Метод динамической регуляризации 4курс 8семестр.

Потапов М.М.

3 к/р (3 раздела)

оценки: 1.0 (н/я или не сдал), 2.0 – 5.0 $\Delta = 0.5$

Итоговая оценка $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ округляется с точностью до $0.1 \to X_{\text{пис. сем}}$

$\downarrow$

$X_{\text{пэ}} \in \mathbb{N}$ (предв. экз.)

$$\underset{(\text{экз})}{X_э} = \begin{cases} X_{\text{пэ}}, & \text{если согласен} \\ \frac{X_п + X_{\text{уст}}}{2} & \text{окр. до цел.} \end{cases}$$

Контрольные по 1 часу

<u>Лит-ра:</u> Осипов, Васильев, Потапов – „Основы метода динамич. Регуляризации"

Переписывание контрольных не предполагается (в расчет могут приниматься уважительные причины, тогда переписывание возможно)

Если $X_{\text{пэ}} \le 2$, то экз. письм., потом уст.

10.02.09

В рамках нашего курса под прямой задачей понимается нахождение траекторий по управлению, под обратной – управление, породившее траекторию

Динамический подход впервые был предложен Осиповым и Крякимским

<u>Часть I. Обр. зад. для ОДУ</u>

$$(1) \begin{cases} \overset{n}{y'(t)} = \overset{n\times 2}{f(t, y(t))}\, \overset{2}{u(t)} + \underbrace{\overset{n}{g}(t, y(t))}_{-Ay(t)}, \quad 0 < t < T \\ y(0) = \overset{n}{y_0} \end{cases}$$

$$(2) \quad u(t) \in U = \{u(t) \in L^2(0,T) \mid u(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} P \subset \mathbb{R}^2\}$$

Обр. зад.: $\underset{\text{изв.}}{y(t)} \longrightarrow u(t) = ?$ (есть проблемы существования и единственности)

Упр-е м.б. не единств., напр. если $f = 0$

Т.к. $u(t)$ не единств., ищем $u(t)$ с min L^2-нормой

$$U_* = \{u \overset{(2)}{\in} U \mid y(t, u) = \underbrace{y(t)}_{\text{наблюдаемая траектория}}\}$$

$u_* = \underset{u \in U_*}{\mathrm{argmin}} \; \|u\|^2_{L^2(0,T)}$ — искомое

Предполагаем, что на $[0,T]$ введена сетка $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$

$\Delta t = \max \Delta t_i \quad , \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

Траектория может измеряться с ошибкой, но

(3) $\quad |\tilde{y}_i - y(t_i)|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \quad , i = \overline{0,N}$

Хотим в классе кусочно-пост. упр-ний (пусть сетка равномер., $h = \Delta t = \Delta t_i$) $\quad U_h = \{u \in U \mid u(t) \equiv u_i \in P, \; i = \overline{1,N}\}$ (4)

найти $\quad \tilde{u} \in U_h \; : \; \|\tilde{u} - u_*\|_{L^2} \xrightarrow[\delta, h \to 0]{} 0$ (т.е. чтобы была сход-ть)

<u>Теор. 1</u> (Т. 21, стр. 19-20)

Пусть $f(t,y)$ и $g(t,y)$ удовл. усл-ю Липшица:

$|f(t_1,y_1) - f(t_2,y_2)| \leq L_f \left(|t_1 - t_2| + |y_1 - y_2| \right)$

$\forall t_1, t_2 \in [0,T] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$

Для $g(t)$ аналогично

Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ замкн. и огр. (компакт в $\mathbb{R}^2$)

Тогда $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n \; \forall u \in U \; \exists!$ решение $y(t) = y(t,u)$ со св-вами:

1) $|y(t,u)| \leq K_y = K_y(y_0) \quad \forall t \in [0,T] \quad \forall u \in U$ (равном. огр.)

$\quad |y'(t,u)| \overset{\text{п.в.}}{\leq} K_{y'} = K_{y'}(y_0) \quad \forall t \in [0,T] \quad \forall u \in U$

2) $\underbrace{|y(t_1,u_1) - y(t_2,u_2)|}_{\text{старт из одной и той же } y_0} \leq L_y \left(|t_1 - t_2| + \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T)} \right)$

$\forall t_1, t_2 \in [0,T]$

$\forall u_1, u_2 \in U$

3) Если есть посл-ть $u_k \in U$, $u_k \xrightarrow{\text{слабо в } L^2[0,T]} u_0$, то

$y(t,u_k) \overset{k \to \infty}{\rightrightarrows} y(t;u_0)$ на $[0,T]$

Теорема 2 (Т. 31, стр. 24)

Пусть вып. усл-я Т.1 и P — выпукло

Пусть $y(t) = y(t,\bar{u})$, где $\bar{u} \in U$

Тогда в $U_* = \{u \in U \mid y(t,u) = y(t) = y(t,\bar{u})\} \neq \emptyset$

$\exists!\ u_* = \underset{u\in U_*}{\operatorname{argmin}} \|u\|^2_{L^2}$

Док-во: $H = L^2(0,T)$, $U_* \subset L_2(0,T)$ и вып., замкн.

$\Uparrow$ P замкн. в $\mathbb{R}^2$

Вып-ть: $\forall u, v \in U_*,\ \forall \alpha \in [0,1] \overset{?}{\Rightarrow} \alpha u + (1-\alpha) v \in U_*$

$y' = f(t,y)u + g(t,y) \times \alpha$

$y' = f(t,y)\,v + g(t,y) \times (1-\alpha)$ $\quad + \quad y(0) = y_0$

$\Rightarrow$ Выпуклость очевидна. Нам пригодилась лин-ть правой части ДУ по упр-ю

$u_* = \operatorname{argmin} \|u\|^2_{L^2} = pr_{U_*} 0$

Т. док

Зад. Коши аппр. разн. схемой (типа Эйлера)

$$(S)\begin{cases} \dfrac{z_{i+1} - z_i}{h} = f(t_i, \tilde{y}_i)\, u_i + g(t_i, \tilde{y}_i), \quad i = \overline{0, N-1} \\ z_0 = \tilde{y}_0 \end{cases}$$

в схеме Эйлера здесь были бы z_i, у нас-нет

В статич. методе А.Н. Тихонова $T_\alpha(u) = \max\limits_{0\le i\le N} |z_i(\tilde{u}) - \tilde{y}_i|_{\mathbb{R}^n} + \underset{\substack{\vee\\0}}{\alpha} \int_0^T |\tilde{u}(t)|^2_{\mathbb{R}^2}\, dt$

17.02.10

$$y'(t) = f(t, y(t))\, u(t) + g(t, y(t)), \quad 0<t<T, \; y(0) = y_0 \qquad (1)$$

$$u \in U = \{ u(t) \in L^2(0,T) \;/\; u(t) \in P \subset \mathbb{R}^2 \} \qquad (2)$$

$$|\tilde{y}_i - y(t)| \le \delta \qquad (3)$$

$$\tilde{u} \in U_h = \{ u \in U \;/\; u(t) \equiv u_i \in P, \; t \in (t_i, t_{i+1}) \qquad (4)$$

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{h} = f(t, \tilde{y}_i)\, u_i + g(t_i, \tilde{y}_i), \quad z_0 = \tilde{y}_0 \qquad (5)$$

$$T_\alpha(\tilde{u}) = \max_{0 \le i \le N} |z_i(u) - \tilde{y}_i|_{R^n} + \underset{\vee \atop 0}{\alpha} \underbrace{\int_0^T |\tilde{u}(t)|^2_{R^2}\, dt}_{\sum\limits_{i=0}^{N-1} |u_i|^2_{R^2} h \,=\, \|\tilde{u}\|^2_{L^2}} \quad \text{ф-ал Тихонова}$$

Метод статический (Тихонова):

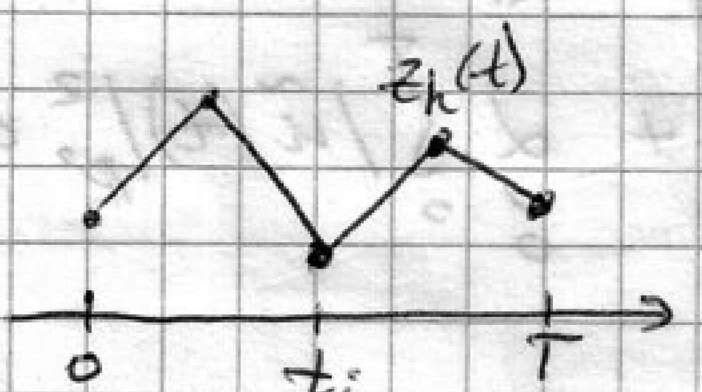
$$\tilde{u} \in U_h : T_\alpha(\tilde{u}) \le \inf_{u \in U_h} T_\alpha(u) + \varepsilon \qquad (6_{\text{Тих}})$$

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\underset{\text{шаг сетки}}{h}, \underset{\text{погр. набл}}{\delta}, \alpha, \varepsilon)$$

Теорема 3 (О сходимости метода Тихонова, Т. 5.1. стр 37)

Пусть выполняются условие Т.1 и Т.2, наблюдений $\tilde{y}_i$ удовл (3), приближ. упр-е $\tilde{u}$ выбир. по (4), (5), ($6_{\text{Тих}}$)

Тогда при $h, \delta, \alpha, \varepsilon \to 0$ $\quad \|\underset{\text{кусочно линейное непр. продолж } \{z_i\}}{z_h} - y\|_{C[0,T]} = O(h + \delta + \alpha + \varepsilon) \to 0$ $\quad (7_{\text{Тих}})$



Если, кроме того, $\dfrac{h+\delta+\varepsilon}{\alpha} \to 0$ (8), то $\|\tilde{u} - u_*\|_{L^2(0,T)} \to 0$ (9)

Док-во Опускается

Метод динамический (Осипова – Кряжимского)

$$|z_{i+1}(v) - \tilde{y}_{i+1}|^2 \to \inf \quad \mapsto$$

$$|z_i + \underbrace{h[f_i v + g_i]}_{\Delta z_i = O(h)} - \tilde{y}_{i+1}|^2 \quad \textcircled{=}$$

$$\mp \tilde{y}_i \qquad \Delta \tilde{y}_i = \tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_i$$

$$\frac{z_{i+1}(v) - z_i(v)}{h} = \underbrace{f(t_i, \tilde{y}_i)}_{f_i} \underset{P}{v} + \underbrace{g(t_i, \tilde{y}_i)}_{g_i}$$

$O(h) = h f_i \cdot v + h g_i$ от v не завис.

$$\textcircled{=} \; |(z_i - \tilde{y}_i) + \Delta z_i - \Delta \tilde{y}_i|^2_{R^n} = |z_i - \tilde{y}_i|^2 + 2\langle z_i - \tilde{y}_i, \Delta z_i\rangle$$

$$- \underbrace{2\langle z_i - \tilde{y}_i, \Delta \tilde{y}_i\rangle}_{\text{не зависит от } v} + \underbrace{|\Delta z_i - \Delta \tilde{y}_i|^2}_{O(h^2 + \delta^2)}$$

T.1 ← кусочно непр.

$$\Delta \tilde{y}_i = \tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_i \overset{(3),\, y \in Lip}{=} O(h + \delta)$$

$$\mp y(t_{i+1}) \mp y(t_i)$$

Идея: направить все усилия на h

$$\mapsto \quad \varphi_i(v) = \underbrace{2\langle z_i - \tilde{y}_i, f(t_i, \tilde{y}_i) v\rangle}_{\text{линейная по } v \text{ ф-ия}} \cancel{h} \longrightarrow \inf_{v \in P}$$

здесь она константа

В таком виде это правило Красовского

Правило Осипова – Кряжимского (– Красовского – Тихонова)

$$\tilde{u} \in U_h, \; \tilde{u}(t) \equiv u_i, \; t \in (t_i, t_{i+1}); \; T_i(u_i) \le \inf_{v \in P} T_i(v) + \varepsilon \quad (6_{O-K})$$

где $T_i(v) = 2\langle z_i - \tilde{y}_i, f(t_i, \tilde{y}_i) v\rangle_{R^n} + \underset{\downarrow 0}{\alpha} |v|^2_{R^2}$

Теорема 4 (О сх-ти динамического метода Осипова-Кряжимского Т. 41, стр. 30)

Пусть вып. условие Т.1 и Т.2, наблюд. $\tilde{y}_i$ удовл. (3), $\tilde{u}$ выбирается по принципу (4), (5), (6_{O-K})

Тогда при $h, \delta, \alpha, \varepsilon \to 0$, то

$$\|z_h - y\|_{C[0,T]} = O(\sqrt{h + \delta + \alpha + \varepsilon}) \to 0 \quad (7_{O-K})$$

Если кроме того $\frac{h + \delta + \varepsilon}{\alpha} \to 0$ (8), то $\|\tilde{u} - u_*\|_{L^2(0,T)} \to 0$ (9)

Квадр. Евкл. норма $|v|^2_{R^2} = v_1^2 + \dots + v_2^2$ $(v_1, \dots, v_2)$

<u>Док-во</u> (схема):

Ф-ия (Ляпунова) $V(t) = |z_h(t) - y(t)|^2_{R^n} + \alpha \int_0^t |\tilde{u}(s)|^2 ds$ (*)

$$\underset{t\in(t_i,t_{i+1})}{V'(t)} = 2 \langle z_h(t) - y(t), \underbrace{\overbrace{z_h'(t) - y'(t)}^{\text{оп. }(T.1)}}_{\| (1),(5)} \rangle_{R^n} + \alpha \underbrace{|\tilde{u}(t)|^2_{R^2}}_{\| \ |u_i|^2_{R^2}}$$

$\mp z_i \mp \tilde{y}_i \mp y(t_i)$ $\quad h[f_i u_i + g_i] - [f u_*(t) + g]$

$$\underset{t\in(t_i,t_{i+1})}{V'(t)} = 2 \langle z_i - \tilde{y}_i, f_i u_i + g_i - f u_*(t) - g \rangle_{R^n} + \alpha |u_i|^2_{R^2} + O(h+\delta) \ (=)$$

$O(h+\delta)$ $\quad \mp f_i u_*(t)$

$f_i - f, \ g_i - g = O(h+\delta)$

$g_i = g(t_i, \tilde{y}_i)$, $g = g(t, y(t))$

$$(=) \ \underbrace{2 \langle z_i - \tilde{y}_i, f_i u_i \rangle + \alpha |u_i|^2_{R^n}}_{T_i(u_i)} - 2 \langle z_i - \tilde{y}_i, f_i u_*(t) \rangle_{R^n} + O(h+\delta) \le$$

$$\overset{(6_{o-k})}{\le} \underbrace{\inf T_i(v) + \varepsilon}_{\text{н.в.} \ \wedge \ u_*(t) \overset{\text{н.в.}}{\in} P} + O(h+\delta) - 2 \langle z_i - \tilde{y}_i, f_i u_*(t) \rangle_{R^n}$$

$T_i(u_*(t))$

$$\underset{t\in(t_i,t_{i+1})}{V'(t)} \overset{\text{н.в.}}{\le} O(h+\delta+\varepsilon) + \alpha |u_*(t)|^2_{R^2}$$

$$\int_0^t \Rightarrow \ V(t) \le \overbrace{V(0)}^{|\tilde{y}_0 - y_0|^2 = \delta^2} + O(h+\delta+\varepsilon) + \alpha \int_0^{t \le T} |u_*(s)|^2_{R^2} ds$$

$t \le T = \text{const}$

$$V(t) \le O(h+\delta+\varepsilon) + \alpha \underbrace{\|u_*\|^2_{L^2}}_{\text{const}}$$

$\Downarrow (7_{o-k})$

$$* \Rightarrow \ \longrightarrow \ \alpha \|\tilde{u}\|^2_{L^2} \le O(h+\delta+\varepsilon) + \alpha \|u_*\|^2_{L^2} \ \Big/ : \alpha$$

6

$$\|\tilde u\|^2_{L^2} \le \underbrace{\frac{O(h+\delta+\varepsilon)}{\alpha}}_{\xrightarrow{(8)} 0} + \|u_*\|^2_{L^2}$$

$$\overline{\lim}\, \|\tilde u\|^2 \le \|u_*\|^2$$

$$\tilde u \xrightarrow{\text{слабо}} u_* \longrightarrow \|\tilde u - u_*\| \longrightarrow 0 \qquad (9)$$

Схема заданий:

Дано диф. ур-е $y' = f(t,y)\,u(t) + \cancel{g(t,y)}$?

В момент врем. $t = t_i$ $\quad z_i$ – изв.

набл. $\tilde y_i$ – известно

ρ – задано

Параметр. α – задан, h – задан

($\varepsilon = 0$!) Задача (6) – абсолютно точно

Найти u_i и z_{i+1}

Схема Эйлера, 1 шаг

3.03.10

II Динамическое решение обратных задач для ур-ний в частных производных (УрЧП)

II.A Матем. аппарат

Модельные примеры:

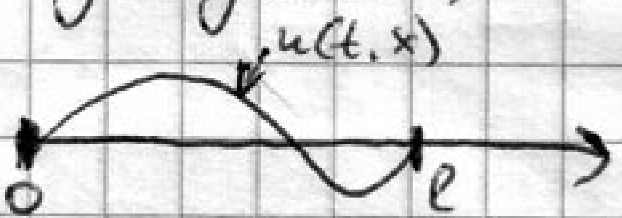
1) Параболическое ур-ние (теплопроводности)

$$\begin{cases} y_t = a^2 y_{xx} + u(t,x), & (t,x)\in Q = (0,T)\times(0,l) \\ y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0, & t\in(0,T) \\ y|_{t=0} = y_0(x), & 0<x<l \end{cases}$$

2) Модельная гиперболическая задача (колебания)

$$\begin{cases} y_{tt} = a^2 y_{xx} + u(t,x), & (t,x)\in Q \\ y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0, & t\in(0,T) \\ y|_{t=0} = y_0(x), \quad y_t|_{t=0} = y_1(x), & x\in(0,l) \end{cases}$$

$y = y(t,x)$



$y = y(t,x):\ (t,x)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto y(t,x)\in\mathbb{R}^1$

$y = y(t,\cdot):\ t\in\mathbb{R}^1 \longmapsto y(t,x)$ – ф-ция от x на $(0,l)$ (например, $y(t)\in L^2(0,l)$)

Если формально ввести $A: L^2(0,l)\to L^2(0,l)$
$(Af)(x) = -a^2 f''(x)$

$\Rightarrow$ Параболич. задача $\begin{cases} y'(t) + Ay(t) = u(t), & 0<t<T \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Гиперболич. задача $\begin{cases} y''(t) + Ay(t) = u(t) & 0<t<T \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y \end{cases}$

<u>Вопрос 1.</u> Как понимать y_{xx}? В смысле Соболева (обобщ. произв.)

Идея: если $f(x)\in C^2[0,l]$ и $\exists f'(x), f''(x)\in C[0,l]$, то

$\forall g(x)\in C^\infty[0,l] \Rightarrow \int_0^l f''(x)g(x)\,dx \overset{\text{по частям}}{=} \cancel{f'(x)g(x)\Big|_{x=0}^{x=l}} - \int f'(x)g'(x)\,dx =$

$\left.\begin{matrix} g(0)=0,\ g(l)=0 \\ g'(0)=0,\ g'(l)=0 \end{matrix}\right\}$ $\overset{\text{по частям}}{=} -\cancel{f(x)g'(x)\Big|_{x=0}^{x=l}} + \int_0^l f(x)g''(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^l f''(x)\, g(x)\,dx = \int_0^l f(x)\, g''(x)\,dx$$

$f(x) \in L^2$

<u>Опр</u> Обобщенная производная (ОП) по Соболеву порядка $m \in \mathbb{N}$ ф-ии $f(x) \in L^2(0,l)$ называется такая ф-ия $f_m(x) \in L^2(0,l)$, такая, что $\forall g(x) \in \dot{C}^\infty[0,l]$ выполняется

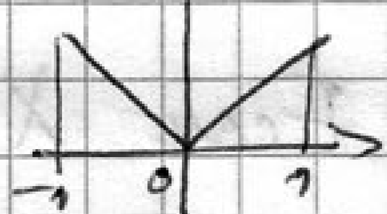
$$\int_0^l f(x)\, g^{(m)}(x)\,dx = (-1)^m \int_0^l f_m(x) \cdot g(x)\,dx$$

← финитность: $g(x)$ финитна на $[0,l]$, если $\exists\, \varepsilon > 0$ и $\delta > 0$: $g(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0,\varepsilon] \cup [l-\delta, l]$

$\dot{C}^\infty[0,l]$ всюду плотно в $L^2(0,l)$

Пример: $|x|$ имеет ОП $|x|'_x \in L^2(0,l)$

$$|x|'_x = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ -1 & x \in (-1,0) \end{cases}$$



но $|x|''_{xx}$ $\nexists$

$H^1(0,l)$ $(= W_2^1(0,l)) = \{ f(x) \in L^2(0,l) \mid \exists$ о.п. $f'(x) \in L^2(0,l)\}$ — гильбертово со скалярным произв. $\langle f, g\rangle_{H^1(0,l)} = \int_0^l (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))\,dx$

$H_0^1(0,l)$ $(= \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)) = \{ f \in H^1(0,l) \mid f(0) = 0,\ f(l) = 0\}$ — гильбертово пр-во со скалярным произв. $\langle f, g\rangle_{H^1(0,l)}$, но обычно (чаще) $\langle f, g\rangle_{H_0^1} = \int_0^l f'(x)\, g'(x)\,dx$ или $a^2 \int_0^l f'(x)\, g'(x)\,dx$

Если $\int_0^l \underbrace{|f'(x)|^2}_{\geq 0 \text{ п.в.}} dx = 0 \Rightarrow |f'(x)| \underset{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow f(x) = const$

$\Downarrow f(0) = f(l)$

$f(x) \equiv 0$

$H^2(0,l)$ $(= W_2^2(0,l)) = \{ f(x) \in L^2(0,l) \mid \exists$ о.п. $f'(x) \in L^2(0,l)$, $f''(x) \in L^2(0,l)\}$ — гильбертово пр-во со ск. произв.

$$\langle f, g\rangle_{H^2(0,l)} = \int_0^l \left(f(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f''(x)g''(x) \right) dx$$

$(Af)(x) = -a^2 f''(x)$ корр. опред. как. оператор:

$H^2(0,l) \to L^2(0,l)$

Удобнее оказывается ещё более обобщенное толкование этой операции

Что понимать под $[-a^2 f''(x)]$ в случае $f(x) \in H_0^1(0,l)$?

Если $\exists\ (-a^2 f''(x)) \in L^2(0,l)$, то $\forall g(x) \in H_0^1(0,l)$

$$\int_0^l (-a^2 f''(x))\, g(x)\, dx \underset{g(l)=0}{\overset{g(0)=0}{=}} a^2 \int_0^l f'(x) g'(x)\, dx \leftarrow \text{имеет}$$

смысл $\forall f \in H^1(0,l) \Rightarrow \forall f \in H_0^1(0,l)$

$\Rightarrow$ под $(-a^2 f''(x))$ понимается ф-ал над $H_0^1(0,l)$

__Опр__ Если X — нормированное, то сопряженное к нему пр-во X^* — это пр-во линейных непр (= огранич) функционалов над X

$X^* : L(X \to R^1)$

$$f_* \in X \Leftrightarrow \|f_*\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|x\|_X} < \infty$$

Значение $f(x)$ ф-ала $f \in X^*$ на эл-те $x \in X$ принято обозначать $\overset{\text{вообще это не ск. пр.}}{\langle \underset{X^*}{f}, \underset{X}{x} \rangle} = f(x)$ — не обязательно скалярное произв

Если $f(x) \in H_0^1(0,l)$, то под $(-a^2 f''(x))$ понимается ф-ал из $(H_0^1(0,l))^*$ и $\langle -a^2 f(\cdot), g(\cdot) \rangle = \underbrace{a^2 \int_0^l f'(x) g'(x)\, dx}_{\langle f, g \rangle_{H^1(0,l)}}$

$\forall g(x) \in H_0^1(0,l)$

$$\langle f, g \rangle_{H^1(0,l)} \overset{\text{Коши-Буняк}}{\leq} \|f\|_{H_0^1} \cdot \|g\|_{H_0^1}$$

$\Rightarrow \|-a^2 f''\|_{(H_0^1)^*} \leq \|f\|_{H_0^1} = \text{const} < \infty$

Абстрактная "параболическая" задача:

$$\begin{cases} y'(t) + \underbrace{Ay(t)}_{\in (H_0^1)^* \hookleftarrow \; \ni L^2(0,l)} = u(t), \quad 0<t<T \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$Ay(t) = (-a^2 y''_{xx})$

$$y(t) \in H_0^1(0,l)$$

Абстрактное параболическое ур-ние:

$$\begin{cases} y'(t) + \underbrace{Ay(t)}_{\in (H_0^1)^*} = \underset{L^2(0,l)}{\underset{\cap}{u(t)}}, \quad t \in (0,T) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Абстрактное гиперболическое ур-ние:

$$\begin{cases} y''(t) + Ay(t) = u(t), \quad t \in (0,T) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$(Af)'(x) = -a^2 f''(x) : C^2[0,l] \longmapsto C[0,l]$$

$$H^2(0,l) \longmapsto L^2(0,l)$$

$$H_0^1(0,l) \longmapsto (H_0^1(0,l))^*$$

рез-т применения ф-ла на эл-те

$$\langle \underset{(H_0^1)^*}{Af}, \underset{H_0^1}{\varphi} \rangle = a^2 \int_0^l \underbrace{f'(x)}_{L^2(0,l)} \varphi'(x)\, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(0,l)$$

Вложение $L^2(0,l) \subset (H_0^1(0,l))^*$

1) $H_0^1(0,l) \subset L^2(0,l)$

2) $(L^2(0,l))^* \underset{\text{Рисс}}{\simeq} L^2(0,l)$

Вложение $\underline{V \subset H} \simeq H^* \subset V^*$

V, H — гильбертовы пр-ва, $\overbrace{V \subset H}^{\text{Вложение}}$ — а) поэлементное

б) всюду плотное: $\forall f \in H, \forall \varepsilon > 0 \; \exists v_\varepsilon \in V : \|v_\varepsilon - f\| < \varepsilon$

в) непрерывное, т.е. тождественный оператор $I : V \to H$ непр.

$\|Iv\|_H \le \underset{\text{const}>0}{C} \|v\|_V \quad \forall v \in V$

Достроим цепочку $V \subset H \simeq \underbrace{H^* \subset V^*}_{\circledast}$

$\uparrow$ Рисс

Т. Рисса: Если H - гильбертово пр-во, $\forall f \in H^*$ $\exists ! \, h_f \in H$:

$\underbrace{\langle f, h \rangle}_{\overset{\shortparallel}{f(h)}} = \langle h_f, h \rangle_H \quad \forall h \in H$

причем $\|f\|_{H^*} = \|h_f\|_H$

Возможностью $V \simeq V^*$ не пользуемся

Объясним $\circledast$ $\quad H \simeq H^* \subset V^*$

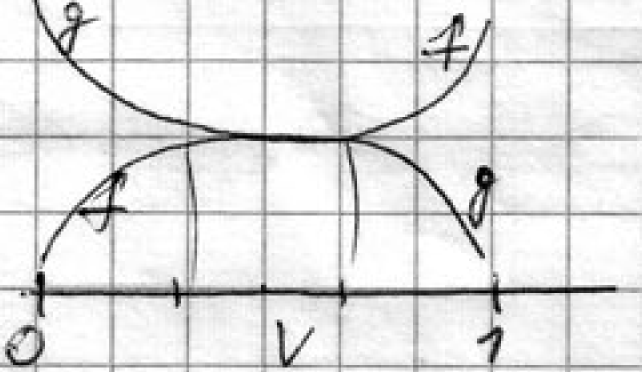
Возьмем $\forall f \in \underbrace{H \simeq H^*}_{\text{для нас одно и тоже}}$ - это лин. непр. ф-ал над H $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ это лин. ф-ал над $V \subset H$, непр. ли он на V? (Да)

Возьмем $\forall v \in V$ $\quad \Big| \langle \underset{H \simeq H^*}{\overset{\cap}{f}}, \underset{V}{\overset{\in}{v}} \rangle \Big|_{R^1} \overset{\text{Т. Рисса}}{=} \big| \langle f, v \rangle_H \big| \underset{\text{Коши-Буняк в } H}{\leq}$

$\leq \|f\|_H \cdot \|v\|_H \overset{V \subset H \text{ непр}}{\leq} \underbrace{\boxed{\|f\|_H \cdot C}}_{\overset{\shortparallel}{const > 0}} \cdot \|v\|_V \quad \Rightarrow H^* \subset V^*$

Замечание: если $f, g \in H^*$, $f \neq g$ в H^*, то $f \neq g$ в V^*
т.к. $V \subset H$ всюду плотное, т.е. не происходит слипание



В приложениях у нас $V = H_0^1(0, l)$, $H = L^2(0, l)$

$\underline{H_0^1(0,l)} \underset{\text{непр. всюду плотное}}{\overset{\neq}{\subset}} L^2(0, l) \simeq (L^2(0,l))^* \underset{\text{непр. всюду плотное}}{\underset{\neq}{\subset}} \underline{(H_0^1(0,l))^*}$

$H_0^1(0,l) \subset L^2(0,l)$ всюду плотно, т.к. $\underbrace{\overset{\circ}{C}{}^{\infty}[0,l] \subset H_0^1(0,l)}_{\text{всюду плотно в } L^2(0,l)}$

$H_0^1(0,l) \subset L^2(0,l)$ непр.: $\forall f(x) \in H_0^1(0,l)$

$$\|f\|^2_{L^2} = \int_0^l |f(x)|^2 dx = \int_0^l |f(x) - \underset{\overset{\|}{0}}{f(0)}|^2 dx \overset{\text{Ньютон-Лейбниц}}{=\!=}$$

$$= \int_0^l \left| \int_0^x 1 \cdot f'(\xi)\, d\xi \right|^2 dx \overset{\text{К-Б}}{\leq} \int_0^l \Big(\underbrace{\int_0^x 1^2 d\xi}_{=x} \Big) \cdot \Big(\int_0^{\overset{\leq l}{x}} |f'(\xi)|^2 d\xi \Big) dx \leq$$

$$\leq \frac{l^2}{2a^2} a^2 \int_0^l |f'(\xi)|^2 d\xi = \underbrace{\frac{l^2}{2a^2}}_{=\text{const}} \|f\|^2_{H_0^1}$$ Непр-ть вложений док-на

$$\forall f \in H^* \simeq H \qquad \|f\|_{V^*} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\overbrace{\langle f, v \rangle}^{=\langle f, v\rangle_H}|}{\|v\|_V} \underset{\text{К-Б}}{\leq}$$

$$\leq \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|f\|_H \overset{V \subset H \text{ непр}}{\|v\|_H \leq C \cdot \|v\|_V}}{\|v\|_V} \leq \underbrace{C}_{\text{Const та же}} \cdot \|f\|_{H = H^*} \quad \text{ч.т.д}$$

$$y'(t) + \underbrace{Ay(t)}_{\overset{\Uparrow}{(H_0^1(0,l))^*}} = \overset{\text{в } (H_0^1)^*}{u(t)} \in L^2(0,l) \subset (H_0^1(0,l))^*$$

Ф-ии со знач. в гильб. пр-вах. Измеримость по Бохнеру

H – гильб., $f(t): t \in [a, b] \to f(t) \in H$

<u>Опр</u> $f(t)$ непр (сильно) [слабо] в т. t_0, если $\forall t_n \to t_0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \|f(t_n) - f(t_0)\|_H = 0\right)$ $\left[\forall h \in H \quad \lim\limits_{n\to\infty} \langle f(t_n), h\rangle_H = \langle f(t_0), h\rangle_H\right]$

<u>Опр</u> $f(t)$ сильно дифф. в т. t_0, если $\exists f_1 \in H$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} - \underset{\overset{\|}{f'(t_0)}}{f_1} \right\|_H = 0$$

<u>Опр</u> Ф-ие $f(t): [a, b] \to H$ называется простой, если $\exists\ [a, b] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$, Ω_i – измер. по Лебегу, $\Omega_i \cap \Omega_j \overset{i \neq j}{=} \varnothing$: $f(t) \equiv \underset{\overset{\Uparrow}{H}}{f_i} = \text{const}$ на $t \in \Omega_i$, $i = \overline{1, n}$

Опр. $f(t)$ назыв. сильно измер. по Бохнеру, если $\exists$ посл-ть $f_k(t)$ простых : $\|f_k(t) - f(t)\|_H \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\overset{\circ}{\forall}$ $t \in [a,b]$

$\underbrace{\overset{\circ}{\forall}}_{\text{для почти всех}}$

Опр. $f(t)$ называется слабо измер. по Бохнеру, если $\forall h \in H$ $\langle f(t), h \rangle_H$ измер. по Лебегу на $[a,b]$

Теор 5 (т. 3.1. стр. 166) — без док-ва

Ф-ие $f(t) : [a,b] \to \underset{\text{гильб.}}{H}$ сильно измерима по Бохнеру $\Longleftrightarrow$ слабо измерима по Бохнеру

Измер. по Бохнеру $\equiv$ B-изм.

—"— Лебегу $\equiv$ L-изм.

Следствие $f(t)$ B-изм. на $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ $\forall h \in H$ $\|f(t) - h\|_H$ L-измерима

Св-ва B-изм. ф-ий.

M1. $f(t), g(t)$ B-изм $\Rightarrow$ $\forall \alpha, \beta$ $\alpha f(t) + \beta g(t)$ B изм

M2 $f(t)$ B-изм, $\alpha(t)$ L-изм $\Rightarrow$ $\alpha(t) f(t)$ B изм

M3 $f_k(t)$ B-изм и $f_k(t) \xrightarrow[\substack{k\to\infty \\ \text{слабо в}}]{\overset{\circ}{\forall} t\in[a,b]} f(t) \Rightarrow f(t)$ B изм

M4 $f(t), g(t)$ B изм $\Rightarrow$ $\langle f(t), g(t) \rangle_H$ L изм

Замечание $f(t)$ слабо непр на (a,b) $\Rightarrow$ $f(t)$ B изм.

17.03.10 **Интеграл Бохнера**

$f(t): [a,b] \to H$

Опр: Если $f(t)$ – простая, т.е. $\exists \{\underbrace{\Omega_i}_{L\text{-измеримые}}\}_{i=1}^{N}$:

$\bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_i = [a,b]$, $\Omega_i \cap \Omega_j \overset{i \neq j}{=} \varnothing$

$f(t) \equiv \overset{\in H}{f_i}$ $\quad t \in \Omega_i$, то $\quad (B) \int\limits_a^b f(t)\,dt = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i \underbrace{\mu(\Omega_i)}_{\geq 0}$

обозначение интеграл Бохнера

меры Лебега Ω_i

Опр Ф-ия $f(t)$ назыв интегрируемой по Бохнеру (B-инт.) на $[a,b]$, если $\exists \{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ простых:

1) $\|f_k(t) - f(t)\|_H \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \overset{\circ}{\forall} t \in [a,b]$ ($\Rightarrow f(t)$ – B-изм.)

2) $\forall k = 1, 2, \ldots \quad \exists (L) \int\limits_a^b \|f_k(t) - f(t)\|_H\,dt$

3) $\exists \lim\limits_{k\to\infty} (L) \int\limits_a^b \|f_k(t) - f(t)\|_H\,dt = 0$

При этом инт. Бохнера от $f(t)$ по $[a,b]$ называется

$\underbrace{\lim\limits_{k\to\infty} (B) \int\limits_a^b f_k(t)\,dt}$

$\|$ обознач.

$(B) \int\limits_a^b f(t)\,dt \in H$

Из 1), 2), 3) $\Rightarrow \exists$ и !

док-се знать не надо

<u>Теорема 6</u> (Бохнера, Т. 3.2, стр. 170) (без док-ва)

$f(t): [a,b] \to H$ B-инт. $\iff \begin{cases} f(t) & B\text{-измерима} \\ \|f(t)\|_H & L\text{-интегрируема} \end{cases}$

$f(t)$ – B инт.

Опр $\exists A \subset [a,b]$, A – L-измерима (тогда $\chi_A(t)$ – L-изм)

характеристич. ф-ия

$\chi_A(t) = \begin{cases} 1 & t \in A \\ 0 & t \in [a,b] \setminus A \end{cases}$

$$(B)\int_A f(t)\,dt \overset{def}{=} (B)\int_a^b \underbrace{\chi_A(t) f(t)}_{B-\text{интег.}}\,dt$$

Св-ва интеграла Бохнера:

B1 (линейность) $\forall f(t), g(t)$ B-инт., ~~[crossed out]~~ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$

$$\exists\ (B)\int_A (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha (B)\int_A f(t)\,dt + \beta (B)\int_A g(t)\,dt$$

B2. (аддитивность) $A_1, A_2 \subset [a,b]$, L-измеримы $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ($\forall A \subset [a,b]$ L изм)

$f(t)$ – B инт.

$$\Rightarrow (B)\int_{A_1\cup A_2} f(t)\,dt = (B)\int_{A_1} f(t)\,dt + (B)\int_{A_2} f(t)\,dt$$

B3. $$\left\| (B)\int_A f(t)\,dt \right\|_H \le (L)\int_A \|f(t)\|_H\,dt$$

B4. H_1, H_2 – гильбертовы, $T \in L(H_1 \to H_2)$

$f(t): [a,b] \to H_1$ – B-инт.

Тогда

$$\exists\ (B)\int_a^b Tf(t)\,dt = T\left((B)\int_a^b f(t)\,dt \right)$$

B5 ($\Leftarrow$ B4) $\forall h \in H$ $\quad \left\langle (B)\int_a^b f(t)\,dt, h \right\rangle_H = (L)\int_a^b \langle f(t), h\rangle_H\,dt$

$H = H_1$, $\mathbb{R}^1 = H_2$, $T \in L(H \to \mathbb{R}^1) = H^* \simeq H$

$$Tf = \langle f, h\rangle_H \quad (h - \text{фикс.})$$

Схема док-ва св-ва B4

$f(t)$ B-инт. $\Rightarrow \exists$ простые $f_k(t)$: $\|f_k(t) - f(t)\|_H \xrightarrow[k\to\infty]{\overset{\circ}{\forall} t} 0$ (выполн. св-ва 1) – 3))

Образы $\underset{\overset{\cap}{H_1}}{\underline{Tf_k(t)}}$: $[a,b] \to H_2$ простые $\underset{L-\text{инт.}}{}$

$$\|\underbrace{Tf_k(t)}_{\substack{L-\text{изм.}\\ (T.5)}} - \underbrace{Tf(t)}_{B\text{ изм.}}\|_H \le \underbrace{\|T\|}_{const} \cdot \underbrace{\|f_k(t) - f(t)\|_H}_{L-\text{инт}} \xrightarrow[k\to\infty]{\overset{\circ}{\forall} t} 0 \Rightarrow 1) \text{ вып.}$$

(*)

$\forall k = 1, 2, \ldots$ $\quad \|Tf_k(t) - Tf(t)\|_{H_2}$ – L-инт. $\Rightarrow$ 2) вып

$$(L)\int_a^b \|Tf_k(t) - Tf(t)\|_{H_2}\, dt \longrightarrow 0 \quad (*)$$

$$(B)\int_a^b Tf(t)\,dt = H_2 - \lim_{k\to\infty} (B)\int_a^b \underbrace{Tf_k(t)}_{\text{простые}}\,dt =$$

$$f_k(t) = f_{k_i},\ t\in\Omega_{k_i}\ \ i=\overline{1,N(k)}$$

$$= H_2 - \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{N(k)} Tf_{ki}\,\mu(\Omega_{ki}) = H_2 - \lim_{k\to\infty} T\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N(k)} f_{ki}\,\mu(\Omega_i)}\Big) =$$

в H_1 $\downarrow$ $k\to\infty$

$(B)\int_a^b f(t)\,dt$

$$\overset{T-\text{непр}}{=} T\Big(H_1 - \lim \sum_{i=1}^{N_k} \ldots\Big) = T\Big((B)\int_a^b f(t)\,dt\Big)$$

<u>Теорема 7</u> (о предельном переходе) (Т. 3.3, стр 175) (без док-ва)

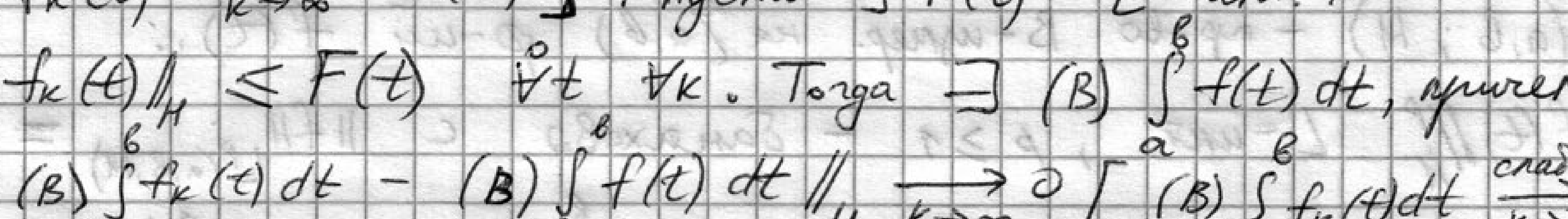
Пусть $f_k(t)$ B-инт. и $\|f_k(t) - f(t)\|_H \xrightarrow[k\to\infty]{\overset{\circ}{\forall} t} 0$ $\left[f_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{слабо в } H} f(t)\right]$. Пусть $\exists F(t)$ L-инт.: $\|f_k(t)\|_H \le F(t)$ $\overset{\circ}{\forall} t$ $\forall k$. Тогда $\exists\ (B)\int_a^b f(t)\,dt$, причем $\left\|(B)\int_a^b f_k(t)\,dt - (B)\int_a^b f(t)\,dt\right\|_H \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ $\left[(B)\int_a^b f_k(t)\,dt \xrightarrow[k\to\infty]{\text{слабо в } H} (B)\int_a^b f(t)\,dt\right]$

<u>Теорема 8</u> (Т. 3.4. стр. 177)

$f(t)$ B-инт. $\quad F(t) = (B)\int_a^t f(s)\,ds \left(= (B)\int_{[a,t]} f(s)\,ds\right)$

$$F(t): [a,b] \to H$$

Тогда $\overset{\circ}{\forall} t\ \exists\ F'(t) = \left(H - \lim_{\Delta t\to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}\right) = f(t)$



Замечание:

1) $f(t)$ слабо непр. на (a,b) $\not\Rightarrow$ $f(t)$ B-изм

$\left(f(t) = \frac{1}{t},\ t \in (0,1) \right)$

2) $f(t)$ сильно непр. на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f(t)$ B-изм

Обобщенная производная по t (типа Соболева)

Введем обозначения:

$C([a,b]; H)$ – ~~~~ ~~~~ пр-во непр. на $[a,b]$ H-значных ф-ий – банахово пр-во с $\|f\|_{C([a,b];H)} =$

$$= \max_{a \le t \le b} \|f(t)\|_H$$

$C^1([a,b]; H)$ – непр. дифф на $[a,b]$ ф-ии; банахово пр-во с

$$\|f\|_{C^1([a,b],H)} = \max_{a \le t \le b} \|f(t)\|_H + \max_{a \le t \le b} \|f'(t)\|_H$$

$L^p(a,b;H)$ – пр-во B-измер. на (a,b) ф-ий $f(t)$:

$\|f(t)\|_H^p$ L-инт., $p \ge 1$ – банахово с $\|f\|_{L^p(a,b,H)} =$

$$= \left((L) \int_a^b \|f(t)\|_H^p \, dt \right)^{1/p}$$

При $p = 2$ пр-во $L^2(a,b,H)$ – гильбертово с $\langle f, g \rangle_{L^2(a,b,H)} =$

$$= (L) \int_a^b \langle f(t), g(t) \rangle_H \, dt$$

Опр. Пусть $f(t) \in L^1(a,b,H)$ – B-инт. Ф-ие $g_m(t) \in L^1(a,b,H)$ назыв обобщ. произв (ОП) порядка $m = 1,2,\dots$ ф-ии $f(t)$, если $\forall \varphi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty[a,b]$, $\varphi(t): [a,b] \to \mathbb{R}^1$, $(B)\int_a^b f(t) \varphi^{(m)}(t)\,dt \overset{BH}{=}$

$$= (-1)^m (B) \int_a^b g_m(t) \varphi(t)\,dt$$

Обозн: $g_m(t) = f^{(m)}(t)$, $f'(t) = f^{(1)}(t)$, $f''(t) = f^{(2)}(t)$

24.03.10.

К/Р 31 марта
1) собств. числа для компакт. опер.
2) канонич. цепочка $V \subset H \simeq H^* \subset V^*$
3) на W^1, обобщ. дифф.

$$f(t) \in L^1(a,b;H)$$

$$(B)\int_a^b f(t)\,\varphi^{(m)}(t)\,dt = (-1)^m\,(B)\int_a^b \underbrace{f^{(m)}(t)}_{L^1(a,b,H)}\varphi(t)\,dt$$

$$\forall \varphi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty[a,b]$$

Параболич. абстр. ур-ние

$$(*)\begin{cases} y'(t) + Ay(t) = u(t), & 0<t<T \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Вспомним

Обобщенное решение $(*)$

первая произв. со знач. X
вторая — " — " — Y

$$H^1(0,l) \sim W^1(a,b,X,Y) = \{f(t) \in L^2(a,b,X) \mid \exists \text{ оп } f'(t) \in L^2(a,b,Y)\}$$ — гильбертово, если X, Y — гильберт.

$$\langle f,g\rangle_{W^1} = (L)\int_a^b \left(\langle f(t),g(t)\rangle_X + \langle f'(t),g'(t)\rangle_Y\right)dt$$

$$\underset{\text{непр}}{X \subset Y} \Rightarrow L^1(a,b,X) \underset{\text{непр}}{\subset} L^1(a,b,Y)$$

$$W^2(a,b,X,Y,Z) = \{f(t) \in L^2(a,b;X) \mid \exists \text{ оп } f'(t) \in L^2(a,b,Y),\ f''(t) \in L^2(a,b,Z)\}$$ — это гильбертово пр-во, если $X \underset{\text{непр}}{\subset} Y \underset{\text{непр}}{\subset} Z$ — гильб.

$$\langle f,g\rangle_{W^2} = (L)\int_a^b \left(\langle f(t),g(t)\rangle_X + \langle f'(t),g'(t)\rangle_Y + \langle f''(t),g''(t)\rangle_Z\right)dt$$

$$\begin{cases} y'(t) + \underbrace{Ay(t)}_{V^*} \overset{\text{почти всюду в } V^*}{=} \underbrace{u(t)}_{H \subset V^*}, & 0<t<T \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Решение $y(t) \in W^1(0,T,V,V^*)$

$$\underset{\substack{\text{всюду}\\\text{плотно}}}{V \overset{\text{непр}}{\subset} H} \underset{\text{Рисс}}{\simeq} H^* \underset{\substack{\text{всюду}\\\text{плотное}}}{\overset{\text{непр}}{\subset}} V^*$$

$$H_0^1(0,l) \qquad L^2(0,l)$$

Теорема 9 (т. 4.3, с. 195; т. 4.8, стр. 204)

Пусть $X \underset{\text{непр}}{\subset} Y$ — оба гильбертовых

Тогда 1) $W^1(a,b;X,Y) \underset{\text{непр в } Y}{\subset} C([a,b],Y)$ и

$$\forall f(t) \in W^1(a,b,X,Y) \quad \forall c,d \in [a,b]$$

$$f(d) - f(c) = (B)\int_c^d f'(t)\,dt$$

2) Пусть $V \overset{\text{непр}}{\underset{\substack{\text{всюду}\\ \text{плотно}}}{\subset}} H \simeq H^* \subset V^*$.

Тогда $W^1(a,b,V,V^*) \subset C([a,b],H)$ и $\forall f,g \in W^1(a,b;V,V^*)$ $\forall c,d \in [a,b]$

$$\left(W^2(a,b,V,H,V^*) \underset{\text{непр}}{\subset} C([a,b],H) \cap C^1([a,b],V^*)\right)$$

$$(L)\int_c^d \langle \underbrace{f'(t)}_{\in V^*}, \underbrace{g'(t)}_{\in V} \rangle\,dt = \langle \overbrace{f(d)}^{\in H}, \overbrace{g(d)}^{\in H} \rangle_H - \langle \overbrace{f(c)}^{\in H}, \overbrace{g(c)}^{\in H} \rangle_H - (L)\int_c^d \langle \underbrace{f(t)}_{\in V}, \underbrace{g'(t)}_{\in V^*} \rangle\,dt$$

гиперб. абст. ур-ие

$$\begin{cases} y''(t) + \overbrace{A\,y(t)}^{\in V^*} = \overbrace{u(t)}^{\in H \subset V^*}, \quad 0 < t < T \\ y(0) = y_0 \in H \\ y'(0) = y_1 \in V^* \end{cases}$$

(п.в. в V^*)

$\exists$ решения $y(t)$ будем док-ть методом Фурье с помощью разложений в ряды Фурье по собств. элементам оператора A

Требование к $A \in L(V \to V^*)$

1) A симметричен: $\langle \underbrace{Au}_{\in V^*}, \underbrace{v}_{\in V} \rangle = \langle \underbrace{u}_{\in V}, \underbrace{Av}_{\in V^*} \rangle$ $\forall u,v \in V$

В приложениях (в наших) $V = H_0^1(0,l)$, $H = L^2(0,l)$

$$V^* = \left(H_0^1(0,l)\right)^*$$

$Au = -a^2 u''(x)$ $\qquad y_t = a^2 y_{xx} + \dots$

$\langle Au, v\rangle = a^2 \int_0^l u'(x) v'(x)\,dx$ $= \langle u,v\rangle_{H_0^1(0,l)}$ — симметричность есть

2) A положительно определен.: $\exists \mu > 0$:

$\langle Au, u\rangle \geqslant \mu \|u\|_H^2 \quad \forall u \in V$

в прикл. зад $\langle Au, u\rangle = a^2 \int_0^l |u'(x)|^2 dx \overset{?}{\geqslant} \mu \int_0^l |u(x)|^2 dx$ $\exists$ ли $\mu \overset{?}{>} 0$

$H_0^1(0,l) \underset{\text{непр}}{\subset} L^2(0,l)$

3) Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ определено с помощью оператора A

$\langle u, v\rangle_V = \langle Au, v\rangle \quad \forall u, v \in V$ и вложение $V \subset H$ компактно

$\forall$ мн-во M, огранич. по $\|\cdot\|_V$ явл. предкомпактным в H, или $\forall$ посл-ти $v_n \in V$: $\|v_n\|_V \leq C = const$

$\exists$ подпосл-ть $\{v_{n_m}\} \subset \{v_n\}$, фундаментальная в H

(все фунд. посл-ти в H сходятся)

$\|v_{n_m} - v_{n_k}\|_H \xrightarrow[m,k \to \infty]{} 0$

$H_0^1(0,l) \overset{\text{компак.}}{\subset} C[0,l] \Rightarrow$

$\underset{\text{компак.}}{\subset} L^2(0,l)$

<u>Теорема 10</u> (т. 2.2. стр. 157)

$A: V \to V^*$

$\underset{\substack{\cap \\ V}}{Ae} = \lambda \underset{\substack{+ \\ 0}}{e}$ $\in V \subset V^*$ $\iff \forall v \in V \ \langle Ae, v\rangle = \langle \lambda e, v\rangle = \lambda \langle e, v\rangle_H$

$\overset{\cap}{V^*}$ Пусть $V \subset H \simeq H^* \subset V^*$, причем $\langle u, v\rangle_V = \langle Au, v\rangle$,

$A: L(V \to V^*)$ симм., полож. опред. и $V \subset H$ компактно

Тогда 1) у оператора A $\exists$ ОНБ собств. векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$\langle e_k, e_m \rangle_H = \delta \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$ такие, что соотв. собств.

числа $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \longrightarrow +\infty$

При этом $\left\{ \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ — ОНБ в V, а $\{\sqrt{\lambda_k}\, e_k\}_{k=1}^{\infty}$ —

ОНБ в V^*

2) $\forall u \in H \quad \|u\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2, \; u_k = \langle u, e_k \rangle_H \quad (1_H)$ р-во Парсеваля в H

$\forall u \in V \quad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2, \; u_k = \langle u, e_k \rangle_H \quad (1_V)$ —"— в V

$\forall u \in V^* \quad \|u\|_{V^*}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k^2}{\lambda_k}$, где $u_k = \langle \underset{\in V^*}{u}, \underset{\in V}{e_k} \rangle$

31.03.10

$V \underset{\text{комп}}{\subset} H \cong H^* \subset V^*$

$V = H_0^1(0,l)$

$H = L^2(0,l)$

т. Арцела

$H_0^1(0,l) \underset{\text{комп}}{\subset} C[0,l] \underset{\text{непр}}{\subset} L^2(0,l) \Rightarrow H_0^1(0,l) \subset L^2(0,l)$

$\forall M \subset H_0^1(0,l)$ — огр., т.е. $\exists R>0 : M \subset \{\|f\|_{H_0^1(0,l)} \leq R\}$

Тогда $\forall f(x) \in M$ и $|f(x)| \underset{f(0)=0}{\overset{\text{Н-Л}}{=}} \left| \int_0^x 1 \cdot f'(\xi)\, d\xi \right| \underset{\text{К-Б}}{\leq} \sqrt{\int_0^x 1^2 d\xi} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2}\int_0^{x \leq l} |f'(\xi)|^2 d\xi} \leq$

$Af = -a^2 f''(x)$

$\leq \frac{\sqrt{l}}{a} \|f\|_{H_0^1} \leq \frac{\sqrt{l}}{a} R = \text{const}$

$\max\limits_{0 \leq x \leq l} : \|f\|_{C[0,l]} \leq \frac{\sqrt{l}}{a} R$ — равномерная огр-ть

$\forall x, y \in [0,l] \quad |f(x) - f(y)| \overset{\text{Н-Л}}{=} \left| \int_x^y f'(\xi)\, d\xi \right| \overset{\text{К-Б}}{\leq} \frac{\sqrt{|x-y|}}{a} \cdot \underset{R}{\underset{\wedge|}{\|f\|_{H_0^1}}} \leq$

$\le \frac{R}{a} \; |x-y|^{1/2}$ — равностеп. (гельдер-) непр.

ОНБ Собств ф-ий $\left\{ \sin \frac{\pi k x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k = \left(\frac{\pi k a}{l} \right)^2$

Абстрактная „параболическая" управляемая система

$$(1)\quad \begin{cases} y'(t) + Ay(t) = u(t) & 0<t<T \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$V \underset{\text{всюду плотно}}{\overset{\text{непр}}{\subset}} H \overset{\text{Рисс}}{\simeq} H^* \subset V^*$$

$u(t) \in L(0,T;V^*)$ – могут быть δ-ф-ии

$A \in L(V \to V^*)$ – вып. усл. Т.10

$(Af = -a^2 f''(x))$

$y_0 \in H$

$\langle u,v\rangle_V = \langle Au, v\rangle$

$H = L^2(0,\ell)$, $V = H_0^1(0,\ell)$

Т.11 (т.3.1 стр.74, т.3.2 стр.78)

] V, H – 2 гильбертова пр-ва, рассм A...

$\forall u(t) \in L^2(0,T,V^*)$ $\forall y_0 \in H$ $\exists!$ реш. $y(t)$ задачи (1) в классе $W^1(0,T,V,V^*)$, причем справедлива оценка:

$$\|y\|_{W^1(0,T,V,V^*)} + \|y\|_{C([0,1],H)} \le C\left(\|y_0\|_H + \|u\|_{L^2(0,T,V^*)}\right) \quad (2)$$

Если, кроме того $u(t) \in L^2(0,T,H)$, $y_0 \in V$, тогда в доп. к (2)

$$\|y(t+\tau) - y(t)\|_H \le C\left(\|y_0\|_V + \|u\|_{L^2(0,1,H)}\right) \cdot \underbrace{|\tau|^{1/2}}_{\text{главное}}$$

Схема док-ва (оценки 2)

у A $\exists$ ОНБ с.в. $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, $e_k \in V$, $\underbrace{Ae_k}_{V^*} = \lambda_k e_k$

$$\underbrace{y_0}_{H} = \sum_{k=1}^\infty \underbrace{y_{0k}}_{\langle y_0, e_k\rangle_H} e_k, \quad \|y_0\|_H^2 \overset{(1_H)}{=} \sum_{k=1}^\infty y_{0k}^2$$

равенство Парсеваля

$$\underbrace{u(t)}_{V^*} \overset{\text{п.в.}t}{=} \sum_{k=1}^\infty \underbrace{u_k(t)}_{\langle \underset{V^*}{u(t)}, \underset{V}{e_k}\rangle} e_k = \left(\sum_{k=1}^\infty \langle u(t), \sqrt{\lambda_k}\, e_k\rangle_{V^*} \sqrt{\lambda_k}\, e_k\right)$$

Реш. $\underset{\in V\subset H}{}$ $y(t)$ задачи (1) ищем в виде ряда Фурье

$$y(t) = \sum_{k=1}^\infty y_k(t) e_k \to \text{в } (1)$$

$\Rightarrow$ распадающийся диффур 1 порядка для каждого y_k

$$(4)\ \begin{cases} y_k'(t) + \lambda_k y_k(t) = u_k(t), & 0<t<T \\ y_k(0) = y_{0k} \end{cases}$$

$$(5)\quad y_k(t) = y_{0k} e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} u_k(s)\,ds, \quad k = 1,2,\dots$$

$$\forall t \in [0,T] \quad \|y(t)\|^2 \underset{\text{T.П.О}}{\overset{(1_H)}{=}} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2(t) \overset{(5)}{\leq} \begin{cases} (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \\ (a+b)^2 \leq (1+\varepsilon)a^2 + (1+\varepsilon)b^2 \\ \forall \varepsilon > 0 \end{cases}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1+\varepsilon) y_{0k}^2 e^{-2\lambda_k t} + (1+\varepsilon)\left(\int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} u_k(s)\,ds\right)^2 \right] \overset{(\leq)}{=}$$

$$= \sum \left[(1+\varepsilon) y_{0k}^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\int_0^t e^{\lambda_k s} u_k(s)\,ds\right)^2 \right] e^{-2\lambda_k t}$$

$$\overset{\text{К-Б}}{\leq} \left(\int_0^t e^{2\lambda_k s}\,ds\right)\left(\int_0^t u_k^2(s)\,ds\right) \ (=)$$

$$(=)\ \frac{e^{2\lambda_k t} - 1}{2\lambda_k} \cdot \int_0^t u_k^2(s)\,ds$$

$\varepsilon = \varepsilon_k(t) = \left(e^{2\lambda_k t} - 1\right) > 0$ — большое!

$$(\leq)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(y_{0k}^2 + \frac{1}{2\lambda_k} \int_0^{t \leq T} u_k^2(s)\,ds \right) \underset{\text{T},10}{\overset{1_H, 1_{V^*}}{\leq}} \|y_0\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(0,T,V^*)}$$

Вывод $\quad \underset{H \times L^2(0,T,V^*)}{(y_0, u)} \to y \in C([0,T];H), \quad \|B\| \leq 1$

<u>Обратная задача</u>

$$\begin{cases} y'(t) + Ay(t) = u(t), & 0<t<T \\ y(0) = y_0 \in V \longrightarrow y(t) \text{ — неизв. — непр. по вр } (t) \end{cases} \quad (1)$$

$$u \in U = \{ u(t) \in L^2(0,T,H) \mid u(t) \underset{\substack{\text{вып. замк.}\\ \text{огр.}}}{\overset{\text{п.в.}}{\in}} P \subset H \} \quad (2)$$

$$\|\tilde{y}_i^{\in H} - y(t_i)\|_H \leq \delta \qquad i = \overline{0, N-1} \quad (3)$$

Ищем прибл. $\tilde{u}(t)$ к $u(t)$ — единств.

25

(4) $\quad u_* = u(t)$

$$\tilde{u} \in \tilde{U} = \{u \in U \mid \tilde{u}(t) \equiv \tilde{u}_i \in P, t \in (t_i, t_{i+1})\}$$

Траектория-поводырь $\tilde{z} = \tilde{z}(t)$ — это решение диф. задачи (а не разностной):

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{z}'(t) + A\tilde{z}(t) = \tilde{u}(t), \; 0<t<T \\ &\tilde{z}(0) = \tilde{y}_0 \end{aligned}\right| \quad (5)$$

$$V(t) = \|\tilde{z}(t) - y(t)\|_H^2 + \alpha \int_0^t \|\tilde{u}(s)\|_H^2 \, ds$$ — оценочный ф-ал Ляпунова

Далее $V'(t) \xrightarrow{\tilde{u}_i} \inf$

14.04.10

$$\begin{cases} y'(t) + Ay(t) = u(t), \; 0<t<T \\ y(0) = y_0 \in H \quad L^2(0,T,V^*) \end{cases} \quad (1)$$

<u>О единств.</u> Пусть $y_1(t), y_2(t)$ — реш. (1) из $W^1(0,T,V,V^*)$

$z(t) = y_1(t) - y_2(t)$

$$\left\{\begin{aligned} &z'(t) + Az(t) \overset{\text{п.в.}}{\underset{\text{в } V^*}{=}} 0, \; 0<t<T \\ &z(0) = 0 \end{aligned}\right| \int_0^t \langle \underset{V^*}{\cdot}, \underset{V}{z(s)} \rangle ds$$

$$\underbrace{\int_0^t \langle z'(s), z(s) \rangle ds}_{\text{Т.9}} + \int_0^t \underbrace{\langle Az(s), z(s) \rangle}_{A>0} ds = 0$$

$$\frac{1}{2}\|z(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\|z(0)\|_H^2}_{0} \qquad \mu\|z(s)\|_H^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0,T]$$

$$\frac{1}{2}\|z(t)\|^2 \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$z(t) \equiv 0$$

$$u \in U = \{u(t) \in L^2(0,T,H) \mid u(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} P \subset H\} \quad (2)$$

(P — вып. замкн. огр)

$$\|y(t_i) - \underset{H}{\tilde{y}_i}\|_{V^*} \leq \delta \quad (3) \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times\; 2 \\ \hline 52 \end{array}$$

$\cancel{\tfrac{9}{5+4}}$

$$\begin{cases} \tilde{z}'(t) + A\tilde{z}(t) = \tilde{u}(t) \\ \tilde{z}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{V}} = \{ \tilde{u}(t) \in \mathcal{V} \mid \tilde{u}(t) \equiv \overset{P}{\Downarrow}{u_i}, t \in (t_i; t_{i+1}) \} \quad (5)$$

$$V(t) = \|\tilde{z}(t) - y(t)\|_H^2 + \underset{\underset{0}{\vee}}{\alpha} \int_0^t \|\tilde{u}(s)\|_H^2 ds$$

$$V'(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 2 < \underbrace{\tilde{z}(t) - y(t)}_{\cap V}, \underbrace{\tilde{z}'(t) - y'(t)}_{\cap V^*} > + \alpha \underbrace{\|\tilde{u}(t)\|_H^2}_{\| \; \|u_i\|_H^2}$$

$t \in (t_i, t_{i+1})$

$\| (1), (4)$

$-A\tilde{z}(t) + \tilde{u}(t) + Ay(t) - u_*(t)$

$u_*(t)$ – единств. управл., генерирующее идеальную траекторию

$y(t) = y(t, u_*)$

$$V'(t) = -2 \underbrace{< A(\tilde{z}(t) - y(t)), \tilde{z}(t) - y(t) >}_{\overset{A>0}{\vee\!\!|}\ \mu \|\tilde{z}(t) - y(t)\|_H^2 \geq 0} + 2 < \tilde{z}(t) - y(t), \overset{u_i - ?}{\overset{\|\|}{\tilde{u}(t)}} - u_*(t) >_H + \alpha \|u_i\|_H^2$$

$\pm \tilde{z}(t) \pm \tilde{y}_i \pm y(t_i)$

$$V'(t) \underset{\text{т.11}}{\leq} \underline{\underline{O}}(\sqrt{h}) + \overbrace{2 < \tilde{z}(t_i) - \tilde{y}_i, u_i >_H + \alpha \|u_i\|^2}^{\varphi_i(u_i)} - $$
$$- 2 < \tilde{z}(t_i) - \tilde{y}_i, u_*(t) >_H \mp \alpha \|u_*(t)\|^2$$

$h = t_{i+1} - t_i$

Правило Ос-крест:

$$\varphi_i(v) = 2 < \tilde{z}(t_i) - \tilde{y}_i, v >_H + \alpha \|v\|_H^2$$

$$u_i \in P : \varphi_i(u_i) \leq \inf_{v \in P} \varphi_i(v) + \varepsilon \quad (6_{\text{О-К}})$$

<u>Т.12</u> (Т. 4.1, стр. 82–83)

Пусть в зад. (1) оператор $A \in L(V \to V^*)$ удовл. всем. усл. т. 10. $\exists$ ОНБ собств. вект., $y_0 \in V$, $\tilde{y}_0 \in V$ усл-я (3) вып. в виде $\|\tilde{y}_i - y(t_i)\|_H \leq \delta$, причем $\tilde{y}_i \in H$ $(i = 1, 2, \ldots)$

27 Пусть $\hat{u}(t)$ выбир. в соотв. с (4), (5), $(6_{\text{ОК}})$. Тогда

при $\alpha, \delta, h, \varepsilon \to 0 \quad \Rightarrow \|\tilde{z} - y\|_{C([0,T],H)} = \underline{\underline{O}}\left(\sqrt{\sqrt{h} + \delta + \varepsilon + \alpha}\right)$

а если, кроме того, $\dfrac{\sqrt{h} + \delta + \varepsilon}{\alpha} \to 0$, то

$\|\tilde{u} - u_*\|_{L^2(0,T,H)} \to 0$

$\underline{О\ док\text{-}ве}$ $\quad V'(t) \le \underline{\underline{O}}(\sqrt{h}) + \overset{+\delta}{\overline{\varphi_i(u_i)}} - \varphi_i(\underbrace{u_*(t)}_{\beta}) + \alpha \|u_*(t)\|_H^2$

$\overline{\varphi_i(u_i)} \overset{(6ок)}{\le} \inf\limits_{v \in \beta} \varphi_i(v) + \varepsilon$, $\quad \varphi_i(v) + \varepsilon - \varphi_i(u_*(t)) \le 0$

$\overbrace{\mp \tilde{y}_i \mp y(t_i)}^{= O(\delta)}$

$$V'(t) \le \underline{\underline{O}}(\sqrt{h} + \delta + \varepsilon) + \alpha \|u_*(t)\|_H^2 \quad \Big/ \int_0^t dt$$

$$V(t) = \|\tilde{z}(t) - y(t)\|^2 + \alpha \int \ldots$$

Абстр. гиперб. системы

$$\begin{cases} y''(t) + Ay(t) = \underset{\in L^2(0,T,H)}{\underline{u(t)}}, \ 0 < t < T \\ y(0) = y_0 \in V \\ y'(0) = y_1 \in H \end{cases} \qquad (1)$$

$A \in L(V \to V^*)$ и удовл. усл. Т.10

$\underline{Т.13}$ (Т. 1.1., стр. 93 + Т. 1.2 стр. 97)

$\forall y_0 \in V$, $y_1 \in H$, $u(t) \in L^2(0,T,H)$ у зад (1) $\exists!$ реш $y(t) \in W^2(0,T,V,H,V^*)$, причем $y(t) \in C([0,T],V)$ $y'(t) \in C([0,T];H)$ и верны оценки

$$\|y\|_{W^2(0,T,V,H,V^*)} + \|y\|_{C([0,T],V)} + \|y'\|_{C([0,T],H)} \le$$

$$\le \underset{const > 0}{C} \left(\|y_0\|_V + \|y_1\|_H + \|u\|_{L^2(0,T,H)} \right) \qquad (2)$$

и $\quad \|y(t) - y(s)\|_H \le \underbrace{C\left(\|y_0\|_V + \|y_1\|_H + \|u\|_{L^2(0,T,H)}\right)}_{L = const\ Lip} \cdot |t - s| \qquad (3)$

Кроме того

$$\|y'(t) - y'(s)\|_{V^*} \le C\left(\|y_0\|_V + \|y_1\|_H + \|u\|_{L^2(0,T;H)} + \|u\|_{L^\infty(0,T;H)}\right) \cdot |t-s| \quad (4)$$

у нас $u(t) \in$ р-огр. в H

Решение $y(t)$ задачи (1) представимо рядом Фурье

$$[\ldots] = y_k(t)$$

$$(5)\quad y(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[y_{0k}\cos(\sqrt{\lambda_k}t) + y_{1k}/\sqrt{\lambda_k}\cdot\sin(\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^t u_k(s)\sin(\sqrt{\lambda_k}(t-s))\,ds\right]e_k$$

$\Rightarrow$ (2) частично

$$\|y(t)\|_V^2 \overset{T.10}{\underset{(1_V)}{=}} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2(t)\lambda_k \overset{(5)}{\le}$$

$\forall t \in [0,T]$

$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$

$|\cos| \le 1$

$|\sin| \le 1$

$$\le 3\sum_{k=1}^{\infty}\left[y_{0k}^2\lambda_k + y_{1k}^2 + \frac{1}{\lambda_k}\lambda_k\underbrace{\left(\int_0^t u_k(s)\sin(\sqrt{\lambda_k}(t-s))\,ds\right)^2}\right]$$

$\Uparrow$ нер-во Коши-Буняковского

$$\left(\int_0^t u_k^2(s)\,ds\right)\underbrace{\left(\int_0^t \sin^2(\ldots)\,ds\right)}$$

$\Uparrow$ T — длина промежутка инт-я

$$\underset{(1_V),(1_H)}{\overset{T.10}{\le}} 3\left(\|y_0\|_V^2 + \|y_1\|_H^2 + \|u\|^2_{L^2(0,T,H)}\right) \quad \text{— ч.т.д.}$$

Т. О единственности $y(t)$

$z(t) = y_1(t) - y_2(t)$ — решение

$$\begin{cases} \underset{\in V^*}{z''(t)} + \underset{\in V^*}{A\underset{\in V}{z(t)}} = 0, \quad 0<t<T & z'(t) \in H \quad \forall t\in[0,T] \\ z(0) = 0, \quad z'(0) = 0 \end{cases}$$

Рассм. $Z(t) = \int_0^t z(s)\,ds \in V$, $Z'(t) = z(t) \in V$, $Z''(t) = z'(t) \in H$

$$\begin{cases} Z''(t) + AZ(t) = 0, \quad 0<t<T \\ Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\int \langle \cdot, Z'(s)\rangle\,ds$$

21.04.10

Теор 13 (оконч., о единств.)

$$\begin{cases} y''(t) + A(t) = u(t), \ 0<t<T \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1 \end{cases} \quad (1)$$

$y(t) \in W^2(0,T; V, H, V^*)$ $\qquad u(t) \in U = \{u(t) \in L^2(0,T;H) \ u(t) \overset{п.в.}{\in} P \subset H\}$ (2)

вып. замкн. огр. в H

$y_1 - y_2 = z$

$$\begin{cases} z''(t) + Az(t) = 0 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases}$$

$\int_0^t \langle \cdot, \underset{H}{z'} \rangle$

$Z(t) = \int_0^t z(s)\,ds \in W^2(0,T, V, V, H)$

$Z' = z$

$Z'' = z'$

$$\begin{cases} Z'' + AZ = 0 \\ Z(0) = 0, \ Z'(0) = 0 \end{cases}$$

$\int_0^t \langle \cdot, Z' \rangle$

$$\int_0^t \langle \underset{H}{Z''}(s), \underset{V}{Z'}(s) \rangle ds + \int_0^t \langle \underbrace{A \underset{V}{Z(s)}}_{V^*}, \underset{V}{Z'(s)} \rangle ds$$

Теор 9 (H-1, инт-е по частям)

$$\frac{1}{2}\underbrace{\|Z'(t)\|_H^2}_{\geq 0} - \frac{1}{2}\|\underbrace{Z'(0)}_{0}\|_H^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\langle AZ(t), Z(t) \rangle}_{\geq 0}$$

$$-\frac{1}{2}\underbrace{\langle AZ(0), Z(0) \rangle}_{0} = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

$Z'(t) = z(t) \equiv 0$

$\tilde{y}_i' \in H^{V^*}, \ \|\tilde{y}_i' - y'(t_i)\|_{V^*} \leq \delta \qquad i = \overline{1, N-1}$

$\tilde{y}_0 \in V, \ \|\tilde{y}_0 - y_0\|_H \leq \delta, \ \tilde{y}_0' \in H, \ \|\tilde{y}_0' - y'(0)\|_{V^*} \leq \delta$

$$\begin{cases} \tilde z''(t) + A\tilde z(t) = \tilde u(t) \\ \tilde z(0) = \tilde y_0, \quad \tilde z'(0) = \tilde y_0' \end{cases} \quad (4) \text{ поводырь}$$

$$\tilde u \in \tilde U = \{u \in U \mid u(t) \equiv \overset{?}{u_i} \in P, \ t \in (t_i, t_{i+1})\} \quad (5)$$

Оценочный функционал — Ф-ия Ляпунова \quad пар-р регуляриз.

$$V(t) = \|\overbrace{\tilde z(t) - y(t)}^{w(t)}\|_H^2 + \|\underbrace{\tilde z'(t) - y'(t)}_{w'(t)}\|_{V^*}^2 + \underset{\alpha \geqslant 0}{\alpha} \int_0^t \|\tilde u(s)\|_H^2 ds$$

$$\cancel{V'(t) \underset{t\in(t_i,t_{i+1})}{\overset{\text{п.в.}}{=}} 2\langle \tilde z(t) - y(t)}$$

$$w''(t) + Aw(t) = \tilde u(t) - u(t)$$
$$w(0) = \tilde y_0 - y(0)$$
$$w'(0) = \tilde y_0' - y'(0)$$

$$V'(t) \underset{t\in(t_i,t_{i+1})}{\overset{\text{п.в.}}{=}} \underbrace{2\langle w(t), w'(t)\rangle_H}_{\text{сокр с } (*)} + 2\langle w'(t), w''(t)\rangle_{V^*} + \alpha \|u_i\|^2$$

$$2\langle w', w''\rangle_{V^*} \overset{\text{т. Рисса для } V^*}{=}$$

$$= 2\langle J_V w', J_V w''\rangle_V \overset{\langle u,v\rangle_V = \langle Au, v\rangle}{=} 2\langle J_V w', \underset{I}{\boxed{AJ_V}} w''\rangle =$$

$J_V : V^* \to V$ — оператор Рисса

По Т. Рисса $\forall f \in V^* \ \exists!\, J_V f \in V$

$$\underbrace{\langle f, v\rangle}_{\forall v \in V} = \langle J_V f, v\rangle_V = \langle AJ_V f, v\rangle$$

$$\Rightarrow f = AJ_V f \quad \forall f \in V^*$$

$$\Rightarrow AJ_V = I$$

$$= 2\langle \underset{A^{-1}}{J_V} w', \underset{-Aw + \tilde u - u}{w''}\rangle = \underbrace{-2\langle A^{-1} w', Aw\rangle}_{-2\langle w, w'\rangle \text{ — сокр с } (*)} + 2\langle A^{-1} w', \tilde u - u\rangle$$

$$\Rightarrow V'(t) \overset{t\in(t_i,t_{i+1})}{=} 2\langle \underset{V}{A^{-1} \underset{H}{w'(t)}}, \underset{H}{\tilde u(t) - u(t)}\rangle_H + \alpha \|u_i\|_H^2 =$$

$$\tilde z'(t) - y'(t) \mp \tilde z(t_i) \mp \tilde y_i' \mp y'(t_i)$$

$$\overset{\varphi_i(v)\big|_{v=u_i}}{\Leftrightarrow}\ \overbrace{2\langle A^{-1}(\tilde z'(t_i)-\tilde y_i'),\ u_i\rangle_H+\alpha\|u_i\|_H^2}+$$

$$+\underline{\underline{O}}(\delta+h)\ -2\langle A^{-1}(\tilde z'(t_i)-\tilde y_i'),\ u(t)\rangle \ \le$$

Т.13, (3) и P-ор $\qquad \le \varphi_i(u(t))$

$$(6_{о-к})\quad \tilde u_i\in P:\ \varphi_i(u_i)\le \overbrace{\inf_{v\in P}\varphi_i(v)}+\varepsilon \quad \Big/\ \begin{matrix}\text{в кр}\\ \varepsilon=0\end{matrix}$$

$$\underset{(6о-к)}{\le}\quad \underline{\underline{O}}(\delta+h+\varepsilon)\ +\alpha\|u(t)\|_H^2$$

$$\int_0^t \Big/\qquad V(t)\le O(\delta+h+\varepsilon)\ +\alpha\|u\|^2_{L^2(0,T;H)}$$

Теорема 14 (Т.2.1, стр. 103)

Если $\tilde u(t)\equiv u_i$, $t\in(t_i,t_{i+1})$ выбир по $(6_{ок})$, то

при δ (погр), h (шаг сетки), ε (точн. реш.), $\alpha\to 0$

$$\max_{0\le t\le T}\Big(\|\tilde z(t)-y(t)\|_H\Big)+\max_{0\le t\le T}\|\tilde z'(t)-y'(t)\|_{V^*}\Big)=$$

$$=O\left(\sqrt{\delta+h+\varepsilon+\alpha}\right)$$

Если же $\dfrac{\delta+h+\varepsilon}{\alpha}\to 0$, то $\|\tilde u-u\|_{L^2(0,T;H)}\to 0$

кр − 1 задача $\qquad y_t=a^2y_{xx}+u(t,x)$

параболич или $\qquad y_{tt}=a^2y_{xx}+u(t,x)$
гиперболич. задача