

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной  
математики и кибернетики

Л. Н. Лукьянова

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ОТ  
СТОЛКНОВЕНИЯ

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ  
И ПРИЛОЖЕНИЯ

Москва — 2009

# Приложение 1

В этой главе приведен ряд математических моделей управляемых процессов. Для реального процесса, как правило, может быть предложено несколько математических моделей с различной степенью адекватности описывающих процесс. Из такого множества моделей, соответствующих рассматриваемым далее процессам, мы приводим некоторые варианты управляемых моделей небольшой размерности. Для каждой из них может быть получена сопровождающая модель в форме линейных дифференциальных уравнений с управляемыми параметрами. В одних случаях они получаются из соответствующих нелинейных моделей при наложении специальных гипотез об исследуемом процессе. В других случаях они получаются в результате различных видов линеаризации соответствующих нелинейных моделей.

Приведенные в этой главе модели предназначены для расчета управлений, решающих соответствующую задачу управления, и последующего моделирования функционирования динамической системы при таком управлении в программном комплексе "Эйлер", если модель описывает динамику многокомпонентной механической системы, в программных комплексах "Vensim", "Gams" если модель описывает динамику экономического или химического процесса.



Рис. 17.

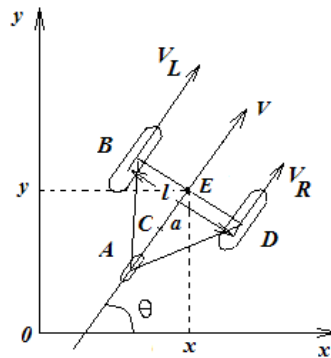


Рис. 18.

## 1. Модели механики

### 1.1. Модели движения трехколесной тележки

На рис. 17 приведен общий вид трехколесной тележки, движение которой происходит в горизонтальной плоскости. Тележка имеет два независимо управляемых ведущих колеса  $B$  и  $D$ . Третье колесо  $A$  тележки считается безинерционным, лишенным трения и закрепленным на шасси тележки на вертикальной саморазворачивающейся вилке. Местоположение тележки определяется координатами точки  $E(x, y)$  — центра ведущей оси тележки и углом поворота  $\theta$ , отсчитываемым от оси  $X$  в положительном направлении против часовой стрелки (см. рис. 18). Тележка может двигаться вперед ведущими колесами  $B, D$ . Колеса тележки идеальные: трение в шарнирах отсутствует, массы нет. Движение всех колес происходит без проскаль-

зывания. Расстояние между центрами ведущих колес —  $\ell$ . Привод на ведущие колеса независимый. Двигатели на ведущих колесах одинаковые, управляются подачей соответствующих напряжений. Поворот тележки осуществляется с помощью разности угловых скоростей левого и правого ведущих колес, соответственно, вилка поворотного колеса  $A$  и само колесо  $A$  вращаются свободно, трение в их шарнирах отсутствует. Вектор линейной скорости  $V$  всегда совпадает с продольной осью тележки. Движение тележки моделируется относительно неподвижной системы координат  $OXY$ .

Приведем четыре математические модели, описывающие движение трехколесной тележки, построенные при различных гипотезах относительно характеристик тележки.

### Модель 1

Кинематические уравнения движения точки  $E(x, y)$  — центра базы колес, записанные в предположении о непроскальзывании точек контакта колес с полом имеют вид [142]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{V_R + V_L}{2} \cos \theta, \\ \dot{y} = \frac{V_R + V_L}{2} \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{V_R - V_L}{\ell}, \end{cases} \quad (1.1)$$

здесь

$V_R, V_L$  — скорости центров правого  $D$  и левого  $B$  колеса тележки;

$\ell$  — расстояние между центрами колес;

$\frac{V_R + V_L}{2}$  — скорость точки  $E$ , вычисленная по правилу сложения скоростей ( $ED = EB = \ell/2$ ).

Первое и второе уравнение — соотношения для проекции вектора скорости на оси координат, третье уравнение

— соотношение для угловой скорости точки  $E$ , полученное из соотношения для мгновенного центра скоростей:  $V_R = \omega(\ell + z)$ ,  $V_L = \omega z$  ( $z$  — расстояние от точки  $D$  до мгновенного центра скоростей,  $\omega = \dot{\theta}$ ), следовательно,  $V_R - V_L = \omega\ell$  и  $\frac{V_R - V_L}{\ell} = \omega$ .

На управляющие параметры наложены ограничения

$$0 \leq V_R \leq \rho, \quad 0 \leq V_L \leq \rho, \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — положительная константа.

*Задача управления* состоит в переводе системы (1.1) из начального положения  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$  в положение  $x(T) = x_1$ ,  $y(T) = y_1$ ,  $\theta(T) = \theta_1$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени.

## Модель 2

При учете инерционно-массовых характеристик тележки, будем считать, что центр масс находится на оси тележки в точке  $C$ , на расстоянии  $a$  от ведущей оси (см. рис. 18). Динамические уравнения движения тележки [140] — [145], полученные в предположении *малости моментов инерции колес* по сравнению с соответствующими *моментами платформы*, имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \theta, \\ \dot{y} = V \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{V} = -a\omega^2 + \frac{1}{\rho m}(\tau_L + \tau_R), \\ \dot{\omega} = \frac{am\omega V}{i_z} + \frac{\ell}{2\rho i_z}(\tau_R - \tau_L), \end{cases} \quad (1.3)$$

где

$V$  — скорость (скалярный параметр) точки, расположенной посередине оси ведущих колес;

$\omega$  — угловая скорость вращения тележки;

$\rho$  — радиус ведущих колес ( колеса вращаются без проскальзывания; оси их вращения совпадают с осью тележки);

$m$  — масса платформы;

$i_z$  — момент инерции платформы относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс;

$\tau_R, \tau_L$  — управления - моменты развиваемые моторами, приводящими в движение колеса.

На управляющие моменты  $\tau_R, \tau_L$  наложены ограничения

$$0 \leq \tau_R \leq \mu, \quad 0 \leq \tau_L \leq \mu.$$

*Задача управления* состоит в переводе системы (1.3) из начального положения  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, \theta(0) = \theta_0, V(0) = V_0, \omega(0) = \omega_0$  в положение  $x(T) = x_1, y(T) = y_1, \theta(T) = \theta_1, V(T) = V_1, \omega(T) = \omega_1$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени.

### Модель 3

При учете динамики двигателей постоянного тока, приводящих в движение колеса, движение тележки [ 143 ] описывается системой уравнений седьмого порядка с фазовым вектором  $(x, y, V, \theta, \omega, \tau_R, \tau_L)$  и вектором управления  $(U_L, U_R)$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \theta, \\ \dot{y} = V \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{V} = -a\omega^2 + \frac{1}{\rho m}(\tau_L + \tau_R), \\ \dot{\omega} = \frac{am\omega V}{i_z} + \frac{\ell}{2\rho i_z}(\tau_R - \tau_L), \\ \dot{\tau}_L = -\frac{R}{L}\tau_L - \frac{K_M K_W i}{L}(V - \frac{\omega I}{2}) + \frac{K_M}{L}U_L, \\ \dot{\tau}_R = -\frac{R}{L}\tau_R - \frac{K_M K_W i}{L}(V + \frac{\omega I}{2}) + \frac{K_M}{L}U_R, \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$L$  — индуктивность обмотки якоря электромотора;

$I$  — ток якоря;

$R$  — сопротивление обмотки якоря ;

$U_R, U_L$  — напряжение, подаваемое на обмотку якоря правого и левого моторов, соответственно;

$K_W, K_M$  — положительные константы, характеризующие двигатель постоянного тока;

$i$  — передаточное соотношение редуктора, связывающего вал электромотора и вал колеса.

На управляющие параметры наложены ограничения

$$0 \leq U_R \leq \mu_1, \quad 0 \leq U_L \leq \mu_1,$$

где  $\mu_1$  — положительная константа.

*Задача управления* состоит в переводе системы (1.4) из начального положения  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, \theta(0) = \theta_0, V(0) = V_0, \omega(0) = \omega_0, \tau_R(0) = \tau_R^0, \tau_L(0) = \tau_L^0$  в положение  $x(T) = x_1, y(T) = y_1, \theta(T) = \theta_T, V(T) = V_T, \omega(T) = \omega_T, \tau_R(T) = \tau_R^T, \tau_L(T) = \tau_L^T$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени.

#### Модель 4

Рассмотрим движение тележки по наклонной плоскости.

Пусть  $X_0, Y_0, Z_0$  абсолютная система координат, построенная так, что оси  $X_0, Y_0$  лежат в плоскости движения, а ось  $Z_0$  ей перпендикулярна. Обозначим  $f_x, f_y$  — проекции силы веса тележки на оси  $X_0, Y_0$ .

Уравнения движения тележки [ 143 ] имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = V \cos \theta, \\ \dot{y} = V \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{V} = -a\omega^2 + \frac{1}{m}(f_x \cos \theta + f_y \sin \theta) + \frac{1}{\rho m}(\tau_L + \tau_R), \\ \dot{\omega} = \frac{am\omega V}{i_z} + \frac{\ell}{2\rho i_z}(\tau_R - \tau_L), \\ \dot{\tau}_L = -\frac{R}{L}\tau_L - \frac{K_M K_W i}{L}(V - \frac{\omega I}{2}) + \frac{K_M}{L}U_L, \\ \dot{\tau}_R = -\frac{R}{L}\tau_R - \frac{K_M K_W i}{L}(V + \frac{\omega I}{2}) + \frac{K_M}{L}U_R, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

На управляющие параметры наложены ограничения

$$0 \leq U_R \leq \mu_1, \quad 0 \leq U_L \leq \mu_1,$$

где  $\mu_1$  — положительная константа.

*Задача управления* состоит в переводе системы (1.5) из начального положения  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $V(0) = V_0$ ,  $\omega(0) = \omega_0$ ,  $\tau_R(0) = \tau_R^0$ ,  $\tau_L(0) = \tau_L^0$  в положение  $x(T) = x_1$ ,  $y(T) = y_1$ ,  $\theta(T) = \theta_T$ ,  $V(T) = V_T$ ,  $\omega(T) = \omega_T$ ,  $\tau_R(T) = \tau_R^T$ ,  $\tau_L(T) = \tau_L^T$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени.

## 1.2. Модели движения четырехколесной тележки

Рассмотрим движение четырехколесной тележки, которая имеет две оси, на которых закреплены колеса, с поворотными колесами спереди. Ведущими колесами могут быть задние или передние колеса (см. рис. 19).

В неподвижной системе координат  $OXY$  (см. рис. 20), ее положение задается координатами  $(x, y, \theta, \phi)$ , где  $x, y$  — координаты центра задней оси,  $\theta$  — угол между осью



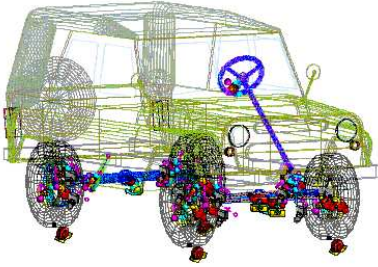


Рис. 19.

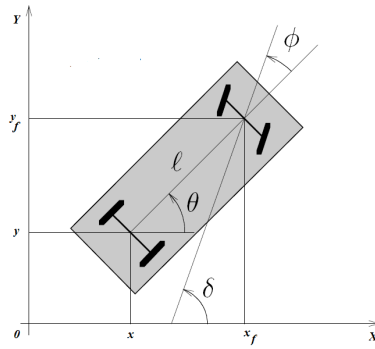


Рис. 20.

тележки и осью  $OX$ ,  $\phi$  — угол отклонения передних колес от оси тележки. Пусть  $\ell$  — расстояние между осями тележки.

### Модель 1

Кинематические уравнения тележки с *задними* ведущими колесами имеют вид [ 146 ]

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \operatorname{tg} \phi / \ell \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2, \quad (1.6)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  скорость тележки и скорость отклонения передних колес. Угол отклонения колес ограничен  $|\phi| \leq \phi_0 = 4/9\pi$ .

Третье уравнение получено из соотношения для скорости центра передней оси тележки при его вращении относительно центра задней оси:  $v_1 \operatorname{tg} \phi = \dot{\theta} \ell$ .

### Модель 2

Кинематические уравнения тележки с *передними* ведущими колесами имеют вид [ 146 ]

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi / \ell \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2, \quad (1.7)$$

где скорость  $v_1$  относится теперь к передним колесам (скорость средней точки переднего моста по направлению движения колес). Ее проекции на оси координат  $v_1 \cos \theta \cos \phi$  и  $v_1 \sin \theta \cos \phi$  составляют первое и второе уравнение.

Здесь третье уравнение получено из соотношения для скорости центра передней оси тележки при его вращении относительно центра задней оси:  $v_1 \sin \phi = \dot{\theta} \ell$ . Угол отклонения передних колес ограничен  $|\phi| \leq \phi_0 = 4/9\pi$ .

На управляющие параметры наложены ограничения

$$0 \leq v_1 \leq \rho_1, \quad -\rho_2 \leq v_2 \leq \rho_2, \quad (1.8)$$

где  $\rho_1, \rho_2$  — положительные константы.

*Задача управления* состоит в переводе системы (1.6) (или (1.7)) из начального положения  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, \theta(0) = \theta_0, \phi(0) = \phi_0$  в положение  $x(T) = x_1, y(T) = y_1, \theta(T) = \theta_1, \phi(T) = \phi_f$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени.

### Модель 3

Другая форма кинематических уравнений переднеприводной тележки [ 146 ] имеет место при рассмотрении в качестве фазовых координат величин  $(x_f, y_f, \delta, \theta)$ , где  $\delta = \theta + \phi$  — абсолютный поворот передних колес относительно оси  $OX$ ,  $x_f = x + \ell \cos \theta, y_f = y + \ell \sin \theta$  — координаты середины передней оси.

Используя переменные

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1, \\ w_2 &= \frac{1}{\ell} \sin(\delta - \phi)v_1 + v_2, \end{aligned}$$

получаем уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{\delta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \\ 0 \\ \sin(\delta - \theta)/\ell \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w_2, \quad (1.9)$$

На управляющие параметры наложены ограничения

$$0 \leq w_1 \leq \rho_3, \quad -\rho_4 \leq w_2 \leq \rho_5, \quad (1.10)$$

где  $\rho_3, \rho_4, \rho_5$  — положительные константы.

*Задача управления* состоит в переводе системы (1.9) из начального положения  $x_f(0) = x_{f0}, y_f(0) = y_{f0}, \delta(0) = \delta_0, \theta(0) = \theta_0$  в положение  $x_f(T) = x_{f1}, y_f(T) = y_{f1}, \delta(T) = \delta_1, \theta(T) = \theta_1$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени.

### 1.3. Вывод вертолета в режим висения

Взлет вертолета с зависанием на заданной высоте — часто используемая для тестовых расчетов регуляторов задача управления. На ней сравнивают законы терминального управления при различном числе конечных условий управляемого процесса.

Запишем систему дифференциальных уравнений [157], описывающих движение вертолета:

$$\dot{V} = (X + F - G)/m, \quad \dot{H} = V. \quad (1.11)$$

Пусть параметры управляемого объекта будут следующими:

$m = 1962 \text{ кг}$  — масса вертолета;

$X = \text{sign}(-V)C_x S \rho V^2 / 2$  — аэродинамическая сила сопротивления, всегда направленная против вектора скорости;

$C_x = 0.5$ ;  $S = 15 \text{ м}^2$ ;

$\rho = 1.225 \text{ Н} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^4$  — плотность воздуха на уровне моря;

$F = f(\varphi)K_{ZT}G$  — подъемная сила винта;

$f(\varphi)$  — нелинейная зависимость тяги от шага (угла отклонения лопасти винта)  $\varphi$  рис. 21;

$K_{ZT} = 1, 2$  — коэффициент запаса тяги по отношению к весу вертолета;

$G = 19247 \text{ Н}$  — вес вертолета,

$K_\varphi = 0, 1$  — передаточное число рулевого привода.

Параметр управления  $u(t)$  и переменный шаг винта связаны соотношением:

$$\dot{\varphi} = K_\varphi(u - \dot{V}), \quad -0.35 < \varphi < 0.35. \quad (1.12)$$

*Задача управления* заключается в поиске закона управления  $u(t)$ , обеспечивающего перевод системы (1.11) — (1.12) из начального положения  $H_0, V_0$  в конечное положение высоты  $H_K$  и скорости  $V_K$  в момент времени  $T = 10 \text{ с}$ .

Интересной для практики, является задача выбора управления, приводящего объект на высоту  $H_K$  с нулевой скоростью и последующего зависания объекта на этой высоте. При применении регулятора, полученного как решение предыдущей задачи с последующим использованием режима стабилизации высоты, может наблюдаться эффект провала высоты. Для ликвидации эффекта провала высоты при переключении управления в режим стабилизации, обычно используют управление, решающее задачу

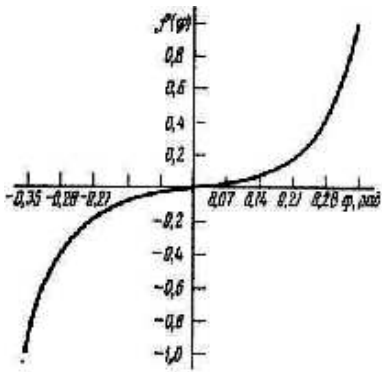


Рис. 21.

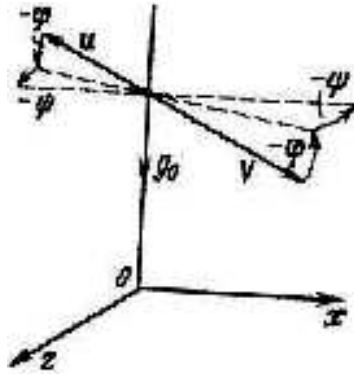


Рис. 22.

терминального управления с тремя конечными условиями  $H(T) = H_k$ ,  $V(T) = 0$ ,  $\dot{H}(T) = 0$ . При этом осуществится так называемый мягкий переход объекта в заданное конечное состояние.

Для управления вертолетом, совершающего строительные монтажные операции, интересны так же конечные условия ([157]):

$$H(T) = H_k, \quad V(T) = 0, \quad \dot{H}(T) = 0, \quad \ddot{H}(T) = 0.$$

#### 1.4. Мягкая посадка спускаемого аппарата

##### Модель 1

На рис. 22 показано положение векторов скорости  $V$  и тяги  $u$  спускаемого аппарата, его углы тангажа  $\varphi$  и курса  $\psi$ .

В системе координат, связанной с землей, движение космического летательного аппарата описывается следующей системой дифференциальных уравнений [ 157 ]:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -u \cos \varphi \cos \psi, \\ \ddot{y} = -u \sin \varphi - g_0, \\ \ddot{z} = u \cos \varphi \sin \psi, \end{cases} \quad (1.13)$$

где

$x$  — координата дальности;

$y$  — координата высоты;

$z$  — координата бокового отклонения;

$g_0$  — гравитационное ускорение;

$u, \varphi, \psi$  — управляющие функции (ускорение, создаваемое двигателем; тангаж; курсовой угол).

*Задача управления* заключается в нахождении управляющих функций  $u, \varphi, \psi$ , переводящих систему (1.13) из заданного начального состояния (при  $t = 0$ ):  $x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0, z_0, \dot{z}_0$  в конечное состояние  $x_K, \dot{x}_K, \ddot{x}_K, y_K, \dot{y}_K, \ddot{y}_K, z_K, \dot{z}_K, \ddot{z}_K$  в момент времени  $T$ .

Кинематические управления (1.13) представляют собой упрощенную модель движения объекта. Для этапа посадки на основании этой модели может быть произведен расчет управлений, решающих задачу управления. Реальный объект в значительной степени отличается от своей модели. Однако, найденные законы управления с обратной связью в ряде случаев работоспособны в широком диапазоне изменений характеристик объекта и свойств внешней среды. Поэтому, законы управления полученные с помощью упрощенной модели (1.13) обычно проверяются в моделях, более адекватно описывающих реальные процессы. Приведем такую модель.

## Модель 2

Добавим к кинематическим уравнениям движения объекта уравнения, характеризующие его динамику и свойства внешней среды [157]:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_x &= -\frac{F+X}{m_t} \cos \varphi \cos \psi, \quad \dot{V}_y = -\frac{F+X}{m_t} \sin \varphi - g(y), \\
 \dot{V}_z &= -\frac{F+X}{m_t} \cos \varphi \sin \psi, \quad \dot{x} = \dot{V}_x, \quad \dot{y} = \dot{V}_y, \quad \dot{z} = \dot{V}_z, \\
 \dot{F} &= (K_F \delta - F)/T_D, \quad \dot{G}_T = qF, \\
 \dot{\delta} &= K_\delta (u_3 - u), \\
 \dot{\varphi} &= (\varphi_3 - \varphi)/T_\varphi, \quad \dot{\psi} = (\psi_3 - \psi)/T_\psi, \\
 u &= (F + X)/m_t, \quad m_t = m_0 - G_T, \\
 X &= C_x S \rho_{(y)} (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)/2, \\
 \rho_{(y)} &= \rho_0 e^{\beta y}, \quad g(y) = g_0 (R/(R + y))^2,
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

где

$F$  — сила тяги двигателя;

$X$  — аэродинамическая сила торможения;

$m_t$  — переменная масса объекта;

$\delta$  — перемещение сектора газа автомата тяги;

$g(y)$  — переменное гравитационное ускорение;

$g_0$  — гравитационное ускорение на поверхности планеты;

$R$  — радиус планеты;

$\rho_0$  — плотность атмосферы на поверхности планеты;

$\beta$  — показатель экспоненты в модели атмосферы.

Зададим начальные условия системы дифференциальных уравнений (1.14):

$V_{x0} = 3382.42 \text{ м/с}; \quad V_{y0} = -177.94 \text{ м/с}; \quad V_{z0} = 295.72 \text{ м/с};$   
 $x_0 = 0 \text{ м}; \quad y_0 = 20000 \text{ м}; \quad z_0 = 0 \text{ м}; \quad G_{T0} = 0 \text{ кг}; \quad \delta_0 = 1.5 \text{ усл.}$   
 $\text{ед.}; \quad F_0 = 7357.5 \text{ Н}; \quad \psi_0 = -0.087 \text{ рад } (-5^\circ); \quad \varphi_0 = -0.052$   
 $\text{рад } (-3^\circ).$

Зададим требуемые конечные условия в момент времени  $T = 300 \text{ с}$ :

$x_k = 500000 \text{ м}; \quad \dot{x}_k = 0 \text{ м/с}; \quad \ddot{x}_k = 0 \text{ м/с}^2; \quad y_k = 0 \text{ м}; \quad \dot{y}_k = 0$   
 $\text{м/с}; \quad \ddot{y}_k = 0 \text{ м/с}^2; \quad z_k = 25000 \text{ м}; \quad \dot{z}_k = 0 \text{ м/с}; \quad \ddot{z}_k = 0 \text{ м/с}^2.$

Зададим технические характеристики управляемого объекта и параметры внешней среды:  $m_0 = 1962$  кг — начальная масса объекта;  $q = 3 \cdot 10^{-5}$  кг/(Н с) — удельный расход топлива;  $C_x = 0.5$  — коэффициент лобового сопротивления;  $S = 5$  м<sup>2</sup> — площадь аэродинамического торможения аппарата;  $T_D = 0,5$  с — постоянная времени двигателя;  $K_F = 4905$  — коэффициент усиления двигателя;  $K_\delta = 5$  — коэффициент усиления автомата тяги;  $T_\varphi = 1$  с — постоянная времени канала тангажа;  $T_\psi = 1.2$  с — постоянная времени канала курса;  $g_0 = 3.72$  м/с<sup>2</sup> — гравитационное ускорение;  $R = 3400000$  м — радиус планеты;  $\rho_0 = 0.0078$  Нс<sup>2</sup>/м<sup>4</sup> — плотность атмосферы на поверхности планеты;  $\beta = -0.0008$  — показатель экспоненты в модели атмосферы.

Подставив регулятор, являющийся решением задачи терминального управления для системы (1.13) в систему (1.14) и решив ее, мы получаем характеристики динамики двигателя и автомата тяги, угловых движений объекта вокруг центра масс и других показателей при таком управлении.

Анализ таких характеристик позволяет инженеру ответить на вопрос о допустимости использования рассчитанного для системы (1.13) регулятора в реальной модели (1.14) и, в случае необходимости, сформулировать новую задачу терминального управления, применительно для моделируемого процесса.



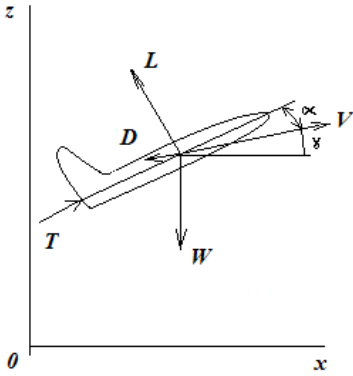


Рис. 23.

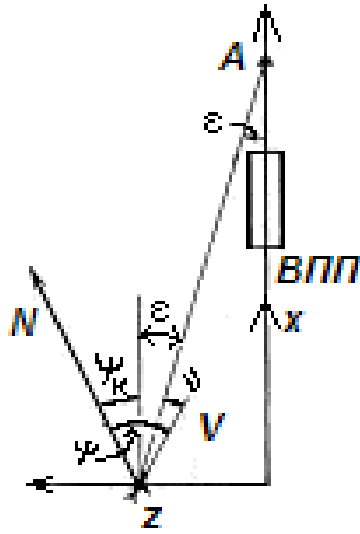


Рис. 24.

## 2. Модели движения самолета

### 2.1. Модель движения самолета в вертикальной плоскости

Динамику движения реактивного самолета, летящего в вертикальной плоскости, можно приближенно описать следующей системой дифференциальных уравнений первого порядка [136]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \cos \gamma(t), \\ \dot{z}(t) = v(t) \sin \gamma(t), \\ \dot{v}(t) = \frac{g}{\omega(t)} [T \cos \alpha(t) - D[v(t), \alpha(t)] - \frac{kv(t)^2}{g}] - g \sin \gamma(t), \\ \dot{\gamma}(t) = \frac{g}{v(t)\omega(t)} [T \sin \alpha(t) + L[v(t), \alpha(t)]] - \frac{g}{v(t)} \cos \gamma(t), \\ \dot{\omega}(t) = -k, \end{cases} \quad (2.1)$$

где (см. рис. 23)

$x(t)$  и  $z(t)$  — горизонтальное и вертикальное смещение самолета;

$v(t)$  — величина вектора скорости самолета, направленная под углом  $\gamma$  рад к горизонту;

$T$  — постоянная величина тяги, развиваемая реактивным двигателем;

$g$  — ускорение силы тяжести;

$\omega$  — вес самолета, предполагается не зависящим от высоты полета  $z$ ;

$D$  и  $L$  — соответственно лобовое сопротивление и подъемная сила, которые являются функциями  $v$  и  $\alpha$ ;

$k$  — коэффициент, характеризующий потерю веса из за расхода топлива.

Управлением является параметр  $\alpha(t)$ . Он ограничен характеристиками планера и тягой двигателя  $0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ .

*Задача управления* состоит в переводе системы (2.1) из точки  $(x_0, z_0, v_0, \gamma_0, \omega_0)$  момент  $t = 0$  в точку  $(x_1, z_1, v_1, \gamma_1, \omega_1)$  при наличии фазового ограничения  $(x(t), z(t)) \notin N$  (множество  $N$  например, содержит область грозового фронта).

## 2.2. Выведение самолета на заданную линию пути

Предположим, что самолет уклонился от заданной линии пути и его в течение времени  $T$  необходимо вернуть обратно. На рис. 24 изображен самолет, автономно (с помощью бортовых средств) заходящий на посадку. Бортовой радиолокатор измеряет расстояние  $d$  до уголкового отражателя или радиоответчика (установленного в точке А) и курсовой угол  $\nu$  на него. Зная собственный курс

$\psi$ , курс взлетно-посадочной полосы  $\psi_k$  и расстояние до точки А, можно определить боковое отклонение самолета от оси ВПП, которое для малых  $\varepsilon$  вычисляется так:  $z = (\psi - \psi_k + \nu)d$ . Здесь все углы положительны при отсчете по часовой стрелке.

Автопилот самолета содержит блок ограничения крена. На вход ограничителя подается переменная  $\gamma$ , а с выхода поступает ограниченное значение крена  $\gamma_L$ .

Боковое движение самолета описывается следующей системой дифференциальных уравнений [157]:

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma} &= u, \\ \dot{\psi} &= (g/V) \operatorname{tg} \gamma_L, \\ \dot{z} &= V\psi, \\ \gamma_L &= D(1 - e^{-A\gamma}), \\ D &= \operatorname{sign}(\gamma)\gamma_{max}, \\ A &= \operatorname{sign}(\gamma)a.\end{aligned}\tag{2.2}$$

здесь

$\gamma$  — заданный крен самолета;

$\psi$  — курс самолета;

$z$  — боковое отклонение самолета от оси ВПП;

$\gamma_L$  — ограниченное значение крена самолета;

$\gamma_{max}$  — максимально возможное значение крена;

$a = 1/\gamma_{max}$  — показатель экспоненты блока ограничения;

$V$  — постоянная скорость самолета;

$g = 9.81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения.

В качестве управляющей функции выбрана вторая производная угла крена  $\gamma$ , пропорциональная действующему на самолет моменту, который создается элеронами.

Третье уравнение системы (2.2) — приближенное, справедливое лишь при малых углах  $\psi$ . Точное уравнение со-

держит  $\sin \psi$ .

Последние три уравнения описывают работу ограничителя крена; его характеристика графически представлена на рис. 26.

*Задача управления* для нелинейного объекта (2.2) ставится следующим образом. Начальное (при  $t = 0$ ) фазовое состояние объекта характеризуется начальными условиями системы (2.2)  $z_0, \psi_0, \gamma_0, \dot{\gamma}_0$ . Требуется в течение времени  $T$  перевести систему (2.2) в конечное состояние:  $z_k, \psi_k, \gamma_k, \dot{\gamma}_k$ .

### 2.3. Движение самолета вертикального взлета на этапе посадки

#### Модель 1

Самолет вертикального взлета и посадки (СВВП), как объект управления, в полете не отличается от обычного самолета, а при посадке подъемная сила создается специальными вертикально расположенными подъемными двигателями или поворотом вниз мощной газовой струи маршевых двигателей [ 157 ]. На рис. 27 приведена схема посадки СВВП. Газовая струя его маршевых двигателей отклонена вниз и вперед, создавая тормозящую и подъемную силы. За время посадки (25 — 40 с) СВВП как управляемый объект претерпевает существенные изменения, превращаясь из обычного самолета в висящую на газовых струях платформу.

Приведем упрощенную [ 157 ] модель, учитывающую только *движение в вертикальной плоскости, параллельной продольной оси самолета*. Газовая струя его маршевого двигателя может отклоняться вниз, вверх и вперед.

Таким образом, первым управляющим органом является угол отклонения вектора тяги двигателя  $\varphi$ , а вторым — сектор газа  $\delta$ , с помощью которого можно изменять тягу двигателя  $F$ .

Кроме силы тяги на СВВП действуют аэродинамические силы ( $Y$  — подъемная,  $X$  — лобового сопротивления) и сила тяжести  $G$ . Рассмотрим продольное движение СВВП (в вертикальной плоскости, проходящей через заданную точку приземления), которое описывается следующей системой дифференциальных уравнений, записанных в скоростной системе координат:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= g\left(\frac{F}{G} \cos(\alpha + \varphi) - \frac{\rho S V^2}{2G} C_x(\alpha) - \sin \theta\right), \\ \dot{\alpha} &= \frac{g}{V} \left(-\frac{F}{G} \sin(\alpha + \varphi) - \frac{\rho S V^2}{2G} C_y(\alpha) + \cos \theta\right), \\ \dot{x} &= -V \cos \theta, \\ \dot{h} &= V \sin \theta,\end{aligned}\quad (2.3)$$

где

$V$  — воздушная скорость СВВП;

$\alpha$  — угол атаки;

$x$  — расстояние СВВП до точки приземления;

$h$  — высота СВВП над поверхностью земли;

$F$  — сила тяги двигателя;

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения;

$\rho = 1,225 \text{ кг/м}^3$  — плотность воздуха на уровне моря;

$S = 35 \text{ м}^2$  — площадь крыльев;

$C_x(\alpha)$  — коэффициент лобового сопротивления СВВП, зависящий от угла атаки (рис. 28); при моделировании функция  $C_x(\alpha)$  задается таблично; таблица составлена для величины  $\alpha^*$ , связанной с углом атаки  $\alpha$  соотношением  $\alpha^* = \alpha/0,0582$ ;

$C_y(\alpha)$  — коэффициент подъемной силы, зависящей от угла атаки (рис. 29); при моделировании функция  $C_y(\alpha)$  за-

дается таблично и значением таблицы является, как и в предыдущем случае, величина  $\alpha^*$ ;

$\theta = (\vartheta - \alpha)$  — угол наклона траектории ( $\vartheta$  — угол тангажа);

$\varphi$  — угол отклонения вектора тяги двигателя относительно связанной с самолетом продольной оси;

$G = 122625 \text{ Н}$  — вес СВВП;

$\dot{x}$  — путевая скорость СВВП (при горизонтальном полете, когда  $\theta = 0$ , путевая скорость по модулю равна воздушной, так как принято, что ветер отсутствует);

$\dot{h}$  — вертикальная скорость СВВП.

Будем считать, что на всем этапе посадки автопилот с помощью аэродинамических и газоструйных рулей поддерживает заданный угол тангажа  $\vartheta$ , который меняется по специальной программе.

Опишем работу маршевого двигателя инерционным звеном с постоянной времени  $T_F$  и коэффициентом усиления  $K_F$ :

$$\dot{F} = (K_F \cdot \delta - F)/T_F, \quad (2.4)$$

где  $\delta$  — величина перемещения сектора газа.

Уравнения (2.3), записанные в скоростной системе координат, неудобны для синтеза управлений, хотя столь же правильно, как и записанные в инерциальной системе, отражают суть явления. Для синтеза управлений часто используют более удобную упрощенную модель движения СВВП, которая в инерциальной системе координат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= (F_x - X)/m, \\ \dot{x} &= V_x, \\ \dot{V}_h &= (Y + F_h - G)/m, \\ \dot{h} &= V_h, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$x$  — расстояние СВВП до точки приземления;

$h$  — высота СВВП над поверхностью земли;

$m$  — масса СВВП;

$G$  — вес СВВП;

$X = \rho S V^2 C_x / 2$  — аэродинамическая сила сопротивления;

$Y = \rho S V^2 C_y / 2$  — аэродинамическая подъемная сила.

Проекции силы тяги на оси координат вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos(\varphi + \vartheta), \\ F_h &= F \sin(\varphi + \vartheta), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$F$  — сила тяги маршевого двигателя, получаемая путем интегрирования уравнения (2.4);

$\varphi$  — угол поворота вектора тяги;

$\vartheta$  — угол тангажа (рис. 25).

Квадрат скорости, входящий в формулы для вычисления аэродинамических сил, вычисляется так:

$$V^2 = V_x^2 + V_h^2 = \dot{x}^2 + \dot{h}^2. \quad (2.7)$$

Полученные с помощью (2.5) управляющие функции  $\delta$  и  $\varphi$  используем затем в системе (2.3). При этом еще раз убедимся, что обе системы (2.3) и (2.5) описывают одно и то же явление: синтезированные для системы (2.5) терминальные управления успешно переводят систему (2.3) в заданное конечное состояние.

*Задача управления* для системы (2.5) состоит в нахождении управления, переводящего систему из начальной позиции:  $x_0, \dot{x}_0, h_0, \dot{h}_0$  в конечную позицию:  $x_k = 0$  м;  $\dot{x}_k = 0$  м/с;  $\ddot{x}_k = 0$  м/с<sup>2</sup>;  $h_k = 0$  м;  $\dot{h}_k = 0$  м/с;  $\ddot{h}_k = 0$  м/с<sup>2</sup>.

**Модель 2**

Рассмотрим движение самолета вертикального взлета, имеющего два двигателя прикрепленные по разные стороны фюзеляжа, на этапе выполнения предпосадочных маневров. Приведем упрощенную модель (рис.25), которая учитывает только *движение в вертикальной плоскости, перпендикулярной продольной оси самолета*. Это движение описывает система уравнений [ 152 ]:

$$\begin{cases} \ddot{x} = u_1 \sin \theta - \varepsilon u_2 \cos \theta, \\ \ddot{z} = u_1 \cos \theta + \varepsilon u_2 \sin \theta - 1, \\ \ddot{\theta} = u_2, \end{cases} \quad (2.8)$$

где

$x, z$  — нормированные координаты самолета по горизонтальной и вертикальной осям соответственно;

$\theta$  — угол крена;

$u_1$  — управление, пропорциональное общей тяге двигателей;

$u_2$  — управление пропорциональное разности тяг двух двигателей;

$\varepsilon$  — малая константа.

Вектор с координатами  $x, \dot{x}, z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}$  задает состояние системы, вектор  $(u_1, u_2)$  — ее управления.

Параметры модели имеют следующую интерпретацию.

Пусть  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  фиксированная инерциальная система и  $(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$  подвижная система координат привязанная к самолетным осям. Обозначим  $\theta$  угол между подвижными и инерциальными осями. Силы, действующие



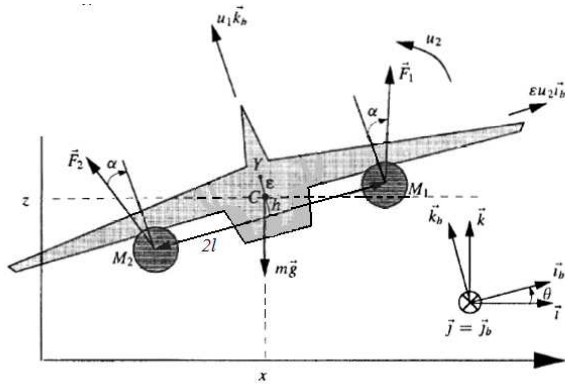


Рис. 25.

на систему имеют вид

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= (\cos \alpha \vec{k}_b + \sin \alpha \vec{i}_b) F_1 \\ \vec{F}_2 &= (\cos \alpha \vec{k}_b - \sin \alpha \vec{i}_b) F_2 \\ m \vec{g} &= -mg \vec{k}\end{aligned}$$

где  $\alpha$  — фиксированный угол.

Сила тяжести  $m \vec{g}$  приложена в центре масс  $C$ ; тяги  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  приложены в точках  $M_1$  и  $M_2$  соответственно, где

$$\overrightarrow{CM}_1 = \ell \vec{i}_b - h \vec{k}_b, \quad \overrightarrow{CM}_2 = -\ell \vec{i}_b - h \vec{k}_b.$$

Уравнения движения записанные для центра масс  $C$  имеют вид

$$\begin{aligned}m \dot{\vec{V}}_C &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m \vec{g}, \\ \dot{\vec{\sigma}}_C &= \overrightarrow{CM}_1 \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{CM}_2 \times \vec{F}_2,\end{aligned}$$

где

$\vec{V}_C$  — скорость точки  $C$ ;

$\vec{\sigma}_C$  — угловой момент относительно точки  $C$ .

Расписывая эти уравнения в проекциях на оси фиксированной системы координат, имеем

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= (F_1 + F_2) \cos \alpha \sin \theta + (F_1 - F_2) \sin \alpha \cos \theta, \\ m\ddot{z}_C &= (F_1 + F_2) \cos \alpha \cos \theta + (F_1 - F_2) \sin \alpha \sin \theta - mg, \\ J\ddot{\theta} &= (F_2 - F_1)(\ell \cos \alpha + h \sin \alpha). \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [\sin \alpha / (\ell \cos \alpha + h \sin \alpha)] J/mg, \\ u_1 &= [\cos \alpha / mg](F_1 + F_2), \\ u_2 &= [(\ell \cos \alpha + h \sin \alpha) / J](F_2 - F_1), \\ x &= x_C/g, \\ z &= z_C/g, \end{aligned}$$

получаем уравнения движения (2.8). Величина параметра  $\varepsilon$  в общем случае мала, поскольку угол  $\alpha$  у такой конструкции мал. Нормализованные расстояния  $x$  и  $z$  соответствуют естественным длинам, деленным на гравитационную постоянную  $g$ , следовательно, нормализованное расстояние 1 соответствует расстоянию 10 м.

Два управляющих параметра  $u_1$  и  $u_2$  пропорциональны вертикальному ускорению и вращающему моменту, соответственно, приложенным в центре масс.

*Задача управления* заключается в нахождении управления  $(u_1(t), u_2(t))$ , переводящего систему из начального состояния  $x(0), \dot{x}(0), z(0), \dot{z}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)$  в состояние  $x(T), \dot{x}(T), z(T), \dot{z}(T), \theta(T), \dot{\theta}(T)$ .

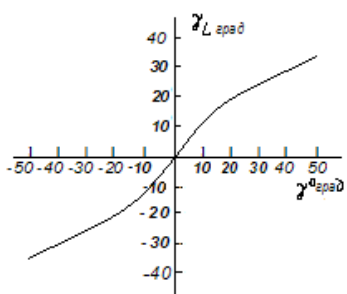


Рис. 26.

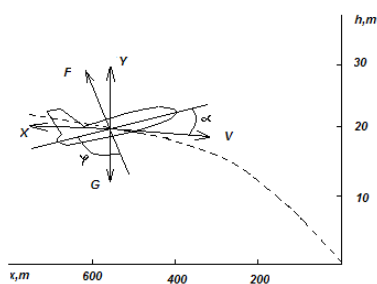


Рис. 27.

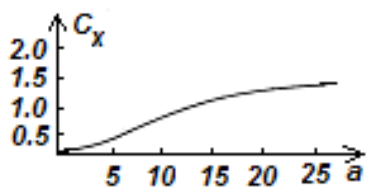


Рис. 28.

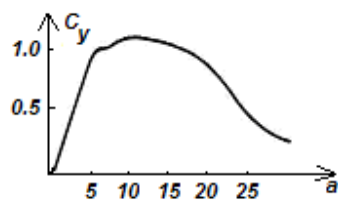


Рис. 29.

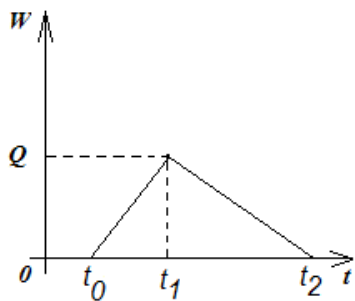


Рис. 30.

### 3. Модели экономики

#### 3.1. Модель плановой макроэкономики

Рассмотрим динамическую модель макроэкономики [ 164 ], в которой макроэкономические показатели связаны линейным статическим балансовым соотношением [ 158 ]:

$$Y = C + I + A, \quad (3.1)$$

где  $Y$  — доход (валовой выпуск),  $C$  — потребление,  $I$  — инвестиции,  $A$  — автономное потребление, и нелинейной производственной функций (ПФ) Кобба-Дугласа [ 160 ]:

$$Y = NK^m(wL)^n. \quad (3.2)$$

где под трудом в ПФ понимается полная стоимость труда  $L' = Lw$  как произведение числа работающих  $L$  на среднюю зарплату  $w$ . В мультипликативной форме ПФ выражает величину производства через капитал или фондовооруженность и полную стоимость труда  $Lw$ . Положительные показатели степени  $m$  и  $n$  в (3.2) связывают соотношением  $m + n = 1$  [ 160 ]. Коэффициент  $N$  в (3.2) связан с научно-техническим прогрессом и в дальнейшем будет считаться постоянным.

Полные инвестиции  $I$  разделяются на долговременные  $I_2$  и мгновенные  $I_1$  инвестиции, т.е.

$$I = I_1 + I_2. \quad (3.3)$$

При этом мгновенные инвестиции рассчитываются по линейной модели простого акселератора, когда они пропорциональны с некоторым коэффициентом  $\alpha$  скорости

роста валового продукта:

$$I_1 = \alpha \frac{dY}{dt}. \quad (3.4)$$

Динамику развития капитала [ 160 ] связывает изменение величины фондов с износом капитала и со скоростью ввода основных фондов с учетом запаздывания по времени освоения инвестиций:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + V, \quad (3.5)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\sigma V + \gamma I, \quad (3.6)$$

где  $\mu K$  — износ капиталовложений,  $V$  — скорость ввода фондов.

Балансовое уравнение (3.1) с учетом (3.3) и (3.4) принимает дифференциальную форму [ 162 ]:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{\alpha}(Y - C - A - I_2). \quad (3.7)$$

Полученная система уравнений (3.5), (3.6), (3.7) будет замкнутой относительно функций  $Y$ ,  $K$ ,  $I_2$ , если исключить оставшийся параметр  $L$  либо доопределить его дополнительным уравнением, поскольку параметры потребления  $C$  и  $A$  являются неоднородными членами и могут быть произвольными. Введем начальную годовую величину производства  $Y_0$  как базовую, и при годовом расчетном периоде  $T_0$  перейдем к безразмерным переменным:

$$y = \frac{Y}{Y_0}, \quad k = \frac{K}{Y_0}, \quad i_2 = \frac{I_2}{Y_0}, \quad l = \frac{wL}{Y_0}, \quad f = \frac{C + A}{Y_0}, \quad \tau = \frac{t}{T_0}. \quad (3.8)$$

Если теперь зафиксировать стоимость рабочей силы, считая ее константой  $l_0$ , то полученная система уравнений в универсальной безразмерной форме будет замкнутой:

$$k'' + (\mu + \sigma)k' + \mu\sigma k = \gamma i_2, \quad (3.9)$$

$$\alpha y' = y - i_2 - f, \quad (3.10)$$

$$y = Nl_0^{1/2}k^{1/2}. \quad (3.11)$$

Здесь знак "штрих" означает дифференцирование по  $\tau$ , и все коэффициенты под тем же обозначением считаются безразмерными. Величина  $f$  в (3.10), определяющая потребление, в общем случае может быть произвольной функцией времени.

Отметим, что потребление  $C$  так же, как и инвестиции могут считаться не постоянными величинами, а браться в форме (3.4) или быть пропорциональными доходу с некоторым коэффициентом, т.е.  $C = \beta Y$  как в [163]. И в том и в другом случае форма уравнений (3.9) — (3.11) останется прежней, а изменятся лишь коэффициенты.

Зафиксируем наряду со стоимостью труда также и величину потребления, считая  $f = const$ . Что касается других макроэкономических категорий, не вошедших в уравнения, таких как количество денег  $M$ , цена  $p$ , спрос и предложение рабочей силы и др., то в данной модели они считаются либо константами, либо параметрами, которые не влияют на макроэкономические показатели.

Модель, в которой доход от производства вкладывается в производство, а потребление и стоимость труда остаются фиксированными, отвечает модели плановой экономики [160].

Оценим величину безразмерных коэффициентов в (3.9) — (3.11) исходя из соотношений макроэкономических

параметров на начальном этапе. Коэффициент  $\mu$  определяет скорость износа фондов. При годовом износе фондов, равном 3% (при среднем износе фондов за 30 лет), получаем, что  $\mu \approx 0.03$ . Коэффициент  $\sigma$  отражает скорость ввода новых фондов. Величину изменения скорости ввода фондов будем считать управлением:  $0.8 \leq \sigma \leq 1.2$ . Оценим величину  $\gamma$ . Считая, что годовой доход от капитала составляет не более 15%, а долговременные инвестиции — не более 20%, получаем оценки  $k \approx 5 - 10$ ,  $i_2 \approx 0.2$ . А так как правые части в (3.5) — (3.6) должны быть положительными, получаем, что  $\gamma \geq 1.5$ . Величина коэффициента простого акселератора также оценивается из соотношения между инвестициями  $i_1 \approx i_2/2$  и указанной величиной годового дохода  $y'$ , что дает  $\alpha \approx 0.8 - 1$ . Долю стоимости труда в валовом продукте примем —  $l_0 \approx 0.1 - 0.2$ . Тогда из (3.11) получаем с учетом величины  $k$  оценку коэффициента научно-технического прогресса:  $N \approx 0.7 - 1.4$ .

Система уравнений (3.9) — (3.11) сводится к одному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка для безразмерной величины производства  $y$ :

$$yy'' + y'^2 + a(\sigma)yy' + by' + c(\sigma)y^2 - dy + g = 0, \quad (3.12)$$

в котором коэффициенты  $b$ ,  $d$ ,  $g$  будем считать фиксированными и вычисленными на основе сделанных выше оценок:

$$b = \frac{\gamma N^2 l_0}{2} \alpha \simeq 0.12, \quad d = \frac{\gamma N^2 l_0}{2} \simeq 0.15, \quad g = \frac{\gamma N^2 l_0}{2} f \simeq 0.05. \quad (3.13)$$

а коэффициенты  $a(\sigma)$ ,  $c(\sigma)$ , зависящие от управления, имеют вид

$$a(\sigma) = \mu + \sigma \simeq 0.03 + \sigma, \quad c(\sigma) = \frac{\mu\sigma}{2} \simeq 0.015\sigma.$$

*Задача управления* состоит в нахождении управления  $\sigma(t) \in [0.8, 1.2]$ , осуществляющего перевод системы (3.12) из начального положения  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ , в положение  $y(T) = y_T$ ,  $\dot{y}(T) = \dot{y}_T$  за конечное время  $T$ .

### 3.2. Неоклассическая модель экономического роста

Неоклассическая модель роста описывает экономический рост в агрегированной замкнутой экономике [165], [159]. Агрегированная экономика означает, что во время  $t$  производится единственный однородный продукт, выпуск которого составляет  $Y(t)$ . При этом в процессе производства используется два однородных фактора: труд  $L(t)$  и капитал  $K(t)$ . Замкнутость означает, что ни выпуск, ни затраты не импортируются и не экспортируются: весь выпуск потребляется, или инвестируется в экономику. Если обозначить через  $C(t)$  — потребление в момент  $t$ ,  $I(t)$  — инвестиции в момент  $t$ , то, согласно тождественному равенству дохода и расходов,

$$Y(t) = C(t) + I(t). \quad (3.14)$$

Это тождество показывает, что выпуск может идти только на потребление и на инвестиции. Инвестиции идут в свою очередь на увеличение размеров наличного капитала и на замещение изношенного капитала. Пусть  $K(t)$  — размер капитала в момент  $t$ , тогда капитальные вложения измеряются скоростью изменения наличного капитала  $\dot{K}(t) = \frac{dK(t)}{dt}$ . Предположим, что амортизация наличного капитала пропорциональна его величине и равна  $\mu$  (норма амортизации), т.е. в момент  $t$  необходимо заменить  $\mu K(t)$



амортизированного капитала. Предположим, так же, что выполняется следующее тождество для валовых инвестиций

$$I(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t). \quad (3.15)$$

Таким образом, чистые капитальные вложения составляют ту часть инвестиций  $I(t)$ , которая не идет на замещение изношенного капитала. Размеры выпуска определяются агрегированной производственной функцией [ 159 ], которая характеризует технические возможности производства в зависимости от величины капитала и труда

$$Y = F(K, L). \quad (3.16)$$

В случае производственной функции Кобба-Дугласа, в переменных фондовооруженности и удельного потребления, модель имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= u(t)k^\alpha(t) - \mu k(t), \\ \dot{J}(t) &= (1 - u(t))k^\alpha(t)e^{-\delta t}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

при ограничениях  $0 < k(t)$ ,  $0 \leq u(t) \leq 1$ . Здесь  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 < \delta$  константы.

*Задача управления* состоит в нахождении управления  $u(t)$ , переводящего систему (3.17) при ограничениях на фазовые переменные  $k(t) > 0$  из начального положения  $k(0) = k_0$ ,  $J(0) = 0$ , в конечное положение  $k(T) = k_T$ ,  $J(T) = J_T$ .

### 3.3. Модель двусекторной экономики

Рассмотрим экономику [ 159 ], состоящую из двух секторов, характеризующихся производственными функциями  $Y_1 = F_1(K_1, L_1)$ ,  $Y_2 = F_2(K_2, L_2)$ . Первый сектор

производит средства производства, второй — предметы потребления. Инвестиции в основные фонды как первого так и второго секторов осуществляются только за счет выпуска  $Y_1$  первого сектора, а потребление  $C$  совпадает с выпуском  $Y_2$  второго сектора. Считается, что общий объем трудовых ресурсов  $L = L_1 + L_2$  постоянен и подлежит распределению между двумя секторами в каждый момент времени. Производственная функция — функция Кобба-Дугласа. В безразмерной форме [159], динамика экономических показателей описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= u_1 u_2 k_1^\alpha - \mu_1 k_1, \\ \dot{k}_2 &= (1 - u_1) u_2 k_1^\alpha - \mu_2 k_2, \\ \dot{J} &= (1 - u_2) k_2^\beta, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где управляемые параметры удовлетворяют ограничениям

$$0 \leq u_1(t) \leq 1, \quad 0 \leq u_2(t) \leq 1.$$

При этом  $0 \leq k_1$ ,  $0 \leq k_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $0 < \mu_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Начальные и конечные условия задаются соотношениями  $k_1(0) = k_{10}$ ,  $k_2(0) = k_{20}$ ,  $J(0) = 0$ ;  $k_1(T) = k_{1T}$ ,  $k_2(T) = k_{2T}$ ,  $J(T) = J_T$ .

*Задача управления* состоит в нахождении управления  $(u_1(t), u_2(t))$ , переводящего систему (3.18) из начального положения в конечное положение, при ограничениях на фазовые переменные  $0 \leq k_1$ ,  $0 \leq k_2$ .

### 3.4. Модель контроля за загрязнением окружающей среды

В этом параграфе мы приведем модель контроля за загрязнением окружающей среды подробно описанную в ра-

боте [159]. Имеется производственный процесс, производящий полезный продукт и загрязняющий при этом окружающую среду. Загрязнение понимается в широком смысле и включает в себя загрязнение воздуха и воды, загрязнение почвы, повышение уровня радиации и т.д.

В качестве производственной функции процесса производства рассматривается неоклассическая однопродуктовая двухфакторная функция, аргументами которой служат, объем  $K$  основного капитала и объем  $L$  трудовых ресурсов. Будем считать, что предложение трудовых ресурсов не изменяется во времени. Предполагаем, что основной капитал амортизирует с постоянным темпом  $\mu > 0$ . Будем считать, что загрязнитель не используется в производстве как полезный продукт, а является его побочным продуктом. Считаем, что объем загрязнителя прямо пропорционален объему продукта производства и составляет от него долю  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ . Примерами подобного производства могут служить металлургическая отрасль, производство бумаги и т.д. Таким образом, загрязнение измеряется в тех же единицах, что и основная продукция. Переменную, характеризующую объем загрязнения обозначим  $P$ .

Окружающая среда обладает определенной способностью ассимилировать отходы производства. Будем считать, что естественная убыль отходов в каждый момент времени составляет долю  $\gamma$  от их общего количества. Собственник, в свою очередь, может выделять часть прибыли от произведенного продукта на борьбу с загрязнением. Предполагается, что эффективность затрат на уменьшение загрязнения постоянна. При этом затрата стоимости одной единицы продукции уменьшает загрязнение на  $\sigma$  единиц (будем считать  $\sigma > 1$ ).

Задача управления состоит в определении долей  $\alpha$  и

$\beta$  выпуска, предназначенных на продолжение производственного процесса и борьбу с загрязнением соответственно. Имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{K} &= (1 - \alpha - \beta)F(K, L) - \mu K, \\ \dot{P} &= (\varepsilon - \sigma\beta)F(K, L) - \gamma P.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Здесь  $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ ,  $0 \leq \beta(t) \leq 1$ ,  $\alpha(t) + \beta(t) \leq 1$ .

Предположим, что показателем эффективности работы предприятия для экологической службы является показатель  $w(t)$ , динамика которого описывается уравнением

$$\dot{w}(t) = e^{rt}[A(\alpha F(K, L))^{\alpha_1} - BP^{\beta_1}], \quad (3.20)$$

где  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $r > 0$ ;  $0 < \alpha_1 < 1$ ,  $\beta_1 > 1$  — положительные величины.

*Задача управления* состоит в нахождении управлений  $\alpha$ ,  $\beta$ , переводящих систему (3.19), (3.20) из начального состояния  $K(0)$ ,  $L(0)$ ,  $w(0) = 0$  в конечное состояние  $k(T) = K_1$ ,  $l(T) = L_1$ ,  $w(T) = w_1$ , при ограничениях на фазовые переменные  $0 \leq K(t)$ ,  $0 \leq P(t)$ .

## 4. Модели биофизики

### 4.1. Модель хищник жертва

Рассмотрим модель динамики изменения численности взаимодействующих популяций двух видов [168]: один вид — хищники, а другой — их добыча (жертвы). Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — популяции жертв и хищников соответственно. Предположим, что между особями одного вида нет соперничества. Пусть прирост на особь  $\frac{\dot{x}_1}{x_1}$  для жертв составляет  $\alpha - bx_2$ ,  $\alpha$ ,  $b > 0$ , где  $\alpha$  — скорость размножения жертв в отсутствие хищников, а  $-bx_2$  есть член, учитывающий потери от хищников. Популяция хищников уменьшалась бы

в отсутствие их пищи (т.е. жертв), так что  $\dot{x}_2/x_2 = -c$ ,  $c > 0$  при  $x_1 = 0$ . Однако наличие жертв в случае удачной охоты на них компенсирует это уменьшение, так что при  $x_1 > 0$  имеем  $\dot{x}_2/x_2 = -c + dx_1$ ,  $d > 0$ .

Таким образом, система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\alpha - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (-c + dx_1)x_2, \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $\alpha, b, c, d > 0$ . Уравнения (4.1) называются уравнениями Лотки-Вольтерра.

В зависимости от способов внешнего воздействия на популяцию [168] различают модель Лотки-Вольтерра с мультипликативными управлениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\alpha - bx_2)x_1 - u_1x_1, \\ \dot{x}_2 = (-c + dx_1)x_2 - u_2x_2, \end{cases} \quad (4.2)$$

и модель Лотки-Вольтерра с аддитивными управлениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\alpha - bx_2)x_1 - u_1, \\ \dot{x}_2 = (-c + dx_1)x_2 - u_2, \end{cases} \quad (4.3)$$

Ограничения на управления имеют вид  $0 \leq u_1(t) \leq \rho$ ,  $0 \leq u_2(t) \leq \rho$ .

*Задача управления* состоит в переводе системы (4.2) или (4.3) из начального положения  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  в положение  $x(T) = c/d$ ,  $y(T) = \alpha/b$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени. Здесь целевое множество — положение равновесия системы при отсутствии управления.

## 4.2. Модель Холлинга-Тэннера

Динамические уравнения модели Холлинга-Тэннера имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r(1 - \frac{x_1}{K})x_1 - \frac{wx_1x_2}{D+x_1} - u_1, \\ \dot{x}_2 = s(1 - J\frac{x_2}{x_1})x_2 - u_2, \end{cases} \quad (4.4)$$

где  $r, s, K, D, J > 0$  — коэффициенты.

Скоростью роста популяции жертв  $\dot{x}_1$  является разность двух членов:

(a)  $r(1 - x_1/K)x_1$  — задающего скорость размножения жертв в отсутствие хищников. Сюда включен член, соответствующий межвидовой конкуренции в условиях ограниченных ресурсов;

(b)  $wx_1x_2(D + x_1)^{-1}$  — описывающего влияние хищников.

Член (b) описывает влияние хищников в терминах "коэффициента хищничества". Это — количество жертв, убиваемых одним хищником в единицу времени. В уравнениях Лотки-Вольтерра (4.1) коэффициент хищничества равен  $bx_1$ . Это значит, что количество жертв, убиваемых одним хищником в единицу времени, неограниченно растет вместе с популяцией жертв. Сделаем другое предположение: существует верхний предел коэффициента хищничества, т.е. что хищник перестает убивать, когда насыщается. Это учитывается видом члена (b), в котором коэффициент хищничества равен  $wx_1(D + x_1)^{-1}$ . Скорость роста популяции хищников  $\dot{x}_2$  отрицательная, в предположении, что жертвы достаточно редки. Допустим, что количество жертв, необходимых для поддержания жизни одного хищника, равно  $J$ . Таким образом, популяция из  $x_1$  жертв может поддерживать не более чем  $x_1/J$  хищников. Модель построена таким образом, чтобы количество хищников не

превышало критическую величину  $x_1/J$ . Это достигается при

$$\dot{x}_2 = x_2 \left( s - \frac{sJx_2}{x_1} \right).$$

Именно это уравнение задано в (4.4).

Ограничения на управления имеют вид  $0 \leq u_1(t) \leq \rho$ ,  $0 \leq u_2(t) \leq \rho$ .

*Задача управления* состоит в переводе системы (4.4) из начального положения  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  в положение  $x(T) = x_T$ ,  $y(T) = y_T$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени. В ряде работ, например [36], в качестве целевого множества рассматривается окрестность предельного цикла системы (4.4) при отсутствии управления.

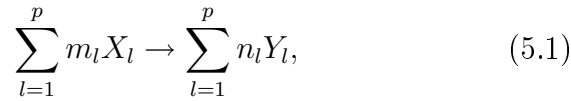
## 5. Модели химической кинетики

### Модель трехстадийной химической реакции

Системы уравнений, возникающие при описании биологических популяций, во многом близки к системам дифференциальных уравнений, описывающих кинетику химических реакций. Так, система Лотки-Вольтерра была первоначально выведена Лоткой как система, описывающая некоторую гипотетическую химическую реакцию (см. реакцию (5.3) ниже), и лишь позже Вольтерра вывел ее как систему, описывающую популяцию хищник — жертва. Химическая кинетика описывает химические реакции с помощью так называемых стехиометрических уравнений. Простейший пример такого уравнения — это известное уравнение горения водорода:  $H_2 + O \rightarrow H_2O$ .

Общий вид стехиометрического уравнения химической

реакции таков:

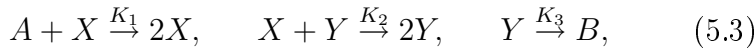


(натуральные числа  $m_l$  и  $n_l$  называются стехиометрическими коэффициентами). Это символическая запись химической реакции, в которой  $m_1$  молекул реагента  $X_1$ ,  $m_2$  молекул реагента  $X_2$ , ...,  $m_p$  молекул реагента  $X_p$ , вступив в реакцию образуют  $n_1$  молекул вещества  $Y_1$ ,  $n_2$  молекул вещества  $Y_2$ , ...,  $n_q$  молекул вещества  $Y_q$ . Основной закон, выражающий скорость протекания реакции (5.1) — закон действующих масс гласит: скорость протекания реакции пропорциональна концентрациям реагентов. Поэтому, если обозначить буквами  $x_l$ ,  $y_l$ , концентрации соответствующих веществ, то

$$\dot{x}_1(t) = \dots = \dot{x}_p(t) = -K \prod_{l=1}^p x_l^{m_l}(t) = -\dot{y}_1(t) = \dots = -\dot{y}_q(t); \quad (5.2)$$

здесь  $K$  — константа скорости протекания реакции (она обычно пишется в уравнении (5.1) над стрелкой и измеряется в моль  $-1 \cdot c^{-1}$ ).

Система Лотки-Вольтерра описывает гипотетическую трехстадийную реакцию вида



в которой концентрации  $a$  и  $b$  исходного реагента  $A$  и продукта реакции  $B$  поддерживаются постоянными (эта реакция является открытой в том смысле, что реактор обменивается веществами  $A$  и  $B$  с окружающей средой). Тогда в силу закона действующих масс

$$\dot{x} = K_1 a x - K_2 x y, \quad (5.4)$$



$$\dot{y} = K_2xy - K_3y. \quad (5.5)$$

Последняя система с точностью до коэффициентов совпадает с моделью Лотки-Вольтерра ( $a = const$ ). Система (5.4) — (5.5) получается следующим образом: в первой реакции "со скоростью  $K_1ax$ " исчезает одна молекула вещества  $X$  и с этой же скоростью появляются две молекулы этого вещества. Суммарная скорость изменения концентрации реагента  $X$  в результате первой реакции следовательно равна  $-K_1ax + 2K_1ax = K_1ax$ . Во второй реакции, очевидно, концентрация  $X$  убывает со скоростью  $-K_2xy$ . Наконец, в третьей реакции  $X$  не участвует. В итоге получается уравнение (5.4). Уравнение (5.5) выводится аналогично.

Системы уравнений химической кинетики, описывающие реакции, представляющие практических интерес, обычно имеют большие размерности и сильные нелинейности. Если

$$K_1 = K_1^0 + u_1, \quad K_3 = K_3^0 + u_2,$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — управления,  $0 \leq u_1 \leq \rho$ ,  $0 \leq u_2 \leq \rho$ , то система примет вид :

$$\dot{x} = K_1^0ay - K_2xy + u_1ax, \quad (5.6)$$

$$\dot{y} = K_2xy - K_3^0y - u_2y. \quad (5.7)$$

*Задача управления* для системы (5.6) — (5.7) заключается в нахождении управления  $(u_1, u_2)$ , переводящего систему из начального состояния  $x(0), y(0)$  в состояние  $x(T), y(T)$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени.

## 6. Модели медицины

### 6.1. Модель динамики сахара и инсулина в крови

#### Введение

Болезнь, известная под названием сахарного диабета, связана с нарушением определенных процессов в организме, связанных с процессами окисления сахара, приводящих к выработке энергии. Если нарушено функционирование соответствующего механизма, регулирующего содержание сахара в крови, то оно возрастает. Основное влияние на гомеостаз оказывает инсулин, который участвует в процессах метаболизма сахара. По тем или иным причинам нарушается действие именно этого механизма. В общем случае дифференциальные модели связаны с природными процессами, в которых существенны скорости изменения переменных, другими словами — с динамическими процессами, определяемыми различными величинами, непрерывно изменяющимися со временем. Наблюдения или эксперименты позволяют установить правила, которым подчиняются эти изменения. Эти правила приводят к уравнениям, включающим как сами переменные, так и их производные, т.е. к дифференциальным уравнениям. Учет большего числа процессов может привести к более сложной модели. Остановимся на получении простейшей дифференциальной модели диабета [167].

#### Основные переменные

Две основные переменные, включенные в модель, представляют собой величины, которые можно измерять или управлять ими в клинической практике: это уровень сахара в крови  $x$  и уровень инсулина в крови  $y$ . Важную роль

играют также две дополнительные переменные — ввод пищи  $z$  и, для больных диабетом, ввод инсулина  $w$ .

### Уравнения состояния

Качественное описание биохимических процессов в организме здорового человека можно кратко изложить так [166]. Устойчивое состояние, принимаемое за точку отсчета, есть уровень сахара в крови при голодании,  $x_0$ , при нулевом уровне инсулина. Если эти уровни отличаются от соответствующих устойчивому состоянию, то они изменяются в результате действия нескольких независимых механизмов.

**1.** Если уровень сахара в крови превышает устойчивый, то поджелудочная железа секретирует инсулин в кровеносное русло. Это явление можно описать кусочно-линейной моделью

$$\left[\frac{dy}{dt}\right]_1 = \begin{cases} b_1(x - x_0), & \text{при } x > x_0; \\ 0, & \text{при } x < x_0. \end{cases}$$

**2.** Содержание самого инсулина уменьшается под влиянием нескольких биохимических процессов; в живом организме половина свободного инсулина инактивируется за время от 10 до 25 мин. Следовательно, можно записать

$$\left[\frac{dy}{dt}\right]_2 = -b_2y, \quad y \geq 0.$$

**3.** Любой внешний источник инсулина будет точно описываться слагаемым, соответствующим внешней силе в дифференциальном уравнении. Для здорового организма это слагаемое тождественно равно нулю; для больных диабетом оно будет функцией времени, определяемой графиком инъекций

$$\left[\frac{dy}{dt}\right]_3 = b_3w(t).$$

Три постоянных  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  по определению положительны. Они могут быть названы чувствительностями и представляют собой соответственно чувствительности градиента инсулина к: **а)** высокому уровню сахара в крови, **б)** уровню инсулина и **в)** к вводу инсулина. Некоторую сложность учета фактора **а)** можно отразить при помощи функции Хевисайда, определяемой соотношениями

$$H(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{при } \xi < 0; \\ 1, & \text{при } \xi \geq 0, \end{cases}$$

где  $\xi \in R^1$ , так что суммарный градиент уровня инсулина можно теперь выразить в виде

$$\frac{dy}{dt} = b_1(x - x_0)H(x - x_0) - b_2y + b_3w(t). \quad (6.1)$$

При рассмотрении градиента уровня сахара выделяются следующие составляющие:

1. Присутствие инсулина приводит к метаболизму сахара, что понижает содержание его в крови. Чем выше содержание сахара в крови или уровень инсулина, тем быстрее происходит это понижение. Отсюда следует, что по крайней мере для малых изменений переменных этот эффект будет достаточно хорошо описываться произведением указанных двух уровней

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]_1 = -a_1xy.$$

2. Уровень сахара в крови может падать ниже равновесного (например, вследствие большой физической нагрузки при голодании). Для того чтобы поднять его до нормального уровня, высвобождаются запасы углеводов из печени.

Следовательно,

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]_2 = \begin{cases} a_0(x_0 - x), & \text{при } x < x_0; \\ 0, & \text{при } x \geq x_0. \end{cases}$$

3. Имеет место, также, естественное падение концентрации сахара, влияние которого на результаты, полученные согласно рассматриваемой модели, мало. Оно описывается соотношением:

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]_3 = -a'_2(x - x_0).$$

4. Внешним источником сахара в крови является потребляемая пища, что можно описать явной функцией времени

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]_4 = a_3z(t)$$

Постоянные  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a'_2$  и  $a_3$  также положительны и являются соответственно чувствительностями градиента уровня сахара к: а) присутствию инсулина, б) низкому уровню сахара в крови, в) высокому уровню сахара в крови и г) приему пищи.

С использованием функции Хевисайда выражение для суммарного градиента уровня сахара в крови может быть записано в виде

$$\frac{dx}{dt} = -a_1xy + a_2(x_0 - x)H(x_0 - x) - a'_2(x - x_0)H(x - x_0) + a_3z(t). \quad (6.2)$$

Отметим, что отклонения содержания сахара в сторону повышения или понижения относительно равновесного уровня компенсируются двумя различными стабилизирующими процессами, так что система является существенно нели-

нейной. Кроме того, протекание основного процесса удаления сахара зависит от содержания как сахара, так и инсулина. Следовательно, слагаемое, определяющее убыль сахара, также существенно нелинейно, поэтому использованное выше представление его в виде произведения концентраций соответствует, вероятно, самому простому варианту модели.

### Внешние источники

Поступление сахара в кровь зависит от приема пищи. Запасы пищи в организме пополняются периодически, а не непрерывно; кроме того, далее предполагается, что на любой стадии эти запасы уменьшаются экспоненциально.

Тогда слагаемое, описывающее поступление сахара за счет внешних источников, может быть записано в виде  $a_3 z(t)$ , где

$$z(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < t_0; \\ Qe^{-K(t-t_0)}, & \text{при } t \geq t_0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Таким образом, информация, которая должна быть задана относительно каждого приема пищи, содержится в параметрах  $Q$  (количество),  $K$  (параметр запаздывания),  $t_0$  (время приема пищи). Различные  $K$  соответствуют различной пище. Инъекцию глюкозы можно описать, одновременно задав большие значения для  $Q$  и для  $K$ . Разумеется, параметры  $a_3$  и  $Q$  входят в уравнения модели только в виде произведения, их удобно рассматривать по отдельности лишь для того, чтобы оперировать с "количеством" пищи, измеряемым более или менее привычными числовыми значениями.

Естественное поступление инсулина в кровь представляет собой периодически повторяющийся процесс, который регулируется механизмом обратной связи. При нару-

шении этого механизма применяется введение инсулина, аналогичное введению сахара. Периодические подкожные инъекции можно моделировать пополнением <депо инсулина>, из которого последний в течение некоторого времени поступает в кровь. Известно, что <максимальный эффект> инъекции достигается по истечении определенного промежутка времени (обычно около трех часов), и что через некоторое время действие инъекции полностью прекращается. Если считать, что максимальный эффект соответствует максимальной скорости поступления инсулина в кровь и, следовательно, наибольшему влиянию на градиент инсулина, то описанную ситуацию можно моделировать, выбирая функцию  $w(t)$  такой, как показано на рис. 30. Для функции  $w(t)$  можно записать выражение в виде кусочно-линейной функции времени; для этого требуются следующие данные: время инъекции; количество вводимого инсулина; время, необходимое для достижения максимального эффекта; а также, наклоны участков возрастания и убывания кривой. В данном случае параметр  $b_3$  — чувствительность уровня инсулина к инъекции — вводится для того, чтобы количество поступающего извне инсулина измерялось привычными числовыми значениями.

#### Параметры управления и качества процесса

Уравнения (6.1), (6.2) называются в литературе моделью Дэвиса. Она содержит два параметра управления  $z(t)$  и  $w(t)$ . В третьем уравнении, описывающего качество процесса управления, фигурирует сахарная кривая здорового организма  $\bar{x}(t)$ . Она получается интегрированием уравнений (6.1), (6.2) при следующих параметрах, соответствующих здоровому организму:  $a_1 = 0.05$ ,  $a_2 = 1.0$ ,  $a_3 = 4.0$ ,  $b_1 = 0.5$ ,  $b_2 = 2.0$ ,  $b_3 = 1$ ,  $x_0 = 100$ ,  $y(0) = 0$ ,  $t \in [0, 24]$ .

Управлением является функция  $z(t)$  (6.3), описываю-

щая прием пищи здоровым организмом: 8.00 — завтрак, 50 единиц, 13.00 — обед, 100 единиц, 20.00 — ужин, 100 единиц. Заметим, что для здорового организма  $w(t) = 0$ .

Уравнение для показателя качества процесса имеет вид

$$\dot{J}(t) = A(x(t) - \bar{x}(t))^2 + Bw^2(t), \quad J(0) = 0, \quad (6.4)$$

и представляет взвешенную сумму квадрата отклонения значения сахарной кривой больного человека в момент  $t$  от значения сахарной кривой здорового организма в момент  $t$  и квадрата второго управления — инъекций инсулина. Здесь  $A$  и  $B$  — положительные константы.

Рассмотрим модель (6.1), (6.2), (6.4) при параметрах, соответствующих больному диабетом средней тяжести организму:  $a_1 = 0.03$ ,  $b_1 = 0.01$ ,  $b_3 = 1$ .

*Задача управления* заключается в выборе управлений  $z(t)$ ,  $w(t)$ ,  $t \in [0, T]$  при которых  $J(T) \leq C$ ,  $C$ ,  $T$  — положительные константы.

## 6.2. Модель динамики численности больных при эпидемии

Рассмотрим модель распространения инфекционного заболевания в изолированной популяции. Будем считать, что особи популяции делятся на три класса. Инфицированный класс численностью  $x(t)$  ( $t$  — время) состоит из инфицированных (заболевших) особей, каждая из этих особей заразна (предполагается, что инкубационный период заболевания пренебрежимо короток). Второй класс численностью  $y(t)$  составляют восприимчивые особи, т.е. особи, которые могут заразиться при контакте с инфицированными особями. И, наконец, третий класс состоит из невос-



приимчивых особей (приобретших иммунитет или погибших в результате заболевания). Его численность обозначается  $z(t)$ . Предполагается также, что общая численность популяции  $N$  постоянна (т.е. не учитываются рождения, естественные смерти и миграция).

Две гипотезы, лежащие в основе модели таковы:

1) заболеваемость в момент времени  $t$  равна  $x(t)y(t)$  (эта гипотеза основывается на правдоподобном предположении, что число заболевающих пропорционально числу встреч между больными и восприимчивыми особями, которое в свою очередь в первом приближении пропорционально  $x(t)y(t)$ ); таким образом численность класса  $x$  растет, а численность класса  $y$  убывает со скоростью  $ax(t)y(t)$ , ( $a > 0$ );

2) численность становящихся невосприимчивыми особей (приобретших иммунитет или погибших) растет со скоростью, пропорциональной численности заболевших, т.е. со скоростью  $bx(t)$ , ( $b > 0$ ). В результате мы получаем систему уравнения

$$\begin{aligned}\dot{x} &= axy - bx, \\ \dot{y} &= -axy - u(t), \\ \dot{z} &= bx.\end{aligned}$$

Управляющий параметр  $u(t)$  описывает процесс профилактических мер по вакцинации восприимчивых особей и уменьшению числа контактов больных и восприимчивых особей.

*Задача управления* состоит в переводе системы из начального положения  $x_0, y_0, z_0$  в конечное  $x_1, y_1, z_1$  при заданных ограничениях на переменные  $x, y, z$ :  $x(t) \leq 0.7(x(t) + y(t) + z(t))$ . U

# Приложение 2

## 1. Линеаризация динамической обратной связью

### 1.1. Введение

В настоящем параграфе рассматриваются нелинейные динамические системы с управлением, для каждой из которых существует своя, изоморфная ей по Ли-Бэкунду [ 148 ], линейная динамическая система с управлением. Считается, что в более общей постановке, задача о нахождении такого класса нелинейных систем была поставлена Г. Монжем в 1784 году. Для ее решения, в работе [ 149 ] предложен подход на основе понятия динамически линеаризуемой системы, а в работе [ 150 ] предложен подход на основе понятия плоской системы с управлением. Оба подхода оказались эффективными при исследовании конкретных управляемых систем. В результате сравнительного анализа этих подходов были получены следующие результаты. В работе [ 152 ] показано, что любая плоская системы с управлением динамически линеаризуема. В работе [ 155 ] показано, что в окрестности точки общего положения, любая динамически линеаризуемая система является "плоской" независимо от типа линеаризующей обратной связи. Здесь коротко излагается один из вариантов алгоритма поиска линеаризующей обратной связи, обоснованный в работах [ 150 ], [ 156 ], и рассматриваются примеры его при-

менения к некоторым нелинейным моделям.

## 1.2. Системы с управлением

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с управлением вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad (1.1)$$

где  $t$  — независимая переменная, вектор  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — *состояние*, вектор  $u = (u_1, \dots, u_m)$  — *управление*,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  — гладкая векторная функция, а  $\dot{x} \equiv dx/dt$ . Под гладкостью здесь и далее понимается бесконечная дифференцируемость.

Произвольную гладкую векторную функцию  $y$  переменных  $t, x, u$  и производных  $u$  по  $t$  до какого-то конечного порядка  $\ell$ :  $y(t, x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(\ell)})$  будем называть *выходом системы* (1.1). Далее рассматриваются только гладкие функции. Поэтому термин "гладкая" иногда будет опускаться. Пространство размерности  $n + m + 1$  с координатами  $t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$  будем называть *пространством системы* (1.1). Пусть функция  $f(t, x, u)$  определена в области  $\Omega$  этого пространства.

Систему (1.1) называют *регулярной в области  $\Omega$* , если ранг матрицы  $\partial f_i / \partial u_j$  в каждой точке этой области равен  $m$ .

Пусть класс допустимых управлений  $U$  содержит дифференцируемые до порядка  $\ell + 1$  функции  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , и для системы (1.1) выполнены условия теорем существования, единственности и нелокальной продолжимости решения задачи Коши при допустимом управлении  $u(t)$ .

Предположим заданы начальное  $x_0$  и конечное  $x_f$  состояния системы в начальный  $t_0$  и конечный  $t_f$  моменты

времени.

*Задача терминального управления* заключается в поиске функции  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  в классе допустимых управлений, для которой соответствует решение  $x(t)$  с начальным условием  $x(t_0) = x_0$  и конечным условием  $x(t_f) = x_f$ .

### 1.3. Линеаризация динамической обратной связью и плоские системы

*Определение 2.3.* **Динамическим расширением** управляемой системы (1.1) называется система вида

$$\dot{\xi} = a(t, x, \xi, v), \quad u = b(t, x, \xi, v), \quad \xi \in R^\ell, \quad v \in R^m, \quad (1.2)$$

с входом  $(x, v)$  и выходом  $(\xi, u)$ .

Область пространства с координатами  $t, x, \xi, v$ , где определены функции  $a$  и  $b$ , называют **областью определения динамического расширения** (1.2) управляемой системы (1.1).

*Определение 2.4.* Динамически расширенным вариантом системы (1.1) назовем систему

$$\dot{x} = f(t, x, b(t, x, \xi, v)), \quad \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v), \quad (1.3)$$

с состоянием  $(x, \xi) \in R^{n+\ell}$  и управлением  $v \in R^m$ .

Второе уравнение в (1.2) определяет отображение из множества решений системы (1.3) в множество управлений системы (1.1).

*Определение 2.5.* Динамическое расширение (1.2) системы (1.1) удовлетворяет условию соответствия решений, если для любого решения  $(x(t), u(t))$  системы (1.1) существуют

векторные функции  $\xi(t)$  и  $v(t)$ , которые вместе с функциями  $x(t)$  и  $u(t)$  тождественно удовлетворяют уравнениям (1.2).

При выполнении условия соответствия решений для динамического расширения (1.2) системы (1.1) следует, что набор функций  $(x(t), \xi(t), v(t))$  образует решение системы (1.3).

Полагая  $z = (x, \xi)$ , запишем систему (1.3) в форме

$$\dot{z} = \Phi(t, z, v), \quad z \in R^{n+\ell}, \quad v \in R^m. \quad (1.4)$$

*Определение 2.6.* Замена переменных:  $t = t$ ,

$$y = Y(t, z, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell_1)}), \quad w = W(t, z, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell_2)}), \quad (1.5)$$

"преобразует" систему (1.4) в систему

$$\dot{y} = g(t, y, w), \quad y \in R^s, \quad w \in R^m, \quad (1.6)$$

если для любого решения  $(z = z(t), v = v(t))$  системы (1.4) векторные функции

$$\begin{aligned} y(t) &= Y(t, z(t), v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(\ell_1)}(t)), \\ w(t) &= W(t, z(t), v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(\ell_2)}(t)), \end{aligned} \quad (1.7)$$

представляют собой решение системы (1.6).

*Определение 2.7.* Система (1.4) называется эквивалентной системе (1.6), если существует замена переменных вида (1.5), преобразующая пару  $(z(t), v(t))$ , являющуюся решением системы (1.4) в пару  $(y(t), w(t))$ , являющуюся решением системы (1.6), и обратная к (1.5) замена переменных вида:  $t = t$ ,

$$z = Z(t, y, w, \dot{w}, \dots, w^{(k_1)}), \quad v = V(t, y, w, \dot{w}, \dots, w^{(k_2)}), \quad (1.8)$$

преобразующая пару  $(y(t), w(t))$ , являющуюся решением системы (1.6) в пару  $(z(t), v(t))$ , являющуюся решением системы (1.4).

Термин "обратная замена переменных" здесь означает, что отображение решений, порожденное этой заменой, является обратным к отображению, порожденному заменой (1.5). Отображения  $(Y, W)$  и  $(Z, V)$  гладкие, взаимно однозначные в области определения.

*Определение 2.8.* Система (1.4) называется линеаризуемой в области  $U \subset R^1 \times R^{n+\ell} \times R^m$ , если она эквивалентна системе

$$y_i^{(n_i)} = w_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Пусть  $\ell_1$  некоторое неотрицательное число.

*Определение 2.9.* Система (1.4) называется "плоской" в области  $U_1$ , если на  $U_1$  определена такая гладкая векторная функция  $y = h(t, z, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell_1)})$  для которой

**1.**  $z = F(t, \bar{y})$ , где  $\bar{y} = (y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\ell_2)})$ ,  $F$  — гладкая функция;

**2.** существует гладкая обратная замена переменных  $\bar{y} = \Phi(t, z)$ .

При этом векторная функция  $h$  называется "плоским" (или "линеаризующим") выходом системы (1.4).

Покажем, что плоская система линеаризуема. Пусть система (1.4) "плоская" и  $z(t)$  ее решение, соответствующее допустимому управлению  $v(t)$ .

*Предположение 2.11.* Уравнение  $\Phi(t, z, v) = g$ ,  $(t, z, v) \in U$ ,  $g \in \Phi(U) \subset R^n$  имеет решение относительно параметра  $v = P(t, z, g)$ , нужной гладкости.

Дифференцируя решение  $z(t) = F(t, \bar{y})$  по независимой переменной  $t$ , получаем

$$\frac{dz}{dt} = \Phi(t, F(t, \bar{y}), u) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{\ell_2}} y^{\ell_2+1},$$

и следовательно  $v =$

$$= P(t, F(t, \bar{y}), \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{\ell_2}} y^{\ell_2+1}) = \bar{P}(t, \bar{y}, y^{(\ell_2+1)}).$$

Полагая  $y^{(\ell_2+1)} = w$  управлением, для переменной  $y$  получаем уравнение

$$y^{(\ell_2+1)} = w \tag{1.9}$$

и выполнение условия эквивалентности систем (1.4) и (1.9). Так, если  $w(t)$ ,  $y(t)$  решение системы (1.9), то  $v = \bar{P}(t, \bar{y}, w)$ ,  $z = F(t, \bar{y})$  — решение системы (1.4), то есть система (1.4) при выполнении предположения 2.11 эквивалентна линейной системе (1.9).

*Теорема 2.5.* [155]. Пусть регулярная система (1.1) плоская в окрестности точки  $\theta$  ее диффеотопа  $\varepsilon^\infty$ . Тогда в окрестности этой точки существует динамическое расширение (1.2), при котором система (1.4) линеаризуема.

Таким образом, любая регулярная плоская система динамически линеаризуема. Универсального метода проверки плоскостности системы (нахождения вектор функции  $h_i(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\ell_3)})$ ) сейчас нет. Однако, для большого числа прикладных моделей такие функции найдены [150].

Поиск линеаризующей обратной связи может быть проведен следующим образом:

1. Находятся функции  $y_1 = h_1, \dots, y_m = h_m$  в виде

$h_i(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\ell_3)})$  образующие плоский выход системы вида (1.1).

2. Переменные  $x$  выражаются через  $t$  и функции  $\tilde{y} = (y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_m^{(n_m-1)})$ . (В работе [155] показано, что конечное  $n_i, i = 1, \dots, m$  обязательно существует.)

3. Выбирается вектор функция  $\bar{\xi} = (\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(k_3)})$ , где  $\xi = H(t, \bar{y})$  переменных  $t, \bar{y}$  так, чтобы матрица Якоби  $\frac{\partial(\xi, x)}{\partial \bar{y}}$  была невырожденной.

4. Производные  $\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_l$  этих функций в силу системы (1.1) и функции  $u_1, \dots, u_m$  выражаются через  $t, \bar{y}, v = (v_1, \dots, v_m)$ , где  $v_i = y_i^{(n_i)}, i = 1, \dots, m$ .

5. Переходя от переменных  $t, \bar{y}, v$  к переменным  $t, \xi, x, v$ , получаем линеаризуемый, динамически расширенный вариант исходной системы.

## 2. Линеаризуемость модели трехколесной тележки

Рассмотрим модель трехколесной тележки описанную в §1 гл.3. Система (1.1) гл.3 динамически линеаризуема [155]. Покажем это.

Динамическое расширение (1.2) выберем с следующим виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta, \\ V_R &= \xi(1 + \ell(v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta)/2\xi^2), \\ V_L &= \xi(1 - \ell(v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta)/2\xi^2), \end{aligned} \quad (2.1)$$

При замене переменных  $y_1 = x, y_2 = y$ , расширенная система ((1.1, гл.3), 2.1) преобразуется в линейную систему



следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= x, & \dot{y}_1 &= \xi \cos \theta, & \ddot{y}_1 &= \dot{\xi} \cos \theta - \xi \sin \theta \dot{\theta} = v_1, \\ y_2 &= y, & \dot{y}_2 &= \xi \sin \theta, & \ddot{y}_2 &= \dot{\xi} \sin \theta + \xi \cos \theta \dot{\theta} = v_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Итоговая расширенная линейная система имеет вид:

$$\ddot{y}_1 = v_1, \quad \ddot{y}_2 = v_2. \quad (2.3)$$

Начальные условия и конечные условия:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= x_0, \\ y_2(0) &= y_0, \\ y_1(T) &= x_1, \\ y_2(T) &= y_1, \\ \dot{y}_1(0) &= \dot{x}(0) = \frac{1}{2}(V_R(0) + V_L(0)) \cos \theta(0), \\ \dot{y}_2(0) &= \dot{y}(0) = \frac{1}{2}(V_R(0) + V_L(0)) \sin \theta(0), \\ \dot{y}_1(T) &= \dot{x}(T) = \frac{1}{2}(V_R(T) + V_L(T)) \cos \theta(T), \\ \dot{y}_2(T) &= \dot{y}(T) = \frac{1}{2}(V_R(T) + V_L(T)) \sin \theta(T). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, линейная система (2.3) с начальными и конечными условиями (2.4) является динамически линеаризованным аналогом системы (1.1), гл.3.

Ограничения на управления (1.2), гл.3 порождают следующие фазовые ограничения для линейной задачи управления (2.3) – (2.4):

1. Т. к., согласно (1.1), гл.3, (2.1)  $0 \leq \frac{1}{2}(V_R + V_L) = \xi \leq \rho$ , то из (2.2) следует фазовое ограничение на  $y_1, y_2$ :

$$\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \leq \rho. \quad (2.5)$$

2. Так как  $-\rho \leq V_R - V_L = \ell(v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta)/\xi \leq \rho$ , то  $(-\rho\xi/\ell) \leq v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sin(\theta + \varphi(\theta)) \leq \rho\xi/\ell$ .

Для выполнения последнего неравенства, достаточно

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq \rho\xi/\ell. \quad (2.6)$$

Таким образом, для линейной системы (2.3) должно выполняться смешанное ограничение на управление (2.6) и фазовое ограничение (2.5).

Огрубим ситуацию, выбирая в качестве допустимых те управления, которые удовлетворяют условию

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq a \quad (2.7)$$

где  $a, \xi$  таковы, что  $a \leq \rho\xi/\ell$ .

Тогда фазовое ограничение будет иметь вид

$$(a\ell/\rho) \leq \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \leq \rho. \quad (2.8)$$

и ограниченное управление  $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq a$ , где  $a \leq \rho^2/\ell$ , решающее терминальную задачу для начальной и конечной позиции (2.4) и, гарантирующее выполнение фазового ограничения (2.8), будучи подставленным в (2.1) формирует управления  $V_R, V_L$ , решающие задачу терминального управления для системы (1.1) гл.3.

Таким образом, соответствующая линейная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= v_1, & y_1(0) &= x(0), \\ \dot{y}_2 &= v_2, & y_2(0) &= y(0), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} y_1(0) &= \dot{x}(0), & y_1(T) &= x_1, & \dot{y}_1(T) &= \dot{x}(T), \\ y_2(0) &= \dot{y}(0), & y_2(T) &= y_1, & \dot{y}_2(T) &= \dot{y}(T), \end{aligned} \quad (2.10)$$

с ограничением на управление и фазовым ограничением вида

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq a, \quad a\ell/\rho \leq \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \leq \rho, \quad (2.11)$$

где  $a \leq \rho^2/\ell$ .

Наличие в задаче (1.1), гл.3 фазовых ограничений вида  $(x, y) \in M_1$ , где  $M_1$  — выпуклое множество в  $R^2$ , влечет дополнительное фазовое ограничение  $(y_1, y_2) \in M_1$  для линейной задачи (2.9). Отметим, что выбор параметра  $a$  влияет на величину времени  $T$ . В случае положительного решения задачи управляемости для заданной начальной позиции линейной системы (2.9) с фазовым ограничением, надо подставить получившееся управление  $v_1(t), v_2(t)$  в соотношения (2.1) и интегрировать систему (1.1), (2.1) при начальном условии на  $\xi$  вида  $a\ell/\rho \leq \xi(0) \leq \rho$ .

### 3. Линеаризуемость модели четырехколесной тележки

Рассмотрим систему (1.6), гл.3 без последнего уравнения:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \tan \phi/\ell \end{bmatrix} u, \quad (3.1)$$

где управлением являются  $u$  и  $\phi$ , скорость тележки и угол отклонения передних колес.

Скорость тележки и угол отклонения колес ограничены

$$0 \leq u \leq \rho_1, \quad |\phi| \leq 4/9\pi = \rho_2. \quad (3.2)$$

*Задача терминального управления* состоит в переводе системы (3.1) из начального положения  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, \theta(0) = \theta_0$ , в положение  $x(T) = x_1, y(T) = y_1, \theta(T) = \theta_1$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени.

Для системы (3.1) существует линеаризуемое динамическое расширение [155]. Покажем это.

1. Рассмотрим плоский выход вида  $y_1 = x$ ,  $y_2 = y$ .
2. Левый столбец — новые переменные, правый столбец — выражение старых переменных через новые:

$$\begin{array}{ll}
 y_1 = x, & x = y_1, \\
 y_2 = y, & y = y_2, \\
 \dot{y}_1 = u \cos \theta, & \theta = \arcsin \frac{\dot{y}_2}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}} = g_1(\dot{y}_1, \dot{y}_2), \\
 \dot{y}_2 = u \sin \theta, & u = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} = g_2(\dot{y}_1, \dot{y}_2), \\
 \ddot{y}_1 = \frac{d}{dt}(u \cos \theta), & \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\ell(\dot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_1 \dot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}. \\
 \ddot{y}_2 = \frac{d}{dt}(u \sin \theta), & \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

Фазовых переменных в исходной системе три:  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ . Они выражаются через четыре новые переменные  $y_1$ ,  $\dot{y}_1$ ,  $y_2$ ,  $\dot{y}_2$  в области  $U = \{(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) : \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \neq 0\}$ .

Для наличия взаимно однозначного соответствия в области  $U$ , добавим новую переменную  $\xi$  из условия однозначной разрешимости компонент вектора  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\xi$  через компоненты вектора  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $\dot{y}_1$ ,  $\dot{y}_2$ . В качестве "первого" претендента положим:  $\xi = u = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}$ . Функции  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $g_1(\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ ,  $g_2(\dot{y}_1, \dot{y}_2)$  — функционально независимы в области  $U$  и таким образом отображение  $(x, y, \theta, \xi) \Leftrightarrow (y_1, y_2, g_1(\dot{y}_1, \dot{y}_2), g_2(\dot{y}_1, \dot{y}_2))$  взаимно однозначно.

2. Левый столбец — новые переменные, выраженные через расширенный вектор исходных фазовых переменных, правый столбец — расширенный вектор исходных фа-

зовых переменных выраженный через новые.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x, & x &= y_1, \\
 y_2 &= y, & y &= y_2, \\
 \dot{y}_1 &= \xi \cos \theta, & \theta &= \arcsin \frac{\dot{y}_2}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}}, \\
 \dot{y}_2 &= \xi \sin \theta, & \xi &= \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \\
 \ddot{y}_1 &= \dot{\xi} \cos \theta - \xi \sin \theta \dot{\theta}, & u &= \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \\
 \ddot{y}_2 &= \dot{\xi} \sin \theta + \xi \cos \theta \dot{\theta}, & \varphi &= \arctg \frac{\ell(\dot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_1 \dot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

В выражения для  $x, y, \theta, \xi$  входят  $y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2$ . Управления  $u, \varphi$  зависят от  $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2$ . Полагая

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}_1 &= \dot{\xi} \cos \theta - \xi \sin \theta \dot{\theta} = v_1, \\
 \ddot{y}_2 &= \dot{\xi} \sin \theta + \xi \cos \theta \dot{\theta} = v_2,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

находим

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta, \\
 u &= \xi, \\
 \varphi &= \arctg \frac{\ell}{\xi^2} (v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом, управляемая система (3.1) динамически линеаризуема и ее линейным аналогом является система (3.3).

В качестве "второго" претендента на параметр динамического расширения рассмотрим  $\xi = \dot{y}_1$ .

$$\begin{aligned}
 x &= y_1, & y_1 &= x, \\
 y &= y_2, & y_2 &= y, \\
 \operatorname{tg} \theta &= \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}, & \dot{y}_1 &= \xi, \\
 \xi &= \dot{y}_1, & \dot{y}_2 &= \xi \operatorname{tg} \theta, \\
 u &= \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, & \ddot{y}_1 &= \dot{\xi}, \\
 \varphi &= \arctg \frac{\ell(\dot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_1 \dot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}, & \ddot{y}_2 &= \dot{\xi} \operatorname{tg} \theta + \xi \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta},
 \end{aligned}$$

Функции  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $\arctg \frac{y_2}{y_1}$ ,  $\dot{y}_1$  — функционально независимы. Полагая

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= \dot{\xi} = v_1, \\ \ddot{y}_2 &= \dot{\xi} \operatorname{tg} \theta + \xi \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = v_2,\end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= v_1, \\ u &= \frac{\xi}{\cos \theta}, \\ \varphi &= \arctg \frac{\ell(v_2 - v_1 \operatorname{tg} \theta) \cos^3 \theta}{\xi^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, динамически расширенная модель (3.1) соотношением  $\xi = \dot{y}_1$  линеаризуема.

Вернемся к первому варианту (3.4) динамического расширения системы (3.1). Исходная задача содержит ограничения на управляющие параметры (3.2). Они порождают в соответствующей линеаризованной задаче фазовые ограничения. Покажем это.

При замене переменных  $y_1 = x$ ,  $y_2 = y$ , система (3.1 — 3.4) преобразуется в линейную систему следующим образом:

$$\begin{aligned}y_1 &= x, \quad \dot{y}_1 = \xi \cos \theta, \quad \ddot{y}_1 = \dot{\xi} \cos \theta - \xi \sin \theta \dot{\theta} = v_1, \\ y_2 &= y, \quad \dot{y}_2 = \xi \sin \theta, \quad \ddot{y}_2 = \dot{\xi} \sin \theta + \xi \cos \theta \dot{\theta} = v_2.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Начальные условия

$$\begin{aligned}y_1(0) &= x_0, \quad \dot{y}_1(0) = \dot{x}(0) = u(0) \cos \theta(0), \\ y_2(0) &= y_0, \quad \dot{y}_2(0) = \dot{y}(0) = u(0) \sin \theta(0),\end{aligned}\tag{3.6}$$

и конечные условия

$$\begin{aligned}y_1(T) &= x_1, \quad \dot{y}_1(T) = \dot{x}(T) = u(T) \cos \theta(T), \\ y_2(T) &= y_1, \quad \dot{y}_2(T) = \dot{y}(T) = u(T) \sin \theta(T).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Таким образом, линейная система (3.5) с начальными и конечными условиями (3.6), (3.7) является динамически линеаризованным аналогом системы (3.1).

Рассмотрим ограничения на управления (3.2):

1. Так как, согласно (3.2)  $0 \leq u = \xi \leq \rho_1$ , то из (3.4) следует ограничение на  $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ :

$$\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \leq \rho_1.$$

2. Так как  $-\rho_2 \leq \phi = \arctg \frac{\ell(v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta)}{\xi^2} \leq \rho_2$ , то  $(-tg(\rho_2)\xi^2)/\ell \leq v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sin(\theta + \eta(\theta)) \leq tg(\rho_2)\xi^2/\ell$ .

При

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq a$$

и выборе  $a$  из соотношения  $a \leq tg(\rho_2)\xi^2/\ell$ , получаем, что если функции  $\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t)$ , в линеаризованной задаче, удовлетворяют условию

$$\sqrt{a\ell/tg(\rho_2)} \leq \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \leq \rho_1, \quad (3.8)$$

то в исходной задаче будут выполняться ограничения на управления (3.2).

Таким образом, соответствующая линейная система имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= v_1, & y_1(0) &= x(0), \\ \ddot{y}_2 &= v_2, & y_2(0) &= y(0), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(0) &= \dot{x}(0), & y_1(T) &= x_1, & \dot{y}_1(T) &= \dot{x}(T), \\ \dot{y}_2(0) &= \dot{y}(0), & y_2(T) &= y_1, & \dot{y}_2(T) &= \dot{y}(T), \end{aligned} \quad (3.10)$$

с ограничением на управление и фазовым ограничением вида

$$\begin{cases} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq a, \\ \sqrt{al/tg(\rho_2)} \leq \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \leq \rho_1, \\ a \leq \rho_1^2 tg(\rho_2)/l. \end{cases} \quad (3.11)$$

Наличие в задаче (3.1) фазовых ограничений вида  $(x, y) \in M_1$ , где  $M_1$  — выпуклое множество в  $R^2$ , влечет дополнительное фазовое ограничение  $(y_1, y_2) \in M_1$  для линейной задачи (3.9). Отметим, что выбор параметра  $a$  влияет на величину времени  $T$ . В случае положительного решения задачи управляемости для заданной начальной позиции линейной системы (3.9) с фазовым ограничением, надо подставить получившееся управление  $v_1(t), v_2(t)$  в соотношения (3.4) и интегрировать систему (3.1), (3.4) при начальном значении  $\xi(0)$ , удовлетворяющем условию

$$\sqrt{al/tg(\rho_2)} \leq \xi(0) \leq \rho_1.$$

## 4. Линеаризуемость модели автомобиля

Рассмотрим систему (1.6), гл.3 считая параметры  $u_1, u_2$  управлениями:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \tan \phi/l \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2. \quad (4.1)$$

Здесь управлением являются  $u_1$  и  $u_2$ , скорость автомобиля и скорость изменения угла отклонения передних колес.



Скорость автомобиля и скорость изменения угла отклонения колес ограничены

$$0 \leq u_1 \leq \rho_1, \quad |\phi| \leq 4/9\pi = \rho_2, \quad -\rho_3 \leq u_2 \leq \rho_3. \quad (4.2)$$

Задача терминального управления состоит в переводе системы (4.1) из начального положения  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\phi(0) = \phi_0$ , в положение  $x(T) = x_1$ ,  $y(T) = y_1$ ,  $\theta(T) = \theta_1$ ,  $\phi(T) = \phi_1$ , где  $T$  — некоторый конечный момент времени.

Для системы (4.1) существует линеаризуемое динамическое расширение [156]. Покажем это.

1. Рассмотрим плоский выход вида  $y_1 = x$ ,  $y_2 = y$ .
2. Левый столбец — новые переменные, правый столбец — выражение старых переменных через новые:

$$\begin{array}{ll} y_1 = x, & x = y_1, \\ y_2 = y, & y = y_2, \\ \dot{y}_1 = u_1 \cos \theta, & \theta = \arcsin \frac{\dot{y}_2}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}}, \\ \dot{y}_2 = u_1 \sin \theta, & \phi = \arctg \frac{\ell(\dot{y}_2 \dot{y}_1 - \ddot{y}_1 \dot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}, \\ \ddot{y}_1 = \frac{d}{dt}(u_1 \cos \theta), & u_1 = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \\ \ddot{y}_2 = \frac{d}{dt}(u_1 \sin \theta), & u_2 = \phi, \\ \dots \dots \dots & \end{array}$$

Фазовых переменных в исходной системе четыре:  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ . Они выражаются через шесть новых переменных  $y_1$ ,  $\dot{y}_1$ ,  $y_2$ ,  $\dot{y}_2$ ,  $\ddot{y}_1$ ,  $\ddot{y}_2$  в области  $U = \{(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2 : \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \neq 0\}$ .

Для наличия взаимно однозначного соответствия в области  $U$ , добавим переменные  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  к переменным  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  из условия однозначной разрешимости компонент вектора  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  через компоненты вектора  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $\dot{y}_1$ ,  $\dot{y}_2$ ,  $\ddot{y}_1$ ,  $\ddot{y}_2$ .

1. Положим  $\xi_1 = u_1 = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}$ ,  $\xi_2 = \dot{\xi}_1$ .

Функции  $y_1, y_2, \arcsin \frac{\dot{y}_2}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}}, \operatorname{arctg} \frac{\ell(\dot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_1 \dot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}, \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, (\dot{y}_1 \dot{y}_1 + \dot{y}_2 \dot{y}_2) / \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}$  — функционально независимы в области  $U$  и таким образом отображение  $(x, y, \theta, \varphi, \xi_1, \xi_2) \Leftrightarrow (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2)$  является взаимно однозначным.

2. Левый столбец — новые переменные, выраженные через расширенный вектор исходных фазовых переменных, правый столбец — расширенный вектор исходных фазовых переменных, выраженный через новые.

$$\begin{array}{ll}
 y_1 = x, & x = y_1, \\
 y_2 = y, & y = y_2, \\
 \dot{y}_1 = \xi_1 \cos \theta, & \theta = \arcsin \frac{\dot{y}_2}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}}, \\
 \dot{y}_2 = \xi_1 \sin \theta, & \phi = \operatorname{arctg} \frac{\ell(\dot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_1 \dot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}, \\
 \ddot{y}_1 = \dot{\xi}_1 \cos \theta - \xi_1 \sin \theta \dot{\theta}, & \xi_1 = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} = u_1, \\
 \ddot{y}_2 = \dot{\xi}_1 \sin \theta + \xi_1 \cos \theta \dot{\theta}, & \xi_2 = \frac{\dot{y}_1 \dot{y}_1 + \dot{y}_2 \dot{y}_2}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}} = \dot{\xi}_1, \\
 \ddot{y}_1 = \xi_2 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta \dot{\theta} - & u_1 = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \\
 -\xi_2 \sin \theta \dot{\theta} - \xi_1 \cos \theta \ddot{\theta} - & u_2 = \dot{\phi} = \frac{\ell}{\xi_1^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2} \times \\
 -\xi_1 \sin \theta \ddot{\theta}, & \times (v_2 \cos \theta - \\
 \ddot{y}_2 = \xi_2 \sin \theta + \xi_2 \cos \theta \dot{\theta} + & -v_1 \sin \theta - \\
 +\xi_2 \cos \theta \dot{\theta} - \xi_1 \sin \theta \ddot{\theta} + & -3\xi_2 \dot{\theta}). \\
 +\xi_1 \cos \theta \ddot{\theta}, &
 \end{array}$$

В выражения для  $x, y, \theta, \phi, \xi_1, \xi_2$  входят  $y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2$ . Управление  $u_2$  зависит от  $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2$ . Следовательно [156]  $n_i = 3, i = 1, 2$ .

Полагая

$$\begin{array}{l}
 \ddot{y}_1 = v_1, \\
 \ddot{y}_2 = v_2,
 \end{array} \quad (4.3)$$

находим

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta, \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\xi_1^2 \tan \phi}{\ell} + v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta, \\ u_1 &= \xi_1, \\ u_2 &= \frac{\ell[v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta - \xi_2 \dot{\theta}]}{1 + \xi_1 \ell^2 \dot{\theta}^2}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Таким образом, модель динамически линеаризуема.

Рассмотрим ограничения на управления (4.2).

1. Так как, согласно (4.2)  $0 \leq u_1 \leq \rho_1$ , то из соотношений п.2 следует ограничение на  $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ :

$$\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \leq \rho_1. \quad (4.5)$$

2. Так как  $-\rho_2 \leq \phi = \arctg \frac{\ell(\ddot{y}_2 \xi_1 \cos \theta - \ddot{y}_1 \xi_1 \sin \theta)}{\xi_1^3} \leq \rho_2$ , то

$$\begin{aligned}-tg(\rho_2)\xi_1^2/\ell &\leq \ddot{y}_2 \cos \theta - \ddot{y}_1 \sin \theta = \\ &= \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \sin(\theta + \eta(\theta)) \leq tg(\rho_2)\xi_1^2/\ell.\end{aligned}$$

При

$$\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \leq tg(\rho_2)(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)/\ell \quad (4.6)$$

получаем, что для  $\phi$  выполнено ограничение (4.2).

3. Так как, согласно (4.2)  $-\rho_3 \leq u_2 \leq \rho_3$ , то из соотношений п.2:

$$\begin{aligned}-\rho_3 &\leq u_2 = \ell[v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta - 3\xi_2 \dot{\theta}] / (\xi_1^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2) \leq \rho_3, \\ -\rho_3[\xi_1^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2] / \ell + 3\xi_2 \dot{\theta} &\leq v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta \leq \\ &\leq \rho_3[\xi_1^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2] / \ell + 3\xi_2 \dot{\theta},\end{aligned}$$

откуда получаем

$$-\rho_3[\xi_1^2 + l^2\dot{\theta}^2]/\ell + 3\xi_2\dot{\theta} \leq \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq \rho_3[\xi_1^2 + l^2\dot{\theta}^2]/\ell + 3\xi_2\dot{\theta}. \quad (4.7)$$

Таким образом, в линейной задаче (4.3) должны быть выполнены фазовые ограничения (4.5), (4.6) и смешанное ограничение (4.7).

Огрубим задачу, с целью избавиться от смешанного ограничения.

Если функции  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ , в линеаризованной задаче, удовлетворяют условию  $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq a$ , и для  $a$  выполнено неравенство

$$a \leq \rho_3[\xi_1^2 + l^2\dot{\theta}^2]/\ell + 3\xi_2\dot{\theta}, \quad (4.8)$$

то в исходной задаче будут выполняться ограничения на управление  $u_2$  (4.2). Для выполнения (4.8) достаточно выполнения неравенства

$$9(\ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_2^2) + 4\rho_3 a \ell \leq 4\rho_3^2(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2).$$

Таким образом, соответствующая линейная задача управления имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= v_1, \\ \ddot{y}_2 &= v_2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} y_1(0) &= x(0), & \dot{y}_1(0) &= \dot{x}(0), & \ddot{y}_1(0) &= \ddot{x}(0), \\ y_1(T) &= x_1, & \dot{y}_1(T) &= \dot{x}(T), & \ddot{y}_1(T) &= \ddot{x}(T), \\ y_2(0) &= y(0), & \dot{y}_2(0) &= \dot{y}(0), & \ddot{y}_2(0) &= \ddot{y}(0), \\ y_2(T) &= y_1, & \dot{y}_2(T) &= \dot{y}(T), & \ddot{y}_2(T) &= \ddot{y}(T), \end{aligned} \quad (4.10)$$

с ограничением на управление и фазовым ограничением вида

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq a, \quad (4.11)$$

$$\max\left\{\frac{\ell}{\tan(\rho_2)}\sqrt{\ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_2^2}, \frac{9}{4\rho_3^2}(\ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_2^2) + \frac{a\ell}{\rho_3}\right\} \leq \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \leq \rho_1. \quad (4.12)$$

Наличие в задаче (4.1) фазовых ограничений вида  $(x, y) \in M_1$ , где  $M_1$  — выпуклое множество в  $R^2$ , влечет дополнительное фазовое ограничение  $(y_1, y_2) \in M_1$  для линейной задачи (4.9). Отметим, что выбор параметра  $a$  влияет на величину времени  $T$ . В случае положительного решения задачи управляемости для заданной начальной позиции линейной системы (4.9) с фазовым ограничением (4.12), надо подставить получившееся управление  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  в соотношения (4.4) и интегрировать систему (4.1), (4.4) при начальном значении  $\xi_1(0)$ ,  $\xi_2(0)$ , удовлетворяющем условию

$$\begin{aligned} \xi_2(0) &= v_1(0) \cos \theta(0) + v_2(0) \sin \theta(0), \quad \rho_1 \geq \xi_1(0) \geq \\ &\geq \max\left\{\frac{\ell}{\tan(\rho_2)}\sqrt{\ddot{y}_1^2(0) + \ddot{y}_2^2(0)}, \frac{9}{4\rho_3^2}(\ddot{y}_1^2(0) + \ddot{y}_2^2(0)) + \frac{a\ell}{\rho_3}\right\}. \end{aligned}$$

# Литература

## к Главам 1,2

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. — М.: Мир, 1967. — 479с.
2. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина и В.С. Пацко. — Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1984. — 295с.
3. Арутюнов А.В., Асеев С.М. Принцип максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Невырожденность и устойчивость. // Докл. РАН.— 1994. - Т.334, №2. - с.134—137.
4. Арутюнов А.В., Благодатских В.И. Принцип максимума для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями // Тр. МИАН.— 1991. - Т.200. - с.4—26.
5. Асеев С.М. Экстремальные задачи для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями. // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. Т. 233. 2001. с.5—70.
6. Асеев С.М., Смирнов А.И. Задача оптимального прохождения через заданную область // Математические модели в экономике и экологии. Б. МАКС Пресс — 2004. - с.15—19.
7. Апарцин А. С. Полилинейные краевые уравнения Вольтерра 1 рода // Автоматика и телемеханика 2004. N 2. с.118—125
8. Азамов А. Двойственность линейных дифференциальных игр преследования // ДАН СССР.— 1982. 263.- N 2.

9. Барабанова Н.Н., Субботин А.И. О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // ПММ. — 1971. - Т.35, вып. 3. - с.385—392.
10. Благодатских В.И. Задача управляемости для линейных систем. Труды математического института АН СССР. 1977, т.143. с.57-67.
11. Благодатских В.И., Филлипов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1985. - Т.169. - с.194—252.
12. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. Высшая школа, 2001. 239 с.
13. Булатов М.В. О преобразовании вырожденных систем интегральных уравнений типа Вольтерра. Вычислительные технологии, 2000. том 5, № 4, с.22-30.
14. Близорукова М.С., Максимов В.И. Об одном алгоритме динамической реконструкции управлений // Изв. АН СССР. Теория и системы управления. 1988. N 2. с.56—61.
15. Болтянский В.Г. Метод локальных сечений в теории оптимальных процессов // Дифференц. уравнения. — 1968. - Т.4, №12.- с.2166—2183.
16. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. - 408с.
17. Болтянский В.Г. Опорный принцип в задачах оптимального управления // Дифференц. уравнения. — 1973. - Т.9, №8. - с.1363—1370.
18. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М. Факториал Пресс. 2002.
19. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. —Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. —229с.

20. Гамкрелидзе Р.В. Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых координатах // Докл. АН СССР.— 1959. - Т.125, №3. - с.475—478.
21. Гамкрелидзе Р.В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. // Изв. АН СССР. Сер. Мат. —1960. - Т.24, №3. - с.315—356.
22. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. Наука. 1967 г.
23. Григорьева С.В., Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Математический сборник. — 2005.- Т.196, №4.- с.51—78.
24. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 2005.- N 7. - с.3—42.
25. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. Изд-во МГУ. 1990 г.
26. Гусев М.И., Куржанский А.Б. Обратные задачи динамики управляемых систем // Механика и научно-технический прогресс. — М.: Наука, 1987. - Т.1. - с.187—195.
27. Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // ПММ. — 1998.- Т.65, №2.
28. Гурса Э. Курс математического анализа. Т.3, Ч.2.ОНТИ. 1933г.
29. Дарьин А.Н., Куржанский А.Б. Управление в условиях неопределенности при двойных ограничениях //



- Дифференц. уравнения. —2003. - Т.39, №11. - с.1474—1486.
30. Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А. Принцип максимума в регулярных задачах оптимального управления, у которых концы фазовой траектории лежат на границе фазового ограничения // Автоматика и телемеханика. — 1987. - №12. - с.25—33.
  31. Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А. Критерий существования содержательного принципа максимума в задаче с фазовыми ограничениями // Дифференц. Уравнения. — 1995.- Т.31, №10. - с.1611—1616.
  32. Касселс Дж.В.С. Введение в геометрию чисел. —М.: Мир, 1965.
  33. Киселев Ю.Н. Оптимальное управление. Изд-во МГУ. 1988 г.
  34. Киселев Ю.Н. Аввакумов С.Н. Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. МАКС ПРЕСС. Москва. 2007.
  35. Киселев Ю.Н. Экстремальное описание неизвестных параметров в краевой задаче принципа максимума // Тр. ИММ УрО РАН. — Екатеринбург, 2000. - Т.6, №1. - с.72—90.
  36. Комаров В.А. Оценки множества достижимости для линейных систем // Изв. АН СССР. Серия математическая. — 1984. - Т.48, №4.- с.865—879.
  37. Комаров В.А. Оценки множества достижимости дифференциальных включений // Мат. заметки.— 1985.- Т.37, вып.6.- с.916—925.
  38. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. —420с.

39. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 520с.
40. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. // —М.: Наука, 1974. —456с.
41. Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Нелинейные  $k(x)$  - двойственные системы и синтез наблюдателей // Дифференциальные уравнения. — 1999.- Т.35; N 5. с.648—663.
42. Кряжимский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С. О реконструкции экстремальных возмущений в параболических уравнениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1997. - Т. 37, № 3. - с.291—302.
43. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. К регуляризации выпуклой экстремальной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Некоторые методы позиционного и программного управления. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. - с.34—54.
44. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. Высшая школа. 1981.
45. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. - 392с.
46. Куржанский А.Б., Осипов Ю.С. К задаче управления с ограниченными фазовыми координатами // ПММ. — 1968. - Т. 32, вып. 2. - с.194—202.
47. Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Оптим. упр. и дифференц. уравнения: сб. ст. к 70-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1995. -Т. 211. - с.304—395.
48. Избранные труды А.Б. Куржанского Изд-во МГУ, 2009. 750 с.

49. Ледяев Ю.С., Мищенко Е.Ф. Об оптимальных стратегиях в дифференциальных играх фиксированной продолжительности // Докл. АН СССР. — 1986. - Т. 286, № 2. - с.284—287.
50. Ледяев Ю.С., Мищенко Е.Ф. Экстремальные задачи в теории дифференциальных игр // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1988. -Т. 185. - с.147—170.
51. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. - 574с.
52. Лотов А.В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975. - Т.15, N 1.
53. Лотов А.В. Методы анализа математических моделей управляемых систем на основе построения множества достижимости значений показателей качества управления. Дис.докт. физ.-матем. наук. М. МФТИ. 1985.
54. Лукьянова Л.Н. Задача уклонения от столкновения для линейной управляемой системы. Вестник Моск. ун-та. сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2005. N 3, с.29—35.
55. Лукьянова Л.Н. Задача уклонения от столкновения с невыпуклым препятствием для линейной управляемой системы. Мобильные роботы и мехатронные системы : Материалы научной школы- конференции. Часть 2. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. с.138—149.
56. Лукьянова Л.Н. Задача управляемости для линейной системы с выпуклым фазовым ограничением. Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова / под редакцией Ю.С.Осипова, А.В.Кряжимского. -

- М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ. 2005. Выпуск 1. с.192—204.
57. Лукьянова Л.Н. Реконструкция управления в задаче уклонения от столкновения. // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби, Труды международного семинара, Екатеринбург. 2005. Т. 2. с.96—104.
58. Лукьянова Л.Н. К решению задачи выживания траектории линейной управляемой системы, Дифференциальные уравнения. Т.42, № 12, 2006. стр. 1637—1646
59. Лукьянова Л.Н. Задача управления инерционным объектом с трением и демпфированием, Мобильные роботы и мехатронные системы. Материалы научной школы-конференции, М, Изд. Моск. Унив-та, 2006. части 1-2, с. 182-192.
60. Лукьянова Л.Н. К решению задачи выживания траектории нелинейной динамической системы Труды математического института им.В.А.Стеклова. 2007. Т. 258. № 4. С. 153-164.
61. Максимов В.И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем // Екатеринбург: УрО РАН, 2000. 305с.
62. Максимов В.И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем // Екатеринбург: УрО РАН, 2000. 305с.
63. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальные системы управления: обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. Издательство санкт-петербургского университета 2003.
64. Микусинский Я. Операторное исчисление. М.: Изд-во ИЛ, 1956.

65. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц. Труды МИАН СССР. 1977. Т. 143. с.105 - 129.
66. Никольский М.С. Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. — 1981. - Т. 116, № 7. - с.136—144.
67. Никольский М.С. Об аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Вестник Московского университета. Вычислительная математика и кибернетика. —1987. - Сер.15, № 4. - с.31—34.
68. Никольский М.С. О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Мат. сборник. - 1985. - Т. 128, № 1. - с.35—49.
69. Никольский М.С., Мусса Абубакар Некоторые оценки множества достижимости для управляемого уравнения Ван дер Поля // Тр. ИММ УрО РАН. — Екатеринбург, 2000. - Т. 6, № 1. - с.150—159.
70. Никольский М.С. О линейной задаче осуществления заданного движения. ДАН. 1992. том 322, № 5, с.193—197.
71. Никольский М.С. Об одной задаче осуществления заданного движения. Гибкие системы. ДАН. 1996. том 350, № 6, с.739—741.
72. Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л. Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем // ПММ. — 1982. - Т. 46, вып. 5. - с.737—744.

73. Осипов Ю.С. Позиционное управление в параболических системах // ПММ. — 1977. - Т. 41, вып. 2. - с.195—201.
74. Осипов Ю.С. Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией. Успехи математических наук. 2006. т.61, вып. 4(370), С. 25-76.
75. Избранные труды Ю.С.Осипова. Издательство МГУ. 2009, 656 с.
76. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. Издательство МГУ. 1999 г.
77. Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Аппроксимация стабильных мостов в дифференциальных играх с ограничениями на фазовый вектор // Изв. Урал. гос. ун-та.-2002. -№26.
78. Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Конструирование стабильных мостов в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // ПММ. — 2003. - Т. 67, вып. 5. с.771—783.
79. Пацко В.С. Квазилинейная дифференциальная игра качества второго порядка // Задачи динамического программирования. — Свердловск: УНЦ АН СССР. - 1989.
80. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. — Л.: ЛГУ, 1977. - 222с.
81. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого анализа. М. Физматлит. 2004г. 416 с.
82. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. —М.: Физматлит, 2003.

83. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. I // Докл. АН СССР. — 1967. - Т. 174, № 6. - с.1278—1281.
84. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. — 1967. - Т. 175. - № 4. - с.764—766.
85. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об убежении одного управляемого объекта от другого // Докл. АН СССР. — 1969. - Т.189, № 4. - с.721—723.
86. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. — 1971. - Т. 7, № 3. - с.436—445.
87. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убежения. Труды МИАН СССР. 1971. Т. 112. с.30—63.
88. Избранные труды Л.С.Понтрягина. М.:МАКС Пресс, 2004, 552 с.
89. Пшеничный Б.Н. Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. — 1969. - Т. 184, №2. - с.285—287.
90. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры . — Киев: Наукова думка, 1992. - 260с.
91. Пшеничный Б.Н. О задаче убежения // Кибернетика. — 1975. - №4. - с.120—127.
92. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии ограничений // ДАН СССР. — 1981. -259, №4.
93. Рисс Ф., Секефальви-Надь И. Лекции по функциональному анализу. М. : Изд-во Мир, 1979.

94. Сатимов Н.Ю. К теории дифференциальных игр убеждения // Мат. сб. — 1977. - № 2. - с.13—27.
95. Сатимов Н.Ю. Задача избежания столкновений в линейных системах // Кибернетика. — 1976. - № 1.
96. Субботин А.И., Субботина Н.Н. - К вопросу обоснования метода динамического программирования в задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1983. - № 2. - с.24—32.
97. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. - 288с.
98. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М. Наука. 1991 г.
99. Тарасьев А.М. Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона-Якоби // ПММ. — 1994. - Т. 58, вып. 2. с.22—36.
100. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // ПММ. — 1987. - Т. 51, вып. 2. - с.216—222.
101. Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. О приближенном построении решений в игровых задачах управления // ПММ. — 1997. - Т. 61, вып. 3. с.413—421.
102. Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1980. - №4. - с.29—36.
103. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. Моск.ун-та. Сер. математика, механика, физика, химия. 1959. N 2. с.34—41



104. Ченцов А.Г. Итерационная программная конструкция для дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания // Докл. АН СССР. — 1978. - Т. 240, №1. - с.796—800.
105. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. — М.: Наука, 1976.
106. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. - М.: Наука, 1988. - 319с.
107. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей. ПММ. 1976. т.40. вып.1.
108. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Итоги науки и техники. Математический анализ. — 1977. - Т.14.
109. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. —Киев: Наук. думка. 1992. - 384 с.
110. Чикрий А.А. Метод переменных направлений в нелинейных дифференциальных играх убегания // Кибернетика. -1984. -N 1. -с.48—54.
111. Akbin I., Clarke F. Monotone invariant solutions to differential inclusions // J.London Math. Soc. — 1977. -V. 16. - P.357—366.
112. Ananevskii I.M. Synthesis of a continuous control of a rheonomic mechanical system // Appl.Math.Mech.— 2003.-V.67, №2.-P.143—156.
113. Aubin J.P. Viability theory. Boston: Birhauser,1991.
114. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Walenski P.R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. - N.Y.: Springer, 1998. - 278p.

115. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*. — Dordrecht: Kluwer, 1997. — 322p.
116. Chikrii A.A. *Conflict controlled processes*. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1997. - 427 p.
117. Fleming W.H. *The Convergence Problem of Differential Games* // *J. Math. Anal and Appl.* - 1961. - V. 3.- P. 102—116.
118. Fleming W.H. *The Convergence Problem of Differential Games II* // *Adv. in Game Theory*. - Princeton: Princeton Univ. Press, 1964. - P.195—210.
119. Haddad G. *Monotone trajectories of differential inclusions and functional- differential inclusions with memory* // *Israel J. of Math.* - 1981. -V. 81. - P. 83—100.
120. Jordan C. *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique*, 3 ed.t, 1.P., 1909.
121. Kalman R. *Mathematical Description of Linear Dynamical Systems* // *J.SIAM.* — 1963. - Ser. A., Control 1.
122. Kostousova E.K. *Control sunthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations* // *Optimization. Methods and Software.* — 2001. - V. 14. - P. 267—310.
123. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under Lack of Information*. — Berlin etc: Birkhauser, 1995. - 322p.
124. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. *Input reconstructibility for linear dynamics*. — Ordinary differential equation (Working paper IIASA; WP-93-65). - Luxenburg, 1993. - 28c.
125. Kurzhanski A.B. *Identification: A Theory of Guaranteed Estimates* // *From Data to Model*. — Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.

126. Kurzhanski A.B. The principle of optimality in measurement feedback control for linear systems // *Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization* Eds. A.Rantzer and Ch.Byrnes. — Berlin: Springer, 2003. - P.193—202.
127. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // *Advances in Nonlinear Dynamics and Control. Ser. PSCT 17*. Boston: Birkhauser. - 1993. - P.122—188.
128. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. — Boston: Birkhauser, 1997. - 321p.
129. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Reachability analysis for uncertain systems - the ellipsoidal technique // *Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Ser. B.* — 2002. - V.9, №3. -P.347—367.
130. Martin Ph., Rouchon P. Feedback linearization and driftless systems. // *Math. Control Signal Syst.* - 1994. - № 7, c.235-254
131. Nikolskii M.S. Method of factorisation applicable to the solution of convolution equations. *Integral Transformation and Special Functions*, 1994, Vol.2, No. 1, pp.51—64.
132. Osipov Yu.S., Korotkii A.I. On dynamical restoration of parameters of elliptic systems // *Некорректно поставленные задачи в естественных науках*. - М., 1992. - С.108—117.
133. Subbotin A.I. *Generalized Characteristics of First-Order Partial Differential Equations*. — Rapp. Montreal Univ. Montreal, 1993. - №3, CRM-1848. - 43p.

134. Subbotin A.I. *Generalized Solution of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective.* — Boston: Birkhauser, 1995. 312p.

**к Приложениям 1-3**

135. Атанс М., Фалб П. *Оптимальное управление.* М.: Машиностроение, 1968. — 764с.
136. Сю Д., Мейер А. *Современная теория автоматического управления и ее применение.* М.: Машиностроение, 1972. — 544с.
137. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* — М.: Наука, 1961. — 391с.
138. Тарг С.М. *Краткий курс теоретической механики.* Физ. Мат. Лит 1963. 478 с.
139. Бухгольц Н.Н. *Основной курс теоретической механики. часть 2.* Наука. Физ.Мат.Лит. 1969. 332 с.
140. Корбин А.И., Мартыненко Ю.Г. *Неголономная динамика мобильных роботов и ее моделирование в реальном времени. Доклады научной школы - конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы" Москва, МГУ, 1998. с.107—123*
141. Буданов В.М., Девянин Е.А. *Особенности движения колесных роботов - неголономных механических систем. Доклады научной школы - конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы" Москва, МГУ, 1999. с.147—164*
142. Голован А.А., Гришин А.А., Жихарев С.Д., Ленский А.В. *Алгоритмы решения задачи навигации мобильных роботов. Доклады научной школы - конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы" Москва, МГУ, 1999. с.109—128*

143. Зенкевич С.Л., Назарова А.В., Лисицин Д.М. Моделирование движения робота по сложному маршруту. Материалы научной школы - конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы" Москва, МГУ, 2000. с.14—27
144. Мартыненко Ю.Г., Орлов И.В. Влияние переходных процессов в элетроприводе на устойчивость движения мобильного колесного робота. Материалы научной школы - конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы" Москва, МГУ, 2004. с.135—149
145. Павловский В.Е., Евгарфов В.В. Синтез  $D^2$  гладких траекторий для мобильного робота с дифференциальным приводом. Материалы научной школы - конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы" Москва, МГУ, 1999. с.150—158
146. Laumond J.P. (Ed.) *Robot Motion Planning and Control*. Springer-Verlag.1998 p.229
147. Hauser J., Sastry S., Meyer G. Nonlinear control design for slightly nonminimum phase systems: Application to V/STOL aircraft. *Automatica*, vol.28, pp.665—679, 1992.
148. Nijmeijer H., van der Schaft A.J. *Nonlinear Dynamic Control Systems*. N.Y.: Springer, 1990.—510 p.
149. Charlet B., Levine J., Marino R. On dynamic feedback linearization // *Systems and Control Letters*. 1989. V.13.- p.143—151.
150. Fliess M., Levine J., Martin Ph. Flatness and defect of nonlinear system: Introductory theory and examples // , *Int.J.Contr.* 1995. V. 61, № 6, p.1327—1361.
151. Fliess M., Levine J., Martin Ph. Sur les systemes non lineaires differentiellement plats // , *C.R. Acad.Sci. Paris. Serie I*. 1992. V. 315 p.619—624.

152. Fliess M., Levine J., Martin Ph. A Lie - Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // , IEEE Trans. Automat. Control.- 1999.- V. 44, № 5, p.922—937.
153. Четвериков В.Н. Высшие симметрии и инфинитезимальная форма бруновского систем с управлением. // Дифференциальные уравнения. - 2002. - Т.38, № 11, с.1525—1532
154. Четвериков В.Н. Плоскостность динамически лианеризуемых систем. // Дифференциальные уравнения. - 2004. - Т.40, № 12, с.1665—1674
155. Четвериков В.Н. Динамически лианеризуемые и плоские системы с управлением. // Дифференциальные уравнения. - 2006. - Т.42, № 8, с.1143—1149
156. Четвериков В.Н. Метод лианеризации для решения задач плоскости и поиска оператора совместности. // Дифференциальные уравнения. - 2006. - Т.42, № 10, с.1405-1415
157. Батенко А.П. Системы терминального управления. - М. Радио и связь. 1984. 159с.
158. Аллен Р. Математическая экономика. М. Иностранная литература. 1963
159. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М. Наука.1984. 293с.
160. Колемаев В.А. Математическая экономика. М. ЮНИТИ. 1998
161. Луссе А.В. Макроэкономика. Краткий курс. С-ПБ.: Питер, 1999
162. Макроэкономика / Под ред.И.П.Николаева. М. ЮНИТИ - ДАНА, 2000

163. Самуэльсон П.Э., Нордхауэ В.Д. Экономика. Вильямс. 2000
164. Накоряков В.Е., Гасенко В.Г. Математическая модель плановой макроэкономики. Экономика и математические методы. 2002, том 38, № 2, с. 118–124
165. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М. Айрис Пресс.2002. 576с.
166. Campbell E.M., Dickenson D.J., Slarter J.D. *Clinical Physiology. Chapter 12 in Energy Sources and Utilization*, 1963. Blackwell Scientific Publications: Oxford.
167. Дэвис М.Дж. Дифференциальная модель сахарного диабета. Математическое моделирование. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Мир. 1979. с.128-139
168. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Мир. 1986. 241с.

Учебное пособие

Лукьянова Лиля Николаевна

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ОТ СТОЛКНОВЕНИЯ  
ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Издательский отдел Факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01 г.

319992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус

Напечатали с готового оригинал-макета в издательстве 000 «МАКС Пресс» Лицензия ИД N00510 от 01.12.99г.

Подписано к печати 22.11.2009 г. Формат 60x90 1/16  
Усл.печ.л.9,5. Тираж 100 экз.

Заказ 883.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 627 к. Тел. 939-3890, 939-3891. Тел./факс 939-3891.