Н.Л.ГРИГОРЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ НЕСКОЛЬКИМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика"

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1990

ББК 22.18
Г 83
УДК 519.6

Рецензенты:
кафедра высшей математики МФТИ,
член-корреспондент АН СССР А. Б. Куржанский

Григоренко Н. Л.

83 Математические методы управления несколькими динамическими процессами, - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 197 с.
ISBN 5-211-00954-1.

В учебном пособии рассматриваются задачи управления несколькими динамическими системами, которые описываются дифференциальными уравнениями. Особенность подобных задач - в неполноте информации о помехах, действующих на управляемые объекты. Приводятся методы построения алгоритмов управления и их реализация на ЭВМ. Разбирается большое количество модельных примеров. Изложен нетрадиционный математический аппарат, используемый при исследовании задач управления в условиях неопределенности. Для студентов вузов по специальности "прикладная математика".

Оглавление

0.1 Список основных обозначений

R^n евклидово n-мерное пространство;

$\|$x$\|$ евклидова норма x в R^n;

$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ скалярное произведение векторов x и y в R^n;

$S_p^n(a) = \{x | x \in R^n, \|x - a\| \leq \rho\}$ замкнутый шар радиуса ρ с центром в точке a в R^n

$\emptyset$ пустое множество;

$[a, b]$ интервал с концами a и b;

$A \cup B (A \cap B)$ объединение (пересечение) множеств A и B;

Int A внутренность множества A;

∂A граница множества A;

$c(A, \phi)$ опорная функция множества A;

$co\{A, B, C\}$ выпуклая оболочка системы множеств A,B,C;

$A + B$ алгебраическая сумма множеств A и B, $A + B = C = \{c | c = a + b, a \in A, b \in B\}$

$A \overset{*}{-} B$ геометрическая разность множеств A и B, $A \overset{*}{-} B = C = \{c | c + B \in A\}$

$E = E^n$ единичная матрица порядка n;

C_m^n число сочетаний из m по n чисел;

0.2 Предисловие

Настоящее учебное пособие возникло на материале курса лекций, читавшегося автором в течение ряда лет на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета. Книга задумана как пособие для студентов, специализирующихся в области прикладной математики. Цель пособия - ввести читателя в круг постановок задач управления несколькими динамическими процессами в условиях неопределенности и ознакомить его с математическими методами решения таких задач.

Из всего многообразия задач управления несколькими динамическими процессами в условиях неопределенности выбрана задача преследования группы преследователей и одного или двух убегающих и отобраны несколько наиболее содержательные и в то же время не слишком громоздких методов решения. На этих примерах показаны самые существенные проблемы, возникающие в процессе решения задач управления несколькими динамическими процессами в условиях неопределенности, и результаты, которые можно получить на этом пути.

Автор стремился не слишком сложно и в меру строго сформулировать задачу, установить существование ее решения, изучить его свойства и указать осуществимый на деле способ формирования управления, гарантирующего требуемый результат. Теория иллюстрируется модельными примерами. Они доводятся до обозримой качественной картины и вычислительных процедур.

Книга состоит из семи глав. В первой главе приведены постановки задач преследования и убегания для дифференциальных игр двух игроков, прямой метод Л. С. Понтрягина решения задача преследования и метод убегания Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко. Приведенные на их основе расчеты модельных примеров призваны создать четкое представление об условиях разрешимости соответствующих задач и возможных видах управлений, решающих эти задачи. Вторая глава содержит ряд постановок задач преследования для дифференциальных игр многих лиц. Третья глава содержит решение задач преследования - убегания для дифференциальных игр с простой динамикой: игры простого преследования - убегания, игры простого преследования на компакте, задачи уклонения от многих преследователей, решение игры трех преследователей и двух убегающих. В четвертой, пятой и шестой главах приведены достаточные условия разрешимости задач преследования в дифференциальных играх группы преследователей и одного или двух убегающих, методы группового преследования разнотипными объектами и достаточные условия разрешимости задачи преследования для дифференциальных игр с переменной структурой. В седьмой главе приведены достаточные условия разрешимости задачи преследования для дифференциальной игры группы преследователей и двух убегающих. В пособии затрагивается один из разделов теории дифференциальных игр, имеющий обширную библиографию. Список литературы, который приведен в конце книги, содержит лишь те работы, которые были непосредственно использованы в книге или близко примыкают к ней, дополняя ее содержание.

Нумерация формул (теорем, лемм, утверждений) в каждом параграфе самостоятельная и состоит из двух чисел: номера параграфа, порядкового номера формулы (теоремы, леммы, утверждения). При ссылке на формулу (теорему, лемму, утверждение) из другой главы, впереди добавляется третье число: номер главы, содержащей эту формулу (теорему, лемму, утверждение). Нумерация рисунков состоит из трех чисел: номера главы, номера параграфа, номера рисунка. В приложении приведены формулировки теорем, используемых пособии. Ссылки на них состоит из буквы П и цифры, порядкового номера утверждения в приложении.

Автор выражает глубокую благодарность академикам Л. С. Понтрягину, Е. Ф. Мищенко, А. Н. Тихонову, чл.-кор. АН СССР Р. В. Гамкрелидзе, А. Б. Куржанскому за внимание и поддержку при написании книги. Д. В. Аносову, В. И. Благодатскнх, Ф, П. Васильеву. В. А. Вязгнну, М. И. Гусеву, А. А. Григоренко, Р. П. Иванову, Ю. С. Ледяеву, М. С. Никольскому, Л. А. Петросяну, Е. С. Половинкнну, Б. Н. Пшеничному, Н. Ю. Сатимову, А. И. Субботину, Н, Н. Субботиной, Ф. Л. Черноусько, А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрнй. Б. М. Щедрину за многочисленные полезные дискуссии и советы, способствовавшие улучшению содержания книги.

Н. Л. Григоренко

0.3 Введение

Настоящее пособие посвящено математической теории управления. Она строит абстрактные модели управляемых процессов, исследует эти модели и способствует управлению на практике, особенно с использованием ЭВМ.

Обычная схема управляемой системы такова. Имеются объекты $F_1, ..., F_m$ состояние которых в каждый момент времени t описывается фазовой переменной $x_i, i = 1, ..., m$; i-й объект подвержен управляющему воздействию u_i. Воздействие u_i вырабатывается в органе управления U_i. На объекты действует помеха v от внешней среды V. Сведения о состоянии системы доставляются в орган управления информационной переменной y. Математический характер переменных $x_i, u_i, v, y_i, i = 1, .., m$ определяется природой системы.

Например, при управлении каскадом водохранилищ буква x_i может означать объем воды в i-м водохранилище, u_i - набор переменных, которые характеризуют пропуск воды из i-го водохранилища, v - приток воды в водохранилище, y - показания приборов [68, 69].

Термин "управление"и данная схема носят весьма общий характер. Почти всякий реальный процесс можно трактовать как управляемый. Например, в медицине объектами F_i могут стать органы человека, буква x_i обозначает набор объективных характеристик состояния i-го органа. Воздействием u_i может быть, например, доза лекарства. Помеху v составят прочие влияния на организм, не все из которых подвластны врачу. В качестве компонент вектора и могут выступать параметры объекта F_i о которых известно, что они принадлежат некоторому множеству [70]. Информационную переменную y составят данные обследования больного и т. д. При составлении и анализе долгосрочных планов сельскохозяйственного производства объектами F_i могут стать многолетние сельскохозяйственные культуры. Буква x_i может обозначать совокупность показателей: урожайность взрослых деревьев и концентрацию удобрений в почве. Воздействием u_i может быть количество удобрений, вносимых в единицу времени на единицу площади, моменты обновления посадок. Вектор помех v составят погодные условия, коэффициенты потерь удобрений, стоимость рубки старых деревьев и посадки новых на единице площади [71, 72]. В вопросе об определении сроков замены нескольких видов производственного оборудования объектами управления F_i могут быть объемы имеющегося оборудования. Буквой x_i обозначается совокупность величиу: физического износа оборудования, производственных затрат. Воздействием u_i может быть длительность планового периода, в течение которого рассматривается функционирование той или иной экономической цели. Помеху v составит влияние научно-технического процесса на спрос производимой продукции [73].

В настоящей книге мы рассматриваем системы, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями. Предполагается, что, знания о внешней среде V являются неполными. Вследствие недостатка информации о будущей помехе нельзя предсказать однозначно реакцию системы на управляющее воздействие. Поэтому мы ставим задачу о таком способе управления , который гарантирует желаемый результат даже при самом неблагоприятном влиянии внешней среды. Эти задачи включаются в круг дифференциальных игр.

Будем считать, что для каждой ($i = 1, ..., m$) управляемой системы назначены свой показателъ γ_i качества i-го процесса и положительное число γ_i^0. Пусть i-ый процесс рассматривается, начнная от момента t_0. Тогда показателем качества будет некоторый функционал, вычисляемый на реализациях движения $x_i(\tau)$, управления $u_i(\tau)$ и помехи $v(\tau)$ на отрезке времени $t_0 \leq \tau \leq t$. Требуется управлять так, чтобы показатели γ_i оказались в некоторые моменты $\theta_i \geq t_0$ равными значениям γ_i^0 .Цель управления выбирается некоторым "центром"для всей совокупности управляемых систем. Ею может быть , например, достижение каждой системой качества γ_i^0. В ряде моделей внешнее воздействие v по своему лиянию на изменения фазового вектора соизмеримо или даже превосходит влияние управляющего параметра u_i. То есть встречаются модели, в которых для любого наперед заданного i-го процесса существуют значения помех, при которых для i-й системы значение функционала γ_i^0 не может быть достигнуто ни при каком допустимом управлении u_i. Для таких процессов может быть поставлена задача о достижении не менее чем r, $1 \leq r \leq m$, системами соответствующих значений показателей γ_i^0, $i = 1, ..., r$. (Разумеется, задача приобретает четкий смысл лишь при условии строгого определения понятия допустимого способа управления. В данной книге это определение формализует практические способы регулирования на основе текущей информации о реализующихся значениях $v(t), x(t)$.)

Например, в случае задачи об управлении каскадом водохранилищ i-м целевым функционалом может быть величина ежесуточно вырабатываемой электроэнергии или объем воды, отпускаемой в i-м водохранилищ и нужды города, орошения, нормального функционирования водохранилищ, расположенных ниже по течению. При исследовании математических моделей в медицине i-м целевым функционалом может быть концентрация некоторых веществ в i-м органе человека . При составлении планов досрочного планирования i-м целевым функционалом может быть суммарная дисконтированная прибыль от производства i-й культуры. При определении сроков износа оборудования i-м функционалом может быть стоимость продукции, которая может быть произведена на данном оборудовании.

Теория дифференциальных игр возникла в результате математической идеализации технических задач [25, 7, 10]. Она использует специальную терминологию для обозначения управляемых параметров: управление преследователя (иногда игрока-союзника) и управление убегающего (иногда игрока-противника, иногда вектор неопределенных параметров) для выделения двух групп управляющих векторов. Первой группой векторов распоряжается лицо, управляющее динамической системой для достижения своей цели. Второй группой векторов оно распоряжаться не может, и информация о будущем изменении этих векторов неизвестна. Для того чтобы иметь конкретный пример, вообразим, что группа самолетов преследует одинокий самолет. Цель группы самолетов - догнать одинокий самолет, цель одинокого самолета- уйти от преследования. Каждый пилот управляет своим самолетом, имея в виду свою цель и пользуясь информацией о ситуации. Информация состоит из двух частей: первая - это полное знание технических возможностей всех самолетов, вторая - это сведения о поведении всех самолетов. Сведения о поведении самолетов могут включать в себя различные данные об их состоянии за период, предшествующий данному моменту, но ничего нельзя считать известным о будущем поведении самолетов, так как они управляемы, и в любой момент времени летчик может изменить положение рулей, изменив тем самым поведение самолета. В действительности, каждый из пилотов может получать сведения о самолетах лишь с некоторым запаздыванием, однако нет надобности включать это обстоятельство в идеализацию, более того, можно даже предполагать известным поведение одинокого самолета с некоторым опережением и строить математическую идеализацию на этой основе, а затем уже показать, что полученная теория может быть использована для приближенного решения реальной задачи.

Перейдем к математическому описанию процесса преследования группой преследователей одного убегающего [7]. В этом процессе участвует $m + 1$ управляемый объект: группа из m преследователей и один убегающий. Состояние каждого из объектов в любой момент, времени определяется его фазовым вектором. Фазовый вектор i-го преследователя обозначим x_i а фазовый вектор убегающего - y, уравнения объектов запишем в обычной форме:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i), i = 1, ..., m, \dot{y} = g(y, v), \tag{0.3.1}$$

где точка означает производную по времени, а u_i и v суть управления. Так как x_i, и являются фазовыми векторами, то каждый из них распадается на две части:

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}), y = (y_1, y_2),$$

где x_{i1}, y_1 определяют геометрическое положение объектов, а x_{i2} и y_2 - их скорости. Считается, что процесс преследования заканчивается в тот момент времени, когда наступает хотя бы при одном i равенство

$$x_{i1} = y_1 \tag{0.3.2}$$

т. е. тогда, когда объекты геометрически совпадают. Упомянутая ранее первая часть информации состоит из уравнений (0.3.1). Эти уравнения дают не сами движения объектов, а записывают лишь их возможности, так как при различных управлениях $u_i = u_i(t)$ и $v = v(t)$ мы получаем различные движения. Таким образом, в примере с самолетами уравнения (0.3.1) описывают технические возможности самолетов. Сам процесс преследования мы можем рассматривать с двух различных точек зрения.

1. Мы можем отождествлять себя с группой преследующих объектов. В этом случае наша цель заключается в завершении процесса преследования, и управление u_i, $i = 1, ..., m$, находится в нашем распоряжении для достижения этой цели. Таким образом, в каждый момент времени мы должны конструировать значения $u_i(t)$, $i = 1, ..., m$, управлений u_i, $i = 1, ..., m$, зная уравнение (0.3.1), т. е. первую часть информации, и используя вторую ее часть в виде знания функций $x_i(s), y(s), v(s)$ на отрезке $t - \theta \leq s \leq t$, где θ -подходящим образом выбранное положительное число.

2. Мы можем отождествить себя с убегающим объектом. В этом случае наша цель состоит в предотвращении конца преследования,

и управление v находится в нашем распоряжении для достижения этой цели. Таким образом, в каждый момент времени t мы должны конструировать значение $v(t)$ управления v, зная уравнение (0.3.1) , т. е. первую часть информации, и используя вторую ее часть в виде знания функций $x_i(s), y(s), u_i(s)$ на отрезке $t - \theta \leq s \leq t$.

Такова математическая идеализация процесса преследования, принадлежащая Л. С, Понтрягнну [1, 7], которую мы используем в этой книге и которая неизбежно расщепляет задачу на две задачи: задачу преследования и задачу убегания. Расщепление происходит из-за того, что при двух различных подходах мы используем различные информации.

Дифференциальная игра из процесса преследования возникает в результате естественного стремления упростить обозначения. Введем новые фазовые векторы $z_i = (x_i, y), i = 1, ..., m$ образуя m фазовых пространств R_i игры как прямых произведений фазовых пространств векторов x_i, y, и запишем m дифференциальных уравнений:

$$\dot{z}_i = F_i(z_i, u_i, v), i = 1, ..., m. \tag{0.3.3}$$

Соотношения (0.3.2) определяют в векторных пространствах R_i некоторые подмногообразия M_i. Теперь мы можем определить дифференциальную игру независимо от исходного процесса преследования. Дифференциальная игра группы преследователей и одного убегающего задана, если заданы ее фазовые векторные пространства R_i, уравнения (0.3.3), где $z_i \in R_i$ а F_i - некоторые функции трех переменных, причем u_i-i-е управление преследования, v -управление убегания, и сверх того в пространствах R_i заданы некоторые множества M_i на которых игра оканчивается.

Как и в случае процесса преследования, мы связываем с дифференциальной игрой две различные задачи.

1. Нашей целью является завершение игры, т. е. приведение хотя бы одной точки z_i на соответствующее множество M_i, при этом для осуществления этой цели в нашем распоряжении находятся управления преследователей u_i, так что в каждый момент времени t мы выбираем значения $u_i(t), i = 1, ..., m$, используя функции $z_i(s), v(s), i = 1, ..., m$ на отрезке $t - \theta \leq s \leq t$. Таковы правила игры преследования группы преследователей и одного убегающего.

2. Нашей целью является предотвращение конца игры, т. е. предотвращение прихода точек z_i, на множества M_i, при этом для осуществления этой цели в нашем распоряжении находится управление

v убегания, так что в каждый момент времени t мы выбираем значение $v(t)$ этого управления, используя функции $z_i(s)$ и $u(s)$ на отрезке $t - \theta \leq s \leq t$. Таковы правила игры убегания одного объекта от группы преследователей. Заметим, что дифференциальную игру, соответствующую процессу преследования группы преследователей и одного убегающего, можно записать и в более общем виде, введя новый фазовый вектор $\omega = (x_1, ..., x_m, y)$ пространства R, являющегося прямым произведением фазовых пространств векторов $x_1, ..., x_m, y$, новый вектор управления $u = (u_1, ..., u_m)$ и записывая уравнение (0.3.1) в виде одного уравнения:

$$\dot{\omega} = \Phi(\omega, u, v) \tag{0.3.4}$$

Соотношения (0.3.2) определяют в векторном пространстве R некоторые подмногообразия $M_i, i = 1, ..., m$. Дифференциальная игра с m терминальными множествами - задача управления при наличии неопределенных параметров с m терминальными множествами- определяется аналогично. Однако учет специфики дифференциальных уравнений вида (0.3.3) помогает при исследовании. В настоящей книге мы формулируем теоремы о разрешимости задач преследования и убегания вида (0.3.3). Соответствующие формулировки для игр вида (0.3.4) получаются непосредственно. Исследованию различных классов дифференциальных игр посвящены фундаментальные исследования советских ученых школ Л. С. Понтрягина [1-7, 18, 34-36, 47-48], Н. Н. Красовского [10-12, 16, 20-23, 39, 40], а также работы киевских [21, 22, 49-51] и ленинградских [44, 19, 67, 45] математиков. Они послужили основой для исследования задачи преследования несколькими игроками одного убегающего [14, 15, 17, 21, 22, 31-33, 41, 52, 55, 57, 62, 63]. Оказалось, что в зависимости от состава группы преследователей можно организовать процесс преследования так, что группа преследователей может окончить игру преследования, тогда как отдельные игроки либо отдельные подгруппы игроков убегающего поймать не могут. В настоящем пособии мы излагаем способы преследования, позволяющие эффективно распределить усилия каждого преследователя в зависимости от его динамических возможностей для успешного завершения игры, основанные на идее первого прямого метода Л. С. Понтрягина [2].

Приведенные в книге достаточные условия разрешимости задачи преследования иллюстрируются на примерах специального вида. Для удобства их классификации мы приведем для таких управляемых объектов понятие инерционности. В евклидовом пространстве R^ν

размерности $\nu \geq 1$ рассмотрим движения двух точек (игроков) x и y, которые задаются уравнениями

$$\begin{aligned} x^{(p)} + a_1 x^{(p-1)} + \dots + a_{p-1}\dot{x} + a_p x = u, \\ y^{(q)} + b_1 y^{(q-1)} + \dots + b_{q-1}\dot{y} + b_q y = v. \end{aligned} \tag{0.3.5}$$

Здесь $x^{(i)}$ и $y^{(i)}$ суть производные порядка i по времени t от векторов x и y, a_i, $i = 1, \dots, p$, $b_j, j = 1, \dots, q$, суть линейные отображения пространства R^ν в себя, а u и v - управляющие векторы, принадлежащие пространству R^ν и удовлетворяющие условиям $\|u\| \leq \rho$, $\|v\| \leq \sigma$.

Если $p = q$, то будем говорить, что инерционность игроков x и y равна; если $p > q$, то инерционность игрока x больше инерционности игрока y; если $p < q$-инерционность игрока x меньше инерционности игрока y. В случае $p = q$ будем говорить, что игрок x имеет большие, равные или меньшие динамические возможности по сравнению с игроком y, если $\rho > \sigma$, $\rho = \sigma$, $\rho < \sigma$ соответственно.

Изложение методов решения задач группового преследования-убегания мы начинаем в гл. 3 для объектов, обладающих простыми движениями. В § 1 приведены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования и убегания в случае равных динамических возможностей объектов при отсутствии фазовых ограничений (теорема Б. Н. Пшеничного [22]), в § 2 - в случае наличия фазовых ограничений (теорема Р. П. Иванова [15]). В § 3 показана разрешимость задачи убегания в том случае, если убегающий имеет большие динамические возможности по сравнению с преследователями (теорема Ф. Л. Черноусько [24]). В § 4 исследуется дифференциальная игра трех преследователей и двух убегающих, обладающих простыми движениями и одинаковыми максимальными скоростями. Описаны множества начальных позиций, из которых убегают оба убегающих; преследователи на свой выбор ловят любого из убегающих, а другой убегающий при этом убегает; один из двух убегающих убегает (независимо от воли преследователей), а второго преследователи ловят. Приведены стратегии игроков, решающие соответствующие задачи.

В гл. 4 приведены достаточные условия на параметры управляемой системы, при которых динамика преследователей позволяет, используя текущую информацию, так строить преследование, что позиция каждого из преследователей относительно убегающего в определенном смысле не ухудшается, и хотя бы для одного преследователя строго улучшается. Такие способы преследования мы называем способами гарантированного неухудшения позиции. Они эффективны в тех случаях, когда динамические возможности преследователей в определенном смысле близки к динамическим возможностям убегающего. Для тех случаев, когда среди преследователей есть игрокн, динамические возможности которых отличаются от динамических возможностей убегающего, возникает необходимость в методах преследования, более полно учитывающих специфику динамических возможностей отдельных преследователей. Изложению таких методов посвящена гл. 5.

В гл. 5 для различных вариантов состава группы преследователей предложены достаточные условия разрешимости задачи преследования, процедуры нахождения начальных позиций, для которых разрешима задача преследования, методы построения стратегий преследования, процедуры вычисления гарантированного времени преследования. Исследование задачи группового преследования для объектов, динамика которых описывается уравнением (0.3.5) с помощью метода покрытия гл. 5, § 1 показывает, что предлагаемый способ преследования позволяет исследовать примеры дифференциальных игр, в которых инерционность преследователей больше инерционности убегающего, и предписывает преследователям выходить в такие позиции, относительно которых терминальные множества покрывают область неопределенности убегающего, образующуюся в процессе игры. В § 2 приведен метод загонщиков для решения задачи преследования группой преследователей одного убегающего, получены достаточные условия разрешимости задачи группового преследования по предлагаемому методу. Исследование примеров показывает, что предлагаемый метод преследования позволяет решать дифференциальные игры, в которых среди преследователей есть игроки как с более высокой инерционностью, чем инерционность убегающего, так и игроки с такой же инерционностью, как инерционность убегающего, и может быть интерпретирован следующим образом. Такой способ преследования отводит роль загонщиков преследователям, имеющим либо более высокую инерционность, либо большие динамические возможности по сравнению с убегающим, другими словами, убегающий, уклоняясь от встречи с преследователями, имеющими превосходство, вынужден сближаться с остальными преследователями.

В § 3 предложен метод прочесывания для решения задачи преследования группой преследователей одного убегающего, получены достаточные условия разрешимости задачи группового преследования по предлагаемому методу. Такие условия эффективны, например, для примеров, в которых среди преследователей есть как игроки с такой же инерционностью как у убегающего, так и игроки с инерционностью, отличающейся от инерционности убегающего. Согласно методу прочесывания преследователи в процессе преследования разделяются на две группы, первая из которых удерживает убегающего в некоторой области (если убегающий выходит из этой области, он будет пойман), а вторая осуществляет прочесывание этой области, гарантирующее поимку убегающего в случае его нахождения в этой области.

В § 4 задача преследования группой преследователей одного убегающего рассматривается для процесса преследования. Получены достаточные условия разрешимости задачи об окончании процесса преследования и способ взаимодействия преследователей, предполагающий разделение преследователей на две группы, взаимодействующих таким образом, что убегающий, уклоняясь от встречи с преследователями первой группы, вынужден пересекать некоторое множество в фазовом пространстве, на котором его в таком случае поймают игроки второй группы. Такие условия позволяют исследовать примеры дифференциальных игр, в которых среди преследователей есть как игроки с равными динамическими возможностями по сравнению с убегающим, так и игроки с инерционностью или динамическими возможностями, отличающимися от инерционности или динамических возможностей убегающего. В § 5 изложен способ преследования несколькими разнотипными объектами для решения задачи преследования в дифференциальной игре группы преследователей и одного убегающего, получены достаточные условия разрешимости задачи группового преследования по предлагаемому способу. При исследовании примеров такие условия эффективны при наличии среди преследователей трех подгрупп игроков: у первой группы динамические возможности совпадают с динамическими возможностями убегающего, у игроков второй группы они больше, у игроков третьей группы они меньше. Предлагаемый способ взаимодействия преследователей в процессе преследования может быть охарактеризован следующим образом. Среди преследователей выделяются три подгруппы игроков, первая из которых сковывает действия убегающего, заставляя его находиться в некоторой области (иначе, он будет пойман), игроки второй подгруппы играют роль загонщиков, т. е., уклоняясь от встречи с ними, убегающий вынужден сближаться с игроками первой и третьей подгрупп, а игроки третьей подгруппы ведут поиск убегающего в определенной области.

Глава 6 состоит из двух параграфов. В ней излагаются методы группового преследования в дифференциальных играх группы преследователей и одного убегающего с переменной структурой. В § 1 исследуется дифференциальная игра группы преследователей и одного убегающего, в которой в управление убегающего входит момент переключения с одной управляемой системы из другую, при этом порядок переключения фиксирован. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования в дифференциальной игре с переменной структурой, управляемой убегающим.

В § 2 рассматриваются дифференциальные игры группы преследователей и одного убегающего в том случае, когда в распоряжении каждого из преследователей находится выбор одной из двух систем, описывающих динамику игры, и момента переключения с одной системы на другую, при этом переключаться разрешается не более одного раза. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования в дифференциальной игре с переменной структурой, управляемой преследователями.

В гл. 7 исследуются дифференциальные игры группы преследователей и двух убегающих. Приведены достаточные условия разрешимости задачи поимки обоих убегающих за конечное время. Предлагаемый способ преследования предполагает выделение двух групп преследователей, первая из которых может поймать одного убегающего за конечное время, а вторая, если она сама второго убегающего не ловит, может обеспечить такие позиции игры в момент поимки первой группой первого убегающего, что вместе они ловят второго убегающего.

Глава 1

Дифференциальные игры двух игроков

1.1 Дифференциальная игра преследования - уклонения двух игроков

В теории дифференциальных игр преследования и убегания рассматривается движение конфликтно управляемого объекта z, описываемое в n-мерном евклидовом пространстве R^n следующим уравнением:

$$\dot{z} = F(z, t, u, v), \tag{1.1.1}$$

где $z \in R^n$, $u \in P \subset R^p$; P, Q - компакты из евклидовых пространств R^p, R^q. Вектор u находятся в распоряжении игрока, которого мы будем называть догоняющим. Вектор v находится в распоряжении другого игрока, которого мы будем называть убегаюшнм. Движение начинается при $t = t_0$ из начального состояния (z_0, t_0) и протекает под воздействием измеримых по Лебегу функций $u(t) \in P$,$v(t) \in Q$. Относительно векторной функции $F(z, t, u, v)$ будем предполагать, что она определена и непрерывна на $R^n \times R^1 \times P \times Q$ на каждом компакте $K \subset R^n \times R^1$ и всевозможных $u \in P, v \in Q$ удовлетворяет условию Липшица $\|F(z', t, u, v) - F(z'', t, u, v)\| \leq \lambda_k \|z' - z''\|$,где λ_k - константа, зависящая от K; и удовлетворяет следующему неравенству: $\|F(z, t, u, v)\| \leq C_1(t)(1 + \|z\|)$, где $C_1(t)$-непрерывная функция. Эти условия обеспечивают существование, единственность и продолжимость при всех $t \geq t_0$ решения задачи Коши: $\dot{z} = F(z, t, u(t), v(t))$, $z(t_0) = z_0$ в классе абсолютно непрерывных функций при произвольных измеримых $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$.

В R^n выделено некоторое непустое замкнутое множество M, которое называется терминальным. Цель догоняющего -добиться по возможности быстрее выполнения включения $z(t_1) \in M$ при некотором $t_1 \geq t_0$. В момент первого попадания точки $z(t)$ на M преследование считается законченным. Убегающий стремится отдалить момент попадания $z(t)$ на M, или, если это возможно, обеспечить при всех $t \geq t_0$ условие $z(t) \notin M$. Таким образом, цели игроков не совпадают, и точка $z(t)$ находится под воздействием противоборствующих управлений $u(t), v(t)$.

Физической моделью для дифференциальных игр преследования и убегания является задача преследования одним объектом x (догоняющим) другого объекта y (убегающего). Пусть динамические возможности объекта x описываются уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1.1.2}$$

где $x \in R^k$, $u \in P \subset R^p$, а динамические возможности объекта y описываются уравнением

$$\dot{y} = g(y, t, v), \tag{1.1.3}$$

где $y \in R^l$, $v \in Q \subset R^p$. В $R^n = R^k \times R^l$ выделено замкнутое множество M. Преследование считается законченным, когда вектор $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ впервые попадет на M. Полагая $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ уравнения (1.1.2),(1.1.3) можно записать в виде (1.1.1). Отметим, однако, что дифференциальная игра (1.1.1) (если не сделано специальных предположений относительно $F(z, t, u, v)$) имеет более общий характер, нежели игра (1.1.2), (1.1.3), так как в последние уравнения u, v входят разделенным образом, что Нередко существенно упрощает исследования.

Другой физической моделью для дифференциальных игр преследования и убегання является задача управления объектом при наличии помех, возмущений, которые невозможно вычислить до начала процесса и влияние которых сказывается в ходе управления. В роли противодействующего фактора целям управления игрока здесь выступает природа. Простым примером, поясняющим сказанное, является следующий. Рассмотрим управляемый объект вида $\dot{z} = f(z, t) + A(v)u$, где $u \in P \subset R^p$,$A(v)$ - непрерывная по $v \in Q \subset R^p$ матрица. Здесь u - вектор, находящийся в распоряжении управляющего системой, v - вектор, моделирующий помехи, возмущения, независящий от управляющего системой. Таким образом можно учесть, например, явления типа люфта.

Следуя Л. С. Понтрягииу [1-3], мы будем отдельно рассматривать дифференциальную игру (1.1.1) с точки зрения догоняющего и с точки зрения убегающего. При **первом подходе** предполагается, что догоняющий знает:

1) динамические возможности конфликтно управляемого объекта z, т. е. знает функцию $F(z, t, u, v)$ множества P, Q;

2) начальное состояние игры (z_0, t_0);

3) $v_t(.)$ функцию $v(s)$ при $t_0 \leq s \leq t$, где t - текущий момент игры. Определим **стратегию догоняющего** $u(t) = U(z_0, t_0, v_t(.))$ как отображение, определенное на множестве произвольных измеримых функций $v(t) \in Q, t \geq t_0$, и обладающее следующим свойством: для произвольной измеримой $v(t) \in Q; t \geq t_0$, функция $u(t) = U(z_0, t_0, v_t(.))$ измерима по t и $u(t) \in P$.

Важными для приложений являются следующие задачи.

Задача А. Найти начальные состояния (z_0, t_0), для которых догоняющий обладает такой стратегией, что она обеспечивает окончание преследования для произвольной измеримой $v \in Q$ не позже некоторого конечного момента. Такие состояния (z_0, t_0) далее мы называем решениями задачи A.

Если данная начальная точка (z_0, t_0) принадлежит множеству $\mathfrak{U} = \{(z, t)\} \subset R^{n+1}$, состоящему из решений задачи A с гарантийной оценкой $t_1 \leq \tau(z_0, t_0)$, то будем говорить, что из этой начальной точки догоняющий может завершить преследование за время $\tau(z_0, t_0) - t_0$, а время $\tau(z_0, t_0) - t_0$ будем называть гарантированным временем преследования.

Замечание 1. Для построения преследующего управления мы разрешили использование функции $v_t(.)$. В приложениях убегающий вряд ли будет сообщать свое управление $v_t(.)$, так как это снижает его возможности для уклонения. С точки зрения физической сути задачи преследования предположение о знании $v_t(.)$ является нежелательным. Тем не менее введение такого предположения может быть оправдано в общем случае тем, что результаты, полученные при таком предположении, можно, как правило, использовать для позиционного способа управления с использованием процедуры управления с поводырем Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [11], т. е. при замене предположения о знании функции $v_t(.)$ на предположение о знании лишь текущей позиции игры $(z(t), t)$. **При втором подходе** предполагается, что убегающий знает:

1) динамические возможности объекта z, т. е. знает функцию $F(z, t, u, v)$ множества P, Q;

2) начальное состояние игры (z_0, t_0);

3) $u_t(.)$- функцию $u(s)$ при $t_0 \le s \le t$, где t -текущий момент игры.

Определим **стратегию убегающего** $v(t) = V(z_0, t_0, u_t(.))$ как отображение, определенное на множестве произвольных измеримых функций $u(t) \in P$ и обладающее следующим свойством: для произвольной измеримой $u(t)$, $t \ge t_0$, функция $v(t) = V(z_0, t_0, u_t(.))$ измерима по t и $v(t) \in Q$.

Важной для приложений является следующая

Задача Б.Найти начальные состояния (z_0, t_0), для которых убегающий обладает такой стратегией, что она обеспечивает бесконечную продолжительность игры, т. е. $z(t) \notin M$ при всех $t \ge t_0$ при произвольной измеримой $u(t) \in P$.

Такие состояния (z_0, t_0) далее мы называем решением задачи Б.

Если (z_0, t_0) принадлежит множеству $\mathfrak{B} = \{(z, t)\} \subset R^{n+1}+]$, состоящему из решений задачи Б, то будем говорить, что из этой начальной точки убегающий может обеспечить убегание.

Замечание 2.Для построения убегающего управления используется знание функции $u_t(.)$. Далее можно легко переформулировать замечание 1 применительно ко второму подходу к игре (1.1.1).

Определим **глобальную стратегию убегающего** $v(t) = V(z_0, t_0, u_t(.))$ как оператор, определенный для всех (z_0, t_0), где $z_0 \notin M$, и произвольных измеримых $u(t) \in P$, причем такой, что при любых фиксированных (z_0, t_0), $z_0 \notin M$, $v(t) = V(z_0, t_0, u_t(.))$ является стратегией убегающего.

Задача В. Для игры (1.1.1) с терминальным множеством M найти такую глобальную стратегию убегающего, что с ее помощью убегающий может обеспечить убегание из всех начальных состояний (z_0, t_0),$z_0 \notin M$.

Если глобальная стратегия убегающесо $V(z_0, t_0, u_t(.))$ является решением задачи В, то будем ее называть **глобальной стратегией убегания.**

Задачи А, Б, В иногда называют задачами качества.

Для теории дифференциальных игр и ее приложений большое значение имеет исследование отдельных конкретных задач. В теории дифференциальных игр преследования и убегания хорошо известным является, например, контрольный пример Л.С.Понтрягина [1]

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = \rho u, \ddot{y} + \beta\dot{y} = \sigma v, \tag{1.1.4}$$

где x, y, u, $v \in R^\nu$, $\nu \ge 1$, $\alpha, \beta, \rho, \sigma \in R^1$, $\|u\| \le 1, \|v\| \le 1$, α, β, ρ, $\sigma > 0$. Фазовым пространством этой игры является $R^{4\nu}$, в котором z определяется соотношением $z = (x, \dot{x}, y, \dot{y})$. Уравнения (1.1.4) описывают движения двух инерционных точек с учетом сил трения. Точка x - догоняющая, а точка y - убегающая.

Более общей задачей является задача преследования объектом x:

$$x^{(p)} + a_1 x^{(p-1)} + ... + a_{p-1}\dot{x} + a_p x = u \tag{1.1.5}$$

объекта y:

$$y^{(q)} + b_1 y^{(q-1)} + ... + b_{q-1}\dot{y} + b_q y = v \tag{1.1.6}$$

где p, q, a_i, b_j - постоянные числа $i = 1, ..., p, j = 1, ..., q$, $v \in Q$, $u \in P$, P, Q- выпуклые компакты из R^ν. Фазовым пространством этой игры является $R^{(p+q)\nu}$, в котором z определяется уравнением $z = (x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(p-1)},$
$y, \dot{y}, \ddot{y}, ..., y^{(p-1)})$. Игры вида (1.1.5) , (1.1.6) были введены в обиход теории дифференциальных игр Л. С. Понтрягиным.

Сформулированные нами задачи А-В не исчерпывают круг основных задач теории дифференциальных игр преследования и убегания. Возможны другие подходы к дифференциальным играм, другие их формализации, другие предположения об информированности игроков и другие постановки задач, вытекающие из них [10,11,51,25]. Среди уравнений (1.1.1) выделим квазилинейный случай:

$$\dot{z} = A(t)z + f(t, u, v), z(t_0) = z^0, \tag{1.1.7}$$

и линейный стационарный случай:

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, z(0) = z^0, \tag{1.1.8}$$

Здесь в случае уравнения (1.1.7) $f(t, u, v)$- непрерывная векторная функция; $A(t)$ - квадратные матрицы, непрерывно зависящие от t; в случае уравнения (1.1.8) A, B, C-постоянные матрицы, $u \in P \subset R^p, v \in Q \subset R^q$, P, Q- выпуклые компакты.

Отметим, что в стационарных играх можно считать $t_0 = 0$, поэтому для таких игр в дальнейшем t_0 не пишется в качестве аргументов соответствующих операторов.

Будем считать, что

$$M = M^1 + M^2, \tag{1.1.9}$$

где M^1-линейное подпространство пространства R^n, M^2- выпуклый компакт, $M^2 \subset L^1$, $L^1 \oplus M^1 = R^n$; π- оператор ортогонального проектирования из $R^n \to L^1$. Перейдем к изложению методов решения задач А-В.

1.2 Первый прямой метод преследования Л.С.Понтрягина.

Рассмотрим задачу A для линейной дифференциальной игры преследования (1.1.8). Обозначим

$$P(\tau) = \pi e^{\tau A} BP, Q(\tau) = \pi e^{\tau A} CQ$$

Пусть $D(\tau)$-квадратная матрица размерности $v = dim L^1$, непрерывным образом зависящая от $\tau, \tau \geq 0$. При $\tau \geq 0$, $t \geq \tau \geq 0$, рассмотрим множества

$$\hat{\omega}(\tau) = P(\tau) - D(\tau)Q(\tau) = \bigcap_{v \in Q} (P(\tau) - D(\tau)\pi e^{\tau A} Cv), \qquad (1.2.1)$$

$$M^3(t) = M^2 \overset{*}{-} \int_0^t (D(\tau) - E)\pi e^{\tau A} CQ d\tau \qquad (1.2.2)$$

Предположение 2.1. Для дифференциальной игры (1.1.8) существует матрица $D(\tau)$, непрерывно зависящая от τ, такая, что множество $\hat{\omega}(\tau)$ непусто при $0 \leq \tau \leq \Theta$, множество $M^3(t)$ непусто при $0 \leq \tau \leq \Theta$, где Θ - некоторое положительное число.

Это предположение является основным в первом прямом методе Л. С. Понтрягнна. Если оно не выполнено (т. е. не существует матрицы $D(\tau)$ и отрезка $[0, \Theta]$, где $\Theta > 0$, для которых $\hat{\omega}(\tau)$ и $M^3(t)$ непусты одновременно), то метод не работает. Непустота множества $\hat{\omega}(\tau)$ при данном $\tau \geq 0$ "физически"означает наличие некоторого превосходства догоняющего над частью ресурса убегающего (например, $D(\tau) = d(\tau)E$, где $d(\tau)$ - непрерывная функция, $0 \leq d(\tau) \leq 1$, E - единичная матрица). Непустота множества $M^3(t)$ при данном $t \geq 0$ "физически"означает массивность терминального множества. Рассмотрим при данном $z_0 \in R^n$ следующее включение при $t \in [0, \Theta]$:

$$\pi e : tAz_0 \in M^3(t) + \int_0^t (-\hat{\omega}(\tau)) d\tau. \qquad (1.2.3)$$

Теорема 2.1. Пусть для дифференциальной игры (1.1.8) выполнено предположение 2.1 и для данной точки $z_0 \notin M$, хотя бы при одном $T = T(z_0) \in [0, \Theta]$, выполнено включение (1.2.3).Тогда точка z_0 принадлежит решению задачи A.

Доказательство. Отметим, что так как $z_0 \notin M$, то $T > 0$. В силу выполнения включения (1.2.3) в момент времени T, определения алгебраической суммы двух множеств и интеграла от многозначного отображения следует существование суммируемой функции $\tilde{\omega}(\tau) \in \hat{\omega}(\tau)$,$0 \leq \tau \leq T$,

$$\pi e : TAz_0 \in M^3(T) + \int\limits_0^T (-\tilde{\omega}(\tau))d\tau. \qquad (1.2.4)$$

Из определения $\hat{\omega}(T - s)$ (см. (1.2.1)), где $0 \leq s \leq T$, и свойств геометрической разности множеств следует, что

$$D(T-s)\pi e^{(T-s)A}CQ + \tilde{\omega}(T-s) \subset \pi e^{(T-s)A}BP, s \in [0, T]. \qquad (1.2.5)$$

Положим значение вектора $u = U(s, v), 0 \leq s \leq T, v \in Q$, при фиксированных s и v равным лексикографическому минимуму среди векторов $u \in P$, удовлетворяющих равенству

$$\pi e^{(T-s)A}Bu = D(T-s)\pi e^{(T-s)A}Cv + \tilde{\omega}(T-s). \qquad (1.2.6)$$

Пользуясь теоремой Филиппова (см. П. 7), можно утверждать, что функция $\tilde{u}(s) = U(s, v(s))$ измерима на $[0, T]$, если $v(s) \in Q$ измерима на $[0, T]$. При произвольной измеримой $v(s) \in Q$ на $[0, T]$ выполняется равенство

$$\pi e^{(T-s)A}B\tilde{u}(s) - D(T-s)\pi e^{(T-s)A}Cv(s) = \tilde{\omega}(T-s). \qquad (1.2.7)$$

Применяя формулу Коши при $u(s) = \tilde{u}(s)$ и произвольной измеримой $v(s) \in Q$ и пользуясь равенствами (1.2.7), (1.2.4), (1.2.2), получаем

$$\pi z(T) = \pi e^{TA} z_0 + \int\limits_0^T \pi e^{(T-s)A} Bu(s)ds - \int\limits_0^T D(T-s)\pi e^{(T-s)A} Cv(s)ds +$$

$$+ \int\limits_0^T (D(T-s) - E)\pi e^{(T-s)A} Cv(s)ds = \pi e^{TA} z_0 + \int\limits_0^T \tilde{\omega}(T-s)ds +$$

$$+ \int\limits_0^T (D(T-s) - E)\pi e^{(T-s)A} Cv(s)ds \in M^3(T) +$$

$$+ \int\limits_0^T (D(T-s) - E)\pi e^{(T-s)A} Cv(s)ds \subset M^2. \quad (1.2.8)$$

Таким образом, при произвольной измеримой $v(s)$ управление $\tilde{u}(s) = U(s, v(s))$ гарантирует приход $z(t)$ на M не позже момента T. Теорема доказана.

Приведенная теорема, в случае выполнения перечисленных условий, отвечает на вопрос о разрешимости задачи преследования из данной начальной позиции z_0, содержит способ вычисления гарантированного времени преследования $T(z_0)$ и способ построения управления $V(s, v(s))$. Перечислим этапы решения задачи A на основании теоремы 2.1.

Этап 1. Найти множества $\tilde{\omega}(\tau) = P(\tau) \overset{*}{-} D(\tau)Q(\tau), \int\limits_0^t \tilde{\omega}(\tau)d\tau$, $\int\limits_0^T (D(\tau) - E)\pi e^{\tau A} CQd\tau$, $M^3(t) = M^2 \overset{*}{-} \int\limits_0^T (D(\tau) - E)\pi e^{\tau A} CQd\tau$

Этап 2. Найти $T(z_0) = T$, для которого $\pi e^{T(z_0)A} z_0 \in M^3(T(z_0)) + \int\limits_0^{T(z_0)} (-\tilde{\omega}(\tau))d\tau$.

Этап 3. Найти функцию $\tilde{\omega}(\tau) \in \hat{\omega}(\tau)$, такую, что $\pi e^{T(z_0)A} z_0 + \int\limits_0^{T(z_0)} (-\tilde{\omega}(\tau))d\tau \in M^3(T(z_0))$.

Этап 4.Найти $u(t)$ как решение уравнения $\pi e^{T(z_0)-t} Bu(t) = D(T(z_0) - t)\pi e^{(T(z_0)-t)A} Cv(t) + \tilde{\omega}(T(z_0) - t)$ при заданном допустимом $v(t) \in Q, 0 \leq t \leq T$.

Замечание 2.1. а) Используя аппарат опорных функций, можно показать, что число $T(z_0)$ при $z_0 \notin M$ является корнем уравнения

$$\rho(t) = \inf_{\|\varphi\|=1} [c(M^3(t), \psi) + \int_0^t c(-\hat{\omega}(\tau), \psi) d\tau - (\pi e^{tA} z_0, \psi)] = 0,$$

где $c(\mathfrak{U}, \psi)$- опорная функция множества $\mathfrak{U} \subset R^\nu$,

$$c(\mathfrak{U}, \psi) = \sup_{a \in \mathfrak{U}} (a, \psi).$$

6) Важным элементом при построении стратегии $\tilde{u}(t)$ является функция $\tilde{\omega}(\tau)$. Приведем полезную для приложений интерпретацию функции $\tilde{\omega}(\tau)$,$0 \leq \tau \leq T$. Рассмотрим управляемый процесс $\dot{x} = \omega, x(0) = 0$, где $x \in R^\nu$, $\omega \in \hat{\omega}(t)$, с терминальным множеством $M^3(t) - \pi e^{tA} z_0$. Целью управления является наибыстрейшее выведение точки x на терминальное множество. Функция $\omega(\tau)$, являющаяся решением этой экстремальной задачи, может быть взята в качестве функции $\tilde{\omega}(\tau)$ на этапе 3. Она может быть найдена из принципа максимума Л. С. Понтрягина [9]. Для функции $\omega(\tau)$,

$0 \leq \tau \leq T$, существует такой вектор $\psi_0 \in R^\nu$, $\|\psi_0\| = 1$, что почти всюду на $[0, T]$

$$(\omega(\tau), \psi_0) = \max_{\omega \in \hat{\omega}(\tau)} (\omega, \psi_0)$$

Приведенный в доказательстве теоремы 2.1 способ преследования гарантирует приведение траектории игры на терминальное множество точно в момент $T(z_0)$ и никак не наказывает убегающего за "ошибки". Приведем другой способ преследования, принадлежащий Л. С. Понтрягину [2], обладающий свойством уменьшать время преследования при ошибочных действиях убегающего. Отметим, что второй способ преследования гарантирует приведение фазового вектора в малую окрестность терминального множества и использует иную информацию об управлении убегающего, чем управления преследования теоремы 2.1.

Рассмотрим игру преследования (1.1.8). Пусть выполнено предположение 2.1 и для данной точки $z_0 \notin M$ хотя бы при одном $T \in [0, \Theta]$ выполнено включение (1.2.3), ε -положительная константа, $\varepsilon < T$. По условию задачи с течением времени преследователь получает информацию об управлении убегающего $v(t)$. Положим $\tilde{v}(t) = v(t - \varepsilon)$, $t \geq \varepsilon$, $\tilde{v}(t) = v_0 \in Q$, $0 \leq t < \varepsilon$. Опишем способ выбора управления $u(t)$ на отрезке $[0, \varepsilon]$. Согласно (1.2.1)

$$\hat{\omega}(T-s) \subset \pi e^{(T-s)A}BP - D(T-s)\pi e^{(T-s)A}C\tilde{v}(s). \tag{1.2.9}$$

Отсюда

$$-\int\limits_0^\varepsilon \hat{\omega}(T-s)ds \subset -\int\limits_0^\varepsilon \pi e^{(T-s)A}BPds + \int\limits_0^\varepsilon D(T-s)\pi e^{(T-s)A}C\tilde{v}(s)ds. \tag{1.2.10}$$

Прибавим к обеим частям выпуклое множество $M^3(T) + W(E,\varepsilon)$, где

$$W(T,\varepsilon) = \int\limits_\varepsilon^T -\hat{\omega}(T-s)ds = W(T-\varepsilon,0) = \int\limits_0^{T-\varepsilon} (-\hat{\omega}(T-\varepsilon-\tau))d\tau.$$

Получим

$$M^3(T) + W(T,0) \subset M^3(T) + W(T,\varepsilon) - \int\limits_0^\varepsilon \pi e^{(T-s)A}BPds+$$

$$+\int\limits_0^\varepsilon D(T-s)\pi e^{(T-s)A}C\tilde{v}(s)ds$$

Таким образом, в силу (1.2.3) имеет место включение

$$\pi e^{TA}z_0 \in M^3(T)+W(T,\varepsilon)-\int\limits_0^\varepsilon \pi e^{(T-s)A}BPds+\int\limits_0^\varepsilon D(T-s)\pi e^{(T-s)A}C\tilde{v}(s)ds. \tag{1.2.11}$$

Пусть T_1 - минимальное T, для которого оно выполняется. В силу определения алгебраической суммы множеств и интеграла от многозначного отображения, следует, что существует измеримое управление $u(s)$, $0 \le s \le \varepsilon$ такое, что

$$\pi e^{T_1 A}z_0+\int\limits_0^\varepsilon \pi e^{(T_1-s)A}Bu(s)ds-\int\limits_0^\varepsilon D(T_1-s)\pi e^{(T_1-s)A}C\tilde{v}(s)ds \in M^3(T_1)+W(T_1,\varepsilon) \tag{1.2.12}$$

преобразуем это включение:

$$\pi e^{(T_1-\varepsilon)A}(e^{\varepsilon A}z_0 + \int\limits_0^\varepsilon e^{(\varepsilon-s)A}Bu(s)ds - \int\limits_0^\varepsilon e^{(\varepsilon-s)A}C\tilde{v}(s)ds) -$$

$$- \int\limits_0^\varepsilon (D(T_1-s)-E)\pi e^{(T_1-s)A}C\tilde{v}(s)ds = \pi e^{(T_1-\varepsilon)A}z(\varepsilon) -$$

$$- \int\limits_0^\varepsilon (D(T_1-s)-E)\pi e^{(T_1-s)A}C\tilde{v}(s)ds \in M^3(T_1) + W(T_1-\varepsilon,0).$$

Следовательно

$$\pi e^{(T_1-\varepsilon)A}z(\varepsilon) \in M^3(T_1) + \int\limits_0^\varepsilon (D(T_1-s)-E)\pi e^{(T_1-s)A}C\tilde{v}(s)ds +$$

$$+ W(T_1-\varepsilon,0) = M^3(T_1) + \int\limits_{T_1-\varepsilon}^{T_1} (D(T_1)-E)\pi e^{\tau A}C\tilde{v}(T_1-\tau)d\tau +$$

$$+W(T_1-\varepsilon,0) \subset (M^2 \overset{*}{-} \int\limits_0^{T_1}(D(\tau)-E)\pi e^{\tau A}CQd\tau) + \int\limits_{T_1-\varepsilon}^{T_1}(D(\tau)-E)\pi e^{\tau A}CQd\tau +$$

$$+ W(T_1-\varepsilon,0) \subset (M^2 \overset{*}{-} \int\limits_0^{T_1-\varepsilon}(D(\tau)-E)\pi e^{\tau A}CQd\tau) +$$

$$+ W(T_1-\varepsilon,0) = M^3(T_1-\varepsilon) + W(T_1-\varepsilon,0) \quad (1.2.13)$$

Таким образом, используя информацию об управлении $\tilde{v}(t)$, догоняющий может построить свое управление так на $[0,\varepsilon]$, что выполняется включение (**??**).

Для точки $z(\varepsilon)$ имеем $T(z(\varepsilon))$, т. е. построенное управление преследования на отрезке $[0,\varepsilon]$ приводит фазовый вектор в положение, для которого гарантированное время окончания игры уменьшилось по крайней мере на ε. Проведем подобные шаги далее, вплоть до момента $T(z_0)$. Управление $u(t)$, выбираемое согласно (1.2.12), обозначим $U(t,\varepsilon)$. Траектория $\tilde{z}(t)$ уравнения (1.1.8), соответствующая управлениям $u(t) = U(t,\varepsilon)$, $\tilde{v}(t)$,за время, не превосходящее $T(z_0)$, приходит на терминальное множество. Оценим разность $\|\tilde{z}(t)-z(t)\|$,где $z(t)$-траектория уравнения (1.1.8), соответствующая управлениям $u(t) = U(t,\varepsilon)$, $v(t)$. Имеем

$$\tilde{z}(t) - z(t) = \int\limits_0^t e^{sA} C\tilde{v}(t-s)ds - \int\limits_0^t e^{sA} Cv(t-s)ds =$$

$$= \int\limits_0^t e^{sA} C\tilde{v}(t-s)ds - \int\limits_0^t e^{sA} C\tilde{v}(t-s-\varepsilon)ds \quad (1.2.14)$$

Заменяя $s + \varepsilon$ на τ во втором интеграле в (1.2.4), получим

$$\int\limits_0^t e^{sA} C\tilde{v}(t-s-\varepsilon)ds = \int\limits_\varepsilon^{t+\varepsilon} e^{(\tau-\varepsilon)A} C\tilde{v}(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t e^{(\tau-\varepsilon)A} C\tilde{v}(t-\tau)d\tau - \int\limits_0^\varepsilon e^{(\tau-\varepsilon)A} C\tilde{v}(t-\tau)d\tau + \int\limits_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau-\varepsilon)A} C\tilde{v}(t-\tau)d\tau$$

Заменяя в (1.2.14) s на τ в первом интеграле , получим

$$\tilde{z}(t) - z(t) = \int\limits_0^t (e^{\tau A} - e^{(\tau-\varepsilon)A}) C\tilde{v}(t-\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon e^{(\tau-\varepsilon)A} C\tilde{v}(t-\tau)d\tau - \int\limits_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau-\varepsilon)A} C\tilde{v}(t-\tau)d\tau.$$

Следовательно, $\|\tilde{z}(t) - z(t)\| \leq \varepsilon l$, где l зависит от отрезка $[0, t]$ игры. Так как $t \leq T(z_0)$, то константа l оценивается через $T(z_0)$ и величины, зависящие от игры. Таким образом, выбирая ε достаточно малым, мы можем добиться включения $z(T) \in M + S^\nu_{\varepsilon l}(0)$, где $^\nu_{\varepsilon l}(0)$- шар радиусом εl с центром в нуле размерности $\nu = dim L^1$; l - положительная константа, зависящая от z_0 и игры, но не зависящая от ε.

Пусть α -положительная малая константа. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть для дифференциальной игры (1.1.8) с терминальным множеством $M^\nu_\alpha(0)$ выполнено предположение 1 и для данной точки $z_0 \notin M + S^\nu_\alpha(0)$, хотя бы при одном $T \in [0, \Theta]$, выполнено включение (1.2.3). Тогда точка z_0 принадлежит решению задачи А.

Замечание 2.2. Теоремы 2.1 и 2.2 дают решение задачи A в разных подклассах стратегий преследования, определенных в §1. Так, управление преследования $u(t)$, являющееся решением уравнения (1.2.7), использует информацию об управлении $v(t)$ только в момент времени t, тогда как управление $u(t)$, являющееся решением включения (1.2.12), использует информацию об управлении $v(t)$ на отрезке времени длиной ε. Таким образом,большая информация об управлении $v(t)$ позволяет конструировать управление $u(t)$, обладающее свойством уменьшать гарантированное время преследования при ошибочных действиях убегающего.

Перечислим основные этапы решения задачи A на основании теоремы 2.2.

Этапы 1 и 2 остаются теми же, что и в теореме 2.1. Выберем ε из условия приведения траектории в данную окрестность терминального множества. Обозначим $T_1(v(.), k\varepsilon)$-момент времени T_1 для которого справедливо включение (1.2.11), если $z_0 = z(k\varepsilon)$,$k = 1, 2, ...$ На каждом из отрезков $[k\varepsilon, min\{(k+1)\varepsilon, T_1(v(.), k\varepsilon)\}]$, $k = 1, 2, ...$ принимая за z_0 значение $z(k\varepsilon)$ проведем следующие вычисления.

Этап 3. Находим $T_1 \leq T - k\varepsilon$, для которого справедливо включение (1.2.11).

Этап 4. Находим функцию $\xi(\tau) \in \pi e^{(T_1-\tau)A}BP$ такую, что
$\pi e^{T_1 A}z_0 + \int\limits_0^\varepsilon \xi(\tau)d\tau - \int\limits_0^\varepsilon \pi e^{(T_1-s)A}C\tilde{v}(s)ds \subset M^3(T_1) + W(T_1, \varepsilon)$.

Этап 5. Находим $u(\tau)$ как решение уравнения
$\pi e^{(T_1-\tau)A}Bu(\tau) = \xi(\tau)$.

Проведем исследование конкретных дифференциальных игр с помощью теоремы 2.1.

I. Игра "мальчик и крокодил". Пусть уравнения движения преследователя и убегающего имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = a \\ \dot{y} = b \end{cases} \qquad (1.2.15)$$

Здесь x, y, a, $b \in R^\nu$, $\nu \geq 2$, a и b - управляющие векторы, $\|a\| \leq \rho$, $\|b\| \leq \sigma$. Преследование считается завершенным, если в некоторый момент времени t $\|x(t) - y(t)\| \leq l$; ρ, σ, l- положительные константы.

Перейдем к соответствующей дифференциальной игре. Положим $z_1 = x - y$, $z_2 = \dot{x}$, $z = (z_1, z_2)$. В силу системы (1.2.15) имеем

$$\dot{z}_1 = z_2 - b, \dot{z}_2 = a, Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, Cv = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.2.16)$$

$$Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, Cv = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} : \|a\| \leq \rho \right\}$, $Q = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} : \|b\| \leq \sigma \right\}$, $M = \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : \|z_1\| \leq l \right\}$.

Проводя вычисления этапа 1 для игры (1.2.16) , получаем

$L = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} : \|z_1\| \in R^\nu \right\}$, $A = \begin{pmatrix} 0, E \\ 0, 0 \end{pmatrix}$, $e^{tA} = \begin{pmatrix} E, tE \\ 0, E \end{pmatrix}$;

$\pi e^{tA} BP = S^\nu_{\rho t}(0)$, $\pi e^{tA} CQ = S^n_\sigma(0)$.

Положим $D(\tau) = \mu(\tau) E$, где $\mu(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\sigma}\tau, 0 \leq \tau \leq \dfrac{\sigma}{\rho} \\ 1, \tau > \dfrac{\sigma}{\rho} \end{cases}$. В этом случае

$\tilde{\omega}(\tau) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau \leq \dfrac{\sigma}{\rho} \\ S^\nu_{\rho\tau - \sigma}(0), \tau > \dfrac{\sigma}{\rho} \end{cases}$, $W(t, 0) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau \leq \dfrac{\sigma}{\rho} \\ S^\nu_{(\rho\frac{t^2}{2} - \sigma t + \frac{\sigma^2}{2\rho})}(0), \tau > \dfrac{\sigma}{\rho} \end{cases}$

$M^3(t) = \begin{cases} S^\nu_{\gamma(t)}(0), 0 \leq t \leq \dfrac{\sigma}{\rho} \\ S^\nu_{(l - \frac{\sigma^2}{2\rho})}(0), t > \dfrac{\sigma}{\rho} \end{cases}$, где $\gamma(t) = l + \rho\frac{t^2}{2} - \sigma t$.

Условие непустоты множества $M^3(t)$ при $t > 0$, выполняется, если $l \geq \frac{\sigma^2}{2\rho}$.

При этом условии $\gamma(t)$ возрастающая функция t и $\gamma(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Гарантированное время преследования $T(z_0)$ равно наименьшему t, при котором справедливо включение

$\pi e^{tA} z_0 = z^0_1 + z^0_2 t \in S^\nu_{\gamma(t)}(0)$.

Таким образом, $T(z_0)$-минимальный положительный корень:

$\gamma^2(t) = \|z^0_1\|^2 + 2(z^0_1, z^0_2)t + \|z^0_2\|^2 t^2$

Решение этого уравнения составляет этап 2. Результаты вычислений на этапах 3 и 4 имеют следующий вид:

если $\|z^0_1 + z^0_2 T\| \neq 0$, то $\tilde{\omega}(\tau) = -\frac{z^0_1 + z^0_2 T}{\|z^0_1 + z^0_2 T\|}\gamma(\tau)$,

$u(t) = \frac{\mu(T-t)v(t) + \tilde{\omega}(T-t)}{T-t}$;

если $\|z^0_1 + z^0_2 T\| = 0$,

то $\tilde{\omega}(\tau) \equiv 0$, $u(t) = \frac{\mu(T-t)v(t)}{T-t}$

2. Игра "два крокодила". Пусть уравнения движения преследователя и убегающего имеют вид

$$\ddot{x} = a, \dot{y} = b \tag{1.2.17}$$

Здесь x, y, a, b $\in$ R^ν, $\nu \geq 2$, a и b - управляющие векторы, $\|a\| \leq \rho$, $\|b\| \leq \sigma$. Преследование считается завершенным, если в некоторый конечный момент времени t $\|x(t) - y(t)\| \leq l$; ρ, σ, l - положительные константы. Перейдем к соответствующей дифференциальной игре. Положим $z_1 = x - y$, $z_2 = \dot{x} - \dot{y}$, $z = (z_1, z_2)$. В силу системы (1.2.17) имеем

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = a - b \tag{1.2.18}$$

Следовательно, $A = \begin{pmatrix} 0, E \\ 0, 0 \end{pmatrix}$, $Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$, $Cv = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, $BP = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} : \|a\| \leq \rho \right\}$, $CQ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} : \|b\| \leq \sigma \right\}$, $\pi e^{\tau A} BP = S^\nu_{\rho\tau}(0)$, $\pi e^{\tau A} CQ = S^\nu_{\sigma\tau}(0)$, $\pi e^{tA} z^0 = z_1^0 + t z_2^0$, $M = \{z; \|z_1\| \leq l\}$. Если $\rho > \sigma$, то можно положить, например, $D(\tau) = E$. Проводя вычисления согласно этапу 1 для игры (1.2.18), получаем

$\hat{\omega}(\tau) = S^\nu_{\xi(\tau)}(0), \xi(\tau) = \tau(\rho - \sigma)$

$(\hat{\omega}(\tau) \neq \emptyset \tau \geq 0, \rho > \sigma)$;

$W(t, 0) = S^\nu_{\eta(t)}(0), \eta(t) = (\rho - \sigma)\frac{t^2}{2}$.

Гарантированное время преследования: $T(z^0)$ -корень уравнения $(l + \eta(t))^2 = \|z_1^0\|^2 + 2t(z_1^0, z_2^0) + t^2\|z_2^0\|^2$. Решение этого уравнения составляет этап 2. Результаты вычислений на этапах 3 и 4 имеют следущий вид: если $\|z_1^0 + T(z^0) z_2^0\| \neq 0$, то

$$\omega(\tau) = -\frac{z_1^0 + T(z^0) z_2^0}{\|z_1^0 + T(z^0) z_2^0\|}(\rho - \sigma)\tau,$$

$$u(t) = v(t) - \frac{z_1^0 + T(z^0) z_2^0}{\|z_1^0 + T(z^0) z_2^0\|}(\rho - \sigma);$$

если $\|z_1^0 + T(z^0) z_2^0\| = 0$, то $\omega(\tau) \equiv 0$, $u(t) = v(t)$.

Пусть $\rho \leq \sigma$. Положим, например, $D(\tau) = \mu_0 E$, где $0 < \mu_0 < \frac{\rho}{\sigma}$, и проведем вычисления этапов 1-4 в этом случае. Имеем

$$\hat{\omega}(\tau) = S^\nu_{(\rho - \mu_0\sigma)\tau}(0), W(t, 0) = S^\nu_{(\rho - \mu_0\sigma)\frac{t^2}{2}}(0),$$

$$\int_0^t (\mu_0 - 1)S^\nu_{\sigma\tau}(0)d\tau = S^\nu_{(1-\mu_0)\sigma\frac{t^2}{2}}(0), M^3(t) = S^\nu_{(l-(1-\mu_0)\sigma\frac{t^2}{2})}(0).$$

Множество $M^3(t) \neq \emptyset$, если $t \leq \sqrt{\frac{2l}{(1-\mu_0)\sigma}} = t^*$. Согласно теореме 2.1 из позиции z_0 в данном случае разрешима задача преследования, если найдется момент времени T, удовлетворяющий уравнению $\|z_1^0 + Tz_2^0\| = l + (\rho - \sigma)\frac{T^2}{2}$ такой, что $T \leq t^*$.

Функция $\tilde{\omega}(\tau) \in \hat{\omega}(\tau)$ имеет вид

$$\tilde{\omega}(\tau) = \frac{-(z_1^0 + Tz_2^0)(\rho - \mu_0\sigma)\tau}{\|z_1^0 + Tz_2^0\|}$$

Управление $u(t)$, решающее задачу преследования, таково:

$$u(t) = \mu_0 v(t) - (z_1^0 + Tz_2^0)\frac{\rho - \mu_0\sigma}{\|z_1^0 + Tz_2^0\|}.$$

3. Контрольный пример Л. С. Понтрягина [1].

Пусть уравнения преследователя и убегающего имеют вид

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = a, \ddot{y} + \beta\dot{y} = b \tag{1.2.19}$$

Здесь x, y, a, $b \in R^\nu$, $\nu \geq 2$, a и b - управляющие векторы, $\|a\| \leq \rho$, $\|b\| \leq \sigma$, α , β, ρ, $\sigma > 0$. Преследование считается завершенным, если в некоторый конечный момент времени t имеем $\|x(t) - y(t)\| \leq l$, l- неотрицательная константа. Построим соответствующую дифференциальную игру. Положим $z_1 = x - y$, $z_2 = \dot{x}$, $z_3 = \dot{y}$, $z = (z_1, z_2, z_3)$. В силу системы (1.2.19) имеем

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3 \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + a \\ \dot{z}_3 = -\beta z_3 + b \end{cases} \tag{1.2.20}$$

$$Bu = (0, a, 0), Cv = (0, 0, -b).$$

Следовательно, $M = \{z : \|z_1\| \leq l\}$,

$$BP = \{(0, a, 0) : \|a\| \leq \rho\}, CQ = \{(0, 0, -b) : \|b\| \leq \sigma\}.$$

Проводя вычисления согласно этапу 1 для игры (1.2.20), получаем

$$L=\{(z_1,0,0): z_1\in R^\nu\},\, A=\begin{pmatrix}0, E, -E\\ 0, -\alpha E, 0\\ 0, 0, -\beta E\end{pmatrix},$$

$$e^{tA}=\begin{pmatrix}E, \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}E, -\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}E\\ 0, e^{-\alpha t}E, 0\\ 0, 0, e^{-\beta t}E\end{pmatrix}.$$

(E-единичная, ν-мерная матрица),

$$\pi e^{tA}z^0=z_1^0+\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}z_2^0-\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}z_3^0;$$

$P(t)=\pi e^{tA}BP=\{\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}a:\|a\|\le\rho\}=S^\nu_{r(t)}(0)$, где $r(t)=\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\rho$;

$Q(t)=\pi e^{tA}CQ=\left\{\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}b:\|b\|\le\sigma\right\}=S^\nu_{s(t)}(0)$, где $s(t)=\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\sigma$.

Если $l=0$, то множество M^2 в данном примере состоит из нулевого вектора. Для непустоты множества $M^3(t)$ (см. (1.2.2)) нам остается выбрать $D(\tau)=E$. Таким образом,

$\omega(t)=P(t)\overset{*}{-}Q(t)=S^\nu_{\xi(t)}(0)$, где $\xi(t)=r(t)-s(t)$;

$W(t,0)=S^\nu_{\gamma(t)}(0)$, где $\gamma(t)=\int\limits_0^t\xi(\tau)d\tau$.

Для положительности $\xi(t)$ и $\gamma(t)$ при всех $t>0$ достаточно [1], чтобы $\rho\ge\sigma, \frac{\rho}{\alpha}\ge\frac{\sigma}{\beta}$, однако одновременные превращения обоих этих неравенств в точные равенства исключаются.

Для определения гарантированного времени преследования $T(z^0)$ мы найдем наименьший момент времени t:

$$\pi e^{tA}z^0\in S^\nu_{\gamma(t)}(0),$$

т. е. $T(z^0)$ -наименьший положительный корень уравнения

$$\gamma^2(t)=(\pi e^{tA}z^0,\pi e^{tA}z^0).$$

Решение этого уравнения составляет этап 2. Результаты вычислений на этапах 3 и 4 имеют следующий вид:

а) если $\|\pi e^{T(z^0)A}z^0\|\ne0$, то $\tilde\omega(\tau)=-\frac{\pi e^{T(z^0)A}z^0}{\|\pi e^{T(z^0)A}z^0\|}\xi(\tau)$.

$$u(t)=\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha(T(z^0)-t)}}\Big[\frac{1-e^{-\beta(T(z^0)-t)}}{\beta}v(t)+\tilde\omega(T(z^0)-t)\Big]; \qquad (1.2.21)$$

б) если $\|\pi e^{T(z^0)A} z^0\| = 0$, то $\tilde{\omega}(\tau) \equiv 0$,

$$u(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1 - e^{-\beta(T(z^0)-t)}}{1 - e^{-\alpha(T(z^0)-t)}} v(t). \tag{1.2.22}$$

Пусть $l > 0$. Если условие $\xi(t) > 0$ для $t \geq 0$ не выполнено, то положим $D(t) = \mu(t)E$, $\eta(t) = r(t) - \mu(t)s(t)$, где $0 \leq \mu(t) < max\left\{\frac{\rho}{\sigma}\frac{\alpha}{\beta}\frac{1-e^{-\alpha t}}{1-e^{-\beta t}}, 1\right\}$. Тогда $\omega(t) = S^\nu_{\eta(t)}(0)$; $W(t, 0) = S^\nu_{\chi(t)}(0)$, где $\chi(t) = \int\limits_0^t \eta(\tau) d\tau$; $M^3(t) = S^\nu_{(1-\zeta(t))}(0)$, где $\zeta(t) = \sigma \int\limits_0^t (\mu(\tau) - 1)\frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta} d\tau$.

Условия теоремы 2.1 будут выполнены при данном l для $t \in [0, T]$, если найдется функция $\mu(t)$, такая, что $\eta(t) \geq 0$ и $l \geq \zeta(t)$, $t \in [0, T]$. В этом случае этап 2 состоит в нахождении корня уравнения

$$\pi e^{TA} z^0 \in S^\nu_{(l-\zeta(T)+\eta(T))}(0).$$

Результаты вычислений на этапах 3 и 4 имеют следующий вид:

а) если $\|\pi e^{T(z^0)A} z^0\| \neq 0$, то $\tilde{\omega}(\tau) = -\frac{\pi e^{T(z^0)A} z^0}{\|\pi e^{T(z^0)A} z^0\|}\eta(\tau)$, $u(t)$ имеет вид (1.2.21);

б) если $\|\pi e^{T(z^0)A} z^0\| = 0$, то $\tilde{\omega}(\tau) \equiv 0$, $u(t)$ имеет вид (1.2.22).

1.3 Метод убегания Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко.

1.Введение. Рассмотрим задачу В для линейной дифференциальной игры (1.1.8) с терминальным множеством (1.1.9) при условии, что множество M^2 состоит из одной точки $m \in R^\nu$.M^1-линейное подпространство в R^n, $dim M^1 \leq n - 2$. Пусть W - двумерное подпространство пространства L^1, π - оператор ортогонального проектирования из R^n на W. Каждой точке $z \in R^n$ поставим в соответствие два неотрицательных числа $z \to (\xi, \eta)$, где ξ-расстояние точки z до M^1, η - ее расстояние до L^1.

Предположение 3.1. Существуют двумерное подпространство $W \in L^1$, натуральное число k, такое, что:

а) каждое из множеств

$$\eta A^i CQ, i = 0, 1, ..., k - 2$$

$$\pi A^i BP, i = 0, 1, ..., k - 2 \tag{1.3.1}$$

есть точка;

б) множество $\pi A^{k-1}CQ$ содержит более одной точки и справедливо включение

$$\pi A^{k-1}CQ \overset{*}{-} \pi A^{k-1}BP \supset S^2_\alpha(b) \tag{1.3.2}$$

где $S^2_\alpha(b)$ -двумерный шар радиуса $\alpha > 0$ с центром в точке $b \in W$

Теорема 3.1. Если для игры (1.1.8) выполнено предположение 3.1, то при любом начальном значении z_0,$z_0 \notin M$, существуют эффективно конструируемые глобальные стратегии убегания и, кроме того, для расстояния точки $z(t)$ до M имеет место нижеследующая оценка.

Найдутся положительные константы Θ, ε, c, l и натуральное k, зависящие только от игры, а не от ее начального значения и не от ее хода, что игру убегания можно вести таким образом, что:

1)При $\xi_0 \geq \varepsilon$ имеем

$$\xi(t) > \frac{c\varepsilon^k}{(1+\eta(t))^k}, 0 \leq t \leq \infty \tag{1.3.3}$$

2)При $\xi_0 < \varepsilon$ имеем

$$\begin{cases} \xi(t) > \dfrac{c\xi_0^k}{(1+\eta(t))^k}, 0 \leq t \leq \Theta \\ \xi(t) > \dfrac{c\varepsilon^k}{(1+\eta(t))^k}, \Theta \leq t \leq \infty \end{cases} \tag{1.3.4}$$

либо таким образом, что:

1.При $\xi_0 \geq \varepsilon$ имеем

$$\xi(t) \leq l, 0 \leq t \leq \infty$$

2.При $\xi_0 < \varepsilon$ имеем

$$\begin{cases} \xi(t) > \dfrac{c\xi_0^k}{(1+\eta(t))^k}, 0 \leq t \leq \Theta \\ \xi(t) > l, \Theta \leq t \leq \infty \end{cases} \tag{1.3.5}$$

2. Маневр обхода. В этом пункте приводятся конструкции Л. С. Понтрягина [7], используемые далее для построения управления убегающего, гарантирующего, чтобы точка $z(t)$ не попала на M.

А) Сначала мы приведем без доказательства простую лемму о конечномерном линейном семействе $\sum$ вещественных аналитических функций вещественной переменной t, которые определенs на интервале $I; 0 \leq t \leq 1$. Семейство $\sum$ является линейным, если вместе с произвольными двумя функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из $\sum$ функция $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$ принадлежит $\sum$, если α_1 и α_2- вещественные числа. Семейство $\sum$ называется конечномерным, если существует конечное число функций $f_1(t), ..., f_r(t)$ из $\sum$, таких, что каждая функция $f(t) \in \sum$ может быть записана в виде $f(t) = \alpha_1 f_1(t) + .. + \alpha_r f_r(t)$. Справедливо утверждение. Для конечномерного линейного семейства $\sum$ существует натуральное число m, такое, что любая функция $f(t) \in \sum$, не равная тождественно нулю, имеет на отрезке I не более m нулей с учетом нх кратности.

Б) Пусть $\sum$ - конечномерное линейное семейство функций, рассматриваемых и аналитических на некотором отрезке I, принадлежащем отрезку $0 \leq t \leq 1$; W - двумерное векторное евклидово пространство с фиксированной в нем ортогональной системой координат; $\omega = (\omega^1, \omega^2) \in W$, Г - квадрат, определяемый неравенствами

$$|\omega^i| \leq a, i = 1, 2, a > 0, \tag{1.3.6}$$

k-целое число, $k > 0$. Тогда существует такое положительное число γ, что для любого вектора $\varphi(t) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t))$, компоненты которого принадлежат $\sum$, найдется такой квадрат Г'⊂Г со стороной 2γ, что точка $v(t) \in W$, задаваемая равенствами

$$v^i(t) = \varphi^i(t) - \alpha^i t^k, i = 1, 2, \tag{1.3.7}$$

при

$$t \in I, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in G' \tag{1.3.8}$$

удовлетворяет условию

$$\|v(t)\| \geq \gamma t^k. \tag{1.3.9}$$

Для доказательства расширим семейство $\sum$, присоединив к нему функцию t^k, до семейства $\sum'$, и пусть m-число, соответствующее этому семейству. Пусть

$$p > 2m + 1 \tag{1.3.10}$$

есть целое число. Разобьем квадрат Г равностоящими друг от друга вертикальными и горизонтальными прямыми:

$$\begin{cases} \omega^i = a^i_j, i = 1, 2, j = 0, 1, ..., p \\ \qquad\qquad a^i_0 = -a, a^i_p = a, \end{cases} \tag{1.3.11}$$

на p^2 малых квадратов со стороной $\frac{2a}{p}$. В плоскости W рассмотрим кривую

$$\omega^i = \omega^i(t) = \frac{\varphi^i(t)}{t^k}, i = 1, 2. \tag{1.3.12}$$

Покажем, что кривая (1.3.12) не может проходить через все построенные малые квадраты. В самом деле, при входе в любой из этих малых квадратов кривая должна пересечь одну из его сторон, т. е. либо одну из вертикальных прямых системы (1.3.11), либо одну из горизонтальных прямых системы (1.3.11). Таким образом, либо число пересечений с вертикальными прямыми не меньше чем $\frac{p^2-1}{2}$, либо число пересечений с горизонтальными прямыми не меньше чем $\frac{p^2-1}{2}$. Допустим для определенности, что имеет место первое. Так как вертикальных прямых в системе (1.3.11) имеется $p+1$, то хотя бы одну из них, например прямую $\omega^1 = a^1_j$, она должна пересечь не менее чем $\frac{p-1}{2}$ раз. Это означает, что функция $\varphi^1(t) - a^1_j t^k$ имеет не менее $\frac{p-1}{2} > m$ нулей (см. (1.3.10)). Так как эта функдия принадлежит семейству $\sum'$, то она тождественно равна нулю, а это значит, что кривая (1.3.12) вся лежит на вертикальной прямой $\omega^1 = a^1_j$, и поэтому она не может проходить через все малые квадраты. Обозначим через Г" тот малый квадрат из Г', через который кривая (1.3.12) не проходит, через γ' - одну четверть стороны квадрата Г" и Г' - квадрат со стороной $2\gamma'$, центр которого совпадает с центром квадрата Г". Так как кривая (1.3.12) не проходит через квадрат Г", то при выполнении условий (1.3.8) при каждом фиксированном t хотя бы одно из чисел $|\omega^i(t) - a^i|$, $i = 1, 2$ больше или равно γ. Из этого непосредственно вытекает

$$\|v(t)\| \geq \gamma t^k$$

Итак, предложение Б) доказано.

3. Управление убегания. Вернемся к задаче убегания. Пусть $u(t)$ и $v(t)$ -некоторые допустимые управления на отрезке $[0, 1]$ и $z(t)$-решение уравнения (1.1.8), $z(0) = z^0$, соответствующее этим управлениям. Согласно формуле Коши для решения уравнения (1.1.8) имеем

$$\pi z(t) = \pi e^{tA} z_0 + \int\limits_0^t \pi e^{\tau A}(Bu(t-\tau) - Cv(t-\tau))d\tau \qquad (1.3.13)$$

Если u и v произвольные векторы из множеств P и Q соответственно, то согласно условию а) предположения 3.1 имеем

$$\pi e^{\tau A}(Bu - Cv) = q_0 + q_1\tau + ... + q_{k-2}\frac{\tau^{k-2}}{(k-2)!} +$$
$$+ \pi A^{k-1}(Bu - Cv)\frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} + h(u, v, \tau) \quad (1.3.14)$$

где $q_i = \pi A^i(BP - CQ)$, $i = 0, 1, ..., k-2$, фиксированные векторы W, причем справедлива оценка

$$\|h(u, v, \tau)\| \leq l\tau^k, \qquad (1.3.15)$$

l-положительная константа, зависящая от параметров игры и не зависящая от векторов u и v. Учитывая (1.3.14), из (1.3.13) получаем

$$\pi z(t) = \pi e^{tA} z_0 + \sum_{i=0}^{k-2} q_i \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} - \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}[\pi A^{k-1}(Cv(s) - Bu(s))]ds +$$
$$+ \bar{h}(u(.), v(.), t), \quad (1.3.16)$$

где $\bar{h}(u(.), v(.), t) = \int\limits_0^t h(u(s), v(s), s)ds$.

В силу (1.3.15) равномерно по $u(.)$, $v(.)$ на отрезке $[0, 1]$

$$\|\bar{h}(u, v, \tau)\| \leq l_1\tau^{k+1}. \qquad (1.3.17)$$

Первые два члена в формуле (1.3.16) определяются игрой и начальным положением z_0. Рассмотрим третий член в соотношении (1.3.16), на который может влиять убегающий. В силу условия б) предположения 3.1 справедливо включение

$$\pi A^{k-1}CQ \supset \pi A^{k-1}BP + S_\alpha^2(0) + b. \qquad (1.3.18)$$

Таким образом, для вектора $\omega \in W$, $\|\omega\| \leq \alpha$ и произвольного вектора $u \in P$ найдется вектор $v \in Q$, такой, что

$$\pi A^{k-1}Cv = \pi A^{k-1}Bu + \omega + b. \qquad (1.3.19)$$

Еслн векторов v, удовлетворяющих равенству (1.3.19) более одного, то выбираем v как лексикографический минимум из всех векторов, удовлетворяющих (1.3.19). Согласно теореме Филиппова (см. П. 7) если $u(t)$ -измеримая функция, $u(t) \in P$, то такой способ выбора значения $v(t) \in Q$ в момент времени t обеспечивает измеримую зависимость от t функции $v(t)$. Итак, управление $v(t)$ на отрезке $[0,1]$ удовлетворяет соотношению

$$\pi A^{k-1}Cv(t) = \pi A^{k-1}Bu(t) + \omega + b. \tag{1.3.20}$$

При таком способе выбора управления убегающего в силу (1.3.16), (1.3.20) для функции $\pi z(t)$, $t \in [0,1]$, справедливо представление

$$\pi z(t) = \pi e^{tA}z_0 + \sum_{i=0}^{k-2} q_i \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} - b\frac{t^k}{k!} - \omega\frac{t^k}{k!} + \bar{h}(u(.), v(.), t). \tag{1.3.21}$$

Цель убегающего состоит теперь в том, чтобы так выбрать вектор $\omega \in S^2_\alpha(0)$, чтобы для $t \in [0, \Theta]$, $0 < \Theta \leq 1$, выполнялось неравенство

$$\|piz(t)\| > 0. \tag{1.3.22}$$

Для решения задачи о выборе вектора $\omega \in S^2_\alpha(0)$ и константы Θ, которые обеспечивают соотношение (1.3.22), применим маневр обхода Понтрягина (см. п. 2).

Положим

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \pi e^{tA}z_0 + \sum_{i=0}^{k-2} q_i \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} - b\frac{t^k}{k!} \tag{1.3.23}$$

$\xi = -\frac{\omega}{k!}$, $\sigma = \frac{\alpha}{k!}$, и рассмотрим шар с центром в нуле подпространства W радиусом σ. Впишем в него квадрат Γ со стороной $\sigma\sqrt{2}$. Согласно (1.3.21), (1.3.22) имеем

$$\pi z(t) = \psi(t) + t^k(\xi + h_3(u(.), v(.), t)), \tag{1.3.24}$$

где $\|h_3(u(.), v(.), t))\| \leq c_3 t$, c_3-константа, не зависящая от u и v. Применим к функции (1.3.24) лемму о маневре обхода. Семейство $\sum$, которому принадлежит функция $\psi(t)$ (см. (1.3.23)), имеет базис, состоящий из функций $t, ..., t^k$ и функций $\beta_1(t), ..., \beta_\mu(t)$, через которые выражаются решения уравнения $\dot{z} = Az$ (см. [8]). Определяя согласно утверждению А) п. 2 для семейства $\sum$ константу m и проводя разбиение квадрата Г согласно утверждению Б) п. 2, получаем, что в квадрате Г найдется квадрат Г' такой, что еслн $\xi + h_3(u(.), v(.), t) \in G'$, то для (1.3.24) справедлива оценка

$$\|\pi z(t)\| \geq \gamma t^k. \tag{1.3.25}$$

Пусть ξ - центр квадрата Г',$\Theta \leq min\{1, \frac{\gamma}{c_3}\}$. Тогда $\xi + h_3(u(.), v(.), t) \in G'$ для $t \in [0, \Theta]$, и имеет место оценка (1.3.25). Далее управление v(t), $t \in [t_1, t_1 + \Theta]$, выбранное как решение уравнения (1.3.20), где $\omega = \xi k!$, $t_1 \geq 0$ мы называем специальным управлением убегания и обозначаем $V_t^*(t_1, z(t_1), u(.))$, $u(.) = \{u(t), t \in [t_1, t_1 + \Theta]\}$. Таким образом, применяя специальное управление убегания v(t) на отрезке постоянной длины Θ, убегающий обеспечивает соотношение (1.3.25) для $t \in [0, \Theta]$. Повторяя этот процесс на каждом из отрезков $[n\Theta, (n+1)\Theta], n \geq 1$ убегающий обеспечивает соотношение $\|\pi z(t)\| > 0$ для $t \geq 0$.

4. Процесс убегания. Здесь мы опишем два способа построения глобальной стратегии убегания и укажем оценку снизу для расстояния от траектории игры до терминального множества в процессе игры. Первый способ выбора глобальной стратегии убегания состоит в том, что специальное управление убегания включается только тогда, когда фазовый вектор процесса находится достаточно близко к M. Опишем его и приведем оценку снизу для расстояния от $z(t)$ до M в процессе игры.

Утверждение 1. Каково бы ни было начальное значение z_0 игры, при применении специального управления убегания мы к концу периода Θ приведем игру в положение $z(\Theta)$, удовлетворяющее условию

$$\|\pi z(t)\| \geq \gamma t^k. \tag{1.3.26}$$

Это вытекает непосредственно из (1.3.25), так как $\|\pi z(\Theta)\| \leq \xi\Theta$.

Утверждение 2. Для рассматриваемой игры существует такая положительная константа c, что каково бы ни было начальное значение z_0, причем $\xi_0 \leq \varepsilon$, применяя специальное управление убегания, мы будем вести точку z(t) так, что на всем отрезке $0 \leq t \leq \Theta$ для нее выполняется условие

$$\xi(t) > \frac{c\xi_0^k}{(1+\eta(t))^k}, 0 \leq t \leq \Theta. \tag{1.3.27}$$

Для доказательства заметим, что каковы бы ни были управления $u(t)$ и $v(t)$, заданные на отрезке $0 \leq t \leq \Theta$, мы имеем оценки

$$\frac{1+\eta(t)}{1+\eta_0} > \alpha, \tag{1.3.28}$$

$$\|z(t) - z_0\| \leq \beta(1+\eta_0)t, \tag{1.3.29}$$

где α и β -положительные константы, зависящие только от игры и числа Θ (считаем $\xi_0 \leq 1$). Действительно,

$$\|z(t) - z_0\| \leq \|e^{tA} - E\|\|z_0\| + \int\limits_0^t c_1(\Theta)ds \leq c_2 t\|z_0\| + c_1 t \leq$$

$$\leq c_2 t(\|\xi_0\| + \|\eta_0\|) + c_1 t \leq \beta(1+\eta_0)t,$$

где $c_1 = c_1(\Theta)$-константа, зависящая от Θ, $\beta = max(c_1, c_2)$, $|\xi_0| < 1$. Далее, учитывая (1.3.29), имеем

$$\frac{1+\eta(t)}{1+\eta_0} = \frac{1+\eta_0 - \eta_0 + \eta(t)}{1+\eta_0} \geq \frac{1 - |\eta(t) - \eta_0|}{1+\eta_0} \geq \frac{1 - \|z(t) - z_0\|}{1+\eta_0} \geq 1 - \beta t.$$

Таким образом, если $1 - \beta\Theta \geq \alpha$, т. е. $\frac{1-\alpha}{\beta} \geq \Theta$, то неравенство (1.3.28) выполнено. (Заметим, что в качестве α можно взять любое α: $0 < \alpha \leq 1 - \beta\Theta$.) Перейдем к доказательству утверждения 2. Из (1.3.29) следует, что при $t \leq \frac{\xi_0}{2\beta(1+\eta_0)}$ мы имеем

$$\xi(t) \geq \frac{\xi_0}{2}. \tag{1.3.30}$$

Далее, если v(t) -специальное управление убегания, то при $t \geq \frac{\xi_0}{2\beta(1+\eta_0)}$ из (1.3.25), (1.3.28) имеем

$$\xi(t) \geq \frac{\gamma\xi_0^k}{(2\beta)^k(1+\eta_0)^k} \geq \frac{\gamma\xi_0^k\alpha^k}{(2\beta)^k(1+\eta(t))^k}.$$

Полагая $c = min(\frac{1}{2}, \frac{\gamma\alpha^k}{(2\beta)^k})$, получаем (1.3.27).

Утверждение 3. Игру убегания при произвольном начальном значении можно вести так, что имеет место оценка

$$\xi(t) < \frac{c\varepsilon^k}{(1+\eta(t))^k} \tag{1.3.31}$$

при $\Theta \leq t < \infty$.

Если начальное значение z_0 удовлетворяет условию $\xi_0 \geq \varepsilon$, то оценка (1.3.31) имеет место для всех значений $t \geq 0$. Если начальное значение z_0 не удовлетворяет условию $\xi_0 \geq \varepsilon$, то имеет место оценка

$$\xi(t) > \frac{c\xi_0^k}{(1+\eta(t))^k} \tag{1.3.32}$$

при $\Theta \leq t < \infty$.

Доказательство утверждения 3 состоит из описания процесса убегания. Если начальное значение z_0 удовлетворяет условию $\xi_0 \leq \varepsilon$, то на отрезке времени $0 \leq t \leq \Theta$ мы применяем специальное управление убегания и в силу утверждения 2 получаем оценку (1.3.32) на отрезке $0 \leq t \leq \Theta$. Причем в конце отрезка имеет место оценка (1.3.26). Таким образом, либо для точки z_0, либо для точки $z(\Theta)$ выполнено условие $\xi_0 > \varepsilon$, $\xi(\Theta) > \varepsilon$. Начиная с этого момента, т. е. с момента $t = 0$ или $t = \Theta$, мы применяем следующий способ управления: если для $z(t)$, $\xi(t) > \varepsilon$, то управление v(t) берется произвольным образом до тех пор, пока не наступает момент времени t_0, такой, что $\xi(t_0) = \varepsilon$. Начиная с момента t_0, к точке $z(t_0)$ применяется специальное управление убегания. Таким образом, утверждение 3 доказано.

Второй способ выбора глобальной стратегии будет состоять в том, что специальное управление убегания будем включать на каждом из отрезков $[n\Theta, (n+1)\Theta]$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Положим $\beta_n = \frac{n\Theta}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и будем строить управление v(t) на каждом из отрезков $I_n = [\beta_n, \beta_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, ..$, как специальное управление убегания:

$$v_n^* = \{V_t^*(\beta_n, z_n, u_n^*), t \in I_n\}, u_n^* = \{u(t), t \in I_n\}, z_n = z(\beta_n).$$

Выпишем оценку снизу для расстояния от $z(t)$ до M при таком выборе глобальной стратегии убегания.

1. В силу (1.3.25) для $t \in [\beta_n, \beta_{n+1}]$ имеем

$$\|\pi z(t)\| \geq \|\pi z(t; \beta_n, z_n, u_n^*, v_n^*)\| \geq \gamma t^k.$$

2. Если $n \geq 1$, то для $t \in I_n = [\beta_n, \beta_{n+1})$

$$\pi z(t) = \pi z_n(t; \beta_{n-1}, z_{n-1}, u_{n_0}^*, v_{n_0}^*) + \pi z(t; \beta_n, z_n, u_n^*, v_n^*) - \\ - \pi z_n(t; \beta_{n-1}, z_{n-1}, u_{n_0}^*, v_{n_0}^*)$$

где $u_{n_0}^* = \{u(t) : \beta_{n-1} \le t \le \beta_{n+1}\}$, $v_{n_0}^* = \{V_t(\beta_{n-1}, z_{n-1}, u_{n_0}^*), t \in [\beta_{n-1}, \beta_n]\}$. Заметим, что так как $\beta_n = \frac{n\Theta}{2}$, то специальное управление убегания $v_{n_0}^*$ определено на $\beta_{n-1} \le t \le \beta_{n+1}$. Имеем

$$\|z(t) - z_n(t)\| = \left\| z(\beta_n) + \int\limits_{\beta_n}^{t} (Az(s) + Bu_n^*(s) - Cv_n^*(s))ds - z_n(\beta_n) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\beta_n}^{t} (Az_n(s) + Bu_{n_0}^*(s) - Cv_{n_0}^*(s))ds \right\| \le \int\limits_{\beta_n}^{t} (k\|z(s) - z_n(s)\| + D)ds$$

где $z_n(s) = z(t; \beta_{n-1}, z_{n-1}, u_{n_0}^*, v_{n_0}^*)$, k и D-положительные константы. В силу неравенства Гронуолла (см. П. 6):

$$\|z(t) - z_n(t)\| \le D\frac{e^{k(t-\beta_n)} - 1}{k} \le h(t - \beta_n), t \in I_n.$$

Следовательно, $\|\pi z(t) - \pi z_n(t)\| \le \|z(t) - z_n(t)\| \le h(t - \beta_n)$, $t \in I_n$. Учитывая это неравенство, имеем

$$\|\pi z(t)\| \ge \|\pi z_n(t)\| - \|\pi z(t) - \pi z_n(t)\| \ge \gamma(t - \beta_{n-1})^k - h(t - \beta_n) \ge p(t - \beta_n)$$

$t \in I_n = [\beta_n, \beta_{n+1}]$, h, γ, p-положительные константы.

Таким образом,

$$\|\pi z(t)\| \ge max\{\gamma(t - \beta_n)^k, p(t - \beta_n)\}, t \in I_n = [\beta_n, \beta_{n+1}].$$

Если $r(s) = \gamma s^k$, $\rho(s) = \frac{r(\frac{\Theta}{2} - s) - D(e^{ks} - 1)}{k}$, $\mu(s) = max\{r(s), \rho(s)\}$, то $\min_{s \in [0, \frac{\Theta}{2}]} \mu(s) = l$.Так как $r(s) > 0$, $s \in [0, \frac{\Theta}{2}]$, $\rho(0) = r(\frac{\Theta}{2}) > 0$, то $\mu(s) > 0$, $0 \le s \le \frac{\Theta}{2}$, откуда в силу непрерывности $\mu(s)$ следует положительность l.

Таким образом, при таком способе построения глобальной стратегии убегания для $t \ge \frac{\Theta}{2}$, $\xi(t) \ge l$; для $0 \le t \le \frac{\Theta}{2}$, $\xi(t) \ge \frac{c\xi_0^k}{(1+\eta(t))^k}$.

5. Примеры. Приведем на примере игры "мальчик н крокодил"вычисления, необходимые для построения управления убегания по методу Л. С. Понтрягнна, Е. Ф. Мищенко. Закон движения преследующего и убегающего объектов задается уравнениями

$$\ddot{x} = u, \dot{y} = v \tag{1.3.33}$$

где x, y, u, v - векторы евклидова пространства R^2, u и v - управляющие параметры, $\|u\| \leq \rho$, $\|v\| \leq \sigma$, x -геометрическое положение преследующего объекта ("крокодила"), y-геометрическое положение убегающего объекта ("мальчика"). Преследование считается законченным, когда $x = y$. Полагая $z = (z_1, z_2) = (y - x, -\dot{x})$, получим дифференциальную игру

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + v \\ \dot{z}_2 = -u \end{cases} \tag{1.3.34}$$

Множество P состоит из всех векторов вида $(0, u)$, множество Q-из всех векторов вида $(v, 0)$, а множество окончания игры $M = \{z_1 = 0\}$. Непосредственно проверяется, что $L = \{z_2 = 0\}$, матрица π имеет вид $\begin{pmatrix} E, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$, где E - двумерная единичная матрица,

$$e^{\tau A} = \begin{pmatrix} E, E\tau \\ 0, E \end{pmatrix}, \pi e^{\tau A} = \begin{pmatrix} E, E\tau \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, согласно формуле Коши

$$\pi z(t) = \begin{pmatrix} E, Et \\ 0, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} + \int_0^t \Big[\begin{pmatrix} E, E\tau \\ 0, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t-\tau) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E, E\tau \\ 0, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u(t-\tau) \end{pmatrix} \Big] d\tau.$$

Отбрасывая две последние нулевые строки вектора $\pi z(t)$, получаем

$$[\pi z(t)]_c = (z_1^0 + z_2^0 t) + \int_0^t (v(t-\tau) - \tau u(t-\tau)) d\tau. \tag{1.3.35}$$

В нашем случае $\pi CQ = S_\sigma(0)$, $\pi BP = 0$, таким образом, согласно теории Л. С. Понтрягина, Е. Ф. Мищенко $k = 1$ и управление убегания имеет вид $v(t) = -\beta_0$, где $\beta_0 = (\beta_0^1, \beta_0^2)$.

Подставляя $v(t) = \beta_0$ в (1.3.35), получаем

$$[\pi z(t)]_c = z_1^0 + z_2^0 t - \beta_0 t + \zeta_1(t),$$

где

$$\zeta_1(t) = -\int_0^t \tau u(t-\tau) d\tau. \tag{1.3.36}$$

Из (1.3.36) получаем $\|\zeta_1(t)\| \leq \int\limits_0^t \tau\rho d\tau = \frac{\rho t^2}{2}$.

Укажем способ Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко нахождения вектора β_0.

По условию $\|v\| \leq \sigma$, т. е. управление убегающего выбирается в круге радиусом σ с центром в начале координат. Впишем в круг квадрат Г со сторонами, равными $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ и параллельными осям координат. (Мы считаем, что в плоскости зафиксирована система координат.)

Согласно лемме о маневре обхода мы должны изучить поведение параметрически заданной кривой

$$\omega(t) = \frac{\varphi(t)}{t}, \tag{1.3.37}$$

где $\varphi(t) = z_1^0 + z_2^0 t$, на квадрате Г. Если $z_1^0 \neq 0$, то точка $\omega(t)$ при $t > 0$ двигается по прямой на плоскости. Семейство $\sum'$ в нашем примере имеет две базисные функции a и bt, где a и b- константы. Таким образом, число нулей любой функции семейства $m \leq 1$. Далее, полагая $p = 2m + 2 = 4$, разбиваем квадрат Г на $p^2 = 16$ маленьких квадратов Г' прямыми, равноотстоящими друг от друга и параллельными осям координат. Сторона квадрата Г' равна $\frac{\sigma}{4\sqrt{2}}$. Опишем теперь один из возможных методов нахождения центра β_0 квадрата Г', через который не проходит кривая $\omega(t)$.

А. Пронумеруем квадраты Г'.

Б. Считаем расстояние $\tilde{\rho}$ от центра первого квадрата по прямой (1.3.37), $z_1^0 \neq 0$.

В. Сравниваем $\tilde{\rho}$ с половиной длины диагонали квадрата Г' равной $\frac{\sigma}{8}$. Если $\rho < \frac{\sigma}{8}$, то переходим к следующему квадрату и повторяем процедуры Б, В. Если $\tilde{\rho} \geq \frac{\sigma}{8}$, то полагаем β_0 равным центру этого квадрата. Рассмотрим в квадрате Г' со стороной $\frac{\sigma}{4\sqrt{2}}$ квадратик Г", центр которого совпадает с центром квадрата Г', а сторона равна $\alpha = \frac{\sigma}{12\sqrt{2}}$.

Расстояние от квадратика Г"до границы квадрата Г' не меньше α.

Положим $v(t - \tau) = \beta_0$. Имеем $\pi z(t) = z_1^0 + z_2^0 t + t(\beta_0 + \zeta_2(t))$, где $\|\zeta_2(t)\| \leq \rho\frac{t}{2}$.

Выберем положительную константу Θ_1 следующим образом:

$$\Theta_1 \leq \frac{\sigma}{\rho\sigma\sqrt{2}}.$$

Тогда $\|\zeta_2(t)\| \leq \alpha$ и $\|\pi z(t)\| > \alpha t = \frac{\sigma t}{12\sqrt{2}}$ при $t \in [0, \Theta_1]$.

Непосредственно проверяется, что константы $\tilde{b}$, $\tilde{\alpha}$, фигурирующие в оценках $\|z(t)\| - \|z_0\| \leq \tilde{b}(1+\eta_0)t$ и $\frac{1+\eta(t)}{1+\eta_0} > \alpha$ соответственно, справедливых при $\xi_0 \leq 1$, могут быть выбраны в виде $\tilde{b} = 1+\sigma+\frac{\rho}{2}$, если $t \in [0,1]$, и $\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}$, если $t \in [0, \frac{1}{2\tilde{b}}]$. Тогда согласно лемме о маневре обхода $\xi(\Theta) > \varepsilon$.

Опишем процесс убегания. Если начальное значение z_0 удовлетворяет условию $\xi_0 \leq \varepsilon$, то на отрезке времени $0 < t \leq \Theta$ применяем управление убегания, при этом имеет место оценка $\xi(t) > \alpha t$. В момент Θ $\xi(\Theta) > \varepsilon$. Таким образом, либо точки z_0, либо для точки $z(\Theta)$ выполнено условие

$$\xi_0 > \varepsilon, \xi(\Theta) > \varepsilon.$$

Начиная с этого момента, т. е. с момента $t = 0$ или $t = \Theta$, мы применяем следующий способ управления: если для $z(t)$ $\xi(t) > \varepsilon$, то управление $v(t)$ берется равным нулю до тех пор, пока не наступает момент времени t_0, такой, что $\xi(t_0) = \varepsilon$. Начиная с момента t_0, убегающий применяет управление убегания и т. д.

Оценка снизу для $\xi(t)$ будет иметь вид:

а) при $\xi_0 < \varepsilon$ $\xi(t) > \frac{c\xi_0}{1+\eta(t)}$, $0 \leq t \leq \Theta$; $\xi(t) > \frac{c\varepsilon}{1+\eta(t)}$, $\Theta \leq t < \infty$;

б) при $\xi_0 \geq \varepsilon$ $\xi(t) > \frac{c\varepsilon}{1+\eta(t)}$, $0 \leq t \leq \infty$, где $c = \frac{\sigma}{24\sqrt{2}(1+\sigma+\frac{\rho}{2})}$.

Замечание 3.1. Нетрудно видеть, что описанный способ позволяет выделить несколько векторов β_0, причем, выбрав любой из них в качестве значения управления убегающего, мы гарантируем убегание.

Замечание 3.2. Приведенные рассуждения остаются в силе, если квадрат Г разбить на 4 равных квадрата Г'. При этом оценка для $\xi(t)$ улучшается.

Замечание 3.3. Для получения улучшенной оценки для $\xi(t)$ в процессе игры мы должны уметь выбирать вектор β из некоторого ограниченного множества, наиболее удаленным от кривой $\omega(t)$. В нашем примере эта задача решается следующим образом. В качестве вектора β_0, $\|\beta_0\| \leq \sigma$, выберем точку окружности радиуса σ с центром в нуле, наиболее удаленную от кривой $\omega(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$, $t \in [0,1]$. (Для точки β_0 нетрудно выписать аналитические соотношения.)

Обозначим $\tilde{\rho}(z_0)$ расстояние от β до $\omega(t)$, $t \in [0,1]$. Очевидно, $\tilde{\rho}(z_0) \geq \sigma$. В этом случае В этом случае

$$\Theta = min\{\frac{\sigma}{\rho}, \frac{1}{2(1+\sigma+\frac{\rho}{2})}\}, \varepsilon = \frac{\sigma\Theta}{2}, c = \frac{\sigma}{4(1+\sigma+\frac{\rho}{2})}.$$

Найдем значения параметров в контрольном примере Л. С. Понтрягнна и игре "два крокодила при которых выполнено достаточное условие разрешимости задачи убегания, теорема 3.1.

"Контрольный пример Л. С. Понтрягина". Рассмотрим для дифференциальной игры (1.2.16) задачу убегания. Проверим выполнимость условий предположения 3.1. Имеем $\pi = (E, 0, 0)$, где E — ν-мерная единичная матрица, 0 — ν-мерная нулевая матрица;

$$\pi BP = \pi CQ = \{0\}, \pi ABP = S^{\nu}_{\rho}(0), \pi ACQ = S^{\nu}_{\sigma}(0).$$

Таким образом, $k = 2$ и предположение 3.1 выполнено, если $\sigma > \rho$.

"Два крокодила". Рассмотрим для дифференциальной игры (1.2.18) задачу убегания. Проверяем условия предположения 3.1. Имеем $\pi = (E, 0)$, где E — ν-мерная единичная матрица.

$$\pi BP = \pi CQ = \{0\}, \pi ABP = S^{\nu}_{\rho}(0), \pi ACQ = S^{\nu}_{\sigma}(0).$$

Таким образом, $k = 2$ и предположение 3.1 выполнено, если $\sigma > \rho$.

Для нахождения специального управления убегания надо провести построения п. 3 для рассматриваемых игр.

Глава 2

Игровые задачи управления несколькими объектами. Постановка задач.

А. В теории дифференциальных игр группы m преследователей и одного убегающего рассматривается движение конфликтно управляемых объектов z_i , $i = 1, ..., m$, описываемое в n_i-мерном евклидовом пространстве R^{n_i} следующими уравнениями:

$$\dot{z}_i(t) = F_i(t, z_i(t), u_i(t), v(t)), z_i(t_0) = z_i^0, \qquad (2.0.1)$$

где $z_i \in R^{n_i}$, $t \geq t_0$, $u_i(t) \in P_i(t) \subset R^{p_i}$, $v(t) \in Q(t) \subset R^q$; $P_i(t)$, $Q(t)$ - непустые непрерывные компактные отображения при $t \geq t_0$. Вектор u_i, находится в распоряжении i-го преследователя, вектор v находится в распоряжении убегающего. Движение начинается в момент $t = t_0$ из начального состояния (z_i^0, t_0) и протекает под воздействием измеримых по Лебегу функций $v(t) \in Q(t)$, $u_i(t) \in P_i(t)$. Относительно векторной функции $F_i(t, z_i, u_i, v)$ будем предполагать, что она определена и непрерывна на $[t_0, \infty) \times R^{n_i} \times R^{p_i} \times R^q$; на каждом компакте $K \subset [t_0, \infty) \times R^{n_i}$ и всевозможных $u_i \in P_i(t)$, $v \in Q(t)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F_i(t, z_i', u_i, v) - F_i(t, z_i'', u_i, v)\| \leq \lambda_k \|z_i' - z_i''\|,$$

где λ_k — константа, зависящая от K, и удовлетворяет следующему неравенству:

$$\|F_i(t, z_i, u_i, v)\| \leq C_i(t)(1 + \|z_i\|),$$

где $C_i(t)$—непрерывная функция. Эти условия обеспечивают существование, единственность и продолжимость при всех $t \geq t_0$ решения задачи Коши

$$\dot{z}_i(t) = F_i(t, z_i(t), u_i(t), v(t)), z_i(t_0) = z_i^0,$$

в классе абсолютно непрерывных функций при произвольных измеримых $u_i(t) \in P_i(t)$, $v(t) \in Q(t)$. В R^{n_i} выделено некоторое непустое выпуклое замкнутое множество $M_i(t)$, которое называется терминальным. Цель группы преследователей — добиться по возможности быстрее выполнения включения $z_i(t_i) \in M_i(t_i)$, хотя бы при одном i при некотором $t_i \geq t_0$. В момент первого попадания одной из точек $z_i(t)$ на соответствующее множество $M_i(t)$ преследование считается законченным. Убегающий стремится отдалить момент попадания $z_i(t)$ на $M_i(t)$, $i = 1, ..., m$, или, если это возможно, обеспечить при всех $t \geq t_0$ условие $z_i(t) \notin M_i(t)$ для всех $i = 1, 2, ..., m$.

Перечисленными выше данными описана дифференциальная игра нескольких лиц (2.0.1), в которой принимает участие группа преследователей, в распоряжении которой вектор управления $u = (u_1, ..., u_m)$, и преследуемый игрок, в распоряжении которого вектор v. Физической моделью для дифференциальных игр группы преследователей и одного убегающего является процесс преследования группой преследующих объектов x_i, $i = 1, ..., m$, одного убегающего объекта y. Пусть динамические возможности объекта x_i описываются уравнением

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, t, u_i), \tag{2.0.2}$$

где $x_i \in R^{k_i}$, $u_i \in P_i \subset R^{p_i}$, а динамические возможности объекта y описываются уравнением

$$\dot{y} = g(y, t, v), \tag{2.0.3}$$

где $y \in R^l$, $v \in Q \subset R^q$. В $R^{n_i} = R^{k_i} \times R^l$ выделено замкнутое множество M_i. Преследование считается законченным, когда вектор $(x_i(t), y(t))$ впервые попадает на M_i. Полагая $z_i = (x_i, y)$, уравнения (2.0.2), (2.0.3) можно записать в виде (2.0.1). Отметим, однако, что дифференциальная игра (2.0.1) (если не сделано специальных предположений относительно $F_i(t, z_i, u_i, v)$) имеет более общий характер, нежели игра (2.0.2), (2.0.3), так как в последние уравнения u_i, v входят разделенным образом, что нередко существенно упрощает исследование.

Следуя Л. С. Понтрягину [4], мы будем отдельно рассматривать дифференциальную игру (2.0.1) с точки зрения группы преследователей и с точки зрения убегающего.

При первом подходе предполагается, что i-й догоняющий знает: 1) динамические возможности конфликтно управляемых объектов $z_j, j = 1, ..., m$, т. е. знает функции $F_j(t, z_j, u_j, v)$ множества $P_j(t)$, $Q(t)$, $M_j(t)$, $t \geq t_0$, $j = 1, ..., m$ 2) начальное состояние игры $(z^0, t_0) = (z_1^0, ..., z_m^0, t_0)$; 3) $v_t(.)$—функцию $v(s)$ при $t_0 \leq s \leq t$, где t — текущий момент игры.

Определим **стратегию i-го преследователя** $u_i(t) = U_i(t, z_0, t_0, v_t(.))$ как отображение, определенное на множестве произвольных измеримых функций $v(t) \in Q(t)$, $t \geq t_0$, и обладающее следующими свойствами: для произвольной измеримой $v(t) \in Q$, $t \geq t_0$, функция $u_i(t) = U_i(t, z_0, t_0, v_t(.))$ измерима по t, $t \geq t_0$, $u_i(t) \in P_i(t)$, и если $v^1(t) = v^2(t)$ почти всюду для $t_0 \geq t \geq \tau$, то $U_i(t, z_0, t_0, v_t^1(.)) = U_i(t, z_0, t_0, v_t^2(.))$ почти всюду для $t_0 \leq t \leq \tau$.

Стратегией преследования назовем вектор $U = (U_1, ..., U_m)$, где U_i — стратегия i-го преследователя.

Задача 1 — задача преследования — формулируется следующим образом. Найти начальные состояния z^0, t_0, для которых существует такая стратегия преследования $U = (U_1, ..., U_m)$, что при любом управлении убегающего по крайней мере один вектор $z_i(t)$, $i = 1, ..., m$, являющийся решением уравнения

$$\dot{z}_i(t) = F_i(t, z_i(t), U_i(t, z^0, t_0, v_t(.)), v(t)), z_i(t_0) = z_i^0, \tag{2.0.4}$$

приходит на соответствующее терминальное множество $M_i(t)$ не позднее некоторого конечного времени.

Если данная начальная точка (z^0, t_0) принадлежит множеству $\mathfrak{U} = \{(z^0, t_0)\} \subset R^{\bar{n}}$, $\bar{n} = (\sum\limits_{i=1}^{m} n_i) + 1$, являющемуся решением задачи преследования с гарантированной оценкой $t_i \leq \tau(z^0, t_0)$, то мы будем говорить, что из этой начальной точки группа преследователей может завершить преследование за время $\tau(z^0, t_0) - t_0$, а время $\tau(z^0, t_0) - t_0$ будем называть гарантированным временем преследования.

Под решением задачи преследования мы будем понимать: 1) нахождение эффективных достаточных условий существования решения задачи преследования; 2) описание процедуры нахождения точек z^0, для которых разрешима задача преследования; 3) описание процедуры построения стратегии преследования; 4) описание процедуры вычисления гарантированного времени преследования. Изучению задачи преследования посвящены гл. 3, §1; гл. 4, §1—5; гл. 5, §1—5. В гл. 4, §4; гл. 5, §4 задача преследования рассматривается в классах стратегий, отличающихся от описанных выше. Соответствующие пояснения мы делаем в начале соответствующего параграфа.

При втором подходе предполагается, что убегающий знает:

1) динамические возможности всех объектов z_i, $i = 1, ..., m$ т. е. знает

функции $F_i(t, z_i, u_i, v)$, множества

$$P_i(t), Q(t), M_i(t), i = 1, ..., m, t > t_0;$$

2) начальное состояние игры $(z^0, t_0) = (z_1^0, ..., z_m^0, t_0)$

3) $u_{1_t}(.)$,...,$u_{m_t}(.)$, —функции $u_i(s)$, $i = 1, ..., m$, при $t_0 \leq s \leq t$, где t — текущий момент игры.

Определим **стратегию убегающего** $v(t) = V(t, z^0, t_0, u_{i_t}(.), i = 1, ..., m)$ как отображение, определенное на множестве произвольных измеримых функций $u_i(t) \in P_i(t)$, $t \geq t_0$, $i = 1, ..., m$, и обладающее следующими свойствами: для произвольных измеримых $u_i(t)$, $t \geq t_0$, $i = 1, ..., m$, функция $v(t) = V(t, z^0, t_0, u_{i_t}(.), i = 1, ..., m)$ измерима по t, $v(t) \in Q$, и если $u_i^1(t) = u_i^2(t)$, $i = 1, ..., m$, почти всюду для $t_0 \leq t \leq \tau$, то

$$V(t, z^0, t_0, u_{i_t}^1(.), i = 1, ..., m) = V(t, z^0, t_0, u_{i_t}^2(.), i = 1, ..., m)$$

почти всюду для $t_0 \leq t \leq \tau$.

Задача 2 — задача убегания — формулируется следующим образом. Найти начальные состояния z^0, t_0, для которых существует такая стратегия убегающего $v(t)$, что при любых управлениях преследователей ни один вектор $z_i(t)$, $i = 1, ..., m$, являющийся решением уравнения

$$\dot{z}_i(t) = F_i(t, z_i(t), u_i(t), V(t, z^0, t_0, u_{i_t}(.), i = 1, ..., m)), z_i(t_0) = z_i^0, \quad (2.0.5)$$

не приходит на соответствующее терминальное множество $M_i(t)$ для всех $t \geq t_0$.

Под решением задачи убегания будем понимать: 1) нахождение эффективных достаточных условий существования решения задачи убегания; 2) описание процедуры нахождения точек z^0, t_0, для которых разрешима задача убегания; 3) описание процедуры построения управления убегающего, решающего задачу убегания.

Среди уравнений (2.0.1) особо выделим квазилинейный случай

$$F_i(t, z_i, u_i, v) = A_i(t)z_i + f_i(t, u_i) - g_i(t, v) \quad (2.0.6)$$

и линейный стационарный случай

$$F_i(t, z_i, u_i, v) = A_i z_i + B_i u_i - C_i v. \quad (2.0.7)$$

В случае (2.0.6) уравнение (2.0.1) имеет вид

$$\dot{z}_i(t) = A_i(t)z_i + f_i(t, u_i) - g_i(t, v), z_i(t_0) = z_i^0, \quad (2.0.8)$$

где $z_i \in R^{n_i}$, $u_i(t) \in P_i(t) \subset R^{p_i}$, $v(t) \in Q(t) \subset R^q$, $A_i(t)$—квадратные матрицы порядка n_i, элементы которых являются непрерывными функциями при $t \geq t_0$; $P_i(t)$, $Q(t)$—непустые, непрерывные компактнозначные отображения при $t \geq t_0$; $g_i(t, v)$, $f_i(t, u_i)$, n_i-мерные векторные функции, непрерывные по совокупности аргументов. При этом будем считать, что множества $M_1(t), ..., M_m(t)$ имеют вид $M_i(t) = M_i^1 + M_i^2(t)$, где M_i^1 — линейное подпространство пространства R^{n_i}, M_i^2— непустые непрерывные, выпуклозначные отображения, такие, что для каждого $t \in [t_0, \infty)$, $M_i^2(t) \subset L_i^1$, где L_i^1 — ортогональное дополнение к подпространству M_i^1 в R^{n_i}. В случае (2.0.7) уравнение (2.0.1) имеет вид

$$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v, z_i(0) = z_i^0, \tag{2.0.9}$$

где $z_i \in R^{n_i}$, $u_i \in P_i \subset R^{p_i}$, $v \in Q \subset R^q$, $p_i \geq 1$, $q \geq 1$, P_i, Q-непустые выпуклые компакты, A_i, B_i, C_i — постоянные матрицы размерности $n_i \times n_i$, $n_i \times p_i$, $n_i \times q$ соответственно. При этом мы будем считать, что множества $M_i(t)$ от t не зависят, $M_i = M_i^1 + M_i^2$, где M_i^1— линейное подпространство пространства R^{n_i}, M_i^2— непустой выпуклый компакт: $M_i^2 \subset L_i^1$, L_i^1 — ортогональное дополнение к подпространству M_i^1 в R^{n_i}.

Б. Наряду с задачами преследования и убегания важными для приложений являются задача преследования при r-кратном взаимодействии с убегающим, задача уклонения от r-кратного взаимодействия с преследователями, задача преследования при задержке поступления информации об убегающем. Перейдем к их формулировке.

Задача 3 — задача преследования при r-кратном взаимодействии с убегающим для дифференциальной игры группы преследователей и одного убегающего вида (2.0.9)—формулируется следующим образом. Найти начальные состояния $z_0 = (z_1^0, ..., z_m^0)$, для которых существует такая стратегия преследования $U = (U_1, ..., U_m)$, что при любом управлении убегающего, по крайней мере r, $1 \leq r \leq m$, разных функций $z_{ij}(t)$, $j = 1, ..., r$, являющихся решением уравнения

$$\dot{z}_{ij} = A_{ij} z_i + B_{i_j} U_{i_j}(t, z^0, 0, v_t(.)) - C_{i_j} v(t), z_{ij}(0) = z_{i_j}^0,$$

приходят на соответствующие терминальные ножества M_i не позднее некоторого конечного момента времени (приход траектории $z_i(t)$ на M_i может происходить в разные моменты времени).

Задача 4 — задача уклонения от r-кратного взаимодействия с преследователями для дифференциальной игры группы преследователей и одного убегающего вида (2.0.9)—формулируется так. Найти начальные состояния $z^0 = (z_1^0, ..., z_m^0)$, для которых существует такая стратегия убегающего V, что при любых управлениях преследователей, не менее чем для $m - r + 1$ индексов i, для траекторий $z_i(t)$, являющихся решением уравнений

$$\dot{z}_i(t) = A_i z_i(t) + B_i u_i(t) - C_i V(t, z^0, 0, u_{i_t}(.), i = 1, ..., m), z_i(t_0) = z_i^0,$$

выполняется соотношение $z_i(t) \notin M_i$, $t \geq 0$. Изучению задач 3 и 4 посвящены гл. 3, §1 и гл. 4, §2.

B. Перейдем к формулировке задачи преследования при задержке поступления информации об убегающем.

Рассмотрим дифференциальную игру нескольких лиц (2.0.9), в которой принимают участие группа преследователей, в распоряжении которой вектор управления $u = (u_1, ..., u_m)$, и преследуемый игрок, в распоряжении которого вектор v. Предполагается, что преследователям известны уравнения (2.0.9), множества P_i, Q, M_i, $i = 1, ..., m$, начальное состояние игры $z^0 = (z_1^0, ..., z_m^0)$; в каждый момент $t \geq 0$ i-му преследователю известно $v(., r_i(t))$ —функция $v(s)$ при $0 \leq s \leq t - r_i(t)$, $r_i(t)$ при $t \geq 0$ неотрицательная непрерывная, кусочно-непрерывно дифференцируемая функция с конечным числом разрывов производной на каждом конечном отрезке, $r_i(t) \leq t$, $r_i(0) = 0$. Далее в точках разрыва за значение производной будем принимать значения правой производной.

Стратегию i-го преследователя при задержке поступления информации об убегающем определим как отображение $U_i(z^0, t, v(., r_i(t)))$, $t \geq 0$, определенное на множестве произвольных измеримых функций $v(s) \in Q, 0 \leq s \leq t - r_i(t)$ и множестве произвольных векторов $(z^0, t) \in R^{\bar{n}} \times \tilde{R}^1$, $\bar{n} = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i$, $t \geq 0$, и обладающее следующими свойствами: для каждого измеримого $v(s) \in Q, 0 \leq s \leq t - r_i(t)$, $z^0 \notin R^{\bar{n}}$, $U_i(z^0, t, v(., r_i(t))))$—как функция t измерима; $U_i(z^0, t, v(., r_i(t)))) \in P_i$; для любого $\alpha \geq 0$, если $v_1(s) = v_2(s)$ почти всюду для $s \in [0, \alpha - r_i(\alpha)]$, то $U_i(z^0, t, v_1(., r_i(t)))) = U_i(z^0, t, v_2(., r_i(t))))$ почти всюду для $t \in [0, \alpha]$.

Стратегией преследования при задержке поступления информации об убегающем назовем вектор $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$, где u_i — стратегия i-го преследователя при задержке поступления информации об убегающем.

Задача 5 — задача преследования при задержке поступления информации об убегающем — формулируется следующим образом.

Найти начальные состояния z^0, для которых существует такая стратегия преследования при задержке поступления информации $u^*(t) = (u_1^*(t), ..., u_m^*(t))$, что при любом программном управлении убегающего по крайней мере один вектор $z_i(t)$, $i = 1, ..., m$, являющийся решением уравнения $\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i^*(t) - C_i v(t), z_i(0) = z_i^0$, приходит на соответствующее терминальное множество M_i не позже некоторого конечного момента времени.

Изучению задачи 5 посвящен §3 гл. 4.

Г. Наряду с дифференциальными играми вида (2.0.9) мы будем рассматривать процесс преследования m преследователями, движение которых описывается уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = G_i x_i + u_i, i = 1, ..., m, x_i(0) = x_i, x_i \in R^n, u_i \in P_i \subset R^n \quad (2.0.10)$$

одного убегающего, движение которого описывается уравнением

$$\dot{y}_i(t) = Hy + v, y(0) = y^0, y \in R^n, v \in Q \subset R^n \quad (2.0.11)$$

Процесс преследования оканчивается, если хотя бы для одного $i \in \{1, .., m\}$ в некоторый момент времени

$$\pi_i x_i(t) + M_i \supset \pi_i y(t) \quad (2.0.12)$$

Здесь G_i, H, π_i —квадратные матрицы порядка n, P_i, Q, M_i— непустые выпуклые компакты из R^n.

Определим **стратегию i-го преследователя** в процессе преследования $u_i(t) = U_i(t, x_i^0, y^0, v_t(.))$ как отображение, определенное на множестве произвольных измеримых функций $v(t) \in Q$, $t \geq 0$, и обладающее следующим свойством: для произвольной измеримой $v(t) \in Q$, $t \geq 0$, функция $u_i(t) = U_i(t, x_i^0, y^0, v_t(.))$, $t \geq 0$, измерима по t, $u_i(t) \in P_i$, и если $v^1(t) = v^2(t)$ почти всюду для $0 \leq t \leq \tau$, то $U_i(t, x_i^0, y^0, v_t^1(.)) = U_i(t, x_i^0, y^0, v_t^2(.))$ почти всюду для $t \geq 0$.

Стратегией преследования в процессе преследования назовем вектор $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$, где $u_i(t)$—стратегия i-го преследователя в процессе преследования.

Задача 6 — задача об окончании процесса преследования — Формулируется следующим образом. Найти начальные состояния x_i^0, y^0, для которых существует такая стратегия преследования в процессе преследования $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$, что при любом управлении убегающего $v(t) \in Q, t \geq 0$, по крайней мере один вектор $x_i(t)$,$i = 1, ..., m$, являющийся решением уравнения

$$\dot{x}_i(t) = G_i x_i(t) + U_i(t, x_i^0, y^0, v(s), t_0 \le s \le t) x_i(0) = x_i^0,$$

удовлетворяет условию $\pi_i x_i(t) + M_i \supset \pi_i y(t)$ не позднее некоторого конечного момента времени. Здесь $y(t)$—решение уравнения (2.0.11) при $v = v(t)$.

Под решением задачи об окончании процесса преследования мы будем понимать: 1) нахождение эффективных достаточных условий существования решения задачи преследования; 2) описание процедуры нахождения точек x_i^0, y, для которых разрешима задача преследования; 3) описание процедуры построения стратегии преследования; 4) описание процедуры вычисления гарантированного времени преследования.

Изучению задачи 6 посвящен §4 из гл. 5.

Д. Перейдем к формулировке задачи преследования для дифференциальных игр группы преследователей и одного убегающего переменной структурой. Из всех возможных видов дифференциальных игр с переменной структурой мы рассмотрим два: дифференциальные игры группы преследователей и одного убегающего с переменной структурой, управляемой убегающим (при этом фиксирован порядок использования уравнений, описывающих игру, убегающим), и дифференциальные игры группы преследователей и одного убегающего с переменной структурой, управляемой преследователями, в которой преследователи располагают возможностью выбора последовательности использования уравнений, описывающих игру. Этим видам присущи характерные особенности дифференциальных игр с переменной структурой.

Сформулируем задачу преследования для дифференциальной игры группы преследователей и одного убегающего с переменной структурой, управляемой убегающим.

Пусть движение векторов $x_i, y \in R^n$ описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = A_i x_i + u_i^1 - v^1, x_i(0) = x_i^0, 0 \le t \le \tau \qquad (2.0.13)$$

$$\dot{y}_i = B_i y_i + u_i^2 - v^2, y_i(\tau) = J_i x_i(\tau), t \ge \tau \qquad (2.0.14)$$

$$i = 1, ..., m$$

где x_i, y_i, u_i^1, u_i^2, v^1, v^2 $\in$ R^n, A_i, B_i, J_i —постоянные квадратные матрицы порядка n, $u_i^j \in P_i^j \subset R^n$, $v^j \in Q^j \subset R^n$, $j = 1, 2, Q^j, P_i^j$ — непустые выпуклые компакты. Пусть далее в R^n заданы множества

M_i, $i = 1, ..., m$, где $M_i = M_i^1 + M_i^2$, M_i^1 — линейное подпространство пространства R^n, M_i^2 — выпуклый компакт в L_i^1, L_i^1 — ортогональное дополнение к подпространству M_i^1 в R^n. Игра начинается в момент $t = 0$ из начальных состояний x_i^0 и оканчивается в тот момент времени $t > 0$, когда хотя бы при одном i $y_i(t) \in M_i$ (если переключения не произошло, то условие окончания $J_i x_i(t) \in M_i$). Выбором момента переключения τ с системы (2.0.13) на систему (2.0.14) распоряжается убегающий. Преследователи момент переключения заранее не знают и узнают о том, что переключение происходит, только в момент переключения. Под **стратегией убегающего** условимся понимать всевозможные тройки $\beta = (v^1(.), \tau, v^2(.))$, где $v^1(t) \in Q^1$, $0 \leq t \leq \tau$; $v^2(t) \in Q^2$, $t \geq \tau$.

Пусть $j \in \{1, 2\}$, $q = \{1, 2\} \setminus j$. Обозначим через $\tilde{U}_i^j$ класс функций $U_i^j : [0, \infty) \times Q^j \to R^n$, для которого выполнены следующие условия: 1) $U_i^j(t, v^j) \in P_i^j$ для всех $t \geq 0$, $v^j \in Q^j$; 2) суперпозиция $U_i^j(t, v^j(t))$ измерима по Лебегу при $t \geq 0$ для произвольной измеримой $v^j(t) \in Q^j$. Обозначим через $\tilde{U}_i^q(\tau)$ класс функций U_i^q :$[\tau, \infty) \times Q^q \to R^n$, для которого выполнены следующие условия: 1) $U_i^q(t, v^q) \in P_i^q$ для всех $t \geq \tau$, $v^q \in Q^q$ 2) суперпозиция $U_i^q(t, v^q(t))$ измерима по Лебегу при $t \geq \tau$ для произвольной измеримой $v^q(t) \in Q^q$. Под **стратегией i-го преследователя** условимся понимать всевозможные тройки $\alpha = (U_i^1, \tau, U_i^2)$, где $U_i^1 \in \tilde{U}_i^1$, $U_i^2 \in \tilde{U}_i^2(\tau)$. Решение уравнений (2.0.13), (2.0.14) при фиксированных стратегиях убегающего и i-го преследователя: $\gamma_i = (\alpha_i, \beta)$ определяется следующим образом. Если $v^1(t)$-измеримая функция со значениями из Q^1, $t \geq 0$, $U_i^1 \in \tilde{U}_i^1$, то $x_i(t, \gamma_i)$ - абсолютно непрерывное решение уравнения (2.0.13) для $t \geq 0$ при $v^1 = v^1(t)$, $u_i = U_i(t, v^1(t))$. Начиная с момента τ, выбираемого убегающим для $v^2(t)$-измеримой функции со значением из Q^2, $t \geq \tau$, $U_i^2 \in \tilde{U}_i^2(\tau)$, $y_i(t; \gamma_i)$-абсолютно непрерывное решение уравнения (2.0.14), $t \geq \tau$, с начальным условием $y_i(\tau) = J_i x_i(\tau)$ при $v^2 = v^2(t)$, $u_i^2(t) = U_i^2(t, v^2(t))$.

Стратегией преследования назовем вектор $u = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, где α_i - стратегия i-го преследователя.

Группа догоняющих стремится к тому, чтобы хотя бы одна точка $y_i(t; \gamma_i)$ побыстрее попала на M_i, а убегающий стремится оттянуть попадание $y_i(t; \gamma_i)$ на M_i.

Перечисленными выше данными описана дифференциальная игра нескольких лиц (2.0.13), (2.0.14) с переменной структурой, управляемой убегающим, в которой принимают участие группа преследователей, в распоряжении которой вектор управления $u = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, и преследуемый игрок, в распоряжении которого параметр β.

Задача 7 - задача преследования в дифференциальной игре с переменной структурой, управляемой убегающим, - формулируется следующим образом. Найти начальные состояния $x^0 = (x_1^0, ..., x_m^0)$, для которых существует такая стратегия преследования $u = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, что при любой стратегии убегающего β по крайней мере один вектор $y_i(t; \gamma_i)$ приходит на соответствующее терминальное множество M_i не позднее некоторого конечного момента времени.

Сформулируем задачу преследования для дифференциальной игры группы преследователей и одного убегающего с переменной структурой, управляемой преследователями.

Пусть движение векторов $x_{ij} \in R^n$ описывается уравнениями

$$\dot{x}_{ij} = A_{ij}x_{ij} + u_{ij} - v_j, i = 1, ..., m, j = 1, 2, x_{ij}(0) = x_{ij}^0 \qquad (2.0.15)$$

где u_{ij}, $v_j \in R^n$, A_{ij}- постоянные квадратные матрицы порядка n, $u_{ij} \in P_{ij} \subset R^n$, $v_j \in Q_j \subset R^n$, P_{ij}, Q_j- непустые выпуклые компакты.

Пусть далее в R^n выделены множества M_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, 2$, где $M_{ij} = M_{ij}^1 + M_{ij}^2$, M_{ij}^1 - линейное подпространство пространства R^n, M_{ij}^2 - выпуклый компакт в L_{ij}^1, L_{ij}^1- ортогональное дополнение к подпространству M_{ij}^1 в R^n. Игра начинается в момент $t = 0$ из начального состояния $x^0 = (x_{11}^0, ..., x_{m1}^0, x_{12}^0, ..., x_{m2}^0)$ и оканчивается в тот момент времени $t > 0$, когда хотя бы при одной паре индексов ij выполнено включение $x_{ij} \in M_{ij}$; убегающий распоряжается выбором измеримых $v_j(t) \in Q_j$, $j = 1, 2$, $t \geq 0$. Догоняющий с номером i распоряжается выбором вектора $(j, u_{ij}(t), \tau_{ij})$, причем значения $j = j(i) \in \{1, 2\}$ выбираются им в момент начала игры, τ_{ij} - момент переключения i-го преследователя с уравнения (2.0.15) для $0 \leq t \leq \tau_{ij}$ при индексе $j \in \{1, 2\}$ на уравнения (2.0.15) для $t \geq \tau_{ij}$ при индексе $q = \{1, 2\} \setminus j$, в котором считается выполненным краевое условие $x_{iq}(\tau_{ij}) = J_{ij}x_{ij}(\tau_{ij})$, где J_{ij} - квадратные матрицы порядка n, $i = 1, ..., m$, $q = 1, 2$; $u_{ij}(t) \in P_{ij}$- измеримые функции для $t \geq 0$. Под **стратегиями i-го догоняющего** условимся понимать всевозможные четверки $\alpha_i = (j, U_i^j, U_i^q(\tau_{ij}), \tau_{ij})$, где $\tau_{ij} \geq 0$, $U_i^j \in \tilde{U}_i^j(\tau_{ij})$, $U_i^q \in \tilde{U}_i^q(\tau_{ij})$, $j = 1, 2$; а под **стратегиями убегающего** - всевозможные пары программных управлений $\beta = ((v_1(.), v_2(.))$, где $v_j(t) \in Q_j(t)$-измеримая функция.

Стратегией преследования назовем вектор $u = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, где α_i - стратегия i-го преследователя.

Решение уравнения (2.0.15) при фиксированных стратегиях убегающего и i-го преследователя $\gamma_i = (\alpha_i, \beta)$ определяется следующим образом. В момент начала игры i-й преследователь определяет номер j и момент переключения τ_{ij}. Если $v^j(t)$-измеримая функция со значением из Q_j, $U_i^j \in \tilde{U}_i^j$, $0 \le t \le \tau_{ij}$, то $x_{ij}(t; \gamma_i)$-абсолютно непрерывное решение уравнения (2.0.15), $0 \le t \le \tau_{ij}$ при $v_j = v_j(t)$, $u_{ij} = U_i^j(t, v^j(t))$. Начиная с момента τ_{ij}, $x_{iq}(t; \gamma_i)$-абсолютно непрерывная функция, являющаяся решением уравнения (2.0.15) при $v_q = v_q(t)$, $u_{iq} = V_i^q(t, v_q(t))$ с начальным условием $x_{iq}(\tau_{ij}) = J_{ij} x_{ij}(\tau_{ij})$. Группа догоняющих стремится к тому, чтобы хотя бы одна из точек $x_{iq}(t; \gamma_i)$ побыстрее попала на M_{iq}, а убегающий стремится оттянуть попадание $x_{iq}(t; \gamma_i)$ на M_{iq}.

Перечисленными выше данными описана дифференциальная игра нескольких лиц (2.0.15) с переменной структурой, управляемой преследователями, в которой принимают участие группа преследователей, в распоряжении которой вектор $u = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, и преследуемый игрок, в распоряжении которого параметр β.

Задача 8 - задача преследования в дифференциальной игре с переменной структурой, управляемой преследователями, - формулируется следующим образом. Найти начальные состояния $x^0 = (x_{11}^0, ..., x_{m1}^0, x_{12}^0, ..., x_{m2}^0)$, для которых существует такая стратегия преследования $u = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, что при любой стратегии убегающего β по крайней мере один вектор $x_{ij}(t; \gamma_i)$ приходит на соответствующее терминальное множество M_{ij} не позднее некоторого конечного момента времени.

Исследованию задач 7 и 8 посвящена гл. 6.

Е. Перейдем к формулировке задачи преследования для дифференциальной игры группы преследующих объектов и двух убегающих.

Пусть движение векторов $z_{ij} \in R^n$ описывается уравнениями

$$\dot{z}_{ij} = A_{ij}(t) z_{ij} + f_{ij}(t, u_i, v_i), z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0, i = 1, ..., m, j = 1, 2, \quad (2.0.16)$$

где $u_i(t) \in P_i(t) \subset R^p$, $v_j(t) \in Q_j(t) \subset R^q$, $t \in [t_0, \infty)$. $A_{ij}(t)$-квадратные матрицы порядка n, непрерывно зависящие от u_i, v_j - параметры управлений i-го преследователя и j-го убегающего, $P_i(t)$, $Q_j(t)$ -непрерывные в метрике Хаусдорфа компактнозначные отображения, $f_{ij}(t, u_i, v_j)$ - непрерывные по совокупности аргументов функции. Преследователь с номером i распоряжается выбором вектора $u_i(t)$, где $u_i(t) \in P_i(t)$ - измеримая функция для $t \ge t_0$. Убегающий с номером j распоряжается выбором $v_j(t) \in Q_j(t)$-измеримой функции для $t \geq t_0$. Терминальные множества $M_{ij} \in R^n$ имеют вид $M_{ij}(t) = M_{ij}^1 + M_{ij}^2(t)$, где M_{ij}^1 - линейные подпространства из R^n, $M_{ij}^2(t)$-выпуклозначное отображение из L_{ij}^1, L_{ij}^1 -ортогональное дополнение к M_{ij}^1 в R^n. Игра начинается в момент $t = t_0$ и считается оконченной, если найдутся номера i_1, $i_2 \in \{1, ..., m\}$ и конечные времена $t_1 \geq t_0$, $t_2 \geq t_0$, такие, что

$$z_{i_1 1}(t_1) \in M_{i_1 1}(t_1), z_{i_2 1}(t_2) \in M_{i_2 2}(t_2).$$

Цель группы преследователей - побыстрее окончить игру, цель убегающих противоположна. Перечисленные выше данные описывают дифференциальную игру группы преследователей и двух убегающих (2.0.16), в которой в распоряжении группы преследователей вектор $u = (u_1(t), ..., u_m(t))$, а в распоряжении убегающих вектор $v = (v_1(t), v_2(t))$. Обозначим через $G \subset [t_0, \infty) \times R^q \times R^q$ график произведения многозначных отображений $Q_j : [t_0, \infty) \to 2^{R^q}$, $j = 1, 2$, через B_i - класс функций $U_i : G \to R^q$, для которых выполнены следующие условия: 1) $U_i(t, v_1, v_2) \in P_i(t)$ для всех $t \geq t_0$, всех $v_j \in Q_j(t)$, $j = 1, 2$. 2) суперпозиция $U_i(t, v_1(t), v_2(t))$ измерима по Лебегу при $t \geq t_0$ для произвольной измеримой $v_j(t) \in Q_j(t)$, $t \geq t_0$, $j = 1, 2$. Под **стратегией i-го преследователя** условимся понимать всевозможные функции, где $U_i^j \in B_i$, а под **стратегией j-го убегающего**-всевозможные программные измеримые функции $v_j(t) \in Q_j(t)$, $t \geq t_0$.

Стратегией преследования назовем вектор $u = (U_1, ..., U_m)$, где U_i — стратегия i-го преследователя.

Задача 9 — задача преследования для дифференциальной игры группы преследователей и двух убегающих — формулируется следующим образом. Найти начальные состояния $z^0 = (z_{11}^0, ..., z_{m1}^0, z_{12}^0, ..., z_{m2}^0)$, для которых существует такая стратегия преследования, что при любых стратегиях убегающих найдутся номера $i_2 \in \{1, ..., m\}$ такие, что в некоторые конечные моменты времени решения уравнения (2.0.16) с индексами i_1, i_2 при так выбранных управлениях придут на терминальные множества $M_{i_1 j}$, $M_{i_2 q}$ соответственно, где $q = \{1, 2\} \setminus j$. Изучению задачи 9 посвящена гл.7.

В следующих главах мы приведем решения задач 1—9.

Глава 3

Решения игровых задач, обладающих простым движением.

В настоящей главе мы приводим решения ряда задач преследования — убегания группы преследователей и одного или двух убегающих для объектов, обладающих простыми движениями. Они отражают специфику задач группового преследования — убегания и формируют представление об условиях разрешимости таких задач и возможных методах построения управлений, решающих соответствующие задачи. Простая динамика игры позволяет в ряде случаев получить полное решение задачи аналитическими методами.

3.1 Решение игры простого преследования — убегания. Теорема Б. Н. Пшеничного

В этом параграфе приводится решение дифференциальной игры преследования — убегания нескольких однотипных преследователей, обладающих простым движением, и одного убегающего того же типа. Теорема о разрешимости такого класса задач предложена Б. Н. Пшеничным в работе [22]. Ниже мы приводим один из вариантов этой теоремы (теорема 1.1) и ряд результатов по исследованию задачи простого преследования—убегания, появление которых стимулировала работа [22].

1. Постановка задачи. Теорема преследования—убегания.

Пусть движение m преследующих объектов описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = u_i, x_i(0) = x_i^0, i = 1, ..., m, \tag{3.1.1}$$

где x_i, $u_i \in R^n$, $u_i \in P$, P — выпуклый компакт. Убегающий объект описывается аналогично:

$$\dot{y} = v, y(0) = y^0, \tag{3.1.2}$$

где $y, v \in R^n$, $v \in P$. Игра оканчивается, если хотя бы для одного i в некоторый конечный момент времени t: $x_i(t) - y(t) \in M_i$, M_i — выпуклые компакты.

Введем переменную $z_i = x_i - y$. Тогда из (3.1.1) и (3.1.2) имеем

$$\dot{z}_i = u_i - v, z_i(0) = z_i^0, \tag{3.1.3}$$

$$z_i, u_i, v \in R^n, u_i \in P, v \in P$$

Уравнение (3.1.3), множества P и M_i описывают дифференциальную игру нескольких лиц (3.1.3), в которой принимают участие группа преследователей, в распоряжении которой вектор управления $u = (u_1, ..., u_m)$, и преследуемый игрок, в распоряжении которого вектор v. Рассмотрим для дифференциальной игры (3.1.3) задачи преследования и убегания, сформулированные в гл. 2.

Пусть $z^0 = (z_1^0, ..., z_M^0)$, $M = \{M_1, .., M_m\}$, $z_i^0 \notin M$, $i = 1, ..., m$,
$\lambda(i, v, z_i^0, M_i) = \max\{\lambda : \lambda \geq 0, -\lambda(z_i^0 - M_i) \cap (-v + P) \neq \emptyset\}$,

$$\delta(z^0, m) = \min_{v \in P} \max_{i=1,...,m} \lambda(i, v, z_i^0, M_i).$$

(Рис. 3.1.1 иллюстрирует определения функции $\lambda(i, v, z_i^0, M_i)$ в R^2. Для параметров z_i^0, z_j^0, M_i, M_j, v, P, изображенных на рис. 3.1.1, $\lambda(i, v, z_i^0, M_i) = 0$, $\lambda(j, v, z_j^0, M_j) > 0$.)

В силу утверждения П. 4. такое определение функции $\delta(z^0, m)$ корректно. Из определения функции $\delta(z^0, m)$ следует, что $\delta(z^0, m) = 0$ тогда и только тогда, когда существует вектор $v_0 \in P$, такой, что для каждого $i = 1, ..., m$, $\lambda(i, v_0, z_i^0, M_i) = 0$. Обозначим $v_0 = v(z^0, M)$.

Теорема 1.1.

а) Если для z^0, $\delta(z^0, m) > 0$, то для позиции z^0 разрешима задача преследования за конечное время $t(z^0)$, для которого справедлива оценка $t(z^0) \leq \frac{m}{\delta(z^0, m)}$. Этот результат гарантируют стратегии преследователей, описываемые далее формулой (3.1.4).

б) Если z^0 такова, что $\delta(z^0, m) = 0$, то для позиции z^0 разрешима задача убегания. Убегание гарантирует следующее управление убегающего: $v(t) = v(z^0, M)$, $t \geq 0$.

Доказательство. Пусть для позиции z^0 выполнено условие а) теоремы 1.1. Предпишем i-му преследователю выбирать функции $u_i(t) \in P$, $m_i(t) \in M_i$, как лексикографический минимум решений уравнения

$$u_i(t) - v(t) = -\lambda(i, v(t), z_i^0, M_i)(z_i^0 - m_i(t)) \tag{3.1.4}$$

(Рис. 3.1.2 иллюстрирует способ выбора управления $u_i(t)$ в R^2. Отметим, что если $\lambda(k, v(t), z_k^0, M_k) = 0$, то $u_k(t) = v(t)$.)

Если $v(t)$ — измеримая функция t, то функция $\lambda(i, v(t), z_i^0, M_i)$ в силу утверждения П. 2 измерима по t и в силу теоремы Филиппова (см. п. 7.) так получаемые функции $u_i(t)$, $m_i(t)$ измеримым образом зависят от t. Для решения уравнения (3.1.3) в силу (3.1.4) справедливо представление

$$z_i(t) = z_i^0 - \int\limits_0^t \lambda(i, v(\tau), z_i^0, M_i)(z_i^0 - m_i(\tau))d\tau =$$

$$= z_i^0\Big(1 - \int\limits_0^t \lambda(i, v(\tau), z_i^0, M_i)d\tau\Big) + \int\limits_0^t m_i(\tau)\lambda(i, v(\tau), z_i^0, M_i)d\tau. \quad (3.1.5)$$

В силу утверждения П. 3 и определения функции $\delta(z^0, m)$

$$\min_{i=1,\ldots,m} \Big(1 - \int\limits_0^t \lambda(i, v(s), z_i^0, M_i)ds\Big) =$$

$$= 1 - \max_{i=1,\ldots,m} \int\limits_0^t \lambda(i, v(s), z_i^0, M_i)ds \leq$$

$$\leq 1 - \frac{1}{m}\int\limits_0^t \sum_{i=1}^m \lambda(i, v(s), z_i^0, M_i)ds \leq 1 - \frac{1}{m}\delta(z^0, m)t.$$

Таким образом, не позже момента $t(z^0) \leq \frac{m}{\delta(z^0,m)}$ хотя бы одна из величин $1 - \int\limits_0^t \lambda(i, v(s), z_i^0, M_i)ds$ обратится в нуль. Обозначим этот момент t^*. Тогда

$$z_i(t^*) = \int\limits_0^{t^*} m_i(\tau)\lambda(i, v(\tau), z_i^0, M_i)d\tau \in M_i.$$

Таким образом, хотя бы один из преследователей ловит к моменту $t(z^0)$ убегающего.

Пусть для позиции z^0 выполнено условие б) теоремы 1.1. Тогда существует вектор $v_0 = v(z^0, m)$, такой, что для любого i выполняется соотношение

$$\{-v_0 + P\} \cap \{-\lambda(z_i^0 - M_i), \lambda \geq 0\} = \{0\}. \tag{3.1.6}$$

Положим $v(t) = v_0$. Если $u_i(t)$ — произвольное допустимое управление i-го преследователя, то

$$z_i(t) = z_i^0 + \int_0^t (-v_0 + u_i(\tau))d\tau \in z_i^0 - tv_0 + tP$$

для $t \geq 0$. В силу (1.6) для всех $i, t \geq 0$,

$$\{t(-v_0 + P)\} \cap \{-\lambda t(z_i^0 - M_i), \lambda \geq 0\} = \{0\}$$

и, следовательно,

$$\{z_i^0 - tv_0 + tP\} \cap \{z_i^0 - \lambda t(z_i^0 - M_i), \lambda \geq 0\} = \{z_i^0\}. \tag{3.1.7}$$

Так как $\{z_i^0 - \lambda t(z_i^0 - M_i), \lambda \geq 0, t \geq 0\} \supset M_i$ и $z_i^0 \notin M_i$, то из (3.1.7) следует, что для любого i и любого $t > 0$ $\{z_i^0 + t(-v_0 + P)\} \cap M_i = \emptyset$ и, следовательно, ни в какой конечный момент времени t ни при каком i $z_i(t)$ не попадет на M_i, т. е. убегающий не будет пойман ни одним из преследователей. Теорема доказана.

2.Вычисление функции $\lambda(.)$. Для нахождения управлений $u_i(t)$, $i = 1, ..., m$, гарантирующих выполнение пункта а) теоремы 1.1, необходимо уметь вычислять функции $\lambda(i, v, z_i^0, M_i)$. Приведем представление функции $\lambda(i, v, z_i^0, M_i)$ через опорные функции множеств, входящие в определение функции $\lambda(i, v, z_i^0, M_i)$.

Лемма 1.1. Пусть P выпуклый компакт в R^n, $z_i^0 \in M_i$, $i = 1, ..., m$. Тогда

$$\lambda(i, v, z_i^0, M) = \inf_{\psi \in A(z_i^0)} [(P - v, \psi)],$$

где $A(z_i^0) = \{\psi; \psi \in R^n, c(M - z_i^0, -\psi) = -1\}$, $c(P - v, \psi)$ - опорная функция соответствующего множества.

Доказательство. Так как $v \in P$, то справедливо включение $0 \in -v + P$ для всех $v \in P$, которое эквивалентно неравенству $c(P - v, \psi) \geq 0$ для всех $\psi \in R^n$. Непустота пересечения в определении функции λ равносильна неравенству $c(P - v, \psi) + c(\lambda(M - z_i^0), -\psi) \geq 0$, для всех $\psi \in R^n$. Таким образом,

$$c(P - v, \psi) + \lambda c(M - z_i^0, -\psi) \geq 0 \tag{3.1.8}$$

или

$$c(P - v, \psi) \geq -\lambda c(M - z_i^0, -\psi)$$

Если $c(M - z_i^0, -\psi) \geq 0$, то неравенство (3.1.8) выполнено при всех $\lambda \geq 0$. Если $c(M - z_i^0, -\psi) < 0$, то, положив $c(M - z_i^0, -\psi) = -1$, получим $c(P - v, \psi) \geq \lambda$.

Таким образом,

$$\lambda(i, v, z_i^0, M_i) = \inf_{\psi \in A(z_i^0)} [(P - v, \psi)],$$

где

$$A(z_i^0) = \{\psi : \psi \in R^n; c(M - z_i^0, -\psi) = -1\}.$$

Для исследования конкретных примеров и проведения численных расчетов полезно иметь явный вид функции $\lambda(i, v, z_i^0, m_i)$ для тех случаев, когда Р — многогранник или эллипсоид, а множество $M_i = m_i$ одноточечно. Вычислим $\lambda(i, v, z_i^0, m_i)$, когда P — многогранник и P — эллипсоид в R^n.

Пусть $P = P(p_1, ..., p_k, \alpha_1, ..., \alpha_k) = \{u \in R^n, (p_j, u) \leq \alpha_j, p_j \in R^n, \alpha_j \in R^1, j = 1, ..., k\}$- многогранник. Будем считать, $\alpha_j \geq 0, j = 1, ..., k$. Из определения $\lambda(i, v, z_i^0, m_i)$ следует, что $-\lambda(z_i^0 - m_i) + v \in P$, т. е. λ — наибольшее положительное число, такое, что для каждого j выполняется неравенство

$$\lambda(p_j, m_j - z_j^0) \leq \alpha_j - (p_j, v). \tag{3.1.9}$$

Так как $v \in P$, то $\alpha_j - (p_j, v) \geq 0$. Следовательно, для тех j, для которых $(p_j, m_i - z_i^0) > 0$, неравенство (3.1.9) выполняется, если

$$\lambda(i, v, z_i^0, m_i) = min\Big\{\Big(\frac{\alpha_j - (p_j, v)}{(p_j, m_i - z_i^0)}\Big); j \in \{1, ..., k\}, j : (p_j, m_i - z_i^0) > 0\Big\}; \tag{3.1.10}$$

для тех j, для которых $(p_j, m_i - z_i^0) \leq 0$, неравенство (3.1.9) выполняется для любого положительного λ. Таким образом, если P — многогранник, то функция $\lambda(i, v, z_i^0, m_i)$ определяется формулой (3.1.10) .

Пусть $P = P(\alpha, Q, \beta) = \{u : (u - \alpha, Q(u - \alpha)) \leq \beta^2\}$, α, $u \in R^m$, $\beta \in R^1$, $\beta \neq 0$, $Q - n \times n$ - симметрическая, положительно-определенная матрица. Здесь P — эллипсоид с центром в точке α и матрицей $\frac{1}{\beta^2}Q$. Из определения $\lambda = \lambda(i, v, z_i^0, m_i)$ следует, что $\lambda(m_i - z_i^0) + v \in P$. Следовательно, λ — наибольший корень уравнения $(\lambda(m_i - z_i^0) + v - \alpha, \lambda Q(m_i - z_i^0) + Q(v - \alpha)) = \beta^2$, откуда

$\lambda(i, v, z_i^0, m_i) = \{(Q(z_i^0 - m_i), v - \alpha) + [(Q(z_i^0 - m_i), v - \alpha)^2 + (z_i^0 - m_i, Q(z_i^0 - m_i))(\beta^2 - (v - \alpha, Q(v - \alpha)))]^{\frac{1}{2}}\}/(z_i^0 - m_i, Q(z_i^0 - m_i))$.

3. Описание множеств начальных позиций, из которых разрешимы задачи преследования и убегания. Согласно утверждениям а) и б) теоремы 1.1 для начальных позиций из множества $z : \delta(z,m) = 0$ разрешима задача убегания, для позиций $\{z : \delta(z,m) > 0\}$ — задача преследования. Опишем первое множество. Согласно определению $\{\delta(z^0,m) = 0\}$ тогда и только тогда, когда существует вектор $v_0 \in P$, такой, что для всех i, $i = 1,..,m$, $t \geq 0$ выполнено соотношение (3.1.6). Таким образом, если конус $K(v_0) = \{tv_0 + t(-P), t \geq 0\}$ при каком-то $v_0 \in P$ не пересекается со множествами $z_i^0 - M_i$, $i = 1,...,m$, то из этой позиции $z^0 = (z_1^0,...,z_m^0)$ возможно убегание. Вообще говоря, конус $K(v_0)$ может оказаться незамкнутым. Ясно, что если $v_0 \in IntP$, то $0 \in Int(v_0 - P)$, и конус $K(v_0)$ совпадает с несущей плоскостью множества P. Если же $v_0 \in \partial P$ — граничная точка множества P относительно его несущей плоскости, то конус $K(v_0)$ не совпадает со всей несущей плоскостью (см. [27, 54]). Граница P может включать в себя как точки строгой выпуклости, так и точки множеств $H \cap P$, где H — гиперплоскость соответствующей размерности. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.1 [27]. Каждый конус $K(v_0)$, v_0 — граничная точка выпуклого множества P, содержит хотя бы один конус $K(v_0^1)$, где v_0^1 — крайняя точка множества P.

Обозначим $\kappa(v_0) = K(v_0)$, если v_0 — крайняя точка P. Таким образом, в силу утверждения 1.1 для того чтобы ответить на вопрос, какая из двух задач — задача преследования или задача убегания — разрешима в позиции z^0, нам достаточно изучить вопрос о пересечении конусов $\kappa(v_0)$ и множеств $z_i^0 - M_i, i = 1,...,m$. Если в одном из конусов $\kappa(v_0)$ нет ни одной точки одного из множеств $z_i^0 - M_i$, $i = 1,...,m$,то для позиции z^0 возможно убегание. Если в каждом из конусов $\kappa(v_0)$ есть точки множеств $z_i^0 - M_i$, то эти точки есть и во всех конусах $K(v_0)$, $v_0 \in \partial P$. В силу доказанного из этих позиций z^0 разрешима задача преследования. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Утверждение 1.2.

а) Для позиции z^0 разрешима задача преследования, если для всех крайних точек v_0 множества P каждый конус $\kappa(v_0)$ имеет непустое пересечение хотя бы с одним из множеств $z_i^0 - M_i$.

б) Для позиции z^0 разрешима задача убегания, если найдется хотя бы один конус $\kappa(v_0)$, где v_0 — крайняя точка множества P, не пересекающийся ни с одним из множеств $z_i^0 - M_i, i = 1,...,m$.

4. Примеры. Приведем описание множеств $\{z : \delta(z,m) = 0\}$ и $\{z : \delta(z,m) > 0\}$ для нескольких видов множества P, когда M_i —

произвольные выпуклые компакты.

1) Если P — треугольник в R^2, то строим три конуса $\kappa(v_0)$ где v_0 — вершины треугольника P (рис. 3.1.3). Если хотя бы в одном из них нет ни одной точки множества $z_i^0 - M_i$, $i = 1, ..., m$, то для позиции z^0 разрешима задача убегания. Если в каждом из этих конусов есть хотя бы одна точка одного из множеств $z_i^0 - M_i$, $i = 1, ..., m$, то для позиции z^0 разрешима задача преследования. Таким образом, минимальное число игроков, для которых разрешима задача преследования в случае $M_i = \{0\}$, $i = 1, 2, 3$, есть три. В общем случае есть начальные позиции и множества M_i, для которых ловят убегающего и два игрока, например:

P - треугольник с вершинами $\{(0, 1), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})\}$,

$m = 2$, $z_1^0 = (2\sqrt{2}, 2)$, $z_2^0 = (-\sqrt{3}, -1)$, $M_1 = S_{2,1}^2(0)$, $M_2 = \{0\}$.

2) Если P — четырехугольник в R^2, строим четыре конуса $\kappa(v_0)$, где v_0 — вершины треугольника (рис, 3.1.4, 3.1.5; на рис. 3.1.5 P — квадрат). Если хотя бы в одном из них нет ни одной точки множеств $z_i^0 - M_i$, $i = 1, ..., m$, то для позиции z^0 разрешима задача убегания. Если в каждом конусе $\kappa(z_0)$ есть хотя бы одна точка одного из множеств $z_i^0 - M_i$, то для позиции z^0 разрешима задача преследования. Особенностью игры с P — четырехугольником в R^2 является тот факт, что в случае $M_i = \{0\}$, $i = 1, ..., m$, есть начальные позиции, для которых два игрока ловят убегающего, например:

$$P = \{x : x \in R^2, |x_i| \leq 1, i = 1, 2\}, m = 2$$

$$z_1^0 = (0, \alpha), z_2^0 = (0, -\beta),$$

или

$$z_1^0 = (\gamma, 0), z_2^0 = (-\xi, 0)$$

для любых $\alpha, \beta, \gamma, \xi \in R^1$, $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \xi > 0$.

3) Если P — l-угольник в R^2, то строим l конусов $\kappa(v_0)$, где v_0 — вершина l-угольника (рис. 3.1.6). Если хотя бы один из них не пересекается ни с одним из множеств $z_i^0 - M_i$, $i = 1, 2, ..., m$, то для позиции z^0 разрешима задача убегания. Если каждый конус $\kappa(v_0)$ пересекается хотя бы с одним из множеств $z_i^0 - M_i$, то для позиции z^0 разрешима задача преследования.

4) P — сектор в R^2: часть круга с центром в точке $A = (0, -1)$ радиусом 2, ограниченная двумя радиусами AB и AC, симметричными относительно вертикальной оси, $< BAC = \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 3.1.7). Крайние точки P:

$$A = (0, -1), B = \Big(-2sin\frac{\alpha}{2}, 2\cos\frac{\alpha}{2} - 1\Big)$$

$$C = \left(2sin\frac{\alpha}{2}, 2\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

и все точки дуги BC. Рассматриваем соответствующие конусы $\kappa(v_0)$. В их число входят конусы $\kappa(A), \kappa(B), \kappa(C)$ и полуплоскости, соответствующие точкам v_0 на дуге BC. Если хотя бы один из конусов $\kappa(v_0)$ не пересекается ни с одним из множеств $z_i^0 - M_i, i = 1, ..., m$, то для позиции z^0 разрешима задача убегания. Если каждый из конусов $\kappa(v_0)$ пересекается хотя бы с одним из множеств $z_i^0 - M_i$, то для позиции z^0 разрешима задача преследования.

5)P — строго выпуклое тело в R^n (например, эллипсоид). Если хотя бы одно из полупространств $\kappa(v_0) = \{t(v_0 - P), t \geq 0\}$ не пересекается ни с оним из множеств $z_i^0 - M_i$, то для позиции z^0 разрешима задача убегания. Если каждое из описанных полупространств пересекается хотя бы с одним из множеств $z_i^0 - M_i$, то в позиции z^0 разрешима задача преследования. Заметим, что сформулированные условия эквивалентны следующим (см. [17, 57]):

а) для позиции z^0 разрешима задача убегания, если $0 \notin Int\, co\{z_1^0 - M_1, ..., z_m^0 - M_m\}$;

б) для позиции z^0 разрешима задача преследования, если $0 \in Int\, co\{z_1^0 - M_1, ..., z_m^0 - M_m\}$;

Таким образом, для ответа на вопрос о разрешимости задачи преследования или убегания в случае строго выпуклого множества P надо рассмотреть множество A, являющееся выпуклой оболочкой множеств $z_i^0 - M_i$, $i = 1, ..., m$ (рис. 3.1.8 в случае $n = 2$). Если начало координат принадлежит внутренности множества A, то из соответствующих позиций разрешима задача преследования. Если начало координат не принадлежит множеству A, то из данных начальных позиций разрешима задача убегания.

5. Простое преследование — убегание при r-кратной поимке убегающего. Рассмотрим для дифференциальной игры нескольких лиц (3.1.3) задачу преследования при r-кратной поимке убегающего и задачу убегания от r-кратной поимки, сформулированные в гл. 2.

Пусть

$$z^0 = (z_1^0, ..., z_m^0), M = \{M_1, ..., M_m\},$$

$$z_i^0 \notin M, i = 1, ..., m, \lambda(i, v, z_i^0, M_i) = \max\{\lambda : \lambda \geq 0, -\lambda(z_i^0 - M_i) \in -v + P\},$$

$$\delta(m, r, z^0) = \min_{v \in P} \max_{\{i_1, ..., i_r\} \in \mathfrak{U}} \min_{i \in \{i_1, ..., i_m\}} \lambda(i, v, z_i^0, M_i).$$

В силу утверждения П. 4 минимум в определении функции $\delta(m, r, z^0)$ достигается. Из определения функции $\delta(m, r, z^0)$ следует, что $\delta(m, r, z^0) = 0$ тогда и только тогда, когда существует вектор $v_r^0 \in P$, такой, что для не менее чем $m - r + 1$ номеров i $\lambda(i, v_r^0, z_i^0, M_i) = 0$. Обозначим $v_r^0 = v_r(z^0, M)$.

3.2 Иванов

3.3 Черноусько

По неравенству треугольника имеем $EP \geq QE - QP = R - QP$. Так как скорость точки P не превосходит kv, то имеем $QP \leq kv(t - t_A)$. Следовательно,

$$EP \geq QE - kv(t - t_A) = R - ks. \tag{3.3.1}$$

Здесь использовано очевидное равенство $s = v(t - t_A)$ для пути, пройденного точкой E.

Условие $EP \geq L$ на дуге AB будет выполнено, если положить в (3.3.1)

$$R - ks = L. \tag{3.3.2}$$

Дифференцируя (3.3.2), получим в полярных координатах

$$dR = kds = k\sqrt{dR^2 + R^2 d\varphi^2}. \tag{3.3.3}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (3.3.3) для функции $R(\varphi)$ при начальном условии $R(0) = L$ в момент $t = t_A$, найдем зависимость

$$R(\varphi) = Le^{\lambda\varphi} \tag{3.3.4}$$

Здесь и далее используются обозначения для постоянных λ, γ:

$$\lambda = k(1 - k^2)^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{ctg}\gamma, k = \lambda(1 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}} = \cos\gamma, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}. \tag{3.3.5}$$

Обозначим через ψ угол между отрезком AQ и касательной к логарифмической спирали, проведенной в точке A в сторону возрастания дуги s. Нетрудно показать, что $\cos\psi = -\frac{dR}{ds} = -k$.

Здесь использовано равенство (3.3.3). Привлекая еще соотношения (3.3.5), получим, что $\psi = \pi - \gamma$, причем угол ψ лежит в интервале $\psi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. В зависимости от значений $\alpha \in [0, \pi]$ могут представиться два случая.

1) Если $\psi = \pi - \gamma \leq \alpha \leq \pi$, то спираль (3.3.3) для $\varphi > 0$ в окрестности точки A лежит по ту же сторону от луча x, что и точка Q. В этом случае будем полагать $B = A$, дуга AB стягивается в точку. Второй участок движения при этом отсутствует, и точка E все время равномерно движется по лучу x со скоростью v. При этом угол $\beta =< QBx$ равен α и лежит в пределах $[\pi - \gamma, \pi]$.

2) В случае $0 \leq \alpha < \pi - \gamma$ спираль AB пересекается с лучом x в точке B, как показано на рис. 3.3.1. Угол φ в точке B равен $\beta - \alpha$, где $\beta =< QBx$. Высота треугольника QAB, подсчитанная двумя разными способами согласно рис. 3.3.1, равна $OA \sin\alpha = QB \sin\beta$. Подставим в это равенство $OA = L$ и соотношение $QB = Le^{\lambda(\beta-\alpha)}$, вытекающее из (3.3.4) при $\varphi = \beta - \alpha$. Тогда получим трансцендентное уравнение для определения угла β:

$$f(\beta) = f(\alpha), f(\beta) = e^{\lambda\beta} \sin\beta, \alpha < \beta \leq \pi. \tag{3.3.6}$$

Функция $f(b)$ из (3.3.6) обращается в нуль на концах интервала $[0, \pi]$ и, как показывает элементарное исследование, монотонно возрастает на интервале $[0, \pi - \gamma]$ и монотонно убывает на интервале $[\pi - \gamma, \pi]$. Отсюда следует, что при любом $\alpha \in (0, \pi - \gamma)$, т. е. в рассматриваемом случае 2), уравнение (3.3.6) имеет в интервале $[\alpha, \pi]$ единственное решение β, лежащее в пределах $\beta \in (\pi - \gamma, \pi)$.

Таким образом, в обоих случаях, т. е. при любом $\alpha \in [0, \pi]$, существует единственное значение угла β, причем имеем с учетом обозначений (3.3.5)

$$\pi - \gamma \leq \beta \leq \pi, \cos\beta \leq -k. \tag{3.3.7}$$

Для описанного маневра уклонения на первых двух участках ($t_0 \leq t \leq t_B$) неравенство $EP \geq L$ выполнено по построению.

Рассмотрим теперь движение точки E на третьем участке, т. е. при $t > t_B$. Радиус-вектор QE точки E для этого участка показан на рис. 3.3.1 пунктиром. Для произвольного момента t третьего участка, $t > t_B$, имеем

$$\begin{aligned} EP \geq QE - kv(t - t_A) = (QB^2 + EB^2 - 2EB \cdot QB \cos\beta)^{\frac{1}{2}} - \\ - kv(t - t_B) - kv(t_B - t_A) \geq (QB - EB(k + \cos\beta)) - ks_{AB}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Здесь использованы геометрические соотношения, аналогичные (3.3.1) и вытекающие из рис. 3.3.1. Длина s_{AB} дуги AB согласно (3.3.2) равна $k^{-1}(QB - L)$. Используя еще неравенство (3.3.7), получим из (3.3.8), что $EP \geq L - EB(k + \cos\beta) \geq L$.

Итак, построенный маневр обеспечивает неравенство $EP \geq L$ при всех $t \geq t_0$.

2. Маневр уклонения от многих преследователей. а) Построение программной траектории. В данном пункте на основе маневра п. 1, б) строится способ уклонения от n преследователей. Обозначим через δ_0 минимальное из расстояний $EP_1, .., EP_n$ в момент t_0; по условию $\delta_0 > 0$. Движение точки E будет зависеть от параметров L и κ, таких, что $0 < L \leq \delta_0$, $0 < \kappa < 1$. Эти параметры будут выбраны ниже. Введем обозначение $L_j = L\kappa^{j-1}$ и назовем моментом j-го сближения такой момент t_j, когда впервые после начала движения выполняется условие

$$\min_i EP_i = L_j \equiv L\kappa^{j-1}, i = 1, ..., m, j = 1, 2, ...; 0 < \kappa < 1. \qquad (3.3.9)$$

Движение точки E зададим следующим образом: в каждый момент времени t точка E движется с постоянной по величине скоростью v по программной траектории для данного момента t.

Определим понятие программной траектории для каждого момента $t \geq t_0$. Для любого $t \geq t_0$ текущая программная траектория представляет собой ориентированную кусочно-гладкую кривую без самопересечений, начинающуюся в точке текущего положения E в момент t и уходящую на бесконечность вдоль луча x. При $t = t_0$ программная траектория есть луч x. На интервалах $t_j < t < t_{j+1}$, $j = 0, 1, ...$, начало программной траектории перемещается вдоль нее вместе с точкой E; в остальном программная траектория на этих интервалах не меняется.

В моменты сближений t_j, $j = 1, 2, ...$, программная траектория перестраивается следующим образом. Обозначим через A_j, Q_j соответственно положения в момент t_j точки E и той из точек P_i, для которой достигается минимум в соотношении (3.3.9). Если минимум (3.3.9) при $t = t_j$ достигается одновременно для нескольких точек P_i, то в качестве Q_j берем для определенности ту из них, у которой номер i меньше. Проведем две L_j-спирали, уравнения которых имеют вид, аналогичный (3.3.4):

$$R_j = L_j e^{(\lambda\varphi_j)}, 0 \leq \varphi \leq \pi, j = 1, 2, ... \qquad (3.3.10)$$

Здесь R_j — текущее расстояние от точки Q_j; φ_j — полярный угол, отсчитываемый от прямой Q_jA_j в двух противоположных направлениях для двух рассматриваемых спиралей. Дуги L_j-спиралей (3.3.10) зеркально-симметричны друг другу относительно отрезка Q_jA_j и имеют общие концы при $\varphi_j = 0$ и $\varphi_j = \pi$.

Пусть программная траектория при $t = t_j - 0$ построена; она начинается в точке A_j. Если программная траектория для $t = t_j - 0$ не имеет с построенными L_j-спиралями (3.3.10) других общих точек, кроме A_j, то программная траектория для $t = t_j + 0$ будет той же, что и для $t = t_j - 0$. В этом случае программная траектория в момент t_j не перестраивается.

В противном случае обозначим через B_j, точку первого после A_j пересечения программной траектории, отвечающей моменту времени $t_j - 0$, с замкнутой кривой, образованной дугами L_j-спиралей (3.3.10). Программной траекторией, отвечающей $t = t_j + 0$, будет кривая, составленная из дуги A_jB_j той из L_j-спиралей, которая содержит точку B_j, и из оставшейся части программной траектории для $t_j - 0$, начиная с точки B_j.

Перестройка программной траектории изображена схематически на рис. 3.3.2.

Описанный процесс рекуррентным образом определяет программную траекторию для любого момента времени $t \geq t_0$ при любом конечном числе сближений. При $t \in (t_j, t_{j+1})$ программная траектория по построению состоит из дуг $L_j, L_{j-1}, ..., L_1$-спиралей, соединенных в порядке уменьшения индекса, и из части луча x, включающей бесконечно удаленную точку. Дуги всех спиралей отвечают полярным углам $0 \leq \varphi \leq \pi$, а некоторые дуги могут отсутствовать. Построение программной траектории в любой момент времени полностью определяет и способ управления точкой E. Реальная траектория точки E будет состоять из дуг L_j-спиралей и из части луча x, и для ее осуществления достаточно измерять положение точек P_i лишь в моменты сближений. Для полного определения способа управления точкой E осталось выбрать параметры L, κ так, чтобы обеспечить конечность числа сближений и уклонение точки E от всех преследователей $P_1, ..., P_n$ при сохранении ее движения в ε-окрестности номинального движения. Предварительно проведем оценки некоторых расстояний, существенные для дальнейшего.

б) Оценка расстояний. Пусть непосредственно перед j-м сближением $(t = t_j - 0)$, $j \geq 1$, программная траектория начинается с дуги некоторой L_p-спирали, где $p \leq j - 1$, имеющей ненулевую длину, за которой следует ненулевая дуга L_q-спирали, где $q \leq p - 1$. На рис. 3.3.2 изображена дуга A_pB_p L_q-спирали с полюсом Q_p и дуги двух L_j-спиралей с полюсом Q_j. В результате построений п. 1 получена программная траектория для момента $t = t_j + 0$, участок которой $A_jB_jB_p$ изображен на рис. 3.3.2

жирной линией со стрелками. Оценим при $t \geq t_j$ расстояние EP_i от движущейся точки E до той точки P_i с которой произошло j-е сближение. Предположим сначала, что очередное $(j+1)$-е сближение не наступает, пока точка E движется по участку $A_jB_jB_p$ программной траектории.

На дуге A_jB_j L_j-спирали имеем $EP_i \geq L_i$ согласно свойству логарифмической спирали (см. п. 1, б). Оценим двумя способами расстояние EP_i при движении точки E по дуге B_jB_p.

Введем в рассмотрение точку E', движущуюся с постоянной скоростью v по прямой A_jB_j от точки B_j в сторону, противоположную A_j. При этом пусть точка E' находится в B_j в тот же момент t', что и точка E. Применяя к точкам E' и P_i рассуждения, приведенные в п. 1 б) для точек E и P, получим, что $E'P_i \geq L_i$ при $t \geq t'$. Согласно неравенству треугольника имеем

$$EP_i \geq E'P_i - EE' \geq L_j - EE', t \geq t'. \tag{3.3.11}$$

Поскольку точки E и E' имеют одинаковую по величине скорость v и совпадают в момент t', имеем оценку расстояния между ними:

$$EE' = \Big|v \int\limits_{t'}^{t} [e(t) - e']dt\Big|, t \geq t'. \tag{3.3.12}$$

Здесь e' — орт прямой A_jB_j; $e(t)$ — орт касательной к дуге B_jB_p L_p-спирали. Обозначим через s текущую длину дуги кривой B_jB_p, отсчитанную от точки B_j. Получим

$$|e(t) - e'| = \Big|e(t') - e' + \int\limits_{t'}^{t} \frac{de}{dt}dt\Big| \leq |e(t') - e'| + \int\limits_{0}^{s} \Big|\frac{de}{ds}\Big|ds. \tag{3.3.13}$$

Орт e' секущей A_jB_j равен орту касательной в некоторой промежуточной точке D дуги L_p-спирали, лежащей между A_j и B_j. Эта дуга показана тонкой линией на рис. 3.3.2. Обозначая через s' длину дуги L_p-спирали от этой промежуточной точки D до точки B_j, получим из (3.3.13) оценку

$$|e(t) - e'| \leq \int\limits_{0}^{s'} \Big|\frac{de}{ds}\Big|ds + \int\limits_{0}^{s} \Big|\frac{de}{ds}\Big|ds \leq \frac{s + s'}{\rho_0} \leq \frac{s + s''}{\rho_0}. \tag{3.3.14}$$

Здесь использовано неравенство $\left|\frac{de}{ds}\right| \leq \rho_0^{-1}$, где ρ_0 — минимальный радиус кривизны L_p-спирали, а через s'' обозначена длина дуги A_jB_j

этой спирали. Радиус кривизны L_p-спирали, определяемой уравнением (3.3.10), равен

$$\rho = (R^2 + R_\varphi^2)^{\frac{3}{2}}(R^2 + 2R_\varphi^2 - RR_{\varphi\varphi})^{-1} = L_p(\lambda^2+1)^{\frac{1}{2}}e^{\lambda\varphi}. \tag{3.3.15}$$

Здесь индексы φ означают дифференцирование по φ_p, а индекс p у величин R, φ опущен.

Минимальное при $\varphi \geq 0$ значение радиуса кривизны (3.3.15) равно

$$\rho_0 = L_p\sqrt{\lambda^2+1}. \tag{3.3.16}$$

Длину s'' дуги A_jB_j L_p-спирали оценим при помощи соотношения (3.3.12) для L_p-спирали и дважды применяемого неравенства треугольника:

$$s'' = (Q_pB_j - Q_kA_j)k^{-1} \leq A_jB_jk^{-1} \leq (Q_jB_j + Q_jA_j)k^{-1} \leq L_jk^{-1}(e^{\lambda\pi}+1). \tag{3.3.17}$$

Последнее неравенство (3.3.17) следует из соотношений

$$Q_jA_j = L_j, Q_jB_j \leq L_je^{\lambda\pi}, \tag{3.3.18}$$

вытекающих из (3.3.10).

Подставляя неравенство (3.3.14) в (3.3.12) и интегрируя, получим

$$EE' < \int\limits_0^s \frac{s_1 + s''}{\rho_0}ds_1 = \frac{s^2 + 2ss''}{2\rho_0} \tag{3.3.19}$$

Подставляя в неравенство (3.3.11) оценки (3.3.19), (3.3.16), (3.3.17) и пользуясь обозначениями (3.3.5), найдем

$$EP_i > L_j - L_p^{-1}a_1s^2 - L_jL_\rho^{-1}a_2s, s \geq 0 \tag{3.3.20}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(\lambda^2+1)^{-\frac{1}{2}}, a_2 = \lambda^{-1}(e^{\lambda\pi}+1).$$

Для оценки расстояния EP_i другим способом отметим, что в момент сближения $t = t_j$ точка P_i занимает положение Q_j, а ее скорость не превосходит kv. Поэтому

$$EP_i \geq Q_jE - Q_jP_i \geq (B_jE - Q_jB_j) - kv(t-t_j) \geq B_jE - L_je^{\lambda\pi} - k(s_j+s). \tag{3.3.21}$$

Здесь дважды использовано неравенство треугольника для оценки расстояний EP_i и Q_jE, а также неравенство (3.3.18) для Q_jB_j и оценка пути, пройденного точкой P_j: $Q_jP_j \leq kv(t-t_j)$.

Через s_j в соотношении (3.3.21) обозначена длина дуги A_jB_j L_j-спирали, показанная жирной линией на рис. 3.3.2. Оценим величину s_j, учитывая равенство (3.3.2) и оценки (3.3.18):

$$s_j = k^{-1}(Q_jB_j - Q_jA_j) \leq L_jk^{-1}(e^{\lambda\pi} - 1). \tag{3.3.22}$$

Обозначим для сокращения записи

$$R = Q_pE, R_* = Q_pB_j, \chi =< B_jQ_pE \geq 0 \tag{3.3.23}$$

и отметим равенства

$$R = R_*e^{\lambda\chi} = R_* + ks \tag{3.3.24}$$

вытекающие из (3.3.10) и (3.3.2) для L_p-спирали (см. рис. 3.3.2). Используя соотношения (3.3.23), (3.3.24), получим путем элементарных преобразований

$$B_jE = (R^2+R_*^2-2RR_*\cos\kappa)^{\frac{1}{2}} = (R-R_*)[1+4\sin^2(\frac{\chi}{2})RR_*(R-R_*)^{-2}]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= ks[1+4\sin^2(\frac{\chi}{2})e^{\lambda\chi}(e^{\lambda\chi}-1)^{-2}]^{\frac{1}{2}} = ks[1+\sin^2(\frac{\chi}{2})\,\mathrm{sh}^{-2}(\frac{\lambda\chi}{2})]^{\frac{1}{2}}, (0 \leq \chi \leq \pi) \tag{3.3.25}$$

Легко проверить дифференцированием, что на интервале $0 \leq \chi \leq \pi$ функция $\sin(\frac{\chi}{2})\,\mathrm{sh}^{-1}(\frac{\lambda\chi}{2})$ при любом $\lambda > 0$ монотонно убывает, и поэтому ее минимум достигается при $\chi = \pi$. Тогда из (3.3.25) найдем, полагая $\chi = \pi$:

$$B_jE \geq ks[1 + \mathrm{sh}^{-2}(\frac{\lambda\pi}{2})]^{\frac{1}{2}} = ks\,\mathrm{cth}(\frac{\lambda\pi}{2}). \tag{3.3.26}$$

Вставляя (3.3.22) , (3.3.26) в неравенство (3.3.21) и используя обозначения (3.3.15) , будем иметь оценку

$$EP_i \geq a_3s - a_4L_j, s \geq 0 \tag{3.3.27}$$

$$a_3 = k[\mathrm{cth}(\frac{\lambda\pi}{2}) - 1] = 2\lambda(1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}(e^{\lambda\pi-1})^{-1},$$

$$a_4 = 2e^{\lambda\pi} - 1 > 1.$$

Сопоставляя обе оценки (3.3.20), (3.3.27), получим в итоге

$$EP_i \geq \max[f_1(s), f_2(s)] \geq \min_{s>0}\max[f_1(s), f_2(s)], \tag{3.3.28}$$

$$f_1(s) = L_j - L_p^{-1} a_1 s^2 - L_j L_p^{-1} a_2 s, f_2(s) = a_3 s - a_4 L_j.$$

Здесь положительные постоянные a_1, a_2, a_3, a_4 определены равенствами (3.3.20) и (3.3.27) и зависят только от одного безразмерного параметра λ, связанного с отношением скоростей — параметром k — формулами (3.3.5). В соотношениях (3.3.28) функция $f_1(s)$ строго убывает от значения $f_1(0) > 0$ до $-\infty$, а функция $f_2(s)$ строго возрастает от значения $f_2(0) < 0$ до $+\infty$, когда s изменяется от 0 до ∞. Поэтому минимум в (3.3.24) по s достигается при таком значении $s_* > 0$, для которого имеют место соотношения

$$f_1(s_*) = f_2(s_*), EP_i \geq f_2(s_*) = L_j \mu. \tag{3.3.29}$$

Здесь μ — безразмерная величина, введенная последним соотношением (3.3.29). Из этого соотношения, используя выражение для $f_2(s)$ из (3.3.28), получим

$$s_* = L_j (a_4 + \mu) a_3^{-1}. \tag{3.3.30}$$

Подставим в первое уравнение (3.3.29) выражения (3.28) для функций f_1, f_2 и равенство (3.3.30) для s_*. Полученное уравнение разрешим относительно L_j. Получим после указанных преобразований

$$\frac{L_j}{L_p} = g(\mu), \tag{3.3.31}$$

$$g(\mu) = \frac{a_3^2 (1 - \mu)}{(a_4 + \mu)(a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_1 \mu)}.$$

Функция $g(\mu)$ строго убывает на сегменте $[0, 1]$, причем $g(1) = 0$. Следовательно, существует обратная функция g^{-1} непрерывная и строго убывающая на интервале $[0, g(0)]$. Поэтому, учитывая еще соотношения (3.3.9) и неравенства $j - p \geq 1$, $\kappa < 1$, получим из (3.3.31)

$$\mu = g^{-1}\left(\frac{L_j}{L_p}\right) = g^{-1}(\kappa^{j-p}) \geq g^{-1}(\mu), 0 < \mu < g(0). \tag{3.3.32}$$

Заметим, что из (3.3.31), (3.3.20), (3.3.27) следует цепочка неравенств

$$g(0) = a_3^2 a_4^{-1} (a_1 a_4 + a_2 a_3)^{-1} < a_3^2 a_4^{-2} a_1^{-1} < a_3^2 a_1^{-1} =$$
$$8\lambda^2 (1 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}} (e^{\lambda\pi} - 1)^{-2} < 8\left[\frac{\lambda}{(e^{\lambda\pi} - 1)}\right]^2 < 8\pi^{-2} < 1.$$

Поэтому неравенства (3.3.32) для κ гарантируют выполнение также и условия $\kappa < 1$. Подставляя (3.3.32) в (3.3.29), будем иметь

$$EP_i \geq L_j \mu \geq L_j g^{-1}(\kappa). \tag{3.3.33}$$

Итак, для любого κ из интервала

$$0 < \kappa < g(0) < 1 \tag{3.3.34}$$

справедлива оценка (3.3.33) при движении точки E по дуге B_jB_p L_p-спирали.

Из определения (3.3.31) функции $g(\mu)$ следует, что $g(1) = 0$, поэтому для обратной функции получим $g^{-1}(0) = 1$. Функция $g^{-1}(\kappa)$ строго убывает на сегменте $[0, g(0)]$, поэтому согласно неравенствам (3.3.34) имеем

$$g^{-1}(\kappa) < g^{-1}(0) = 1 \tag{3.3.35}$$

На дуге A_jB_j L_j-спирали имеем неравенство $EP_i \geq L_j$ согласно свойству построенных спиралей. Следовательно, с учетом (3.3.35) на этой дуге справедливо также и неравенство (3.3.33).

Таким образом, выполнение условий (3.3.34) гарантирует оценку (3.3.33) при движении точки E от A_j до ее выхода в точке B_p на дугу L_p-спирали, $q \leq p-1$. Это утверждение справедливо, конечно, и в том случае, когда одна или обе дуги A_jB_j, B_jB_p нулевые.

Выше предполагалось, что при движении точки E по участку $A_jB_jB_p$ не происходит очередного $(j+1)$-го сближения. Теперь откажемся от этого предположения. Пусть точка E после момента t_j испытывает еще сближения с точками $P_1, ..., P_n$, и $\nu(t) \geq 0$ — число этих сближений на интервале (t_j, t). Через τ обозначим такой момент времени, когда точка E впервые после точки B_p выходит на программную траекторию, соответствующую моменту $t_j + 0$. Другими словами, τ — первый после t_j, момент выхода точки E на некоторую L_r-спираль, где $r \leq q \leq p-1$.

Рассмотрим точку E_*, движущуюся со скоростью v по участку $A_jB_jB_p$ программной траектории. Пусть точка E_* в момент t_j совпадает с E и приходит в точку B_p в момент τ_*. Тогда согласно неравенству треугольника и полученной оценке (3.3.33), применимой для точки E_*, имеем

$$EP_i \geq E_*P_i - EE_* \geq L_j g^{-1}(\kappa) - EE_*, t_j \leq t \leq \tau_*. \tag{3.3.36}$$

Оценим расстояние между точками E и E_*:

$$EE_* = \Big| \int\limits_{t_j}^{t} [v(t) - v_*(t)]dt \Big|, t_j \leq t \leq \tau_*. \tag{3.3.37}$$

Здесь $v(t)$, $v_*(t)$ — векторы скорости точек E, E_* соответственно, равные по величине постоянной v. Для участков траектории точки E, принадлежащих траектории точки E_*, соответствующий вклад в интеграл (3.3.37) равен нулю. Для остальных участков интеграл (3.3.37) мажорируется удвоенной суммарной длиной этих участков, т. е.

$$EE_* \leq 2 \sum, t_j \leq t \leq \tau_*. \tag{3.3.38}$$

Здесь $\sum$ — сумма длин дуг $L_{j+1}, ..., L_{j+\nu}$-спиралей, по которым движется точка E, отклоняясь от траектории $A_j B_j B_p$ точки E_*. Эту сумму оценим при помощи неравенства (3.3.22) и формулы (3.3.39):

$$\begin{aligned} \sum \leq s_{j+1} + s_{j+2} + ... + s_{j+\nu} \leq k^{-1}(e^{\lambda\pi} - 1)(L_{j+1} + L_{j+2} + ... + L_{j+\nu}) = \\ = L_j k^{-1}(e^{\lambda\pi} - 1)\kappa(1 + \kappa + \kappa^2 + ... + \kappa^{\nu-1}) = L_j k^{-1}(e^{\lambda\pi} - 1)\kappa(1 - \kappa^{\nu})(1 - \kappa)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Если $\tau \leq \tau_*$, то оценки (3.3.38), (3.3.39), справедливые на сегменте $[t_j, \tau_*]$, верны также и на интервале $[t_j, \tau]$. Если же $\tau > \tau_*$, то требуется еще рассмотреть интервал $t \in [\tau_*, \tau]$. Путь, пройденный точкой E за время $[t_j, t]$, где $t \in [\tau_*, \tau]$, не более чем на сумму дуг $\sum$ превышает путь, пройденный точкой E_* за время $[t_j, \tau_*]$. Скорости обеих точек E, E_* по величине равны v. Поэтому за время $t - \tau_*$ точка E пройдет путь не более $\sum$ и $t - \tau_* \leq \frac{\sum}{v}$. За это время расстояние EP_i может уменьшиться не более чем на величину

$$v(1 + k)(t - \tau_*) \leq (1 + k) \sum. \tag{3.3.40}$$

Здесь учтено, что точки E и P_i могут удаляться друг от друга со скоростью, не большей, чем сумма их скоростей $v(1 + k)$. Вычитая величину (3.3.40) из правой части неравенства (3.3.36) и используя неравенства (3.3.36), (3.3.39), получим искомую оценку для всего интервала:

$$EP_i \geq L_j g^{-1}(\kappa) - (3 + k) \sum \geq L_j [g^{-1}(\kappa) - (3k^{-1} + 1)(e^{\lambda\pi} - 1)\kappa(1 - \kappa^{\nu})(1 - \kappa)^{-1}], \tag{3.3.41}$$

$$t_j \leq t \leq \tau$$

Отметим, что из (3.3.39) вытекает ограниченность $\sum$, а следовательно, и τ при $\nu \to \infty$.

в) Выбор параметров маневра. Перейдем к выбору параметров L, κ, обеспечивающих решение задачи уклонения. Потребуем, чтобы при всех целых ν выполнялось неравенство

$$g^{-1}(\kappa) > (3k^{-1}+1)(e^{\lambda\pi}-1)\kappa(1-\kappa^{\nu})(1-\kappa)^{-1}+\kappa^{\nu+1}. \tag{3.3.42}$$

Из (3.3.41) при условии (3.3.42) следует $EP_i > L_{j+\nu+1}$ при всех $t_j \leq t \leq \tau$. Это означает, что среди ν сближений, происходящих в интервале (t_j, t), не наступит сближения с точкой P_i. Поэтому при условии (3.3.42) на всем интервале (t_j, τ) не произойдет сближений с точкой P_i.

Условие (3.3.42) перепишем в виде

$$g^{-1}(\kappa) > b\kappa - \kappa^{\nu+1}(b-1), b = (3k^{-1}+1)(e^{\lambda\pi}-1)(1-\kappa)^{-1}. \tag{3.3.43}$$

Оценим величину b, пользуясь формулами (3.3.5):

$$b > 3k^{-1}\lambda\pi > 3\pi > 1.$$

Поэтому неравенство (3.3.43) будет выполнено при всех $\nu \geq 0$, если оно выполнено при $\nu = 0$. Подставляя $\nu = 0$ в (3.3.43), получим условие $g^{-1}(\kappa) > \kappa$. Учитывая монотонное убывание функции g, будем иметь отсюда неравенство $g(\kappa) < \kappa$. Последнее неравенство означает

$$0 < \kappa < \kappa_*, \tag{3.3.44}$$

где κ_* — единственный положительный корень уравнения

$$g(\kappa_*) = \kappa_*, 0 < \kappa_* < 1. \tag{3.3.45}$$

Отметим, что в силу монотонности функции $g(\kappa)$ имеем $g(\kappa_*) < g(0)$, поэтому согласно (3.3.45) будет $\kappa_* < g(0)$. Следовательно, выполнение условий (3.3.44), (3.3.45) обеспечивает также выполнение условий (3.3.34), наложенных ранее.

Параметр κ выбираем в дальнейшем из интервала (3.3.44). При этом движение точки E, описанное в п. 2, будет обладать следующим свойством. Если j-е сближение произошло с точкой P_i при движении точки E по дуге L_p-спирали, $p \leq j-1$, то следующее сближение с этой же точкой P_i может произойти не ранее, чем после выхода точки E на дугу

L_r-спирали, $r \leq p-1$. Это свойство распространяется и на луч x, который можно считать L_0-спиралью.

Пусть без нарушения общности точки P_i пронумерованы в том порядке, в каком происходят их первые сближения с точкой E. Тогда первое сближение с точкой P_1 происходит на луче x, и согласно установленному свойству других сближений с этой точкой не произойдет никогда. Первое сближение с точкой P_2 может произойти либо на дуге L_1-спирали, либо на луче x после схода с этой дуги. В первом случае повторное сближение с точкой P_2 может произойти лишь после выхода на луч x, а во втором случае его вообще не будет.

Оценим общее максимальное число сближений $N(n)$ с n преследователями. Из предыдущих рассуждений следует $N(1) \leq 1, N(2) \leq 3$. На рис. 3.3.3 схематически, без соблюдения масштаба, изображены типичные траектории точки E при $n = 2$ и 3, цифрами указаны номера сближений. Покажем по индукции, что

$$N(n) \leq 2^n - 1. \tag{3.3.46}$$

При $n = 1, 2$ неравенство (3.3.46) верно. Пусть оно верно для некоторого n. Тогда в случае $n + 1$ преследователей общее число сближений можно оценить следующим образом. После первого сближения с точкой P_i точка E будет двигаться по L_1-спирали и может сближаться с оставшимися n точками. До выхода на луч x может произойти не более $N(n)$ сближений с этими точками. После выхода на луч x точку P_1 можно не учитывать, так как с ней больше не произойдет сближений, а с остальными точками может произойти еще не более $N(n)$ сближений. Таким образом, с учетом (3.3.46) общее число сближений оценивается следующим образом:

$$EE^0 \leq 2[s_1 + s_2 + ... + s_{N(n)}] < 2Lk^{-1}(e^{\lambda\pi} - 1)(1-\kappa)^{-1}. \tag{3.3.47}$$

Движение точки E должно лежать в ε-окрестности номинального движения, т. е. $EE^0 \leq \varepsilon$. Для этого согласно (3.3.47) достаточно принять

$$0 < L \leq \min\left[\frac{1}{2}\varepsilon k(1-\kappa)(e^{\lambda\pi} - 1)^{-1}, \delta_0\right]. \tag{3.3.48}$$

Здесь учтено также наложенное выше условие $L \leq \delta_0$.

Итак, параметры L, κ следует выбирать в границах, указанных неравенствами (3.3.44) , (3.3.48) . При этом маневр уклонения из п. 1

будет удовлетворять всем наложенным условиям, а число сближений будет конечным числом, удовлетворяющим неравенству (3.3.46) .

Определение числа κ_* требует согласно (3.3.45) , (3.3.31) решения кубического уравнения. Получим простое явное выражение $\kappa - \kappa_0$, лежащее в пределах (3.3.44) . Рассмотрим для этого наряду с функцией $g(\mu)$ из (3.3.31) следующую линейную функцию:

$$g_0(\mu) = (1-\mu)g_1, g_1 = a_3^2(a_4+1)^{-1}(a_1a_4+a_2a_3+1)^{-1}. \tag{3.3.49}$$

Функция $g_0(\mu)$ отличается от $g(\mu)$ тем, что в знаменателе выражения (3.3.31) для $g(\mu)$ принято $\mu = 1$. Так как знаменатель при этом не уменьшился, то видим, что $g_0(\mu) \leq g(\mu)$ при $0 \leq \mu \leq 1$. Поэтому корень κ_0 уравнения

$$g_0(\kappa_0) = \kappa_0 \tag{3.3.50}$$

заведомо лежит в пределах (3.3.44). Разрешая линейное уравнение (3.3.50) с учетом (3.3.49), найдем искомую величину

$$\kappa_0 = \frac{g_1}{1+g_1}. \tag{3.3.51}$$

Оценим еще минимальное расстояние δ между точками E и $P_1, ..., P_n$ при $t \geq t_0$. Так как максимальное число сближений не превышает $N(n)$, то сближение под номером $N(n)+1$ никогда не наступит. Следовательно, минимальное расстояние EP_1 будет не меньше $L_{N(n)+1}$. На основании неравенства (3.3.46) и соотношения (3.3.9) получим

$$\delta = \min_{1\leq i\leq n} \min_{t\geq t_0} EP_i \geq L_{N(n)+1} = L\kappa^{N(n)} \geq L\kappa^{(2^n-1)}. \tag{3.3.52}$$

Наибольшая величина правой части неравенства (3.3.52), т. е. наилучшая оценка для δ, получится, если выбирать максимально возможное L, допускаемое неравенством (3.3.48). Тогда из (3.3.52) получим

$$\delta \geq \min[C_n(k)\varepsilon, C_n^*(k)\delta_0], \tag{3.3.53}$$

$$C_n(k) = \frac{1}{2}k(1-\kappa)(e^{\lambda\pi}-1)^{-1}\kappa^{(2^n-1)}, C_n^*(k) = \kappa^{(2^n-1)}.$$

В качестве x здесь можно взять любое число из интервала (3.3.44), например κ_0 из (3.3.51). Явные выражения для κ_0, $C_n(k)$, $C_n^*(k)$ получим, подставляя в формулы (3.3.51), (3.3.53) соотношения (3.3.50) для g_1, (3.3.20) и (3.3.27) для a_i, (3.3.5) для λ.

г) Обсуждение результатов. Остановимся сначала на одном интересном частном случае. Пусть возможности преследователей («волков) близки к возможностям преследуемого («оленя), т. е. $k \to 1$. При этом согласно равенствам (3.3.15) имеем

$$\lambda = k(1-k^2)^{-\frac{1}{2}} \to \infty, k \to 1. \tag{3.3.54}$$

Получим асимптотические оценки при $\lambda \to \infty$ величин a_1, a_2, a_3, a_4, определяемых равенствами (3.3.20) и (3.3.27):

$$a_1 \approx 0,5\lambda^{-1}, a_2 \approx \lambda^{-1}e^{\lambda\pi}, a_3 \approx 2e^{-\lambda\pi}, a_4 \approx 2e^{\lambda\pi}, \tag{3.3.55}$$

Подставим эти выражения в соотношение (3.3.31) для функции $g(\kappa)$ при $\kappa \in [0,1]$. Получим асимптотически

$$g(\kappa) \approx \frac{a_3^2(1-\kappa)}{a_1 a_4^4} \approx 2\lambda e^{-4\pi\lambda}(1-\kappa), \lambda \to \infty. \tag{3.3.56}$$

Заметим, что функция $g_0(\mu)$ из (3.3.49) имеет такое же асимптотическое представление (3.3.56) при $\lambda \to \infty$, что и функция $g(\kappa)$. В этом нетрудно убедиться, подставляя формулы (3.3.55) в соотношения (3.3.49). Следовательно, корни κ_* и κ_0 уравнений (3.3.55) и (3.3.50) будут, с точностью до малых высшего порядка, определяться одним и тем же асимптотическим представлением. Из соотношения (3.3.56) и уравнения (3.3.45) найдем это представление:

$$\kappa_* \approx \kappa_0 \approx 2\lambda e^{-4\pi\lambda}, \lambda \to \infty. \tag{3.3.57}$$

Подставляя найденное выражение в формулы (3.3.53), получим при условии (3.3.54)

$$C_n(k) \approx 0,5e^{-\lambda\pi}(2\lambda e^{-4\pi\lambda})^{(2^n-1)}, C_n^*(k) \approx (2\lambda e^{-4\pi\lambda})^{(2^n-1)}, \lambda \to \infty. \tag{3.3.58}$$

Формулы (3.3.58) показывают, что константы $C_n(k)$, $C_n^*(k)$, а вместе с ними и гарантированная величина минимального расстояния δ из (3.3.53) очень быстро убывают при $k \to 1$.

Отметим, что при $k \geq 1$ поставленная задача уклонения неразрешима даже при $n = 1$. Единственный преследователь («волк») P_1, обладающий скоростью, равной или большей скорости «оленя» E, может не пропустить его в направлении луча x, т. е. не позволить ему избежать встречи, оставаясь в ε-окрестности номинального движения.

В самом деле, пусть в начальный момент преследователь P_1 располагается на луче x на некотором расстоянии δ_0 от точки E_0 и пусть $k = 1$. Зададим следующую стратегию преследователя: в каждый момент времени его скорость перпендикулярна лучу x и равна проекции скорости точки E на плоскость, перпендикулярную этому лучу. Такое движение точки P_1 совместимо с наложенными ограничениями при равенстве скоростей точек E и P_1. При этом «олень» E не сможет пересечь плоскость, перпендикулярную лучу x, в которой движется «волк» P_1 избежав встречи с ним.

Следовательно, при любом $n > 1$ и $k \geq 1$ поставленная задача уклонения с учетом требования о сохранении движения точки E в ε-окрестности номинального движения неразрешима, по крайней мере, при некоторых начальных условиях. Если же $k > 1$, то «олень» E вообще не может избежать встречи с «волком», который будет направлять свою скорость по вектору P_1E.

В другом случае, при $k = 0$, задача уклонения, очевидно, тривиально разрешима при любом конечном n. «Оленю» при этом нужно просто обойти неподвижно стоящих «волков». Однако при $n = \infty$ поставленная задача снова может быть неразрешима, даже если $k = 0$. В самом деле, пусть счетное число неподвижных «преследователей» располагается всюду плотно вокруг точки E (например, по поверхности сферы радиуса δ_0). Тогда, очевидно, точка E не может уклониться от них на конечное расстояние δ, оставаясь в ε-окрестности номинального движения.

Итак, поставленная задача уклонения зависит от параметров k, n, ε и от начального расположения преследователей. Будем предполагать, как и выше, что минимальное расстояние δ_0 от точки E до точек P_i при $t = t_0$ положительно, $\delta_0 > 0$. Величина $\varepsilon > 0$, очевидно, может быть принята равной единице за счет выбора масштаба длины и поэтому не играет существенной роли. Зависимость решения задачи от параметров k, n характеризуется согласно изложенному следующим образом:

а) $0 \leq k < 1$, $1 \leq n < \infty$ — задача уклонения разрешима при любой начальной ситуации;

б) $k \geq 1$, n — любое или $n = \infty$, k — любое есть начальные ситуации, в которых задача уклонения неразрешима.

Построенный в данном параграфе способ управления решает поставленную задачу при $0 < k < 1$ и любом конечном n. Справедливость остальной части утверждений а), б) была показана выше.

Как уже отмечалось, стратегия уклонения точки E при $0 <$

$k < 1$ и конечном n, построенная в данном параграфе, требует для своей реализации следующей информации. В моменты сближений t_j, определяемые условиями (3.3.9), преследуемый должен знать положение той точки P_i, с которой происходит сближение. Если этих точек несколько, то достаточно знать положение хотя бы одной из них. Эта информация используется для построения L_j-спиралей (3.3.10) и для перестройки программной траектории в моменты t_j согласно процедуре, описанной в п. 2, а).

Как показано в п. 2, в), параметры способа уклонения L, κ, должны выбираться в пределах, указанных неравенствами (3.3.44), (3.3.31). Границы, определяемые этими неравенствами, зависят от чисел R, ε, δ_0 и не зависят от числа преследователей n. В этом нетрудно убедиться, если заметить, что функция $g(\mu)$ из (3.3.31), входящая в уравнение (3.3.45) для κ_*, не зависит от числа n. Процедура уклонения, описанная в п. 2, а), также не зависит от n. Таким образом, построенный способ уклонения не зависит от числа преследователей n, и для его реализации преследуемому не требуется знать это число, важно лишь, что оно конечно. Отметим, однако, что гарантированная величина минимального расстояния δ согласно (3.3.53) зависит от n и очень быстро стремится к нулю при $n \to \infty$.

3.4 Задача простого преследования тремя преследователями двух убегающих

В этом параграфе мы покажем, что множество начальных позиций в дифференциальной игре трех преследователей и двух убегающих, обладающих простыми движениями и одинаковыми максимальными скоростями, может быть разделено на три подмножества. Из первого — убегают оба убегающих. Из второго — убегает один убегающий, а второго убегающего преследователи ловят. Из третьего — преследователи на свой выбор могут поймать любого из убегающих, а другой, при согласованном выборе управлений обоих убегающих, убегает.

Пусть движение трех преследующих объектов описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = u_i, x_i(0) = x_i^0, i = 1, ..., 3, \tag{3.4.1}$$

где $x_i, u_i \in R^n$, $\|u_i\| \leq 1$.

Убегающие объекты описываются аналогично

$$\dot{y}_j = v_i, y_j(0) = y_j^0, j = 1, 2, \tag{3.4.2}$$

где y_j, $v_j \in R^n$, $\|v_j\| \leq 1$. Убегающий с номером j считается пойманным, если существуют номер i и момент времени t, такие, что $x_i(t) = y_j(t)$.

Введем переменную $z_{ij} = x_i - y_j$. Тогда из (3.4.1), (3.4.2) имеем

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v_j, z_{ij}(0) = z_{ij}^0, \tag{3.4.3}$$

$$z_{ij}, u_i, v_j \in R^n, \|u_i\| \leq 1, \|v_j\| \leq 1, i = 1, .., 3, j = 1, 2.$$

Игра преследования для j-го убегающего считается оконченной, если найдется номер $i \in \{1, 2, 3\}$ и момент времени t_1: $z_{ij}(t_1) = 0$.

Рассмотрим для дифференциальной игры (3.4.3) задачи преследования и убегания, сформулированные в гл. 2. Пусть начальная позиция $z^0 = (z_{11}^0, z_{21}^0, z_{31}^0, z_{12}^0, z_{22}^0, z_{32}^0)$ такова, что все $z_{ij}^0 \neq 0$. Обозначим $k = \{1, 2\} \setminus j, j \in \{1, 2\}$.

Теорема 4.1. а) Если начальные позиции z_{ij}^0, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, таковы, что существуют такие векторы p_1 и p_2, $\|p_j\| = 1$, $j = 1, 2$, что $\max(p_1, z_{i1}^0) \leq 0$, $\max(p_2, z_{i2}^0) \leq 0$, то убегающие игроки с номерами 1, 2 избегут поимки.

б) Если начальные позиции z_{ij}^0, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, таковы, что существуют номер j и такой вектор p_j, $\|p_j\| = 1$, что

$$\max_{1 \leq i \leq 3}(p_j, z_{ij}^0) \leq 0$$

, а

$$\delta_{0k} = \min_{\|p\|=1} \max_{1 \leq i \leq 3} \left(p, \frac{z_{ik}^0}{\|z_{ik}^0\|}\right) > 0,$$

то k-й убегающий может быть пойман преследователями, а j-й убегающий избежит поимки.

в) Если начальная позиция z_{ij}^0, $i = 1, ..., 3$, $j = 1, 2$, такова, что

$$\delta_{0j} = \min_{\|p\|=1} \max_{1 \leq i \leq 3} \left(p, \frac{z_{ij}^0}{\|z_{ij}^0\|}\right) > 0,$$

$$\delta_{0k} = \min_{\|p\|=1} \max_{1 \leq i \leq 3} \left(p, \frac{z_{ik}^0}{\|z_{ik}^0\|}\right) > 0,$$

то один из убегающих, либо j, либо k на выбор преследователей, может быть пойман преследователями, второй убегающий избежит поимки.

Доказательство. Утверждение а) теоремы 4.1 следует из теоремы 1.1, применяемой для каждого убегающего. Управление j-го убегающего, гарантирующее такой результат, имеет вид $v_j(t) = p_j$.

Утверждение б) теоремы 4.1 следует из теоремы 1.1, применяемой для каждого убегающего. Управление j-го убегающего, гарантирующее уклонение от поимки, имеет вид $v_j(t) = p_j$. Управление j-го преследователя, гарантирующее поимку преследователями k-го убегающего, имеет вид (3.1.4).

Перейдем к доказательству утверждения в) теоремы 4.1. В силу теоремы 1.1 преследователи, выбрав любого из убегающих, либо j-го, либо k-го, ловят его за конечное время, используя управления $u_i(t)$, имеющие вид (3.1.4). Покажем, что второй убегающий может при этом избежать поимки. Если i_1, i_2, i_3 — различные номера из множества $\{1, 2, 3\}$, то из (3.1.2), (3.1.3) имеем

$$z_{i_1 1} - z_{i_2 1} = z_{i_1 2} - z_{i_2 2}, z_{i_3 1} - z_{i_2 1} = z_{i_3 2} - z_{i_2 2},$$

$$z_{i_1 1} - z_{i_3 1} = z_{i_1 2} - z_{i_3 2}, z_{i_3 1} - z_{i_3 2} = z_{i_2 1} - z_{i_2 2} = z_{i_1 1} - z_{i_1 2}.$$

Рассмотрим случай $y_1^0 \neq y_2^0$. В этом случае векторы $z_{i_3 1}^0 - z_{i_3 2}^0$, $z_{i_2 1}^0 - z_{i_2 2}^0$, $z_{i_1 1}^0 - z_{i_1 2}^0$ равны между собой, отличны от нулевого, и существуют индексы i_1, i_2, i_3, для которых $(z_{i_3 1}^0 - z_{i_3 2}^0, z_{i_3 1}^0 - z_{i_2 1}^0) \neq 0$. Зафиксируем некоторые индексы i_1, i_2, i_3, удовлетворяющие последнему неравенству, и рассмотрим единичный вектор e:

$$(e, z_{i_1 1}^0 - z_{i_2 1}^0) = 0, (e, z_{i_3 1}^0) > 0, i_3 = \{1, 2, 3\} \setminus \{i_1, i_2\}. \tag{3.4.4}$$

В силу условия в) теоремы 4.1 такой вектор существует и при этом

$$(z_{i_1 1}^0, e) = (z_{i_2 1}^0, e) < 0, (z_{i_3 2}^0, e) > 0, (z_{i_1 2}^0, e) = (z_{i_2 2}^0, e) < 0.$$

Положим для $0 \leq t \leq t_1$, $t_1 = \frac{|(e, z_{i_3 1}^0 - z_{i_3 2}^0)|}{2}$ (не исключается случай и $t_1 = 0$),

$$v_1(t) = sign(e, z_{i_3 1}^0 - z_{i_3 2}^0)e, \tag{3.4.5}$$
$$v_2(t) = -sign(e, z_{i_3 1}^0 - z_{i_3 2}^0)e.$$

Для решения уравнения (3.4.3) при таких управлениях убегающих имеем

$$(e, z_{i_31}(t) - z_{i_32}(t)) = (e, z^0_{i_31} - z^0_{i_32}) + \int\limits_0^t (u_{i_3}(s), e)ds -$$

$$-\int\limits_0^t (v_1(s), e)ds - \int\limits_0^t (u_{i_3}(s), e)ds + \int\limits_0^t (v_2(s), e)ds =$$

$$= (e, z^0_{i_31} - z^0_{i_32}) - 2sign(e, z^0_{i_31} - z^0_{i_32})t =$$

$$= sign(e, z^0_{i_31} - z^0_{i_32})[|(e, z^0_{i_31} - z^0_{i_32})| - 2t].$$

Таким образом, в момент t_1 справедливо соотношение

$$(e, z_{i_31}(t_1) - z_{i_32}(t_1)) = 0.$$

За время $[0, t_1]$ ни один из убегающих пойман быть не может. Действительно, если $(e, z^0_{i_31} - z^0_{i_32}) > 0$, то в силу (3.4.3), (3.4.5) и условия в) теоремы 4.1 имеем

$$(z_{i_11}(t), e) \leq (z^0_{i_11}, e) < 0, (z_{i_21}(t), e) \leq (z^0_{i_21}, e) < 0,$$

$$(z_{i_31}(t), e) \geq (z^0_{i_31}, e) - 2t_1 = (z^0_{i_32}, e) > 0, (z_{i_12}(t), e) \leq (z^0_{i_12}, e) + 2t_1 = (z^0_{i_11}, e) < 0,$$

$$(z_{i_22}(t), e) \leq (z^0_{i_22}, e) + 2t_1 = (z^0_{i_21}, e) < 0,$$

$$(z_{i_32}(t), e) \geq (z^0_{i_32}, e) > 0.$$

Если $(e, z^0_{i_31} - z^0_{i_32}) < 0$, то имеют место соотношения

$$(z_{i_11}(t), e) \leq (z^0_{i_11}, e) + 2t_1 = (z^0_{i_12}, e) < 0,$$

$$(z_{i_21}(t), e) \leq (z^0_{i_21}, e) + 2t_1 = (z^0_{i_22}, e) < 0,$$
$$(z_{i_31}(t), e) \geq (z^0_{i_31}, e) > 0,$$
$$(z_{i_12}(t), e) \leq (z^0_{i_12}, e) < 0,$$
$$(z_{i_22}(t), e) \leq (z^0_{i_22}, e) < 0,$$

$$(z_{i_3 2}(t), e) \geq (z^0_{i_3 2}, e) - 2t_1 = (z^0_{i_3 1}, e) > 0.$$

Для $t \geq t_1$ положим $v_1(t) = v_2(t) = e$.

Покажем, что такое управление исключает поимку обоих игроков. Имеем

$$(z_{i_1 1}(t), e) = (z_{i_1 1}(t_1), e) + \int\limits_{t_1}^{t} (u_{i_1}(s), e) ds - (t - t_1) \leq (z_{i_1 1}(t_1), e) < 0,$$

$$(z_{i_2 1}(t), e) = (z_{i_2 1}(t_1), e) + \int\limits_{t_1}^{t} (u_{i_2}(s), e) ds - (t - t_1) \leq (z_{i_2 1}(t_1), e) < 0,$$

$$(z_{i_1 2}(t), e) = (z_{i_1 2}(t_1), e) + \int\limits_{t_1}^{t} (u_{i_1}(s), e) ds - (t - t_1) \leq (z_{i_1 2}(t_1), e) < 0,$$

$$(z_{i_2 2}(t), e) = (z_{i_2 2}(t_1), e) + \int\limits_{t_1}^{t} (u_{i_2}(s), e) ds - (t - t_1) \leq (z_{i_2 2}(t_1), e) < 0,$$

и, таким образом, преследователи с номерами i_1 и i_2 для $t > 0$ убегающих поймать не могут. Для $z_{i_3 1}(t)$ и $z_{i_3 2}(t)$ при таком выборе управления убегающих имеем

$$\|z_{i_3 1}(t) - z_{i_3 2}(t)\| = \left\|(z_{i_3 1}(t_1) - z_{i_3 2}(t_1)) + \int\limits_{t_1}^{t} u_{i_3}(s) ds - \int\limits_{t_1}^{t} v_1(s) ds - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{t_1}^{t} u_{i_3}(s) ds + \int\limits_{t_1}^{t} v_2(s) ds \right\| = \|z_{i_3 1}(t_1) - z_{i_3 2}(t_1)\|.$$

Таким образом, если в начальный момент t_1 $\|z_{i_3 1}(t_1) - z_{i_3 2}(t_1)\| \neq 0$, то для всех $t > t_1$, $\|z_{i_3 1}(t) - z_{i_3 2}(t)\| \neq 0$. Если в момент $t_2 > t_1$ $z_{i_3 1}(t_2) = 0$, то $\|z_{i_3 2}(t_2)\| = \|z_{i_3 1}(t_1) - z_{i_3 2}(t_1)\| \neq 0$, и для $t \geq t_2$ имеем

$$z_{i_3 2}(t) = z_{i_3 2}(t_2) + \int\limits_{t_2}^{t} u_{i_3}(s) ds - e(t - t_2),$$

$$\|z_{i_32}(t)\| \geq \|z_{i_32}(t_2) - e(t-t_2)\| - (t-t_2) =$$

$$= (\|z_{i_32}(t_2)\|^2 - 2(t-t_2)(e, z_{i_32}(t_2)) + (t-t_2)^2)^{\frac{1}{2}} - (t-t_2) > 0,$$

т. е. вектор $z_{i_32}(t)$ ни в какой конечный момент времени в нуль не обращается. Соотношение $z_{i_31}(t_1) = z_{i_32}(t_1)$ не может быть выполнено в силу того, что индексы i_1, i_2, i_3 мы выбираем так, что $(z^0_{i_31} - z^0_{i_32}, z^0_{i_11} - z^0_{i_21}) \neq 0$. Действительно, в силу выбора управления $v(t)$ на отрезке $[0, t_1)$ по формуле (3.4.5) в случае выполнения соотношения $z_{i_31}(t_1) = z_{i_32}(t_1)$ для начальных позиций справедливо равенство $(z^0_{i_31} - z^0_{i_32}, z^0_{i_11} - z^0_{i_21}) = 0$. Если $y^0_1 = y^0_2$, т. е. $z^0_{i_11} = z^0_{i_12}$, $z^0_{i_21} = z^0_{i_22}$, $z^0_{i_31} = z^0_{i_32}$, то предлагается выбирать управления убегающих по следующему правилу. Обозначим

$$\rho = \min_{\|p\|=1} \max_{1 \leq i \leq 3} \left(p, \frac{z^0_{ij}}{\|z^0_{ij}\|}\right);$$

$$e_1 : (e_1, e_1) = 1, (e_1, z^0_{i_11} - z^0_{i_21}) = 0, (e_1, z^0_{i_31}) \geq 0;$$

$$e_2 : (e_2, e_2) = 1, (e_2, e_1) = 0.$$

Положим для $t \in [0, \frac{\varrho}{3}]$ $v_1(t) = e_2$, $v_2(t) = -e_2$, для $t > \frac{\varrho}{3}$ $v_1(t) = e_1$, $v_2(t) = e_1$.

За время $\frac{\varrho}{3}$ убегающие не будут пойманы, так как время движения преследователей до множества $S_{\frac{\varrho}{3}}(0)$ больше $\frac{\varrho}{3}$. Далее убегающие находятся в ситуации, рассмотренной выше. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.1. Пусть в игре (3.4.1) — (3.4.2) три преследователя и любое конечное число N убегающих. Тогда справедливо следующее утверждение. Для убегающих с номерами $j \in \{1, ..., N\}$, для которых $y^0_j \notin Intco(x^0_1, x^0_2, x^0_3)$, разрешима задача уклонения от встречи с группой преследователей. Для убегающих с номерами $j \in \{1, ..., N\}$, для которых $y^0_j \in Intco(x^0_1, x^0_2, x^0_3)$, имеет место такой факт. Преследователи могут поймать только одного из них, любого по усмотрению преследователей, остальные убегающие могут уклониться от встречи. Приведенное утверждение доказывается повторением выкладок, используемых при доказательстве теоремы 4.1.

Глава 4

Метод гарантированного неухудшения позиции для дифференциальных игр преследования несколькими объектами и его обобщения

4.1 Метод гарантированного неухудшения позиции

В настоящем параграфе мы приводим достаточные условия разрешимости задачи преследования группой преследующих объектов одного убегающего объекта. В начале параграфа они формулируются в упрощенном виде для дифференциальной игры вида (2.0.9), во второй части параграфа — для дифференциальной игры вида (2.0.8). При этих условиях динамика преследователей позволяет, используя текущую информацию, так строить преследование, что позиция каждого из преследователей относительно убегающего в определенном смысле не ухудшается, а хотя бы для одного преследователя строго улучшается.

Рассмотрим задачу преследования из начального положения z^0 для игры (2.0.1), описанную в гл. 2, в том случае, когда уравнения имеют вид (2.0.9):

$$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v, z_i(0) = z_i^0, i = 1, .., m, \qquad (4.1.1)$$

где $z_i \in R^{n_i}$, $u_i \in P_i \subset R^{p_i}$, $v \in Q \subset R^q$, P_i, Q- выпуклые компакты.

Предположение 1.1. Множества $\pi_i e^{tA_i} B_i P_i \overset{*}{-} \pi_i e^{tA_i} C_i Q$ содержат нулевой вектор для $t \geq 0$, $i \neq 1, ..., m$.

Определим для $t > 0$, $\tau \in [0, t]$, $m_i \in M_i^2$ функции

$$\alpha(i, t, \tau, v, m_i, z_i^0) =$$

$$= \begin{cases} \max\{\alpha : \alpha \geq 0, -\alpha(\pi_i e^{tA_i} z_i^0 - m_i) \in (\pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i P_i - \\ \qquad -\pi_i e^{(t-\tau)A_i} C_i v)\}, if \pi_i e^{tA_i} z_i^0 \neq m_i; \\ \dfrac{2\tau}{t^2}, if \pi_i e^{tA_i} z_i^0 = m_i; \\ \beta(t, z^0) = \sup\limits_{v(\cdot)} \min\limits_{i=1,\ldots,m} \left(1 - \int\limits_0^t \alpha(i, t, \tau, v, m_i, z_i^0) d\tau\right), \end{cases}$$

где $v(\cdot)$ — измеримая на интервале $[0, t]$ функция, принимающая значения из множества Q.

Теорема 1.1. Пусть для игры (4.1.1) в позиции $z^0 = (z_1^0, ..., z_m^0)$ выполнено предположение 1.1 и существуют векторы $m_i \in M_i^2$, для которых функция $\beta(t, z^0)$ имеет положительный корень T. Тогда для позиции z^0 разрешима задача преследования для дифференциальной игры (4.1.1) за конечное время T.

Доказательство. Пусть для начальной стадии z^0 выполнены требования теоремы 1.1. Если для номера i справедливо соотношение $\pi_i e^{tA_i} z_i^0 \neq m_i$ для всех $t \in [0, T]$, то предпишем i-му преследователю строить свое управление следующим образом. Если в момент $t \leq 0$ величина

$$\delta_i(t; v(\cdot)) = 1 - \int\limits_0^t \alpha(i, T, \tau, v(\tau), m_i, z_i^0) d\tau > 0,$$

то функция $u_i(t) \in P_i$ — решение уравнения

$$\pi_i e^{(T-t)A_i} B_i u_i(t) - \pi_i e^{(T-t)A_i} C_i v(t) =$$
$$= -\alpha(i, T, t, v(t), m_i, z_i^0)(\pi_i e^{TA_i} z_i^0 - m_i). \qquad (4.1.2)$$

Если t_1^i — первый момент времени, для которого $\delta_i(t_1^i; v(\cdot)) = 0$, то для $t \in (t_1^i, T]$, $u_i(t) \in P_i$— решение уравнения

$$\pi_i e^{(T-t)A_i} B_i u_i(t) = \pi_i e^{(T-t)A_i} C_i v(t). \qquad (4.1.3)$$

Если для номера i справедливо соотношение $\pi_i e^{tA_i} z_i^0 = m_i$ при некотором τ, то из определения функции $\beta(t, z^0)$ следует, что $\tau \geq T$ Предпишем такому преследователю строить свое управление как решение уравнения (4.1.3) для $t \in [0, T]$. В силу предположения 1.1 существует одно или много решений уравнений (4.1.2), (4.1.3). Согласно утверждению П.2 функция $\alpha(i, T, t, v(t), m_i, z_i^0)$ — измеримая функция t при фиксированных i, T, z_i^0, m_i. Следовательно, в силу теоремы Филиппова (см. П. 7) уравнения (4.1.2), (4.1.3) разрешимы в классе измеримых функций. Покажем, что, применяя стратегии $u_i(t)$, выбранные как решения уравнений (4.1.2), (4.1.3), преследователи могут гарантировать окончание преследования в момент времени T. Действительно, если $v(t)$ — произвольная измеримая функция, принимающая значения из Q, то возможны две ситуации: либо существует номер i_0, для которого $t_1^{i_0} \le T$, либо для каждого i, $i = 1, 2..., m$, $\delta_i(t_1^i; v(\cdot)) > 0$. В первом случае, преследователь с номером i_0 ловит убегающего в момент времени T, так как согласно выбору стратегии преследования

$$\pi_{i_0} z_{i_0}(T) = (\pi_{i_0} e^{TA_{i_0}} z_{i_0}^0 - m_{i_0})\Big(1 - \int\limits_0^{t_1^{i_0}} \alpha(i_0, T, \tau, v(\tau), m_{i_0}, z_{i_0}^0) d\tau\Big) +$$

$$+ m_{i_0} = m_{i_0}.$$

Второй случай невозможен в силу требования $\beta(T, z^0) = 0$. Таким образом, в момент времени T хотя бы один из преследователей поймает убегающего. Теорема 1.1 доказана.

Пример 1.1. Пусть уравнения движения m преследователей и одного убегающего имеют вид $\ddot{x}_i = \tilde{u}_i$, $i = 1, ..., m$; $\ddot{y} = \tilde{v}$. Здесь x_i, y, $\tilde{u}_i$, $\tilde{v} \in R^\nu$, $\nu \ge 1$, $\|\tilde{u}_i\| \le \rho_i$, $\|\tilde{v}\| \le \sigma$.

Преследование считается завершенным, если хотя бы для одного i $x_i = y$; ρ_i, σ — положительные константы. Перейдем к соответствующей дифференциальной игре вида (4.1.1). Для этого положим $z = (z_{i_1}, z_{i_2}) = (x_i - y, \dot{x}_i - \dot{y})$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{z}_{i1} = z_{i_2}, z_{i1}, z_{i2} \in R^\nu, \\ \dot{z}_{i2} = \tilde{u}_i - \tilde{v}, \|\tilde{u}_i\| \le \rho_i, \|\tilde{v}\| \le \sigma, M_i = \{z : z_{i1} = 0\}. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Имеем

$$\pi_i e^{tA_i} z_i^0 = z_{i1}^0 + t z_{i2}^0, \pi_i e^{tA_i}(B_i u_i - C_i v) = t(\tilde{u}_i - \tilde{v}).$$

Предположение 1.1 выполнено, например, если $\rho_i \ge \sigma$ для всех i. Вычислим функцию

$$\alpha(i, t, \tau, \tilde{v}, z_i^0) = \max\{\alpha : \alpha \ge 0, -\alpha(z_{i1}^0 + z_{i2}^0 t) \in S_{(t-\tau)\rho_i}(0) - (t - \tau)\tilde{v}\}.$$

Так как по определению вектор

$$-\alpha(z_{i1}^0 + z_{i2}^0 t) + (t-\tau)\tilde{v}$$

лежит на границе шара $S_{(t-\tau)\rho_i}(0)$, то

$$(-\alpha(z_{i1}^0 + z_{i2}^0 t) + (t-\tau)\tilde{v}, -\alpha(z_{i1}^0 + z_{i2}^0 t) + (t-\tau)\tilde{v}) = \rho_i^2 (t-\tau)^2.$$

Решая получающееся относительно α квадратное уравнение, получаем

$$\alpha(i, t, \tau, \tilde{v}, z_i^0) = k(i, t, \tilde{v}, z_i^0)(t-\tau), \tag{4.1.5}$$

где

$$k(i, t, \tilde{v}, z_i^0) = \Big(\frac{z_{i1}^0 + t z_{i2}^0}{\|z_{i1}^0 + t z_{i2}^0\|^2}, \tilde{v}\Big) +$$

$$+ \Big(\Big(\frac{z_{i1}^0 + t z_{i2}^0}{\|z_{i1}^0 + t z_{i2}^0\|^2}, \tilde{v}\Big)^2 + \frac{\rho_i^2 - (\tilde{v}, \tilde{v})}{\|z_{i1}^0 + t z_{i2}^0\|^2}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно (4.1.5) в данном примере

$$\beta(t, z^0) \le 1 - t^2 \min_{\|\tilde{v}\| \le \sigma} \sum_{i=1}^{m} k(i, t, \tilde{v}, z_i^0).$$

Положим

$$\varphi(t, \tilde{v}) = \sum_{i=1}^{m} k(i, t, \tilde{v}, z^0), \eta(t, z^0) = \min_{\|\tilde{v}\| \le \sigma} \varphi(t, \tilde{v}).$$

Нетрудно видеть, что если $\rho_i \ge \sigma$, $i = 1, ..., m$, то $\eta(t, z^0) \ge 0$, и если $\rho_i > \sigma$, $i = 1, ..., m$, то $\eta(t, z^0) > 0$. Зафиксируем t. Справедливы следующие утверждения, легко доказываемые от противного.

Утверждение 1.1. Если $\tilde{v}^*$ — точка минимума функции $\varphi(t, \tilde{v})$, то $(\tilde{v}^*, \kappa_1 + ... + \kappa_m) \le 0$, где

$$\kappa_i = \frac{z_{i1}^0 + z_{i2}^0 t}{\|z_{i1}^0 + z_{i2}^0 t\|^2}.$$

Утверждение 1.2. Если $\tilde{v}^*$ — точка минимума функции $\varphi(t, \tilde{v})$, то $\|\tilde{v}^*\| = \sigma$.

В силу утверждений 1.1, 1.2

$$\min_{\|\tilde{v}\| \le \sigma} \varphi(t, \tilde{v}) = \min_{\|\tilde{v}\| = \sigma} \varphi(t, \tilde{v}),$$

и задача отыскания минимума функции $\varphi(t,\tilde v)$ есть задача на уловный экстремум. Для его вычисления можно применять известные методы.

Приведем значения

$$\eta(t,z^0)=\min_{\|\tilde v\|\le\sigma}\varphi(t,\tilde v)$$

для $m=3$,

$$z_{11}^0=(0;1),z_{12}^0=(0;0),z_{21}^0=(-\frac{\sqrt3}{2};-\frac12),z_{22}^0=(0;0),$$

$$z_{31}^0=(\frac{\sqrt3}{2};-\frac12),z_{32}^0=(0;0):$$

$$1)\rho_1=\rho_2=\rho_3=\sigma,\eta(t,z^0)=\sqrt3\sigma;$$

$$2)\rho_1=\rho_2=\sigma,\rho_3>\sigma,\eta(t,z^0)=\frac{\sqrt3}{2}\sigma+\sqrt{\rho_3^2-\frac{\sigma^2}{4}};$$

$$3)\rho_1=\sigma,\rho_2=\rho_3>\sigma,\eta(t,z^0)=2\sqrt{\rho_3^2-\frac{\sigma^2}{4}};$$

$$4)\rho_1=\rho_2=\rho_3>\sigma,\eta(t,z^0)=\sqrt{\rho_3^2-\sigma^2}+2\sqrt{\rho_3^2-\frac{\sigma^2}{4}}.$$

Заметим, что в данном случае в силу выбора z_{12}^0, z_{22}^0, z_{32}^0 величина $\eta(t,z^0)$ не зависит от t. Таким образом, для игры (4.1.4) Θ — первый корень уравнения $2m=\eta(t,z^0)t^2$. Управление преследования i-го игрока имеет вид

$$\tilde u_i(t)=\tilde v(t)-\Big[\Big(\frac{z_{i1}^0+\Theta z_{i2}^0}{\|z_{i1}^0+\Theta z_{i2}^0\|^2},\tilde v(t)\Big)+$$

$$+\Big(\Big(\frac{z_{i1}^0+\Theta z_{i2}^0}{\|z_{i1}^0+\Theta z_{i2}^0\|^2},\tilde v(t)\Big)^2+\frac{\rho_i^2-(\tilde v(t),\tilde v(t))}{\|z_{i1}^0+\Theta z_{i2}^0\|^2}\Big)^{\frac12}\Big](z_{i1}^0+\Theta z_{i2}^0) \qquad (4.1.6)$$

для $t\in[0,t_i^1]$, где t_i^1 — первый корень уравнения

$$\delta_i(t;\tilde v(\cdot))=1-\int\limits_0^t(\Theta-\tau)k(i,\Theta,\tilde v(\tau),z_i^0)d\tau=0, \qquad (4.1.7)$$

$\tilde u_i(t)=\tilde v(t)$ для $t\in(t_i^1,\Theta]$.

Перейдем к рассмотрению задачи преследования из начального положения (t_0, z^0) для игры (1.2.1) в том случае, когда уравнения (1.2.1) имеют следующий вид:

$$\dot{z}_i = A_i(t)z_i + f_i(t, u_i) - q_i(t, v), z_i(t_0) = \dot{z}_i^0, \qquad (4.1.8)$$