дело в том, что в каждом классе $\{F\}$ эквивалентных функций из $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$ существует функция $F(t)$, порождающая функцию $f_F(t,x)$, которая неизмерима на Q и потому не может принадлежать $L^2(Q)$. Покажем это. Воспользуемся примером Серпинского [18, с. 181] двумерного множества $E \subset Q$, не являющегося измеримым по Лебегу, но имеющего измеримые сечения прямыми $t = t_0$ для всех без исключения $t \in (0,T)$. Все эти одномерные сечения имеют нулевую меру, более того, на каждой прямой $t = t_0$ находится не более двух точек из E.

Возьмем характеристическую функцию множества E:

$$\chi_E(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (t,x) \in E, \\ 0, & \text{если } (t,x) \in Q \setminus E. \end{cases}$$

Ясно, что функция $\chi_E(t,x)$ неизмерима на Q. Положим $\Phi(t) = \chi_E(t,\cdot)$. При каждом $t \in (0,T)$ значение $\Phi(t)$ является функцией от x, равной нулю всюду на $(0,\ell)$, кроме, быть может одной или двух точек, в которых она равна 1. Отсюда следует, что $\Phi(t)$ принадлежит классу функций из $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$, эквивалентных нулю, но прямого прообраза в $L^2(Q)$ не имеет.

Теперь возьмем произвольный класс эквивалентных функций $\{F\} \in L^2(0,T;L^2(0,\ell))$. По доказанному существуют $F_0 \in \{F\}$ и $f_0 = f_0(t,x) \in L^2(Q)$, такие, что $F_0 = If_0$. Тогда функция $f(t,x) = f_0(t,x) + \chi_E(t,x) \notin L^2(Q)$, хотя $F(t) = f(t,\cdot) \in \{F\}$. Это значит, что каждый класс $\{F\} \in L^2(0,T;L^2(0,\ell))$ «богаче», чем соответствующий из $L^2(Q)$.

Остается заметить, что выбор между пространством $L^2(Q)$ и более «богатым» родственным $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$ не играет существенной роли в прикладных вопросах, в то время как в теоретических исследованиях полезно иметь в виду оба подхода.

§4. Элементы теории распределений со значениями в гильбертовом пространстве

1. Через $D(a,b)$ будем обозначать линейное пространство $\overset{\bullet}{C}{}^\infty[a,b]$ финитных бесконечно дифференцируемых функций, наделенное следующим понятием сходимости.

Определение 1. Говорят, что последовательность функций $\varphi_k(t) \in D(a,b)$, $k = 1,2,\dots$, сходится в $D(a,b)$ к функции $\varphi(t) \in D(a,b)$, если существует отрезок $[c,d]$, $a < c < d < b$, такой, что носители $\operatorname{supp}\varphi_k = \{t \in [a,b] : \varphi_k(t) \ne 0\}$ функций φ_k принадлежат отрезку $[c,d]$ и

$$\|\varphi_k^{(m)} - \varphi^{(m)}\|_{C[a,b]} = \max_{c \le t \le d} |\varphi_k^{(m)}(t) - \varphi^{(m)}(t)| \to 0$$

при $k \to \infty$ для всех $m = 0, 1, \ldots,$ где $\varphi^{(m)} = \frac{d^m\varphi}{dt^m}$ — m-я производная функции $\varphi(t)$, $\varphi^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi$. Для обозначения сходимости в $D(a,b)$ используется запись $\varphi_k \stackrel{D}{\to} \varphi$.

Линейное пространство $D(a,b)$ с указанным понятием сходимости последовательностей называют основным пространством, а его элементы φ — основными (или пробными) функциями.

Пусть H — вещественное гильбертово сепарабельное пространство.

Определение 2. Обобщенной функцией (о. ф.) или распределением со значениями в H называется всякий линейный слабо непрерывный оператор f с областью определения $D(f) = D(a,b)$ и областью значений $R(f) \subset H$. Иначе говоря, оператор $f : D(a,b) \to H$ называется обобщенной функцией, если:

1) $f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha f(\varphi) + \beta f(\psi)$ $\forall \varphi, \psi \in D(a,b)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}$;

2) $f(\varphi_k) \to f(\varphi)$ слабо в H $\quad \forall \varphi_k \in D(a,b)$, $\varphi_k \stackrel{D}{\to} \varphi$.

Говорят, что последовательность о. ф. f_k сходится к о. ф. f, если для всех $\varphi \in D(a,b)$ $f_k(\varphi) \to f(\varphi)$ при $k \to \infty$ слабо в H (слабая поточечная сходимость линейных операторов). Линейное пространство всех о. ф. с таким понятием сходимости принято обозначать через $D'(a,b;H)$, а саму сходимость — через $f_k \stackrel{D'}{\to} f$.

Заметим, что в случае $H = \mathrm{R}$ мы приходим к классическому определению обобщенной функции, теория которых подробно изложена, например в [13]. Кратко изложим элементы теории о. ф. со значениями в гильбертовом пространстве, отсылая читателя за подробностями и обобщениями к монографиям [15; 29]. Прежде всего убедимся в том, что всякую функцию $f = f(t) \in L^1(a,b;H)$ можно интерпретировать как о. ф. и тем самым установить поэлементное вложение пространств

$$L^1(a,b;H) \subset D'(a,b;H). \tag{4.1}$$

В самом деле, возьмем произвольную функцию

$$f = f(t) \in L^1(a,b;H)$$

и определим оператор $F_f : D(a,b) \to H$ по правилу

$$F_f(\varphi) = (B)\int_a^b f(t)\varphi(t)dt \qquad \forall \varphi = \varphi(t) \in D(a,b). \tag{4.2}$$

Это определение корректно, так как функция $f(t)\varphi(t) : [a,b] \to H$ B-интегрируема на $[a,b]$ (§ 3, свойство В 9). Таким образом, оператор F_f определен всюду на $D(a,b)$. Очевидно, он линеен по $\varphi \in D(a,b)$. Проверим его непрерывность. Возьмем произвольную последовательность $\varphi_k \stackrel{D}{\to} \varphi$ и зафиксируем произвольный элемент $h \in H$. Тогда с учетом свойств В 3, В 5 § 3 имеем

$$\langle F_f(\varphi_k) - F_f(\varphi), h\rangle_H = \left\langle (B)\int_a^b f(t)(\varphi_k(t) - \varphi(t))dt, h \right\rangle_H =$$

$$= (L)\int_a^b \langle f(t)(\varphi_k(t) - \varphi(t)), h\rangle_H \, dt \le$$

$$\le (L)\int_a^b \|f(t)\|_H |\varphi_k(t) - \varphi(t)| \|h\|_H dt \le$$

$$\le (L)\left(\int_a^b \|f(t)\|_H \|h\|_H dt\right) \|\varphi_k(t) - \varphi(t)\|_{C[a,b]} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Это значит, что $F_f(\varphi_k) \to F_f(\varphi)$ слабо в H, следовательно, $F_f \in D'(a,b;H)$. Убедимся в том, что разные элементы $f, g \in L^1(a,b;H)$ порождают разные операторы $F_f, G_g \in D'(a,b;H)$. В самом деле, пусть для некоторых $f, g \in L^1(a,b;H)$ оказалось, что $F_f = G_g$, т. е.

$$(B)\int_a^b (f(t) - g(t))\varphi(t)dt = 0 \qquad \forall \varphi \in D(a,b).$$

Далее $\forall h \in H$ с помощью равенства (3.3) получим

$$0 = \left\langle (B)\int\limits_a^b \bigl(f(t) - g(t)\bigr)\varphi(t)dt, h \right\rangle_H =$$

$$= (L)\int\limits_a^b \left\langle \bigl(f(t) - g(t)\bigr)\varphi(t), h \right\rangle_H dt =$$

$$= (L)\int\limits_a^b \varphi(t)\, \langle f(t) - g(t), h\rangle_H\, dt = 0 \qquad \forall \varphi \in D(a,b).$$

Так как $D(a,b)$ плотно в $L^1(a,b)$, такое равенство возможно только при $\langle f(t) - g(t), h\rangle_H = 0$. В силу произвола в выборе $h \in H$ отсюда заключаем, что $f(t) - g(t) = 0$ п. в. на $[a,b]$, т. е. $f = g$ как элементы пространства $L^1(a,b;H)$. О. ф. из $D'(a,b;H)$, порожденную обычной функцией $f(t) \in \in L^1(a,b;H)$ по правилу (4.2), называют регулярной о. ф. Регулярные о. ф. принято отождествлять с порождающими их функциями $f(t) \in L^1(a,b;H)$. Вложение (4.1) подразумевает данное отождествление и является строгим, так как существуют о. ф., не являющиеся регулярными. Примером нерегулярной обобщенной функции в случае $H = \mathrm{R}$ является известная [13] δ-функция Дирака: $\delta(\varphi) \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi(0)$ $\forall \varphi \in D(-1,1)$. В самом деле, пусть δ-функция регулярна, т. е. существует функция $f(t) \in L^1(-1,1)$, такая, что $\int_{-1}^{1} f(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$ $\forall \varphi \in D(-1,1)$. В частности, это должно быть верно для $\varphi_a = \varphi_a(t) = \omega(t/a)$, где $\omega(t)$ взята из (1.2), $0 < a < 1$. Тогда $\delta(\varphi_a) = (\gamma e)^{-1} > 0$, $0 < a < 1$. Однако $\left|\int_{-1}^{1} f(t)\varphi_a(t)dt\right| = \left|\int_{-a}^{a} f(t)\varphi_a(t)dt\right| \le \frac{1}{\gamma}\int_{-a}^{a} |f(t)|dt \to 0$ при $a \to 0$. Противоречие.

Определение 3. Производной порядка m о. ф. $f \in \in D'(a,b;H)$ называется о. ф. $f^{(m)} \in D'(a,b;H)$, действующая по правилу

$$f^{(m)}(\varphi) \overset{\mathrm{def}}{=} (-1)^m f(\varphi^{(m)}) \qquad \forall \varphi \in D(a,b). \qquad (4.3)$$

Убедимся в том, что равенство (4.3) действительно определяет о. ф. В самом деле, если $\varphi \in D(a,b)$, то $\varphi^{(m)}$ также принадлежит $D(a,b)$, и правая часть (4.3) действительно имеет смысл. Следовательно, оператор $f^{(m)}$ определен на всем основном пространстве. Линейность этого оператора очевидна. Проверим его непрерывность. Если последовательность $\varphi_k \xrightarrow{D} \varphi$, то $\varphi_k^{(m)} \xrightarrow{D} \varphi^{(m)}$. С учетом непрерывности f и (4.3) $\forall h \in H$ при $k \to \infty$ имеем сходимость

$$\left\langle f^{(m)}(\varphi_k), h\right\rangle_H = \left\langle (-1)^m f(\varphi_k^{(m)}), h\right\rangle_H \to$$
$$\to \left\langle (-1)^m f(\varphi^{(m)}), h\right\rangle_H = \left\langle f^{(m)}(\varphi), h\right\rangle_H.$$

Это означает, что $f^{(m)}(\varphi_k) \to f^{(m)}(\varphi)$ слабо в H, следовательно, $f^{(m)} \in D'(a,b;H)$.

Таким образом, установлено, что любая о. ф. имеет производную любого порядка $m = 0, 1, \ldots$, также являющуюся о. ф. (здесь считается, что $f^{(0)} \overset{\mathrm{def}}{=} f$). Из (4.3) видно, что производная о. ф. обладает следующим замечательным свойством: если последовательность о. ф. $f_k \xrightarrow{D'} f$ (см. определение 2), то последовательность их производных $f_k^{(m)} \xrightarrow{D'} f^{(m)}$.

Если о. ф. f и ее производная f' являются регулярными, т. е. $f(\varphi) = (B)\int\limits_a^b f(t)\varphi(t)dt$, $f'(\varphi) = (B)\int\limits_a^b f'(t)\varphi(t)dt$, то в соответствии с определением 3 равны интегралы

$$(B)\int\limits_a^b f'(t)\varphi(t)dt = -(B)\int\limits_a^b f(t)\varphi'(t)dt \qquad \forall \varphi = \varphi(t) \in D(a,b). \qquad (4.4)$$

Из формулы (4.4) видно, что в случае $H = \mathrm{R}$ регулярная производная регулярной о. ф. совпадает с обобщенной производной по Соболеву. Если $f(t) \in C^k([a,b];H)$, то, как следует из формулы (3.11), производные $f^{(m)}$ всех порядков $m = 1, \ldots, k$ в смысле определения 3 являются регулярными о. ф. и совпадают с поточечными производными $f^{(m)}(t)$, $t \in [a,b]$. Если $f(t) \in C^\infty([a,b];H)$, то сказанное относится к производным всех порядков.

2. По аналогии с $H^1(a,b)$ для H-значных функций можно ввести гильбертово пространство $H^1(a,b;H)$, состоящее из регулярных о.ф. $f = f(t) \in L^2(a,b;H)$ с регулярными производными $f'(t) \in L^2(a,b;H)$, оснащенное скалярным произведением и нормой

$$\langle f,g\rangle_{H^1(a,b;H)} = \int_a^b \Big(\langle f(t),g(t)\rangle_H + \langle f'(t),g'(t)\rangle_H\Big)dt,$$

$$\|f\|_{H^1(a,b;H)} = \Big(\langle f,f\rangle_{H^1(a,b;H)}\Big)^{1/2}. \tag{4.5}$$

Приведем несколько теорем, обобщающих утверждения из § 1 на случай H-значных функций.

Теорема 4.1. *Пусть* $f(t) \in H^1(a,b;H)$ *и*

$$f_h(t) = (B)\int_a^b f(s)\omega_h(t-s)ds, \quad (f')_h(t) = (B)\int_a^b f'(s)\omega_h(t-s)ds \tag{4.6}$$

— средние функции для f *и* f' *с тем же ядром усреднения* ω_h, *что и в (3.14). Тогда* $\forall c,d : a < c < d < b$, $\exists h_0 > 0$, *такое, что для всех* h, $0 < h < h_0$, *справедливо равенство*

$$f_h'(t) = (f')_h(t) \qquad \forall t \in [c,d], \tag{4.7}$$

где $f_h'(t)$ *— поточечная производная функции* $f_h(t)$, *причем*

$$\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_{L^2(a,b;H)} = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_{H^1(c,d;H)} = 0.$$

Доказательство проводится аналогично теоремам 1.1, 1.2.

Теорема 4.2. *Пространства* $C^\infty\Big([a,b];H\Big)$, $C^k\Big([a,b];H\Big)$, $k = 1,2,\ldots$, *плотны в* $H^1(a,b;H)$.

Доказательство проводится по той же схеме, что в теореме 1.5.

Теорема 4.3. *Любая функция* $f = f(t) \in H^1(a,b;H)$ *эквивалентна функции* $F(t) \in C\Big([a,b];H\Big)$, *причем*

$$\|F\|_{C\left([a,b];H\right)} \le M\|f\|_{H^1(a,b;H)}, \qquad M = \sqrt{1 + \frac{1}{b-a}}; \tag{4.8}$$

$$(B)\int_\alpha^\beta f'(\xi)d\xi = F(\beta) - F(\alpha) \qquad \forall \alpha,\beta \in [a,b]. \tag{4.9}$$

Доказательство опирается на неравенство

$$\|f\|_{C([a,b];\,H)} \le M\|f\|_{H^1(a,b;\,H)},$$

которое справедливо для всех $f = f(t) \in C^\infty\Big([a,b];H\Big)$ и выводится из равенства (3.12) по той же схеме, что и аналогичное неравенство (1.19). Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1.7.

Теорема 4.3 определяет оператор вложения

$$I : H^1(a,b;H) \to C\left([a,b];H\right),$$

который каждому классу эквивалентных функций $\{f\}$ из $H^1(a,b;H)$ ставит в соответствие функцию $F = I\{f\} \in C([a,b];H)$. Оператор I линеен и в силу (4.8) ограничен.

Как и в $H^1(a,b)$, класс эквивалентных функций $\{f\}$ из $H^1(a,b;H)$ принято отождествлять с непрерывной функцией $F = I\{f\}$. Предполагая, что такое отождествление уже проведено, обычно считают, что пространство $H^1(a,b;H)$ состоит из функций $f(t) \in C\left([a,b];H\right)$, имеющих регулярную производную $f'(t) \in L^2(a,b;H)$, и без оговорок вместо (4.8), (4.9) пишут

$$\|f\|_{C([a,b];H)} \le M\|f\|_{H^1(a,b;H)}, \qquad (B)\int_\alpha^\beta f'(\xi)d\xi = f(\beta) - f(\alpha)$$

$$\forall \alpha,\beta \in [a,b].$$

Пространство $H^1(a,b;H)$ сепарабельно, если таковым является пространство H.

Для иллюстрации вышеизложенного подробнее остановимся на пространстве $H^1(0,T;H)$ при $H = L^2(0,\ell)$ и сравним его с родственным $H^{1,0}(Q)$, $Q = (0,T)\times(0,l)$ (см. § 1).

Теорема 4.4. *Справедливо равенство*

$$H^{1,0}(Q) = H^1(0,T;L^2(0,\ell)),$$

понимаемое в следующем смысле: между классами эквивалентных функций из $H^{1,0}(Q)$ и $H^1(0,T;L^2(0,\ell))$ существует взаимно однозначное, линейное, изометричное соответствие.

Доказательство. Сначала проверим включение

$$H^{1,0}(Q) \subset H^1(0,T;L^2(0,\ell)).$$

Пусть $f = f(t,x) \in H^{1,0}(Q)$, т. е. $f(t,x) \in L^2(Q)$ и существует о. п. $f_t(t,x) \in L^2(Q)$. Между классами эквивалентных функций из $L^2(Q)$ и $L^2(0,T;L^2(0,\ell))$ было установлено взаимно однозначное изометричное соответствие (теорема 3.9), согласно которому

$$F(t)=f(t,\cdot),\quad G(t)=f_t(t,\cdot),\quad F(t),\ G(t)\in L^2(0,T;L^2(0,\ell)). \tag{4.10}$$

Функции $F = F(t)$, $G = G(t)$ порождают о. ф., действия которых на пробные функции $\varphi = \varphi(t) \in D(0,T)$ согласно (4.2) описываются интегралами Бохнера

$$F(\varphi) = (B)\int_0^T F(t)\varphi(t)dt, \qquad G(\varphi) = (B)\int_0^T G(t)\varphi(t)dt$$

$$\forall\varphi \in D(0,T). \tag{4.11}$$

Покажем, что производная F' о. ф. F является регулярной о. ф. и совпадает с G, т. е. (см. (4.3), (4.4))

$$G(\varphi) = (B)\int_0^T G(t)\varphi(t)dt = -F(\varphi') = -(B)\int_0^T F(t)\varphi'(t)dt$$

$$\forall\varphi \in D(0,T).$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\langle G(\varphi),h\rangle_H = -\langle F(\varphi'),h\rangle_H \qquad \forall h\in H. \tag{4.12}$$

Так как пространство $\overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,\ell]$ плотно в $H = L^2(0,\ell)$, то (4.12) достаточно проверить для всех $h = h(x) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,\ell]$. С помощью теоремы Фубини, определения о. п. и с учетом (4.10), (4.11) имеем

$$\langle G(\varphi),h\rangle_H = \int_0^\ell G(\varphi)(x)h(x)dx = \int_0^\ell\left(\int_0^T f_t(t,x)\varphi(t)dt\right)h(x)dx =$$

$$= \iint_Q f_t(t,x)\varphi(t)h(x)dt\,dx = -\iint_Q f(t,x)\varphi'(t)h(x)dt\,dx =$$

$$= -\int_0^\ell\left(\int_0^T f(t,x)\varphi'(t)dt\right)h(x)dx = -\int_0^\ell F(\varphi')(x)h(x)dx =$$

$$= -\langle F(\varphi'),h\rangle_H$$

$\forall h \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,\ell]$. Отсюда следует (4.12) и равенство $F' = G$. Таким образом, функции $f(t,x) \in H^{1,0}(Q)$ соответствует $F(t) \in H^1(0,T;L^2(0,\ell))$ по правилу

$$F(t) = f(t,\cdot),\quad F'(t) = f_t(t,\cdot) \qquad \text{для п. в. } t\in[a,b]. \tag{4.13}$$

Это соответствие является линейным и изометричным, так как

$$\|F\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell))} = \|f\|_{L^2(Q)}, \qquad \|F'\|_{L^2(0,T;L^2(0,\ell)} = \|f_t\|_{L^2(Q)}.$$

Докажем обратное включение: $H^1(0,T;L^2(0,\ell)) \subset H^{1,0}(Q)$. Возьмем произвольный класс эквивалентных функций $\{F\}$ из $H^1(0,T;L^2(0,\ell))$. По теореме 3.9 найдется функция $F(t) \in \in \{F\} \in L^2(0,T;L^2(0,\ell))$ с производной $F'(t)\in L^2(0,T;L^2(0,\ell))$ и функции $f(t,x)$, $g(t,x) \in L^2(Q)$, такие, что $F(t) = f(t,\cdot)$,

$F'(t) = g(t,\cdot)$. Покажем, что функция $f(t,x)$ имеет о. п. $f_t(t,x)$ по Соболеву и $f_t(t,x) = g(t,x)$, т. е.

$$\iint_Q f(t,x)\varphi_t(t,x)dt\,dx = -\iint_Q g(t,x)\varphi(t,x)dt\,dx$$

$$\forall \varphi \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\overline{Q}). \tag{4.14}$$

Для этого нам понадобится

Лемма 4.1. *Пусть $\varphi(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$, $\{e_k(x)\}$ — ортонормированный базис в $L^2(0,\ell)$, $e_k(x) \in C^\infty[0,\ell]$ (например, тригонометрическая система). Тогда ряд Фурье*

$$\varphi(t,x) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(t)e_k(x), \qquad \varphi_k(t) = \int_0^\ell \varphi(t,x)e_k(x)dx, \tag{4.15}$$

сходится к φ в норме пространства $C^1([0,T];L^2(0,\ell))$.

Доказательство. Так как $\varphi(t,x)e_k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, то $\varphi_k(t) \in C^\infty[0,T]$ и согласно правилу дифференцирования интеграла по параметру [27; 28] $\varphi_k^{(m)}(t) = \int_0^\ell \frac{\partial\varphi^{(m)}(t,x)}{\partial t^m}e_k(x)dx$, $m = 1,2,\ldots$ Ряд (4.15) при каждом $t \in [0,T]$ сходится к $\varphi(t,\cdot)$ в норме $L^2(0,\ell)$, т. е. [39]

$$r_N(t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\ell \left|\varphi(t,x) - \sum_{k=1}^N \varphi_k(t)e_k(x)\right|^2 dx =$$

$$= \int_0^\ell \left|\sum_{k=N+1}^\infty \varphi_k(t)e_k(x)\right|^2 dx = \sum_{k=N+1}^\infty \varphi_k^2(t) \to 0 \qquad \forall t \in [0,T] \tag{4.16}$$

Покажем, что $r_N(t) \to 0$ равномерно на $[0,T]$. Воспользуемся признаком Дини из классического анализа [27; 28]. Прежде всего заметим, что функции $r_N(t) \geq 0$ непрерывны на $[0,T]$ и образуют монотонную по N последовательность:

$$r_N(t) = \sum_{k=N+1}^\infty \varphi_k^2(t) \geq \sum_{k=N+2}^\infty \varphi_k^2(t) = r_{N+1}(t).$$

Предельная функция $\lim\limits_{N\to\infty} r_N(t) \equiv 0$ также непрерывна. Отсюда по признаку Дини следует равномерность сходимости в (4.16). Это значит, что ряд (4.15) на самом деле сходится в норме $C([0,T];L^2(0,\ell))$. Аналогично доказывается, что ряд Фурье $\varphi_t(t,x) = \sum\limits_{k=1}^\infty \varphi_k'(t)\,e_k(x)$ для производной $\varphi_t(t,x)$ тоже сходится в норме $C([0,T];L^2(0,\ell))$. Заметим, что ряд (4.15) на самом деле сходится в норме $C^k([0,T];L^2(0,\ell))$ при всех $k = 1,2,\ldots$ Лемма 4.1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 4.4. Возьмем произвольную функцию $\varphi(t,x) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\overline{Q})$ и применим лемму 4.1. В данном случае $\varphi(t,x)e_k(x) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\overline{Q})$, поэтому $\varphi_k(t) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,T]$. Нетрудно убедиться в том, что для функций вида $\varphi_k(t)e_k(x)$, где $\varphi_k(t) \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty[0,T]$, $e_k(x) \in C^\infty[0,\ell]$, равенство (4.14) справедливо:

$$\iint_Q f(t,x)\varphi_k'(t)e_k(x)dt\,dx = \int_0^\ell \left(\int_0^T f(t,x)\varphi_k'(t)dt\right)e_k(x)dx =$$

$$= \int_0^\ell F(\varphi_k')(x)e_k(x)dx = \int_0^\ell \left(-F'(\varphi_k)(x)\right)e_k(x)dx =$$

$$= -\int_0^\ell \left(\int_0^T g(t,x)\varphi_k(t)dt\right)e_k(x)dx = -\iint_Q g(t,x)\varphi_k(t)e_k(x)dt\,dx.$$

Просуммируем эти равенства по k от 1 до N:

$$\iint_Q f(t,x)\left(\sum_{k=1}^N \varphi_k'(t)e_k(x)\right)dt\,dx =$$

$$= -\iint_Q g(t,x)\left(\sum_{k=1}^N \varphi_k(t)e_k(x)\right)dt\,dx.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, с учетом леммы 4.1 получим (4.14). Тем самым показано, что функция $f(t,x)$ имеет о. п. $f_t(t,x)$, причем $f_t(t,x) = g(t,x)$. Следовательно, $f(t,x) \in$

$\in H^{1,0}(0,T;L(0,\ell))$. Вложение $H^1(0,T;L(0,\ell)) \subset H^{1,0}(Q)$ установлено. Из изометричности соответствия (4.13) между классами эквивалентных функций из $H^{1,0}(Q)$, $H^1(0,T;L(0,\ell))$ следует его взаимная однозначность. Теорема 4.4 доказана.

Замечание 3 к теореме 3.9 сохраняет силу и здесь.

3. При исследовании задач Коши для операторных дифференциальных уравнений в гл. II, III нам пришлось иметь дело с о. ф. и их производными, принимающими свои значения из разных пространств цепочки

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^* \tag{4.17}$$

плотно и непрерывно вложенных гильбертовых пространств (см. § 2). Предполагая, что цепочка вложений (4.17) задана, приведем несколько теорем, которые играют важную роль при исследовании вопросов существования и единственности решения упомянутых задач Коши. Напомним, что непрерывность вложений (4.17) характеризуется неравенствами

$$\|f\|_H \le C\|f\|_V \qquad \forall f \in V;$$

$$\|f\|_{V^*} \le C\|f\|_H \qquad \forall f \in H, \qquad C = \mathrm{const} > 0, \tag{4.18}$$

и заметим, что из слабой сходимости в V следует слабая сходимость в пространствах H и V^*.

Теорема 4.5. *Имеют место непрерывные вложения*

$$D'(a,b;V) \subset D'(a,b;H) \subset D'(a,b;V^*). \tag{4.19}$$

Доказательство. Всякий линейный слабо непрерывный оператор $f : D(a,b) \to V$ согласно (4.17) будет линейным слабо непрерывным оператором, действующим из $D(a,b)$ в H, следовательно, $D'(a,b;V) \subset D'(a,b;H)$. Аналогично, если $f \in D'(a,b;H)$, то $f \in D'(a,b;V^*)$. Цепочка поэлементных вложений (4.19) установлена. Непрерывность этих вложений следует из импликаций

$$f_k \xrightarrow{D'(a,b;V)} f \quad \Rightarrow \quad f_k \xrightarrow{D'(a,b;H)} f \quad \Rightarrow \quad f_k \xrightarrow{D'(a,b;V^*)} f.$$

Теорема 4.6. *Имеют место вложения*

$$L^2(a,b;V) \subset L^2(a,b;H) \subset L^2(a,b;V^*), \tag{4.20}$$

причем эти вложения непрерывны:

$$\begin{aligned} &\|f\|_{L^2(a,b;H)} \le C\|f\|_{L^2(a,b;V)} \qquad \forall f \in L^2(a,b;V),\\ &\|f\|_{L^2(a,b;V^*)} \le C\|f\|_{L^2(a,b;H)} \qquad \forall f \in L^2(a,b;H) \end{aligned} \tag{4.21}$$

и значения постоянных C в (4.21) и (4.18) совпадают.

Доказательство. Пусть $f = f(t) \in L^2(a,b;V)$. В силу непрерывности вложения $V \subset H$ значения функции $f(t)$ принадлежат H, и, кроме того, из (4.18) следует оценка

$$\|f(t)\|_H \le C\|f(t)\|_V \quad \text{для п. в. } t \in [a,b]. \tag{4.22}$$

Простые функции $f_k(t)$, аппроксимирующие $f(t)$ в норме V, в силу (4.22) будут ее аппроксимировать и в норме H, поэтому из B-измеримости функции $f(t)$ со значениями из V вытекает ее B-измеримость со значениями из H. Так как числовая функция $\|f(t)\|_V \in L^1(a,b)$ (теорема 3.2), из (4.22) следует, что $\|f(t)\|_H \in L^1(a,b)$. В силу теоремы 3.2 тогда $f(t)$ является B-интегрируемой H-значной функцией. Из $\|f(t)\|_V \in L^2(a,b)$ и (4.22) получаем $\|f(t)\|_H \in L^2(a,b)$, так что $f \in L^2(a,b;H)$. Первое из неравенств (4.21) является следствием (4.22). Аналогично доказываются остальные утверждения теоремы 3.6. Можно показать, что вложения (4.20) плотны.

Пусть о. ф. $f \in D'(a,b;V)$ и $f' \in D'(a,b;V)$ — ее производная. Из вложений (4.19) нетрудно усмотреть, что тогда о. ф. f, как элемент пространства $D'(a,b;H)$ или $D'(a,b;V^*)$, имеет ту же производную $f' \in D'(a,b;V)$. Если о. ф. $f \in D'(a,b;V)$ является регулярной и принадлежит $L^2(a,b;V)$, то в силу вложений (4.19), (4.20) она является регулярной о. ф. и в пространствах $D'(a,b;H)$ и $D'(a,b;V^*)$, а ее производная $f' \in D'(a,b;V)$ может оказаться регулярной в одном из пространств цепочки (4.19), например, может случиться, что $f' \in L^2(a,b;V^*)$. Теперь, после сделанных пояснений, мы можем в $D'(a,b;V)$ ввести линейное подпространство $W(a,b;V,V^*)$, состоящее из регулярных о. ф. f, принадлежащих $L^2(a,b;V)$ и имеющих регулярную производную $f' \in L^2(a,b;V^*)$. Оно превращается в гильбертово пространство, если в нем ввести скалярное произведение и норму следующим образом:

$$\langle f,g\rangle_{W(a,b;V,V^*)} = \int_a^b \left(\langle f(t),g(t)\rangle_V + \langle f'(t),g'(t)\rangle_{V^*}\right) dt,$$

$$\|f\|_{W(a,b;V,V^*)} = \left(\int_a^b \left(\|f(t)\|_V^2 + \|f'(t)\|_{V^*}^2\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.23)$$

Аксиомы скалярного произведения и нормы, очевидно, выполнены. Покажем полноту пространства $W(a,b;V,V^*)$. Пусть последовательность $f_k \in W(a,b;V,V^*)$ и фундаментальна: $\|f_k - f_m\|_W \to 0$ при $k,m \to \infty$. Как видно из (4.23), тогда f_k фундаментальна в $L^2(a,b;V)$, а f'_k фундаментальна в $L^2(a,b;V^*)$. В силу полноты пространств $L^2(a,b;V)$ и $L^2(a,b;V^*)$ существуют функции $f = f(t) \in L^2(a,b;V)$ и $g = g(t) \in L^2(a,b;V^*)$, такие, что $\|f_k - f\|_{L^2(a,b;V)} \to 0$, $\|f'_k - g\|_{L^2(a,b;V^*)} \to 0$. Далее, из (4.4) при $f = f_k$ имеем

$$(B)\int_a^b f'_k(t)\varphi(t)dt = -(B)\int_a^b f_k(t)\varphi'(t)dt$$

$$\forall\varphi \in D(a,b), \qquad k = 1,2,\ldots$$

Отсюда при $k \to \infty$ получим, что

$$(B)\int_a^b g(t)\varphi(t)dt = (B)\int_a^b f(t)\varphi'(t)dt,$$

или $g(\varphi) = -f(\varphi')$, следовательно, $f' = g$. Таким образом, $f \in W(a,b;V,V^*)$, т. е. пространство $W(a,b;V,V^*)$ полное.

Теорема 4.7. *Пространство $C^\infty\big([a,b];V\big)$ плотно в $W(a,b;V,V^*)$.*

Доказательство проводится так же, как в аналогичной теореме 1.5. Сначала с помощью линейной замены переходим от интервала (a,b) к симметричному промежутку $\Pi = (-a,a)$ и вместо пространства $W(a,b;V,V^*)$ рассматриваем пространство $W(\Pi;V,V^*)$. Далее, задаем произвольное $\varepsilon > 0$ и фиксируем произвольную функцию $f = f(t) \in W(\Pi;V,V^*)$. Согласно теореме 3.6 пространство $C(\overline{\Pi};V)$ плотно в $L^2(\Pi;V)$, $C(\overline{\Pi};V^*)$ плотно в $L^2(\Pi;V^*)$, поэтому существуют функции $g_0 \in C(\overline{\Pi};V)$, $g_1 \in C(\overline{\Pi};V^*)$, такие, что $\|f - g_0\|_{L^2(\Pi;V)} < \varepsilon$, $\|f' - g_1\|_{L^2(\Pi;V^*)} < \varepsilon$. Берем число $\sigma > 1$, промежуток $\Pi_\sigma = (-a\sigma, a\sigma)$ и вводим функцию $F_\sigma = F_\sigma(t) = f(\frac{t}{\sigma}) \in W(\Pi_\sigma;V,V^*)$. Затем, используя функции g_0, g_1, так же, как в теореме 1.5, доказываем, что

$$\|F_\sigma - f\|_{W(\Pi;V,V^*)} < C_0\varepsilon \qquad \forall\sigma, \quad 1 < \sigma < 1+\gamma, \quad (4.24)$$

где $\gamma > 0$ — достаточно малое число, $C_0 = \mathrm{const} > 0$. Для функции $F_\sigma(t)$ и ее производной $F'_\sigma(t)$ вводим средние функции

$$(F_\sigma)_h(t) = (B)\int_{-a\sigma}^{a\sigma} F_\sigma(s)\omega_h(t-s)ds,$$

$$(F'_\sigma)_h(t) = (B)\int_{-a\sigma}^{a\sigma} F'_\sigma(s)\omega_h(t-s)ds,$$

которые обладают непрерывными поточечными производными любых порядков, так что

$$(F_\sigma)_h(t) \in C^\infty(\overline{\Pi}_\sigma;V), \qquad (F'_\sigma)_h(t) \in C^\infty(\overline{\Pi}_\sigma;V^*).$$

Далее, как в теореме 1.1, показываем, что при фиксированном σ

$$\lim_{h\to 0}\|(F_\sigma)_h(t) - F_\sigma\|_{L^2(\Pi_\sigma;V)} = 0,$$
$$\lim_{h\to 0}\|(F'_\sigma)_h(t) - F'_\sigma\|_{L^2(\Pi_\sigma;V^*)} = 0. \quad (4.25)$$

Из равенства (4.7) следует, что при всех достаточно малых $h > 0$

$$(F_\sigma)'_h(t) = (F'_\sigma)_h(t) \qquad \forall t \in \Pi. \quad (4.26)$$

Попутно отметим, что из (4.26) вытекает, что при каждом $t \in \Pi$ функция $(F'_\sigma)_h(t)$ принимает свои значения из V

(а не только из V^*, как можно было бы ожидать), так как левая часть равенства (4.26), представляющая собой значение поточечной производной функции $(F_\sigma)_h(t)$ со значениями из V, принадлежит V. Из (4.25), (4.26) следует, что $\|(F_\sigma)_h(t) - F_\sigma\|_{L^2(\Pi;V)} < \varepsilon$, $\|(F_\sigma)'_h - F'_\sigma\|_{L^2(\Pi;V^*)} < \varepsilon \quad \forall h$, $0 < h < h_0 < \gamma$, так что

$$\|(F_\sigma)_h - F_\sigma\|_{W(\Pi;V,V^*)} < 2\varepsilon \qquad \forall h, \quad 0 < h < h_0.$$

Отсюда и из (4.24) имеем $\|(F_\sigma)_h - f\|_{W(\Pi;V,V^*)} < C_1\varepsilon$, где $(F_\sigma)_h \in C^\infty(\overline{\Pi}; V)$. Возвращаясь от Π к исходному промежутку (a,b) и пользуясь произволом в выборе $\varepsilon > 0$, убеждаемся в справедливости теоремы 4.7.

Теорема 4.8. *Каждая функция $f = f(t) \in W(a,b;V,V^*)$ эквивалентна функции $F(t) \in C([a,b];H)$, причем имеет место оценка*

$$\|F\|_{C([a,b];\,H)} \le M\|f\|_{W(a,b;\,V,V^*)}, \tag{4.27}$$

где $M = \left(1 + \frac{C^2}{b-a}\right)^{1/2}$, а значение C взято из (4.18), и справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$(B)\int_\alpha^\beta f'(t)dt = F(\beta) - F(\alpha) \qquad \forall \alpha,\beta \in [a,b]. \tag{4.28}$$

Доказательство. Сначала установим, что для любой функции $g = g(t) \in C^\infty([a,b];V)$ справедливо неравенство

$$\|g\|_{C([a,b];\,H)} \le M\|g\|_{W(a,b;\,V,V^*)}, \tag{4.29}$$

аналогичное неравенству (1.19). Заметим, что из включений (4.17) и первого из неравенств (4.18) следует, что функция $g(t)$ со значениями из V является функцией со значениями из H, причем поточечная производная $g'(t)$ V-значной функции $g(t)$ (см. §3, определение 6) одновременно является поточечной производной H-значной функции $g(t)$. Отсюда следует, что $g(t) \in C^\infty([a,b];H)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\|g(t)\|_H^2 = 2\langle g'(t), g(t)\rangle_H \qquad \forall t \in [a,b]$$

(см. первую из формул (3.12)). Здесь $g(t) \in V \subset H$, множитель $g'(t) \in H$ в силу вложений (4.17) можно истолковать как элемент пространства V^*, а скалярное произведение $\langle g'(t), g(t)\rangle_H$ — как значение $\langle g'(t), g(t)\rangle$ линейного функционала $g'(t) \in V^*$ на элементе $g(t) \in V$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\|g(t)\|_H^2 = 2\langle g'(t), g(t)\rangle \qquad \forall t \in [a,b].$$

Отсюда с помощью второй формулы (3.12) и первого неравенства (4.18) получаем

$$\|g(t)\|_H^2 = \|g(\tau)\|_H^2 + \int_\tau^t 2\langle g'(s), g(s)\rangle ds \le$$

$$\le \|g(\tau)\|_H^2 + 2\left|\int_\tau^t \|g'(s)\|_{V^*}\|g(s)\|_V ds\right| \le$$

$$\le \|g(\tau)\|_H^2 + \left|\int_\tau^t \|g'(s)\|_{V^*}^2 ds\right| + \left|\int_\tau^t \|g(s)\|_V^2 ds\right| \le$$

$$\le \|g(\tau)\|_V^2 C^2 + \int_a^b \left(\|g'(s)\|_{V^*}^2 + \|g(s)\|_V^2\right) ds \qquad \forall t,\tau \in [a,b].$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по τ от a до b:

$$(b-a)\|g(t)\|_H^2 \le$$

$$\le C^2 \int_a^b \|g(\tau)\|_V^2 d\tau + (b-a)\int_a^b \left(\|g'(s)\|_{V^*}^2 + \|g(s)\|_V^2\right) ds =$$

$$= (b-a)M^2\|g\|_{W(a,b;V,V^*)}^2 \qquad \forall t \in [a,b],$$

что равносильно (4.29). Возьмем произвольную функцию $f = f(t) \in W(a,b;V,V^*)$. В силу теоремы 4.7 существует последовательность $f_k \in C^\infty([a,b];V)$, такая, что

$$\|f_k - f\|_{W(a,b;V,V^*)} \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty.$$

К разности $f_k - f_m \in C^\infty\Big([a,b];V\Big)$ применим неравенство (4.29):

$$\|f_k - f_m\|_{C([a,b];\,H)} \le M\|f_k - f_m\|_{W(a,b;\,V,V^*)}, \qquad k,m = 1,2,\ldots$$

Так как $\|f_k - f_m\|_{W(a,b;\,V,V^*)} \to 0$ при $k,m \to \infty$, из этого неравенства следует фундаментальность $f_k(t)$ в $C([a,b];H)$. В силу полноты пространства $C([a,b];H)$ тогда существует функция $F{=}F(t){\in}C([a,b];H)$, такая, что $\|f_k{-}F\|_{C([a,b];H)} \to 0$. Тогда тем более $\|F - f_k\|_{L^2(a,b;H)} \to 0$. С другой стороны, $\|f_k - f\|_{L^2(a,b;H)} \le C\|f_k - f\|_{L^2(a,b;V)} \le C\|f_k - f\|_{W(a,b;V,V^*)} \to 0$ при $k \to \infty$. Это возможно только в том случае, если $F(t) = f(t)$ п. в. на $t \in [a,b]$. Однако $f \in W(a,b;V,V^*)$, следовательно $F(t) \in W(a,b;V,V^*) \bigcap C([a,b];H)$. Взяв в неравенстве (4.29) $g = f_k$ и перейдя к пределу при $k \to \infty$, получим неравенство (4.27). Для каждой из функций $f_k(t) \in C^\infty([a,b];V)$ справедлива формула Ньютона–Лейбница (теорема 3.5)

$$(B)\int\limits_\alpha^\beta f_k'(s)ds = f_k(\beta) - f_k(\alpha) \qquad \forall\alpha,\beta \in [a,b]. \qquad (4.30)$$

Равенство в (4.30) понимается как равенство элементов пространства V. В силу (4.17) это равенство можно истолковать как равенство элементов из V^* и при этом условии совершить в (4.30) предельный переход при $k \to \infty$. Учитывая, что $\|f_k' - f'\|_{L^2(a,b;V^*)} \to 0$, и замечая, что из сходимости $\|f_k(t) - F(t)\|_H \to 0\ \forall t \in [a,b]$ и второго неравенства (4.18) следует, что $\|f_k(t) - F(t)\|_{V^*} \to 0\ \forall t \in [a,b]$, в пределе при $k \to \infty$ из (4.30) получим формулу (4.28) как равенство в V^*. Нам известно, что $F(t) \in H\ \forall t \in [a,b]$, поэтому $F(\beta) - F(\alpha) \in H$. Тогда и левая часть (4.28) будет принадлежать H. Таким образом, равенство (4.28) можем истолковать как равенство элементов из H. Теорема 4.8 доказана.

Теорема 4.8 определяет оператор вложения

$$I : W(a,b;V,V^*) \to C([a,b];H),$$

который каждому классу эквивалентных функций $\{f\}$ из $W(a,b;V,V^*)$ ставит в соответствие непрерывную функцию $F = I\{f\} \in C([a,b];H)$. Оператор I линеен и в силу (4.27) ограничен.

Класс эквивалентных функций $\{f\}$ из $W(a,b;V,V^*)$ принято отождествлять с функцией $F = I\{f\}$. Предполагая, что такое отождествление уже проведено, обычно считают, что пространство $W(a,b;V,V^*)$ состоит из функций

$$f(t) \in C\Big([a,b];H\Big) \bigcap L^2(a,b;V),$$

имеющих регулярную производную $f'(t) \in L^2(a,b;V^*)$, и без оговорок вместо (4.27) и (4.28) пишут оценку

$$\|f\|_{C([a,b];\,H)} \le M\|f\|_{W(a,b;\,V,V^*)}$$

и равенство

$$(B)\int\limits_\alpha^\beta f'(\xi)d\xi = f(\beta) - f(\alpha) \qquad \forall\alpha,\beta \in [a,b].$$

Докажем, что для любых функций $f(t), g(t) \in W(a,b;V,V^*)$ справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b \big(\langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle\big)\,dt = \langle f(t), g(t)\rangle_H\Big|_{t=a}^{t=b}. \qquad (4.31)$$

В самом деле, из доказанных теорем 4.7, 4.8 следует, что для $f,g \in W(a,b;V,V^*)$ существуют последовательности $f_k,\ g_k \in C^\infty([a,b];V) \subset C^\infty([a,b];H)$, такие, что

$$\|f_k - f\|_{W(a,b;\,V,V^*)} \to 0, \qquad \|g_k - g\|_{W(a,b;\,V,V^*)} \to 0,$$
$$\|f_k - f\|_{C([a,b];\,H)} \to 0, \qquad \|g_k - g\|_{C([a,b];\,H)} \to 0.$$

Для гладких функций f_k, g_k справедлива формула (3.10):

$$\int\limits_a^b \big(\langle f_k'(t), g_k(t)\rangle_H + \langle f_k(t), g_k'(t)\rangle_H\big)\,dt = \langle f_k(t), g_k(t)\rangle_H\Big|_{t=a}^{t=b},$$
$$k = 1,2,\ldots$$

Отсюда при $k \to \infty$ получим равенство (4.31). В частности, при $f = g$ из (4.31) имеем

$$2\int_a^b \langle f'(t), f(t)\rangle dt = \|f(t)\|_H^2\Big|_{t=a}^{t=b} \qquad \forall f \in W(a,b;V,V^*). \tag{4.32}$$

Формулами (4.31), (4.32) мы неоднократно пользовались при исследовании задач Коши для операторных дифференциальных уравнений в гл. II, III.

4. Кратко остановимся еще на одном подходе к определению обобщенного решения (о. р.) краевых задач математической физики в пространствах Соболева, который получил широкое распространение в отечественной учебной литературе [69; 89; 90]. Для примера рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности (задача (2.1)):

$$y_t - y_{xx} = u(t,x), \qquad (t,x) \in Q = (0,T)\times(0,\ell),$$

$$y|_{x=0} = 0, \qquad y|_{x=\ell} = 0, \qquad 0 < t < T,$$

$$y|_{t=0} = y_0(x), \qquad 0 < x < \ell, \tag{4.33}$$

предполагая, что $u(t,x) \in L^2(Q)$, $y_0(x) \in L^2(0,\ell)$. В гл. II в качестве о. р. задачи (4.33) мы взяли решение задачи Коши для операторного дифференциального уравнения

$$y'(t) + Ay(t) = \mathcal{U}(t), \qquad 0 < t < T, \qquad y(0) = y_0, \tag{4.34}$$

где оператор $A \in L(V \to V^*)$, $V = H_0^1(0,\ell)$, действует по правилу: $\langle Af, \varphi\rangle = \int_0^\ell f'(x)g'(x)dx$ $\forall f,g \in H_0^1(0,\ell)$, $y_0 = y_0(x) \in H = L^2(0,\ell)$, $\mathcal{U}(t) = u(t,\cdot) \in L^2(0,T;L^2(0,\ell))$. Напомним, что решением задачи (4.34) (см. гл. II, §2) называлась регулярная о. ф. $y(t) \in L^2(0,T;V)$ с регулярной производной $y'(t) \in L^2(0,T;V^*)$, (иначе $y(t) \in W(0,T;V,V^*)$), такая, что:

1) дифференциальное уравнение (4.34) удовлетворяется п. в. на $[0,T]$ как равенство элементов из V^*;

2) начальное условие $y(0) = y_0$ понимается как равенство элементов из H, что имеет смысл, так как $y(t) \in C([0,T];H)$ (теорема 4.8).

Такое о. р. задачи (4.33) далее будем именовать о. р.«1». Приведем другое определение обобщенного решения задачи (4.33) из функциональных пространств Соболева, явно не использующее понятие о. ф. Введем гильбертово пространство $\overset{0}{H}{}^{0,1}(Q)$ функций $y = y(t,x) \in L^2(Q)$, имеющих о. п. по Соболеву $y_x(t,x) \in L^2(Q)$ и следы $y(t,0) = 0$, $y(t,\ell) = 0$ (существование таких следов установлено выше в теореме 1.12); скалярное произведение в этом пространстве равно

$$\langle f, g\rangle_{\overset{0}{H}{}^{0,1}(Q)} = \iint_Q f_x(t,x)g_x(t,x)dt\,dx.$$

Определение 4. О. р. задачи (4.33) называется функция $y = y(t,x) \in \overset{0}{H}{}^{0,1}(Q)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$-\iint_Q y(t,x)\varphi_t(t,x)dt\,dx + \iint_Q y_x(t,x)\varphi_x(t,x)dt\,dx =$$

$$= \int_0^\ell y_0(x)\varphi(0,x)dx + \iint_Q u(t,x)\varphi(t,x)dt\,dx \tag{4.35}$$

для всех пробных функций $\varphi(t,x) \in H^1(Q)$ со следами $\varphi(T,x) = 0$, $\varphi(t,0) = 0$, $\varphi(t,\ell) = 0$.

Существуют другие определения о. р. задачи (4.33) в других функциональных пространствах Соболева [26; 69; 89]. Считая, что $u(t,x) \in L^2(Q)$, $y_0(x) \in L^2(0,\ell)$, в [69] доказана однозначная разрешимость задачи (4.33) в смысле определения 4 и установлено, что это о. р. принадлежит $C([0,T];L^2(0,\ell))$ (решение из энергетического класса [69]). Такое решение далее будем обозначать о. р.«2».

Оказывается, о. р.«1» и о. р.«2» равносильны. Наметим схему доказательства этого факта. Сначала устанавливаем между классами эквивалентных функций $\{f(t,x)\} \in \overset{0}{H}{}^{0,1}(Q)$ и $\{F(t)\} \in L^2(0,T;H_0^1(0,\ell))$ соответствие по правилу $F(t) =$

$= f(t,\cdot)$ и показываем, что это соответствие линейное, взаимно однозначное, изометричное — это делается так же, как в аналогичных теоремах 4.4 и 3.9 (основная трудность здесь — доказать, что значение о. п. $f_x(t,\cdot)$ является о. п. от значения $f(t,\cdot)$ для п. в. $t \in [0,T]$).

Пусть $Y(t)$ — о. р.«1». Заменяя при необходимости $Y(t)$ эквивалентной ей функцией, можем считать, что $Y = Y(t) = y(t,\cdot)$ для некоторой функции $y(t,x) \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}(Q)$. Покажем, что $y(t,x)$ — о. р.«2». Так же, как в теоремах 1.5, 1.9, показываем, что множество функций $\varphi(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих условиям $\varphi(T,x) = 0$, $\varphi(t,0) = 0$, $\varphi(t,\ell) = 0$, всюду плотно в подпространстве функций $\varphi(t,x) \in H^1(Q)$ со следами $\varphi(T,x) = 0$, $\varphi(t,0) = 0$, $\varphi(t,\ell) = 0$. Поэтому интегральное тождество (4.35) достаточно проверить для гладких функций $\varphi(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$ с перечисленными свойствами. Такие функции можно разложить в ряд Фурье

$$\varphi(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) e_k(x), \qquad \varphi_k(t) = \int_0^\ell \varphi(t,x) e_k(x)\,dx,$$

где $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\frac{\pi k x}{\ell}$ — ортонормированный базис в $H = L^2(0,\ell)$, составленный из собственных функций оператора A (теорема 2.2).

Этот ряд сходится в норме $C([0,T]; H_0^1(0,\ell))$, что доказывается так же, как в лемме 4.1. Заметим, что $\varphi_k(t) \in C^\infty[0,T]$, $\varphi_k(T) = 0$. Произведение $\varphi_k(t)e_k(x) \in H_0^1(0,\ell) = V$ $\forall t \in [0,T]$. Применим равенство $Y'(t) + AY(t) = \mathcal{U}(t)$ элементов из V^* почленно к элементам $\varphi_k(t)\, e_k(x) \in V$ и проинтегрируем полученное равенство по t от 0 до T:

$$\int_0^T \langle Y'(t), \varphi_k(t)e_k(x)\rangle dt + \int_0^T \langle AY(t), \varphi_k(t)e_k(x)\rangle dt = \\ = \int_0^T \langle \mathcal{U}(t), \varphi_k(t)e_k(x)\rangle dt. \tag{4.36}$$

При помощи формулы интегрирования по частям (4.31) получаем

$$\int_0^T \langle Y'(t), \varphi_k(t)e_k(x)\rangle dt =$$

$$= \langle Y(t), \varphi_k(t)e_k(x)\rangle_H \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \langle Y(t), \varphi_k'(t)e_k(x)\rangle dt.$$

Поскольку

$$\int_0^T \langle Y(t), \varphi_k'(t)e_k(x)\rangle dt = \int_0^T \langle Y(t)\varphi_k'(t), e_k(x)\rangle_{L^2(0,\ell)} dt =$$

$$= \left\langle (B)\int_0^T Y(t)\varphi_k'(t)dt, e_k(x)\right\rangle_{L^2(0,\ell)} = \left\langle (B)\int_0^T y(t,\cdot)\varphi_k'(t)dt, e_k\right\rangle_{L^2(0,\ell)} =$$

$$= (L)\int_0^T \langle y(t,\cdot)\varphi_k'(t), e_k\rangle_{L^2(0,\ell)} dt = \iint_Q y(t,x)\varphi_k'(t)e_k(x)\,dt\,dx,$$

$$\langle Y(t), \varphi_k(t)e_k(x)\rangle_{L^2(0,\ell)} \Big|_{t=0}^{t=T} = -\langle Y(0), \varphi_k(0)e_k(x)\rangle_{L^2(0,\ell)} =$$

$$= -\langle y_0, \varphi_k(0)e_k(x)\rangle_{L^2(0,\ell)} = -\int_0^\ell y_0(x)\varphi_k(0)e_k(x)\,dx,$$

то

$$\int_0^T \langle Y'(t), \varphi_k(t)e_k(x)\rangle dt =$$

$$= -\int_0^\ell y_0(x)\varphi_k(0)e_k(x)\,dx - \iint_Q y(t,x)\varphi_k'(t)e_k(x)\,dt\,dx.$$

Далее, по определению оператора A имеем

$$\int_0^T \langle AY(t), \varphi_k(t)e_k(x)\rangle dt = \iint_Q y_x(t,x)\varphi_k(t)e_k'(x)dt\,dx.$$

Наконец, так как $\mathcal{U}(t) \in L^2(0,T;L^2(0,\ell))$, то

$$\int_0^T \langle \mathcal{U}(t), \varphi_k(t)e_k(x)\rangle dt = \int_0^T \langle \mathcal{U}(t), \varphi_k(t)e_k(x)\rangle_{L^2(0,\ell)} dt =$$

$$= \iint_Q u(t,x)\varphi_k(t)e_k(x)dt\,dx.$$

Равенство (4.36) теперь можем переписать в виде

$$-\iint_Q y(t,x)\varphi_k'(t)e_k(x)dt\,dx + \iint_Q y_x(t,x)\varphi_k(t)e_k'(x)dt\,dx =$$

$$= \int_0^\ell y_0(x)\varphi_k(0)e_k(x)dx + \iint_Q u(t,x)\varphi_k(t)e_k(x)dt\,dx,$$

$$k = 1,2,\ldots$$

Просуммируем это равенство по k от 1 до N:

$$-\iint_Q y(t,x)\left(\sum_{k=1}^N \varphi_k(t)\,e_k(x)\right)_t' dt\,dx +$$

$$+\iint_Q y_x(t,x)\left(\sum_{k=1}^N \varphi_k(t)\,e_k(x)\right)_x' dt\,dx =$$

$$= \int_0^\ell y_0(x)\left(\sum_{k=1}^N \varphi_k(0)e_k(x)\right)dx + \iint_Q u(t,x)\left(\sum_{k=1}^N \varphi_k(t)e_k(x)\right)dt\,dx.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и замечая, что $\sum_{k=1}^N \varphi_k(t)e_k(x)$ стремится к $\varphi(t,x)$ в норме $C([0,T];H_0^1(0,\ell))$, получаем тождество (4.35). Это доказывает, что всякое о. р.«1» является и о. р.«2».

Покажем теперь, что любое о. р.«2» $y = y(t,x)$ является и о. р.«1». Положим $Y(t) = y(t,\cdot)$ $\forall t \in [0,T]$ и возьмем в (4.35) в качестве пробных функции вида $\varphi(t)e(x)$, где $\varphi(t) \in C^\infty[0,T]$, $\varphi(T) = 0$, $e(x) \in V = H_0^1(0,\ell)$. Преобразуем интегралы

$$-\iint_Q y(t,x)\varphi'(t)e(x)dt\,dx = -\int_0^\ell \left(\int_0^T y(t,x)\varphi'(t)dt\right)e(x)dx =$$

$$= -\langle Y(\varphi'), e\rangle,$$

$$\iint_Q y_x(t,x)\varphi(t)\,e_x(x)dt\,dx = \int_0^T\left(\int_0^\ell y_x(t,x)e_x(x)dx\right)\varphi(t)dt =$$

$$= (L)\int_0^T \langle AY(t)\varphi(t), e\rangle dt = \left\langle (B)\int_0^T AY(t)\varphi(t)dt, e\right\rangle = \langle AY(\varphi), e\rangle,$$

$$\iint_Q u(t,x)\varphi(t)e(x)dt\,dx = \int_0^\ell\left(\int_0^T u(t,x)\varphi(t)dt\right)e(x)dx = \langle \mathcal{U}(\varphi), e\rangle,$$

$$\int_0^\ell y_0(x)\varphi(0)e(x)dx = \langle y(0)\varphi(0), e\rangle = \varphi(0)\langle y_0, e\rangle.$$

Перепишем тождество (4.35) в виде

$$-\langle Y(\varphi'), e\rangle + \langle AY(\varphi), e\rangle = \langle \mathcal{U}(\varphi), e\rangle + \varphi(0)\langle y_0, e\rangle. \quad (4.37)$$

Взяв в (4.37) $\varphi \in D(0,T)$ и приняв во внимание условие $\varphi(0) = 0$ и равенство $-Y(\varphi') = Y'(\varphi)$ из определения (4.3) производной о. ф. Y, выведем из (4.37) следствие

$$\langle Y'(\varphi) + AY(\varphi), e\rangle = \langle \mathcal{U}(\varphi), e\rangle \qquad \forall e \in V.$$

В силу произвола $e \in V$ заключаем, что $Y'(\varphi) + AY(\varphi) = \mathcal{U}(\varphi)$ $\forall \varphi \in D(0,T)$ (равенство элементов из V^*), следовательно,

$$Y' + AY = \mathcal{U} \tag{4.38}$$

(равенство элементов из $D'(0,T;V^*)$). Заметим теперь, что регулярность $Y \in L^2(0,T;V)$ следует из построения о. ф. $Y(t) \stackrel{\text{def}}{=} y(t,\cdot)$ и включения $y(t,x) \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}(Q)$. Свойства линейности и непрерывности оператора $A : V \to V^*$ обеспечивают регулярность образа $AY(t) \in L^2(0,T;V^*)$, а тогда из регулярности $\mathcal{U} \in L^2(0,T;H) \subset L^2(0,T;V^*)$ и (4.38) следует регулярность производной: $Y'(t) \in L^2(0,T;V^*)$, а также возможность поточечного толкования уравнения (4.38) в форме (4.34). Установив, что $Y(t) \in W(0,T;V,V^*)$, преобразуем первое слагаемое в левой части (4.37) с помощью формулы (4.31), не требуя от φ финитности:

$$
\begin{gathered}
-\langle Y(\varphi'), e\rangle = \\
= -\langle (B)\int_0^T Y(t)\varphi'(t)dt, e\rangle = -(L)\int_0^T \langle Y(t), \varphi'(t)e\rangle dt = \\
= -\langle Y(t), \varphi(t)e\rangle\Big|_{t=0}^{t=T} + (L)\int_0^T \langle Y'(t), \varphi(t)e\rangle dt = \\
= \varphi(0)\langle Y(0), e\rangle + \langle (B)\int_0^T Y'(t)\varphi(t)dt, e\rangle = \\
= \varphi(0)\langle Y(0), e\rangle + \langle Y'(\varphi), e\rangle \\
\forall e \in V, \qquad \forall \varphi \in C^\infty[0,T], \quad \varphi(T) = 0.
\end{gathered} \tag{4.39}
$$

С учетом уже полученного уравнения (4.38) из (4.37) и (4.39) приходим к равенству

$$\varphi(0)\langle Y(0), e\rangle = \varphi(0)\langle y_0, e\rangle.$$

Пользуясь произволом $e \in V$ и функций $\varphi \in C^\infty[0,T]$, $\varphi(T) = 0$, получаем равенство $Y(0) = y_0$. Таким образом, показано, что всякое о. р.«2» является и о. р.«1».

Отметим, что в дифференциально-операторной форме могут быть записаны постановки многих краевых задач для уравнений математической физики [15] и потому эта форма широко используется в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами (см., например, [73]). Для нас важным аргументом в пользу выбора именно дифференциально-операторной формы изложения было и то, что такая форма очень похожа на запись, принятую в теории обыкновенных дифференциальных уравнений; на наш взгляд, при этом заметно облегчается понимание как сходств, так и различий между конструкциями метода динамической регуляризации, используемыми для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений с частными производными.

Заключительные замечания

В гл. I–III мы ознакомились с простейшим вариантом метода динамической регуляризации применительно к некоторым классам обратных задач, связанным с системами обыкновенных дифференциальных уравнений, параболическими и гиперболическими уравнениями. В последние годы этот метод получил дальнейшее развитие, появились различные его модификации, он был успешно применен для исследования многих самых различных по своей природе обратных задач [33–35; 40; 42; 43; 46; 47; 54-62; 76–88; 100–105; 120; 121; 144–149; 152–160].

Опишем несколько более общую, чем в гл. I–III, схему метода динамической регуляризации, из которой можно получить некоторое представление о возможных модификациях этого метода, о требованиях к методу, о границах его применимости. Пусть задана некоторая динамическая система, движение которой характеризуется траекторией $y(t)$, $t \in [0, T]$. Пусть эта система зависит от неизвестных параметров $u = u(t) = (u^1(t), ..., u^r(t))$, $t \in [0, T]$, принадлежащих заданному множеству U. Эти параметры мы условно будем называть управлениями, хотя в конкретных задачах они могут описывать не только управления, но и, скажем, неконтролируемые возмущения и помехи, внутренние параметры системы и т. п. Обозначим через A оператор, ставящий в соответствие каждому управлению $u(t)$ соответствующую траекторию $y = y(t; u)$ динамической системы, т. е. $y = Au$. При схематическом изложении нет необходимости обсуждать природу траекторий, управлений, явно оговаривать требования, предъявляемые к оператору A, к области его определения и множеству значений. Мы здесь оговорим лишь одно важное требование к оператору A, называемое вольтерровостью [128]. Оператор A называется вольтерровым, если при каждом $t \in [0, T]$ для любых управлений u_1, $u_2 \in U$, совпадающих на отрезке $[0, t]$, т. е. $u_1(\tau) = u_2(\tau)$ $\forall \tau \in [0, t]$, совпадают и соответствующие им траектории y_1, y_2, т. е. $y_1(\tau) = y_2(\tau)$ $\forall \tau \in [0, t]$. Иначе говоря, вольтерровость оператора означает, что для каждого текущего момента времени траектория системы не зависит от буду-

щей реализации управления. Свойство вольтерровости часто называют свойством неупреждаемости или свойством физической осуществимости. Это свойство крайне важно в тех случаях, когда решение обратной задачи используется в системах обратной связи, в системах автоматического регулирования, в ситуациях, когда восстанавливаемые в режиме реального времени значения параметров $u(t)$ немедленно используются в процессе управления. Заметим, что свойство вольтерровости в обратных задачах, рассмотренных в гл. I–III, очевидно, выполняется.

Для определения неизвестного управления $u \in U$ проводятся наблюдения за траекторией $y = y(t; u)$ и измеряются какие-либо параметры этой траектории (ее координаты в пространстве, скорости и т. п.), которые можно записать в форме $\xi = Cy$, где C — некоторый оператор, называемый оператором наблюдения. Так например, в задачах гл. I, II измерялись координаты траектории (т. е. $\xi = y$), в гл. III — скорость (т. е. $\xi = y'$). Таким образом, неизвестное управление $u \in U$ является решением операторного уравнения $CAu = \xi$. В общем случае это уравнение может иметь много решений. Для выделения одного вполне определенного решения $u_* = B\xi$ обычно задают некоторое дополнительное правило выбора. Например, u_* может определяться как точка минимума какого-либо подходящим образом выбранного функционала на множестве решений этого уравнения. В гл. I в качестве u_* выбиралось нормальное решение.

В практических задачах измерения элементов траекторий проводятся с погрешностью, поэтому вместо точных значений $\xi = \xi(t)$ приходится иметь дело с приближениями $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$, удовлетворяющими условию $\rho_1(\tilde{\xi}(t), \xi(t)) \le \delta$ $\forall t \in [0, T]$, где ρ_1 — некоторый неотрицательный функционал, характеризующий величину погрешности измерений. В этих условиях вместо точного решения $u_* = B\xi$ мы можем получить лишь некоторое его приближение $u_\delta = B_\delta \tilde{\xi}$. Поскольку многие обратные задачи являются неустойчивыми, метод построения u_δ должен быть регуляризующим, т. е. при достаточно малой погрешности измерений погрешность восстановления $\rho_2(u_\delta, u_*)$ искомого управления должна быть мала; здесь $\rho_2(u_\delta, u_*)$ — расстояние между управлениями u_δ, u_*. Другое важное требование к методу построения u_δ можно сформулировать следующим образом: при построении u_δ используются измерения $\tilde{\xi}(t)$ лишь в отдельные дискретные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$; без этого требования трудно говорить о возможностях практической реализации метода. Далее, метод построения u_δ существенно зависит также от режима поступления информации об измерениях $\{\tilde{\xi}(t_i),\ i = 0, 1, ..., N-1\}$ и от режима использования этой информации. Если к моменту начала обработки информации известны все измерения $\tilde{\xi}(t_0), ...$ $..., \tilde{\xi}(t_{N-1})$ сразу, то можно построить приближенное управление u_δ сразу на всем отрезке $[0, T]$ с использованием всей совокупности этих измерений. В этом случае мы имеем дело с так называемой статической постановкой обратной задачи, и здесь могут быть использованы обычные известные методы регуляризации [1; 4; 8; 9; 12; 17; 23–25; 64–68; 71; 75; 91; 122–125; 129–134; 137; 138; 141]. Один из таких методов был рассмотрен в §1.5.

Однако возможна и другая, динамическая постановка обратных задач, когда информация об измерениях $\tilde{\xi}(t_i)$ поступает не вся сразу, а последовательно во времени по мере проведения этих измерений и приближенное управление u_δ строится в динамике, синхронно с поступающей информацией, в режиме реального времени. Именно такие задачи о динамическом восстановлении неизвестных характеристик процесса и метод их решения, названный методом динамической регуляризации, составили основное содержание гл. I–III настоящего учебного пособия.

Анализ изложенного варианта метода динамической регуляризации позволяет выделить три его составные части:

1) выбор моментов t_i для проведения измерений $\{\tilde{\xi}(t_i),$ $i = 0, 1, \ldots,\ N-1\}$;

2) правило выбора управления $u_\delta = u_\delta(t)$ на каждом частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., N-1$;

3) правило составления вспомогательной задачи (поводыря), траектория $z_h(t)$ которой нужна для отслеживания наблюдаемой траектории на каждом частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., N-1$.

В гл. I–III мы видели, что при выборе сетки ее шаг следует согласовывать с уровнем погрешности измерений δ, с параметрами метода, причем в различных задачах условия согласования могут быть разными. Допустим, что сетка уже выбрана. Тогда, следуя индуктивной схеме описания метода динамической регуляризации, принятой в гл. I–III, предположим, что на основе известных измерений $\tilde{\xi}(t_0), ...$ $..., \tilde{\xi}(t_{i-1})$, $1 \le i \le N-1$, уже найдены управление $u_\delta(t)$ на отрезке $[0, t_i]$ и значения вспомогательной траектории (поводыря) $z_h(t)$ при $t = t_i$, и пусть стало известно измерение $\tilde{\xi}(t_i)$ в момент $t = t_i$. Напомним, что в этой схеме для поиска управления $u_\delta(t)$ на начальном отрезке $[0, t_1]$ достаточно иметь значение $z_h(0)$, которое считается известным.

Для продолжения дальнейших индуктивных рассуждений нам нужно иметь правила выбора управления $u_\delta(t)$ и вспомогательную задачу для поводыря $z_h(t)$ на следующем частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$. Эти элементы метода динамической регуляризации строятся на основе сочетания идей и подходов, которые были выработаны в теории позиционных дифференциальных игр, развитых Н. Н. Красовским и его школой [41; 44; 45; 49–51; 98; 99; 106; 107], и в теории некорректных задач, развитых в школах А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева [4; 8; 9; 12; 17; 23–25; 65–68; 75; 91; 111; 124; 129–134; 137; 138; 141]. А именно, управление на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ осуществляется позиционным способом на основе обратной связи. Это значит, что с учетом поступившего в момент времени t_i измерения $\tilde{\xi}(t_i)$ и уже вычисленного значения $z_h(t_i)$ поводыря формируется управляющее воздействие

$$u_\delta = u_\delta(t) = u_i(\tilde{\xi}(t_i), z_h(t_i)), \qquad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Поскольку, как было замечено выше, многие обратные задачи неустойчивы, при построении управления u_δ мы должны постараться, чтобы метод был регуляризующим, и для этого воспользоваться теми или иными методами регуляризации.

В гл. I–III был применен метод стабилизирующих функционалов Тихонова (метод стабилизации). Для построения управления $u_\delta(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, могут быть использованы и другие методы регуляризации (метод невязки, квазирешений и др.). Допустим, что управление $u_\delta(t)$ на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ уже определено. Для завершения индуктивных построений осталось указать правило определения значения поводыря $z_h(t)$ при $t = t_{i+1}$. Для этих целей нередко используется сама исходная динамическая система, в которой неизвестное управление заменяется только что найденным управлением $u_\delta(t)$, в качестве начального условия берется известное значение поводыря $z_h(t_i)$, после чего определяется траектория $z_h(t)$ полученной системы на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ и тем самым находится искомое значение поводыря $z_h(t_{i+1})$. Так поступали мы в гл. II, III.

В гл. I вспомогательная система для поводыря представляла собой аналог известного разностного метода Эйлера, написанного на основе исходной системы. В гл. II, III для этих целей также можно было взять какие-либо конечномерные аппроксимации исходной задачи, основанные, например, на методе Галеркина, проекционно-разностных схемах и т. д., что было бы удобнее для практических приложений, но существенно усложнило бы изложение метода, исследование его сходимости.

Существуют и другие методы построения вспомогательной задачи для поводыря. Искусству составления таких задач, конструированию управлений $u_\delta(t)$ в различных обратных задачах читатель может поучиться в [32–35; 40; 42; 43; 46; 47; 54–62; 76–88; 100–105; 120; 121; 144–149; 152–160]. На этом закончим схематическое изложение основного индуктивного шага метода.

Применяя описанную процедуру последовательно к отрезкам $[t_0 = 0, t_1], \dots, [t_{N-1}, t_N = T]$, находим траекторию поводыря $z_h(t)$ и управление $u_\delta(t)$ на всем отрезке $[0, T]$. Остается исследовать сходимость метода. Как видно из результатов гл. I–III, для сходимости полученного управления u_δ к решению u_* обратной задачи в подходящей метрике важно согласовывать шаг сетки h и параметры метода с уровнем погрешности δ. Аналогичные условия согласования параметров должны выполняться и в общем случае; вид этих условий, а также вид функционала Ляпунова, используемого при доказательстве сходимости метода, в каждой конкретной задаче будут своими.

Подробнее с вариантами применения метода динамической регуляризации для восстановления различных параметров динамических систем (координат траекторий, скоростей, начальных состояний, управлений, помех, коэффициентов уравнений), описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, системами, не разрешенными относительно производной, системами с запаздыванием, дифференциальными включениями, вариационными неравенствами, и соответствующей техникой доказательства сходимости и получения оценок скорости сходимости можно ознакомиться в работах [32–35; 40; 42; 43; 46; 47; 54–62; 76–88; 100–105; 120; 121; 144–149; 152–160].

Литература

1. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.

2. *Аниконов Ю. Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978. 118 с.

3. *Баев А. В.* О решении одной обратной задачи для волнового уравнения с помощью регуляризирующего алгоритма // ЖВМ и МФ, 1985. Т. 25, №1. С. 140–146.

4. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.

5. *Бек Дж., Блэкуэлл Б., Сент-Клер Ч. (мл.)* Некоторые обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.

6. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

7. *Бухгейм А. Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 205 с.

8. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986. 178 с.

9. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.

10. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 550 с.

11. *Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М.* Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнения колебаний струны // Вестн. Моск. ун-та. Сер. ВМК. 1993. №3. С. 8–15.

12. *Васин В. В., Агеев А. Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 263 с.

13. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

14. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

15. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1978. 336 с.

16. *Галиуллин А. С.* Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981.

17. *Гапоненко Ю. Л.* Некорректные задачи на слабых компактах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 125 с.

18. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967. 252 с.

19. *Гласко В. Б.* Обратные задачи математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 112 с.

20. *Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г.* Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. 335 с.

21. *Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 117 с.

22. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.

23. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. 208 с.

24. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.

25. *Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит, 1995. 176 с.

26. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для параболического и гиперболического уравнений // УМН. 1960. Т. 15, №2. С. 97–154.

27. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, Ч. 1, 1971; Ч. 2, 1973. 448 с.

28. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. Начальный курс. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 660 с.

29. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

30. *Искендеров А. Д.* Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, №5. С. 890–898.

31. *Искендеров А. Д.* Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения // Изв. АН АзССР. Сер. Физ.-техн. и матем. наук. 1978. №2. С. 80–85.

32. *Кабанихин С. И.* Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука, 1988. 167 с.

33. *Ким А. В., Короткий А. И.* Динамическое моделирование возмущений в параболических системах // Изв. АН СССР. Сер. Техн. киберн. 1989. №6. С. 78–84.

34. *Ким А. В., Короткий А. И.* О конечномерной аппроксимации обратных задач динамики // Задачи моделирования и оптимизации. Свердловск, 1991. С. 64–89.

35. *Ким А. В., Короткий А. И., Осипов Ю. С.* Обратные задачи динамики параболических систем // ПММ. 1990. Т. 54, №5. С. 754–759.

36. *Кирин Н. Е.* Методы оценивания и управления в динамических системах. СПб: Изд-во С-Петербургск. ун-та, 1993. 308 с.

37. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

38. *Коздоба Л. А., Круковский П. Г.* Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наукова думка, 1982. 359 с.

39. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.

40. *Коробич Ю. С., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* Динамическое моделирование управлений в некоторых параболических системах // ПММ. 1990. Т. 54, №3. С. 355–360.

41. *Короткий А. И.* Об аппроксимации задач позиционного управления // ПММ. 1980. Т. 44, №6. С. 1010–1018.

42. *Короткий А. И.* К восстановлению возмущений в квазилинейных параболических системах // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск. 1991. С. 41–49.

43. *Короткий А. И.* Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Матем. 1995. №11 (402). С. 101–124.

44. *Короткий А. И., Осипов Ю. С.* Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами // ПММ. 1978. Т. 42, №4. С. 599–605.

45. *Короткий А. И., Осипов Ю. С.* О позиционном управлении в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1980. Т. 44, №4. С. 611–617.

46. *Короткий А. И., Цепелев И. А.* Динамическое моделирование параметров в системе Гурса–Дарбу // Задачи моделирования и оптимизации. Свердловск. 1991. С. 90–109.

47. *Короткий А. И., Цепелев И. А.* Динамическое решение обратной задачи определения параметров в системе Гурса–Дарбу // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. Екатеринбург. 1995. Т. 3. С. 88–103.

48. *Кочиков И. В., Курамшина Г. М., Пентин Ю. А, Ягола А. Г.* Обратные задачи колебательной спектроскопии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. 240 с.

49. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

50. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой: Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.

51. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

52. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. 319 с.

53. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 332 с.

54. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах // ПММ. 1983. Т. 47, №6. С. 883–889.

55. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Сер. Техн. киберн. 1983. №2. С. 51–60.

56. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* О наилучшем приближении оператора дифференцирования в классе неупреждающих операторов // Матем. заметки. 1985. Т. 37, №2. С. 192–199.

57. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* О динамической регуляризации линейных алгебраических уравнений // Задачи позиционного моделирования. Свердловск. 1986. С. 41–84.

58. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* Обратные задачи динамики и управляемые модели // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 196–211.

59. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* К регуляризации выпуклой экстремальной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Некоторые методы позиционного и программного управления. Свердловск, 1987. С. 34–54.

60. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* Устойчивые решения обратных задач динамики управляемых систем // Оптимальное управление и дифференциальные игры. Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 1988. Т. 185. С. 126–146.

61. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* О методах позиционного моделирования в динамичю системах // Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем. Свердловск, 1988. С. 34–44.

62. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* Об устойчивом позиционном восстановлении управления по измерениям части координат // Некоторые задачи управления и устойчивости. Свердловск, 1989. С. 33–47.

63. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

64. *Куржанский А. Б., Сивергина И. Ф.* Метод гарантированных оценок и задачи регуляризации для эволюционных систем // ЖВМ и МФ. 1992. Т. 32, №11. С. 1720–1733.

65. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд-во СО АН СССР, 1962. 92 с.

66. *Лаврентьев М. М., Васильев В. Г, Романов В. Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969. 68 с.

67. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г, Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.

68. *Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г, Яхно В. Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982. 88 с.

69. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

70. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

71. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.

72. *Левитан Б. Н.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 319 с.

73. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.

74. *Лионс Ж.-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.

75. *Лисковец О. А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач. Минск: Наука и техника, 1981. 344 с.

76. *Максимов В. И.* Позиционное моделирование некоторых параметров дифференциально-функциональных систем // Некоторые методы позиционного и программного управления. Свердловск, 1987. С. 84–106.

77. *Максимов В. И.* О динамической регуляризации в некоторых системах, неразрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, №2. С. 305–316.

78. *Максимов В. И.* Позиционное моделирование управлений и начальных функций для систем Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, №4. С. 618–629.

79. *Максимов В. И.* О динамическом моделировании неизвестных возмущений в параболических вариационных равенствах // ПММ. 1988. Т. 52, №5. С. 743–750.

80. *Максимов В. И.* Позиционное моделирование неограниченных управлений для нелинейных систем с диссипацией // Автоматика и телемеханика. 1988. №4. С. 22–30.

81. *Максимов В. И.* Существование решений и моделирование управлений в некоторых системах с распределенными параметрами // Качественые вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем. Свердловск, 1988. С. 55–82.

82. *Максимов В. И.* Устойчивое восстановление входных воздействий по результатам измерений. 1, 2 // Автоматика. 1990. Т.4. С.60–65; Т.6. С.19–24.

83. *Максимов В. И.* Об устойчивом решении обратных задач для нелинейных распределенных систем. 1, 2 // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 12. С. 2059–2067; 1991. Т. 27, № 4. С. 597–603.

84. *Максимов В. И.* О моделировании управлений в параболических вариационных неравенствах // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1603–1609.

85. *Максимов В. И.* Численное решение некоторых обратных задач теплопроводности // Автоматика и телемеханика. 1993. № 2. С. 83–92.

86. *Максимов В. И.* О динамическом оценивании управлений в условиях неопределенности // Изв. РАН. Сер. Техн. киберн. 1994. № 3. С. 127–132.

87. *Максимов В. И.* Конечномерная аппроксимация входов в гиперболических вариационных неравенствах // ЖВМ и МФ. 1995. Т. 35, № 11. С. 1615–1629.

88. *Максимов В. И.* Конечномерная аппроксимация входов в параболических вариационных неравенствах // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 1995. Т. 211. С. 326–337.

89. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.

90. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.

91. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 240 с.

92. *Наконечный А. Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1985. 84 с.

93. *Нижник Л. П.* Обратная нестационарная задача рассеяния. Киев: Наукова думка, 1973. 182 с.

94. *Никитенко А. И.* Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. Киев: Наукова думка, 1988. 240 с.

95. *Никольский М. С.* Об идеально наблюдаемых системах // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 4. С. 631–638.

96. *Орловский А. Г.* Слабые и сильные решения обратных задач для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 5. С. 867–874.

97. *Орловский А. Г.* Об одной обратной задаче для уравнения гиперболического типа в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1771–1777.

98. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // ДАН. 1975. Т. 223, № 6. С. 1314–1317.

99. *Осипов Ю. С.* Позиционное управление в параболических системах // ПММ. 1977. Т. 41, № 2. С. 195–201.

100. *Осипов Ю. С., Короткий А. И.* Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах // Изв. АН СССР. Сер. Техн. киберн. 1991. № 2. С. 154–164.

101. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* О динамическом решении операторных уравнений // ДАН. 1983. Т. 269, № 3. С. 552–556.

102. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* О моделировании параметров динамической системы // Задачи управления и моделирования в динамических системах. Свердловск, 1984. С. 47–68.

103. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* Метод функций Ляпунова в задаче моделирования движения // Устойчивость движения. Новосибирск, 1985. С. 53–56.

104. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* Аппроксимация и устойчивость множеств по классу функционалов. Свердловск: Изд-во ин-та матем. и механ. УРО АН СССР, 1991. 130 с.

105. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И.* Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. Свердловск: Изд-во ин-та матем. и механ. УРО АН СССР, 1991. 104 с.

106. *Осипов Ю. С., Охезин С. П.* К теории дифференциальных игр в параболических системах // ДАН. 1976. Т. 226, №6. С. 1267–1270.

107. *Осипов Ю. С., Охезин С. П.* К теории позиционного управления в гиперболических системах // ДАН. 1977. Т. 233, №4. С. 551–554.

108. *Погорелов А. Г.* Обратные задачи нестационарной химической кинетики. М.: Наука, 1988. 392 с.

109. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.

110. *Потапов М. М.* Разностная аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления системами Гурса–Дарбу // Вестн. Моск. ун-та. Сер. ВМК. 1978. №2. С. 17–26.

111. *Потапов М. М.* Аппроксимация экстремальных задач в математической физике (гиперболические уравнения). М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 64 с.

112. *Потапов М. М.* О сильной сходимости разностных аппроксимаций задач граничного управления и наблюдения для волнового уравнения // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38, №3. С. 387–397.

113. *Прилепко А. И.* Внутренние обратные задачи теории потенциала // ДАН. 1968. Т. 182, №3. С. 503–505.

114. *Прилепко А. И.* Существование решений обратных задач теории потенциала // ДАН. 1971. Т. 199, №1. С. 30–32.

115. *Прилепко А. И.* Обратные задачи теории потенциала // Матем. заметки. 1973. Т. 14, №5. С. 755–765.

116. *Прилепко А. И., Иванков А. Л.* Обратные задачи для нестационарного уравнения переноса // ДАН. 1984. Т. 276, №3. С. 555–559.

117. *Прилепко А. И., Орловский Д. Г.* Об определении параметра эволюционного уравнения в обратных задачах математической физики // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, №1. С. 119–129.

118. *Прилепко А. И., Соловьев В. В.* Теоремы разрешимости и метод Роте в обратных задачах для уравнений параболического типа. 1 // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, №10. С. 1791–1799.

119. *Прилепко А. И., Соловьев В. В.* О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента при младшей производной в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, №1. С. 136–143.

120. *Розенберг В. Л.* О восстановлении функции источника в параболическом уравнении // Изв. РАН. Сер. Техн. киберн. 1994. №6. С. 126–130.

121. *Розенберг В. Л.* Задача динамического восстановления функции источника в параболическом уравнении // Труды ин-та матем. и механ. УрО РАН. Екатеринбург. 1995. Т. 3. С. 116–135.

122. *Романов В. Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972. 164 с.

123. *Романов В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Изд-во Новосибирск. ун-та, 1973. 252 с.

124. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 262 с.

125. *Романов В. Г., Кабанихин С. И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991. 304 с.

126. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во СО АН СССР, 1962. 256 с.

127. *Соболев С. Л.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989. 254 с.

128. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюллетень МГУ. Секция А. 1939. Т. 1. С. 1–25.

129. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.

130. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. 160 с.

131. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.

132. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.

133. *Тихонов А. Н., Кальнер В. Г., Гласко В. Б.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.

134. *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 308 с.

135. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 724 с.

136. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1993. 440 с.

137. *Федотов А. М.* Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, 1982. 192 с.

138. *Федотов А. М.* Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, 1990. 280 с.

139. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 447 с.

140. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.

141. *Чечкин А. В.* Математическая информатика. М.: Наука, 1991. 416 с.

142. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматгиз, 1961. 436 с.

143. *Chadan K., Sabatier P. C.* Inverse Problems in Quantum Scattering theory. Springer–Verlag, 1989. 500 p.

144. *Kryazimskii A. V.* Optimization of the ensured result for the dynamical systems // Proc. Intern. Cong. of Math. Berkeley, 1986. P. 1171–1179.

145. *Kryazimskii A. V., Maksimov V. I., Osipov Yu. S.* Reconstruction of Boundary Sources through Sensor Observations // IIASA Working Paper. WP-96-97. Austria, 1996. 16 p.

146. *Kryazimskii A. V., Maksimov V. I., Samarskaia E. A.* On estimation of forcing functions in parabolic Systems // IIASA Working Paper. WP-95-75. Austria, 1995. 34 p.

147. *Kryazimskii A. V., Osipov Yu. S.* On positional calculation of Ω — normal controls in dynamical Systems // Probl. Control & Inform. Theory. 1984. V. 13, № 6. P. 425–436.

148. *Kryazimskii A. V., Osipov Yu. S.* Positional modelling of stochastic control in dynamical systems // Lect. Notes in Control & Inform. Sciences. Stochastic optimization. Proc. of the Intern. Conference, Kiev, 1984. Springer–Verlag, 1986. P. 696–704.

149. *Kryazimskii A. V., Osipov Yu. S.* Input reconstructibility for linear dynamics. Ordinary differential equations // IIASA Working Paper. WP-93-65. Austria, 1993.

150. *Kurzhanskii A. B., Khapalov A. Yu.* On the state estimation problem for distributed systems. Analysis & Optimization of systems // Lect. Notes in Control and Inform. Sciences. 1986. V. 83. P. 102–113.

151. *Kurzhanskii A. B., Sivergina I. F.* On noninvertible evolutionary systems: guaranteed estimation & the regularization problem // IIASA Working Paper. WP-89-058. Austria, 1989. 10 p.

152. *Maksimov V. I.* Inverse problems for variational inequalities // International Series of Numerical Mathematics. Birkhauser–Verlag. Basel, 1992. V. 107. P. 275–286.

153. *Maksimov V. I.* On dynamical reconstruction in nonlinear parabolic systems // Lect. Notes in Control & Inform. Sciences. Springer–Verlag. New-York, 1992. № 180. P. 404–413.

154. *Maksimov V. I.* Some dynamical inverse problems for hyperbolic systems // Control & Cybernetics. 1996. V. 25, № 3. P. 405–481.

155. *Osipov Yu. S.* Control problems under insufficient information // Proc. of 13-th IFIP Conference «System modelling and Optimization», Tokyo, 1987. Springer–Verlag, 1988.

156. *Osipov Yu. S.* Inverse problem of dynamics for systems described by parabolic inequality // IIASA Working Paper. WP-89-101. Austria, 1989. 11 p.

157. *Osipov Yu. S.* On the reconstruction of a parameter for hyperbolic system // IIASA Working Paper. WP-91-54. Austria, 1991. 32 p.

158. *Osipov Yu. S., Korotkii A. I.* On dynamical restoration of parameters of elliptic systems // Ill-posed Probl. in Natural Science. Proc. Intern. conf., Moscow, 1991. Utrecht VST. Moscow: TVP, 1992. P. 108–117.

159. *Osipov Yu. S., Kryazimskii A. V.* Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon & Breach, 1995. 625 p.

160. *Osipov Yu. S., Kryazimskii A. V., Maksimov V. I.* Dynamical inverse problems for systems with distributed parameters // J. Inv. Ill-posed Problems. 1996. V. 4, № 4. P. 267–282.

Предметный указатель

Учебное издание

Осипов Юрий Сергеевич,
Васильев Федор Павлович,
Потапов Михаил Михайлович
ОСНОВЫ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Зав. редакцией *И. И. Щехура*
Редактор *Р. А. Бунатян*
Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*
Корректор *Н. И. Коновалова*

Изд. лиц. № 040414 от 18.04.97 г.

Подписано в печать 02.07.99 г.
Формат 60×90/16. Бумага офс. № 1.
Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 12,24.
Тираж 1 000 экз. Заказ. 397. Изд. № 6587.
Ордена "Знак Почета" Издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Б.Никитская, 5/7.
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
ИПО Профиздат, 109044, Москва, Крутицкий вал, 18.

В 2000 году
в Издательстве Московского университета
выходят книги:

Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. Учебник – 2000. – 320 с. (п).

Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. / Под ред. А.Г. Свешникова. Задачи по математической физике. Учебное пособие. – 2000. – 320 с. (п).

По всем вопросам, связанным с приобретением книг,
обращайтесь в Издательство МГУ
по адресу:
103009, Москва, ул. Б.Никитская, 5/7.
Тел.: *939 33 23, 229 75 41; факс (095) 203 66 71.*