

6. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Примеры решения краевых задач принципа максимума. // Конференция "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках". Воронеж, 20-27 января 2000 г. Тезисы докладов. Воронеж. 2000. С. 7.
7. S. Avvakumov, Yu. Kiselev. Boundary value problem for ODE with applications to optimal control. // Report at the Conference SSI-2004. USA. Orlando. Florida. 5 p.
8. Аввакумов С.Н. Гладкая аппроксимация выпуклых компактов. // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. Екатеринбург. 1996. Т.4. С. 184-200.
9. Киселёв Ю.Н. Быстросходящиеся алгоритмы решения линейной задачи быстродействия. // Кибернетика. Киев. 1990, №12, С. 47-57, 62.
10. Черников С.Н. Линейные неравенства. М. Наука. 1968.
11. Bruce W. Char, Keith O. Geddes, Gaston H. Gonnet, Benton L. Leong, Michael B. Monagan, Stephen M. Watt. First Leaves: A Tutorial Introduction to MAPLE. Manual. Springer-Verlag, New York, 1992.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МОДЕЛИ MD1. БЕСКОНЕЧНЫЙ ГОРИЗОНТ. КОНЕЧНЫЙ ГОРИЗОНТ

С. Н. Аввакумов, Ю. Н. Киселёв, М. В. Орлов

Аннотация

В статье рассмотрены одномерные оптимизационные математические модели, представляющие интерес для приложений в области разработки открытых карьеров.

1. Бесконечный горизонт

Рассматривается задача оптимального управления на бесконечном горизонте

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x(0) = 0, & x(+\infty) = x_1 > 0; & 0 \leq t < +\infty; \\ J[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} \left[u + \frac{1}{u} - k \right] dt \mapsto \min_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (1)$$

Параметры

$$x_1 > 0, \nu > 0, k > 2,$$

считаются заданными. Управление u удовлетворяет геометрическому ограничению

$$u > 0.$$

Функционал $J[u]$ может быть записан в виде

$$J[u] = L[u] - \frac{k}{\nu}, \quad \text{где} \quad L[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} \left[u + \frac{1}{u} \right] dt. \quad (2)$$

Таким образом, задача управления (1) сводится к следующей задаче

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x(0) = 0, & x(+\infty) = x_1 > 0; & 0 \leq t < +\infty; \\ L[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} \left[u + \frac{1}{u} \right] dt \mapsto \min_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-08034-офи-п), программы поддержки ведущих научных школ (НШ.1846.2003.1), программы "Университеты России" (УР.03.02.522).

Параметр k в задачу (3) не входит.

Применение принципа максимума [1] позволяет представить экстремальное управление в форме

$$u(t, q) = \frac{1}{\sqrt{1 + qe^{\nu t}}}, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (4)$$

где положительный параметр q подлежит определению. Заметим, что $\psi(0) = -q$ есть неизвестное начальное значение сопряжённой переменной.

Замечание 1. Управление (4) при $q > 0$ обладает свойствами

$$u(0, q) = \frac{1}{\sqrt{1+q}} \in (0, 1), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, q) = 0.$$

При $q = 0$ имеем: $u(t, 0) = 1$, $x(t, 0) = t$. В случае $q \in (-1, 0)$ управление (4) определено лишь на конечном промежутке времени $[0, t_*(q))$, где $t_*(q) = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{-1}{q} \right) > 0$, причём

$$u(0, q) > 1, \quad \lim_{t \rightarrow t_*(q)-0} u(t, q) = +\infty.$$

Такой характер управления неприемлем с физической точки зрения в рамках данной модели, поэтому значения $q \in (-1, 0)$ исключаются из рассмотрения. Значения $q \leq -1$ не подлежат рассмотрению по понятным причинам. Характер зависимости экстремального управления от времени показан на рис. 1.

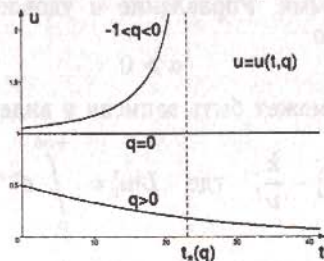


Рис. 1.

Задача Коши

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + qe^{\nu t}}}, \quad x|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

имеет решение

$$x(t, q) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + qe^{\nu s}}} ds.$$

Последний интеграл может быть выражен в элементарных функциях:

$$x(t, q) = \frac{2}{\nu} \ln \left[e^{\frac{\nu}{2} t} \frac{\sqrt{1+q} + 1}{\sqrt{1+qe^{\nu t}} + 1} \right], \quad 0 \leq t < +\infty. \quad (6)$$

Прямые вычисление позволяют установить предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, q) = \frac{2}{\nu} \ln \frac{\sqrt{1+q} + 1}{\sqrt{q}} \equiv \varphi(q). \quad (7)$$

Это означает, что при любом $q > 0$ решение (6) является ограниченным.

Уравнение

$$\varphi(q) = x_1 \quad (8)$$

однозначно разрешимо при любом $x_1 > 0$, и его корень допускает следующее выражение

$$q = q_* \equiv \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\nu x_1}{2} \right)} > 0. \quad (9)$$

Оптимальное значение L_{opt} функционала $L[u]$ выражается формулой

$$L_{\text{opt}} = G(q_*) = \frac{2}{\nu} \sqrt{1+q_*}, \quad (10)$$

где функция $G(q)$ имеет вид

$$G(q) = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} \left[\frac{1}{\sqrt{1+qe^{\nu t}}} + \sqrt{1+qe^{\nu t}} \right] dt = \frac{2}{\nu} \sqrt{1+q}. \quad (11)$$

На основании (9)–(11) оптимальное значение функционала принимает вид

$$L_{\text{opt}} = \frac{2}{\nu} \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\nu x_1}{2} \right)}} = \frac{2/\nu}{\operatorname{th} \left(\frac{\nu x_1}{2} \right)}. \quad (12)$$

На рис. 2 показан вид оптимальной траектории $x(t, q)$ при $q > 0$. На рис. 3 представлен график функции $\varphi(q)$; этот график иллюстрирует разрешимость уравнения (8) и показывает связь между x_1 и q_* .

Оптимальное значение J_{opt} исходного функционала J в силу (2) и (12) выражается формулой

$$J_{\text{opt}} = \frac{2}{\nu} \left[\frac{1}{\operatorname{th} \left(\frac{\nu x_1}{2} \right)} - \frac{k}{2} \right]. \quad (13)$$

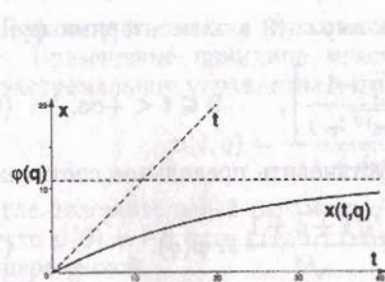


Рис. 2.

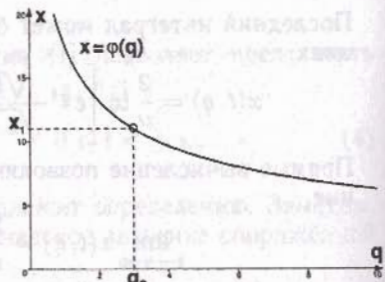


Рис. 3.

Очевидно, что

$$J_{\text{opt}} < 0 \iff k > \frac{2}{\text{th}(\frac{\nu}{2}x_1)} > 2.$$

В первоначальной модели

$$NVP_{\text{opt}} = \text{Const} \cdot [-J_{\text{opt}}], \quad \text{Const} > 0,$$

$$NVP_{\text{opt}} > 0 \iff k > \frac{2}{\text{th}(\frac{\nu}{2}x_1)}.$$

Проверка этого условия может быть выполнена по исходным данным модели.

Дополнительные соображения о задаче (3) содержатся в разделе 4.

2. Конечный горизонт

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу управления на конечном промежутке времени

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x(0) = 0, & x(T) = x_1 > 0; & 0 \leq t \leq T; \\ J[u] = \int_0^T e^{-\nu t} \left[u + \frac{1}{u} - k \right] dt \mapsto \min_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (14)$$

Параметры $x_1 > 0$, $\nu > 0$, $k > 2$ заданы; момент T окончания процесса управления — свободный параметр, подлежащий определению. Геометрическое ограничение на управление: $u > 0$.

Замечание 2. Если предположение $k > 2$ не выполняется, то функционал $J[u]$ всегда неотрицателен. С прикладной точки зрения интересен случай, когда оптимальное значение функционала $J_{\text{opt}} < 0$. Поэтому предположение $k > 2$ представляется естественным.

Решение задачи (14) может быть построено на основе принципа максимума в аналитической форме.

2.2. Решение задачи на основе принципа максимума Понтрягина.

Функция Гамильтона-Понтрягина:

$$K = -e^{-\nu t} \left[u + \frac{1}{u} - k \right] + \psi u. \quad (15)$$

Сопряжённое уравнение:

$$\dot{\psi} = -K'_x = 0 \implies \psi(t) = \text{const} \equiv -q, \quad q > 0. \quad (16)$$

Экстремальное управление:

$$u(t, q) = \operatorname{argmax}_{u > 0} K = \frac{1}{\sqrt{1 + qe^{\nu t}}}; \quad u(0, q) = \frac{1}{\sqrt{1 + q}} \in (0, 1). \quad (17)$$

Краевая задача принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + qe^{\nu t}}}, & x|_{t=0} = 0, & x|_{t=T} = x_1, \\ \dot{\psi} = 0, & \psi|_{t=0} = -q, & K|_{t=T} = 0, \\ 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (18)$$

Условие $K|_{t=T} = 0$ в подробной записи принимает вид

$$-e^{-\nu T} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + qe^{\nu T}}} + \sqrt{1 + qe^{\nu T}} - k \right) - q \frac{1}{\sqrt{1 + qe^{\nu T}}} = 0,$$

или, после очевидных преобразований,

$$m(T, q) \equiv 2\sqrt{1 + qe^{\nu T}} = k. \quad (19)$$

Решение $x(t, q)$ задачи Коши (5) уже найдено и имеет вид (6). Поэтому краевая задача (18) в силу (6) и (19) сводится к решению системы двух нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x(T, q) = x_1, \\ m(T, q) = k, \end{cases} \quad (20)$$

относительно двух неизвестных параметров T, q . Левые части системы (20) являются известными функциями, см. формулы (6) и (19). Система (20) решается при известных параметрах $x_1 > 0, k > 2$, стоящих в правой части её уравнений.

Таким образом, поиск оптимального решения задачи управления (14) сведён к системе двух уравнений (20). Можно показать, что система (20) при любых $x_1 > 0, k > 2$ имеет единственное решение

$$\begin{cases} q = q_{\text{opt}} \equiv \left(\frac{2A}{A^2 - 1} \right)^2, \\ T = T_{\text{opt}} \equiv \frac{2}{\nu} \ln \sqrt{\frac{k^2 - 4}{4q}}, \end{cases} \quad (21)$$

где известный параметр A определяется равенством

$$A = e^{\frac{\nu}{2}x_1} \sqrt{\frac{k+2}{k-2}} > 1.$$

Оптимальное значение функционала определяется равенством

$$J_{\text{opt}} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{(k^2 - 4) \operatorname{th} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right)}{k \operatorname{th} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) + 2} < 0. \quad (22)$$

Замечание 3. Интересно сравнить оптимальные значения функционала в задачах (1) и (14). Положим:

$$\Delta = \Delta(\nu, x_1, k) \equiv J_{\text{opt},(1)} - J_{\text{opt},(14)}.$$

На основании формул (13) и (22) имеем:

$$\Delta = \frac{2}{\nu} \left[\frac{1}{\operatorname{th} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right)} - \frac{k}{2} \right] + \frac{1}{\nu} \cdot \frac{(k^2 - 4) \operatorname{th} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right)}{k \operatorname{th} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) + 2}.$$

Простые преобразования позволяют получить для разности Δ следующее выражение

$$\begin{aligned} \Delta(\nu, x_1, k) &= \frac{4}{\nu} \cdot \frac{1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right)}{\operatorname{th} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) [k \operatorname{th} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) + 2]} = \\ &= \frac{4/\nu}{\operatorname{sh} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) [k \operatorname{sh} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) + 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right)]} > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Следовательно,

$$J_{\text{opt},(14)} < J_{\text{opt},(1)}, \quad (24)$$

то есть оптимальный результат по функционалу в задаче (14) лучше, чем в задаче (1). Отметим, что имеют место следующие предельные соотношения

$$\begin{cases} \Delta \rightarrow 0 & \text{при } x_1 \rightarrow \infty, \\ \Delta \rightarrow 0 & \text{при } k \rightarrow \infty, \\ \Delta \rightarrow +\infty & \text{при } \nu \rightarrow +0, \end{cases}$$

то есть при больших значениях параметров x_1 и k оптимальные значения функционала в задачах (14) и (1) мало отличаются между собой, а при стремлении параметра дисконтирования к нулю их разность Δ становится весьма значительной, см. рис. 9.

Вывод соотношений (21)–(23) приводится ниже в разделе 3.

2.3. Примеры расчётов.

Пример 1. Рассмотрим задачу (14) при исходных данных

$$\nu = 0.1; \quad x_1 = 10; \quad k = 3. \quad (25)$$

Формулы (21), (22) дают:

$$\begin{cases} q_{\text{opt},(14)} = 0.3429065698, \\ T_{\text{opt},(14)} = 12.93440811, \\ J_{\text{opt},(14)} = -6.823230860 < 0. \end{cases} \quad (26)$$

На рисунках 4, 5 показаны графики оптимального управления $u(t, q_{\text{opt},(14)})$ и оптимальной траектории $x(t, q_{\text{opt},(14)})$. Рис. 6 иллюстрирует решение системы уравнений (20). Систему (20) можно переписать в виде

$$\begin{cases} f_1(T, q) \equiv \frac{x(T, q)}{x_1} = 1, \\ f_2(T, q) \equiv \frac{m(T, q)}{k} = 1. \end{cases}$$

На рисунке 6 изображены графики двух нормированных функций $f_1(T, q_{\text{opt},(14)}), f_2(T, q_{\text{opt},(14)})$: в момент времени $T = T_{\text{opt},(14)}$ эти графики пересекаются в точке $(T_{\text{opt},(14)}, 1)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу (1) с бесконечным горизонтом при исходных данных (25) из примера 1. Формулы (9), (13) дают:

$$\begin{cases} q_{\text{opt},(1)} \equiv q_* = 3.682694377, \\ J_{\text{opt},(1)} = 13.27906828. \end{cases} \quad (27)$$

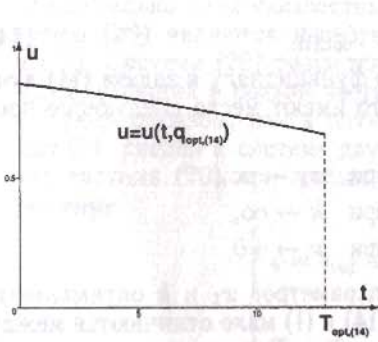


Рис. 4.

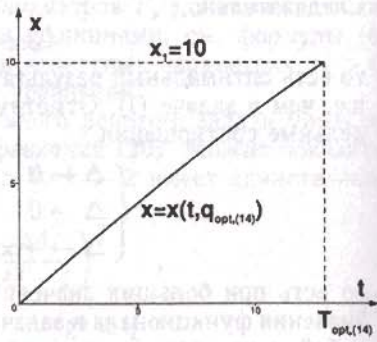


Рис. 5.

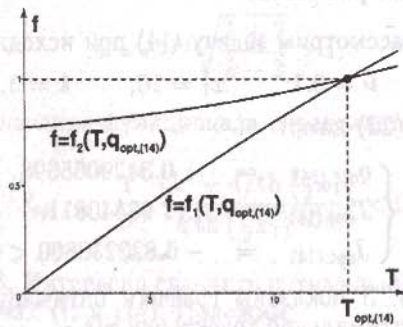


Рис. 6.

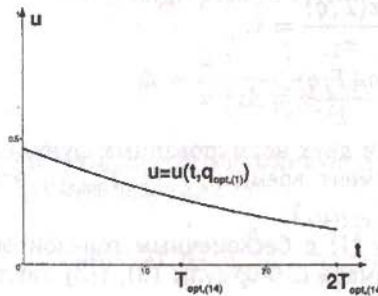


Рис. 7.

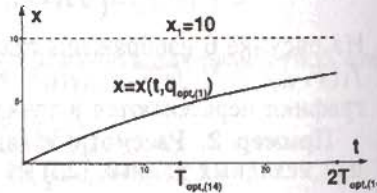


Рис. 8.

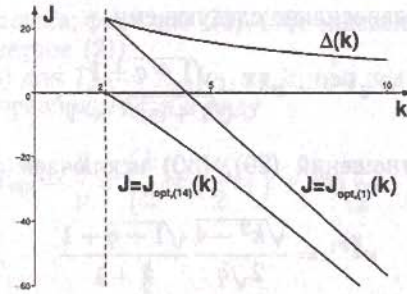


Рис. 9.

Для величины (23) при параметрах (25) имеем: $\Delta = 20.10229913$. На рис. 7, 8 приведены графики зависимости от времени оптимального управления и оптимальной траектории в задаче (1). На рис. 9 показан характер зависимости от параметра $k > 2$ оптимальных значений функционала $J_{opt,(1)}(k)$, $J_{opt,(14)}(k)$ и их разности $\Delta(k)$ при фиксированных значениях $\nu = 0.1$, $x_1 = 10$.

Пример 3. При $\nu = 0.1$; $x_1 = 10$; $k = 100$ имеем:

$$\begin{cases} q_{opt,(14)} = 3.382134988, \\ T_{opt,(14)} = 66.05138767, \\ J_{opt,(14)} = -958.1329016; \\ q_{opt,(1)} \equiv q_* = 3.682694377, \\ J_{opt,(1)} = -956.7209317; \end{cases}$$

$$\Delta = 1.411969046.$$

Относительная погрешность $\left| \frac{\Delta}{J_{opt}} \right| \approx 0.0015$ составляет десятые доли процента.

3. Явные выражения для оптимальных значений времени и функционала в задаче (14): вывод формул (21)-(23)

Система (20) в подробной записи имеет вид

$$\frac{2}{\nu} \cdot \ln \left[e^{\frac{\nu}{2}T} \frac{\sqrt{1+q} + 1}{\sqrt{1+qe^{\nu T}} + 1} \right] = x_1, \tag{28}$$

$$2\sqrt{1+qe^{\nu T}} = k. \tag{29}$$

Из уравнения (29) следует, что

$$e^{\frac{\nu}{2}T} = \frac{\sqrt{k^2 - 4}}{2\sqrt{q}}. \tag{30}$$

Уравнение (28) равносильно следующему

$$e^{\frac{\nu}{2}x_1} = e^{\frac{\nu}{2}T} \frac{\sqrt{1+q}+1}{\sqrt{1+qe^{\nu T}+1}}. \quad (31)$$

С помощью соотношений (29), (30) исключаем параметр T из уравнения (31):

$$e^{\frac{\nu}{2}x_1} = \frac{\sqrt{k^2-4} \sqrt{1+q}+1}{2\sqrt{q} \cdot \frac{k}{2}+1}.$$

Последнее уравнение можно записать в форме уравнения

$$A = \frac{\sqrt{1+q}+1}{\sqrt{q}} \quad (32)$$

с одним неизвестным q , где известная постоянная A определяется равенством

$$A = e^{\frac{\nu}{2}x_1} \sqrt{\frac{k+2}{k-2}} > 1. \quad (33)$$

Из (32) следует

$$A^2q = (\sqrt{1+q}+1)^2,$$

откуда, используя равенство

$$(\sqrt{1+q}+1)^2 = q+2(\sqrt{1+q}+1) = q+2A\sqrt{q},$$

приходим к уравнению

$$(A^2-1)q = 2A\sqrt{q},$$

из которого находим

$$\sqrt{q} = \frac{2A}{A^2-1}, \quad (34)$$

и, наконец,

$$q = \left(\frac{2A}{A^2-1} \right)^2. \quad (35)$$

Из (29) получаем

$$T = \frac{2}{\nu} \ln \sqrt{\frac{k^2-4}{4q}}. \quad (36)$$

Система (20) решена; формулы (35), (36) определяют оптимальные значения параметров (21).

Формула (36) для $T_{\text{opt}} = T_{\text{opt}}(\nu, x_1, k)$ при подстановке выражений (34), (33) преобразуются к виду

$$T_{\text{opt}} = \frac{2}{\nu} \ln \left[\frac{k}{2} \operatorname{sh} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) \right]. \quad (37)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{\nu} \ln \frac{\sqrt{k^2-4}}{2\sqrt{q}} = \frac{2}{\nu} \ln \left[\frac{\sqrt{k^2-4}}{2} \cdot \frac{A^2-1}{2A} \right] = \\ &= \frac{2}{\nu} \ln \left[\frac{\sqrt{k^2-4}}{4} \cdot \left(A - \frac{1}{A} \right) \right] = \frac{2}{\nu} \ln \left[\frac{k}{2} \operatorname{sh} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Полученная формула (37) даёт явную зависимость оптимального времени T_{opt} от исходных данных задачи — параметров ν , x_1 , k . В частности, при $k=2$ получаем

$$T_{\text{opt}}|_{k=2} = \frac{2}{\nu} \ln \left[e^{\frac{\nu}{2}x_1} \right] = x_1.$$

Так как время (37) является монотонно возрастающей функцией параметра k , то имеет место оценка снизу

$$T_{\text{opt}}(\nu, x_1, k) > x_1 \quad \forall \nu > 0, x_1 > 0, k > 2.$$

Получим оценку сверху для T_{opt} . Исходя из (37), имеем:

$$\begin{aligned} T_{\text{opt}} &= \frac{2}{\nu} \ln \left[\frac{k-2}{2} \operatorname{sh} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right) + e^{\frac{\nu}{2}x_1} \right] = \\ &= \frac{2}{\nu} \ln \left[e^{\frac{\nu}{2}x_1} \left(1 + \frac{k-2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\nu}{2} x_1 \right)}{e^{\frac{\nu}{2}x_1}} \right) \right] = \\ &= x_1 + \frac{2}{\nu} \ln \left[1 + \frac{k-2}{4} (1 - e^{-\nu x_1}) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T_{\text{opt}}(\nu, x_1, k) < x_1 + \frac{2}{\nu} \ln \frac{k+2}{4} \quad \forall \nu > 0, x_1 > 0, k > 2.$$

Остановимся теперь на выводе формулы (23) для Δ . Имеем, полагая $\frac{\nu}{2}x_1 = a$:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{2}{\nu} \left[\frac{1}{\operatorname{th} a} - \frac{k}{2} \right] + \frac{2}{\nu} \cdot \frac{(k^2 - 4) \operatorname{th} a}{2[k \operatorname{th} a + 2]} = \\ &= \frac{2}{\nu} \left[\frac{1}{\operatorname{th} a} - \frac{k}{2} + \frac{(k^2 - 4) \operatorname{th} a}{2[k \operatorname{th} a + 2]} \right] = \\ &= \frac{2}{\nu} \cdot \frac{2[k \operatorname{th} a + 2] - k \operatorname{th} a [k \operatorname{th} a + 2] + (k^2 - 4) \operatorname{th}^2 a}{2 \operatorname{th} a [k \operatorname{th} a + 2]} = \\ &= \frac{4}{\nu} \cdot \frac{1 - \operatorname{th}^2 a}{\operatorname{th} a [k \operatorname{th} a + 2]}.\end{aligned}$$

Первое выражение (23) для Δ получено. Из него в силу соотношения

$$\frac{1 - \operatorname{th}^2 a}{\operatorname{th} a} = \frac{1}{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a}$$

вытекает второе выражение (23) для Δ .

В заключение приводится обоснование формулы (22) для оптимального значения функционала в задаче (14). Положим

$$W(q, T) = \int_0^T e^{-\nu t} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + qe^{\nu t}}} + \sqrt{1 + qe^{\nu t}} - k \right) dt. \quad (38)$$

Тогда

$$J_{\text{opt}} = W(q_{\text{opt}}, T_{\text{opt}}) \equiv W_{\text{opt}}. \quad (39)$$

Функция $W(q, T)$ является суммой двух слагаемых

$$W_1(q, T) = \int_0^T e^{-\nu t} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + qe^{\nu t}}} + \sqrt{1 + qe^{\nu t}} \right) dt, \quad (40)$$

$$W_2(q, T) = \int_0^T e^{-\nu t} \cdot (-k) dt = -\frac{k}{\nu} (1 - e^{-\nu T}). \quad (41)$$

Введением новой переменной интегрирования

$$w = \sqrt{1 + qe^{\nu t}}, \quad e^{-\nu t} = \frac{q}{w^2 - 1}, \quad dt = \frac{2}{\nu} \cdot \frac{w dw}{w^2 - 1}$$

интеграл $W_1(q, T)$ преобразуется к виду

$$W_1(q, T) = \frac{2q}{\nu} \int_{\sqrt{1+q}}^{\sqrt{1+qe^{\nu T}}} \frac{w^2 + 1}{(w^2 - 1)^2} dw, \quad (42)$$

где интегрант может быть записан в форме

$$\frac{w^2 + 1}{(w^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{(w - 1)^2} + \frac{1}{(w + 1)^2} \right),$$

откуда следует, что

$$\int \frac{w^2 + 1}{(w^2 - 1)^2} dw = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{w - 1} + \frac{1}{w + 1} \right) + C = -\frac{w}{w^2 - 1} + C. \quad (43)$$

Из (42), (43) следует, что

$$\begin{aligned}W_1(q, T) &= \frac{2q}{\nu} \cdot \frac{w}{w^2 - 1} \Big|_{w=\sqrt{1+q}}^{w=\sqrt{1+qe^{\nu T}}} = \frac{2q}{\nu} \left[\frac{\sqrt{1+q}}{q} - \frac{\sqrt{1+qe^{\nu T}}}{qe^{\nu T}} \right] = \\ &= \frac{2}{\nu} \left[\sqrt{1+q} - e^{-\nu T} \sqrt{1+qe^{\nu T}} \right].\end{aligned} \quad (44)$$

Перепишем формулу (41) в виде

$$W_2(q, T) = \frac{2}{\nu} \left[-\frac{k}{2} + e^{-\nu T} \frac{k}{2} \right]. \quad (45)$$

Тогда в силу (38), (44), (45), получаем

$$W(q, T) = \frac{2}{\nu} \left[\left(\sqrt{1+q} - \frac{k}{2} \right) + e^{-\nu T} \left(\frac{k}{2} - \sqrt{1+qe^{\nu T}} \right) \right]. \quad (46)$$

Для оптимальных значений (21) параметров q, T имеем

$$\frac{k}{2} - \sqrt{1 + q_{\text{opt}} e^{\nu T_{\text{opt}}}} = 0,$$

и из (45), (39) находим

$$W_{\text{opt}} = \frac{2}{\nu} \left[\sqrt{1 + q_{\text{opt}}} - \frac{k}{2} \right]. \quad (47)$$

Далее, используя (21), (33), имеем:

$$\sqrt{1 + q_{\text{opt}}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2A}{A^2 - 1}\right)^2} = \frac{A^2 + 1}{A^2 - 1} = \frac{k + 2 \operatorname{th} a}{k \operatorname{th} a + 2}, \quad a \equiv \frac{\nu}{2} x_1. \quad (48)$$

Подстановка (48) в (47) даёт:

$$\begin{aligned} W_{\text{opt}} &= \frac{2}{\nu} \left[\frac{k + 2 \operatorname{th} a}{k \operatorname{th} a + 2} - \frac{k}{2} \right] = \\ &= \frac{2}{\nu} \cdot \frac{2[k + 2 \operatorname{th} a] - k[k \operatorname{th} a + 2]}{2[k \operatorname{th} a + 2]} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{(k^2 - 4) \operatorname{th} a}{k \operatorname{th} a + 2}. \quad (49) \end{aligned}$$

Формула (22) для оптимального значения J_{opt} функционала в задаче (14) обоснована, см. (39), (49).

4. Дополнительные соображения о задаче (3)

4.1. Обоснование оптимальности экстремального решения задачи (3), построенного в разделе 1. В разделе 1 построено следующее экстремальное решение задачи управления (3):

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t, q_*), \quad u(t) = u(t, q_*), \quad \psi(t) \equiv -q_*, \quad 0 \leq t < +\infty; \\ x(0) &= 0, \quad x(+\infty) = x_1 > 0. \quad (50) \end{aligned}$$

Его оптимальность можно обосновать, привлекая схему, описанную в [3] и модифицированную применительно к рассматриваемой задаче (3). Рассмотрим любой допустимый процесс

$$\hat{x}(t), \hat{u}(t), \quad 0 \leq t < +\infty; \quad \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{x}(+\infty) = x_1 > 0, \quad (51)$$

и докажем, что приращение функционала имеет нужный знак:

$$\Delta L \equiv L[\hat{u}] - L[u] \geq 0.$$

Следует подчеркнуть, что процесс (51) определён на *всём* промежутке времени $[0, +\infty)$.

Запишем функцию Гамильтона-Понтрягина для задачи (3)

$$K(t, x, \psi, u) = -f^0(t, u) + \psi u, \quad \text{где} \quad f^0(t, u) = e^{-\nu t} \left[u + \frac{1}{u} \right].$$

Функция K фактически от x не зависит. Для процессов (50) и (51) можно записать соотношения

$$\begin{aligned} K(t, x(t), \psi(t), u(t)) + f^0(t, u(t)) &= \psi(t)u(t), \\ K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) + f^0(t, \hat{u}(t)) &= \psi(t)\hat{u}(t), \quad (52) \end{aligned}$$

где $\psi(t) = -q_* < 0$ — экстремальная сопряжённая переменная для процесса (50). Далее запишем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(t)[\hat{x}(t) - x(t)] \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \\ &= \int_0^{+\infty} \psi(t) \frac{d}{dt} [\hat{x}(t) - x(t)] dt = \int_0^{+\infty} \psi(t) [\hat{u}(t) - u(t)] dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \{ K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) + f^0(t, \hat{u}(t)) - \\ &\quad - K(t, x(t), \psi(t), u(t)) - f^0(t, u(t)) \} dt = \\ &= \Delta L + \int_0^{+\infty} \{ K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - K(t, x(t), \psi(t), u(t)) \} dt \leq \\ &\leq \Delta L + 0 = \Delta L, \end{aligned}$$

где интегрант в последнем интеграле неположителен, так как

$$\begin{aligned} K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - K(t, x(t), \psi(t), u(t)) &= \\ = K(t, x(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - \max_{v>0} K(t, x(t), \psi(t), v) &\leq 0. \end{aligned}$$

Обращая внимание на крайние члены записанной цепочки, приходим к требуемому неравенству $\Delta L \geq 0$, которое доказывает оптимальность экстремального процесса (50) в задаче управления (3).

Замечание 4. Задачи управления (3), (14) можно рассматривать как задачи вариационного исчисления с интегрантом $f^0(t, \dot{x})$, независимым явно от x , допускающие известный первый интеграл и удовлетворяющие усиленному условию Лежандра

$$f_{\dot{x}\dot{x}}^0 = \frac{2e^{-\nu t}}{\dot{x}^3} > 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} > 0.$$

При анализе этих задач мы, пользуясь техникой принципа максимума, находим постоянные интегрирования и проводим обоснование оптимальности экстремального решения. Такой подход целесообразен, так как в его рамках аналогичным образом можно

учитывать геометрические ограничения на управление. Для численного решения задачи (14) с двусторонними геометрическими ограничениями на управление можно воспользоваться подходами к численному решению краевых задач принципа максимума, изложенными в [3] (текст этого доклада доступен на сайте кафедры оптимального управления факультета ВМиК МГУ).

4.2. Исследование специального класса допустимых процессов и сравнение его с оптимальным процессом (50) задачи (3). В построенном оптимальном процессе параметр $q_{opt} = q_* \equiv \frac{1}{\text{sh}^2(a)} > 0$, $a \equiv \frac{\nu}{2} x_1 > 0$, и оптимальное управление является убывающей функцией времени. При выборе параметра $q = -\psi(0) \in (-1, 0)$ экстремальное управление $u(t, q)$ является возрастающей функцией времени, уходящей в $+\infty$ в конечный момент времени, определяемый параметром q , см. рис. 1. Ниже рассматривается семейство управлений и соответствующих траекторий, склеенных из двух кусков: на начальном участке времени конечной длины берётся возрастающее экстремальное управление, уходящее в бесконечность и отвечающее некоторому $q_- \in (-1, 0)$, а на заключительном бесконечном промежутке времени используется стремящееся к нулю экстремальное управление, отвечающее некоторому положительному параметру q_+ . При определённом соотношении между параметрами q_- , q_+ соответствующая траектория удовлетворяет краевым условиям $x(0) = 0$, $x(+\infty) = x_1$. Для этого семейства процессов находится значение функционала $L \equiv \Phi(a, b)$ и производится сравнение с известным оптимальным значением $L_{opt}(a) = \frac{2}{\nu} \sqrt{1 + q_{opt}} = \frac{2}{\nu} \frac{1}{\text{th}(a)}$. Обратимся к выполнению этого плана.

Рассматриваемый процесс зависит от двух положительных параметров b и c таких, что $q_- = -\text{th}^2(b) \in (-1, 0)$ и $q_+ = \frac{1}{\text{sh}^2(c)}$. Далее между этими параметрами будет указана определённая связь

$$c = c(a, b) \equiv \ln \left[e^a \frac{\text{sh}(b)}{1 + \text{ch}(b)} \right] > 0 \quad \text{при} \quad b > b_*(a) \equiv \ln \frac{1}{\text{th}(\frac{a}{2})},$$

$$c'_b(a, b) > 0, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} c(a, b) = a, \quad (53)$$

обеспечивающая выполнение краевых условий для траектории. Рассмотрим две функции

$$u_I(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2(b)e^{\nu t}}}, \quad 0 \leq t < t_*(b) \equiv \frac{2}{\nu} \ln \frac{1}{\text{th}(b)},$$

$$u_{II}(t) > 1, \quad \dot{u}_I(t) > 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_*(b)-0} u_I(t) = +\infty,$$

$$u_{II}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e^{\nu(t-t_*(b))}}{\text{sh}^2(c)}}}, \quad t_*(b) \leq t < +\infty,$$

$$u_{II}(t_*(b)) \in (0, 1), \quad \dot{u}_{II}(t) < 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u_{II}(t) = 0.$$

Привлекая эти функции, введём в рассмотрение следующее допустимое управление

$$u(t) = \begin{cases} u_I(t), & t \in [0, t_*(b)), \\ u_{II}(t), & t \in [t_*(b), +\infty); \end{cases}$$

этому управлению при начальном условии $x(0) = 0$ отвечает траектория

$$x(t) = \int_0^t u(s) ds = \begin{cases} x_I(t), & t \in [0, t_*(b)), \\ x_{II}(t), & t \in [t_*(b), +\infty), \end{cases}$$

где

$$x_I(t) = \frac{2}{\nu} \ln \left[e^{\frac{\nu}{2}t} \frac{\sqrt{1 - \text{th}^2(b) + 1}}{\sqrt{1 - \text{th}^2(b)e^{\nu t} + 1}} \right],$$

$$\lim_{t \rightarrow t_*(b)-0} x_I(t) = x_*(b) \equiv \frac{2}{\nu} \ln \left[\frac{1 + \text{ch}(b)}{\text{sh}(b)} \right] \in (0, +\infty),$$

$$x_{II}(t) = x_*(b) + \frac{2}{\nu} \ln \left[e^{\frac{\nu}{2}(t-t_*(b))} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\text{sh}^2(c)} + 1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\text{sh}^2(c)} e^{\nu(t-t_*(b))} + 1}} \right],$$

$$x_{II}(t_*(b)) = x_*(b),$$

$$x_{**}(b, c) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} x_{II}(t) = x_*(b) + \frac{2}{\nu} \ln \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\text{sh}^2(c)} + 1}}{\sqrt{\frac{1}{\text{sh}^2(c)}}} \right] =$$

$$= x_*(b) + \frac{2}{\nu} \ln e^c = x_*(b) + \frac{2}{\nu} c,$$

ясно, что

$$x_{**}(b, c) = \frac{2}{\nu} \ln \left[e^c \frac{1 + \text{ch}(b)}{\text{sh}(b)} \right].$$

Из условия $x_{**}(b, c) = x_1$ вытекает указанная выше зависимость (53) между параметрами c , b и a , причём далее будем считать, что параметр b подчинён неравенству $b > b_*(a) \equiv \ln \frac{1}{\text{th}(\frac{a}{2})}$, а параметр $c = c(a, b) > 0$. Для построенного процесса можно найти значение функционала $L \equiv \Phi(a, b)$, зависящее от параметров a и b . Имеем:

$$\Phi(a, b) = \Phi_1(b) + \Phi_2(a, b),$$

где

$$\Phi_1(b) = \int_0^{t_*(b)} f^0(t, u_I(t)) dt, \quad \Phi_2(a, b) = \int_{t_*(b)}^{+\infty} f^0(t, u_{II}(t)) dt.$$

Вычисление двух последних функций даёт:

$$\begin{aligned} \Phi_1(b) &= \int_0^{t_*(b)} e^{-\nu t} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2(b)e^{\nu t}}} + \sqrt{1 - \text{th}^2(b)e^{\nu t}} \right] dt = \\ &= \frac{2}{\nu} \sqrt{1 - \text{th}^2(b)} = \frac{2}{\nu} \frac{1}{\text{ch}(b)}, \\ \Phi_2(a, b) &= \int_{t_*(b)}^{+\infty} e^{-\nu t} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e^{\nu(t-t_*(b))}}{\text{sh}^2(c)}}} + \sqrt{1 + \frac{e^{\nu(t-t_*(b))}}{\text{sh}^2(c)}} \right] dt = \\ &= e^{-\nu t_*(b)} \int_0^{+\infty} e^{-\nu s} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e^{\nu s}}{\text{sh}^2(c)}}} + \sqrt{1 + \frac{e^{\nu s}}{\text{sh}^2(c)}} \right] dt = \\ &= \text{th}^2(b) \frac{2}{\nu} \sqrt{1 + \frac{1}{\text{sh}^2(c)}} = \frac{2 \text{th}^2(b)}{\nu \text{th}(c)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующую формулу для значения функционала на рассматриваемом семействе:

$$\Phi(a, b) = \frac{2}{\nu} \left[\frac{1}{\text{ch}(b)} + \frac{\text{th}^2(b)}{\text{th}(c(a, b))} \right],$$

причём

$$\lim_{b \rightarrow b_*(a)+0} \Phi(a, b) = +\infty, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \Phi(a, b) = \frac{2}{\nu} \cdot \frac{1}{\text{th}(a)} \equiv L_{\text{opt}}(a),$$

$$\Phi(a, b) > L_{\text{opt}}(a) \quad \text{при } b > b_*(a), \quad (54)$$

что согласуется с **оптимальностью** процесса (50). На рис. 10 показан характер зависимости функции $\Phi(a, b)$ от аргумента $b \in (b_*(a), +\infty)$. Утверждение (54) допускает формальное доказательство: в силу неравенства $1/\text{th}(c) > 1/\text{th}(b)$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} [\Phi(a, b) - L_{\text{opt}}] &= \frac{1}{\text{ch}(b)} + \frac{\text{th}^2(b)}{\text{th}(c)} - \frac{1}{\text{th}(a)} > \frac{1}{\text{ch}(b)} - \frac{1 - \text{th}^2(b)}{\text{th}(a)} = \\ &= \frac{\text{ch}(b)\text{th}(a) - 1}{\text{ch}^2(b)\text{th}(a)} > 0, \end{aligned}$$

так как

$$\text{ch}(b)\text{th}(a) - 1 > 0.$$

Последнее неравенство верно при $b > b_*(a) \equiv \ln \frac{1}{\text{th}(\frac{a}{2})}$ в силу соотношений

$$\begin{aligned} \text{ch}(b) > \text{ch}(b_*(a)) &= \frac{e^{b_*(a)} + e^{-b_*(a)}}{2} = \\ &= \frac{\text{ch}^2(\frac{a}{2}) + \text{sh}^2(\frac{a}{2})}{2 \text{sh}(\frac{a}{2}) \text{ch}(\frac{a}{2})} = \frac{\text{ch}(a)}{\text{sh}(a)} = \frac{1}{\text{th}(a)}. \end{aligned}$$

На рис. 11, 12 представлены графики управления и траектории рассматриваемого семейства допустимых процессов при $a = 0.5$, $\nu = 0.1$, $x_1 = 10$, $b = 1.7$. Проведенные рассуждения показывают, что включение в процесс начального этапа с неограниченным экстремальным управлением приводит лишь к увеличению функционала. При больших значениях параметра b вклад в функционал начального участка процесса убывает вместе с его длительностью, а предельным процессом служит **оптимальный** процесс (50).

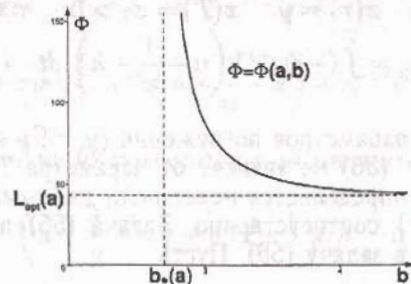


Рис. 10.

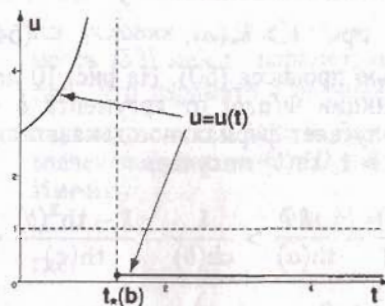


Рис. 11.

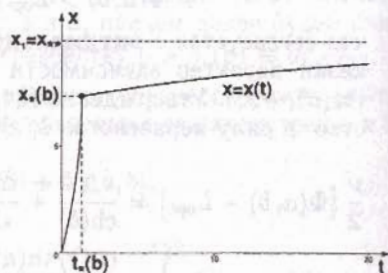


Рис. 12.

5. Дополнительные соображения о задаче (14): решение методом динамического программирования, оптимальность экстремального решения, построенного в разделах 2, 3; оптимальное управление в форме обратной связи (синтез)

5.1. Решение задачи (14) методом динамического программирования. Опишем применение метода динамического программирования к задаче (14). Для удобства переформулируем задачу (14) как задачу максимизации:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x(0) = 0, & x(T) = x_1 > 0; & 0 \leq t \leq T; \\ I[u] = -J[u] \equiv \int_0^T (-1)e^{-\nu t} \left[u + \frac{1}{u} - k \right] dt \mapsto \max_{u(\cdot)}; & (55) \\ u > 0; & k > 2. \end{cases}$$

Выполним погружение задачи (55) в семейство аналогичных задач

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x(\tau) = y, & x(T) = x_1 > 0; & \tau \leq t \leq T; \\ I_{(y,\tau)}[u] = \int_{\tau}^T (-1)e^{-\nu t} \left(u + \frac{1}{u} - k \right) dt \mapsto \max_{u(\cdot)}, & (56) \end{cases}$$

зависящих от параметров погружения (y, τ) , $y \in [0, x_1]$, $\tau \in [0, T]$. Задачи (55) и (56) не зависят от параметра $T > 0$, который не фиксирован и определяется исходными данными задачи $\{\nu, x_1, k\}$ и $\{y, \tau\}$ соответственно. Задача (56) при $y = 0$, $\tau = 0$ превращается в задачу (55). Пусть

$$V(y, \tau) = \max_{u(\cdot)} I_{(y,\tau)} \quad (57)$$

- максимальное значение функционала в задаче управления (56)
 - функция Беллмана.
- Нетрудно установить, что

$$V(y, \tau) = e^{-\nu\tau} V(y, 0) \equiv e^{-\nu\tau} v(y).$$

В дальнейшем аргументы функции Беллмана (при замене $y \rightarrow x$, $\tau \rightarrow t$) будем обозначать через x, t , а функцию Беллмана будем обозначать $V(x, t)$. При $x = x_1$ естественно считать, что $V = 0$, то есть $v(x_1) = 0$.

Функция Беллмана $V(x, t)$ является решением дифференциального уравнения Беллмана

$$V_t'(x, t) + \max_{u>0} \left\{ -e^{-\nu t} \left(u + \frac{1}{u} - k \right) + V_x'(x, t)u \right\} = 0, \quad 0 < x < x_1, \quad (58)$$

при граничном условии

$$V(x, t)|_{x=x_1} = 0. \quad (59)$$

Ищем решение уравнения (58) в виде

$$V(x, t) = e^{-\nu t} v(x), \quad (60)$$

где функция $v(x)$ удовлетворяет условию

$$v(x_1) = 0. \quad (61)$$

Подстановка в уравнение (58) производных

$$V_t'(x, t) = -\nu e^{-\nu t} v(x), \quad V_x'(x, t) = e^{-\nu t} v'(x)$$

функции (60) даёт:

$$-\nu e^{-\nu t} v(x) + \max_{u>0} \left\{ -e^{-\nu t} \left(u + \frac{1}{u} - k \right) + e^{-\nu t} v'(x)u \right\} = 0,$$

или, после умножения на положительный множитель $e^{\nu t}$,

$$\nu v(x) = \max_{u>0} \left\{ - \left(u + \frac{1}{u} - k \right) + v'(x)u \right\} \neq \emptyset, \quad 0 < x < x_1. \quad (62) \quad \checkmark$$

Последнее уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно неизвестной функции

$v(x)$, неразрешённым относительно производной и содержащим операцию взятия максимума. Максимум в правой части уравнения (62) может быть вычислен.

Действительно, полагая $h \equiv -\left(u + \frac{1}{u} - k\right) + v'(x)u$, имеем:

$$\{h\}'_u = -1 + \frac{1}{u^2} + v'(x), \quad (63)$$

$$\{h\}''_{uu} = -\frac{2}{u^3} < 0 \quad \text{при } u > 0. \quad (64)$$

Из уравнения $\{h\}'_u = 0$ находим максимизатор

$$u = u_*(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v'(x)}} = \operatorname{argmax}_{u>0} \{h\}. \quad (65)$$

Здесь мы исходим из гипотезы о том, что выполняется неравенство $1 - v'(x) > 0$. В дальнейшем, после построения функции $v(x)$, убеждаемся в справедливости этой гипотезы. С учётом вида (65) максимизатора можно вычислить максимум в правой части уравнения (62), после чего уравнение (62) принимает вид

$$\nu v(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - v'(x)}} - \sqrt{1 - v'(x)} + k + \frac{v'(x)}{\sqrt{1 - v'(x)}},$$

или, после очевидных упрощений,

$$\begin{aligned} \nu v(x) &= k - 2\sqrt{1 - v'(x)}, \\ \sqrt{1 - v'(x)} &= \frac{k - \nu v(x)}{2}. \end{aligned} \quad (66)$$

Разрешая уравнение (66) относительно производной $v'(x)$, получаем

$$v'(x) = 1 - \left(\frac{k - \nu v(x)}{2}\right)^2. \quad (67)$$

Уравнение (67) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно неизвестной функции $v(x)$. Уравнение (67) является дифференциальным уравнением Риккати с постоянными коэффициентами. Его решение ищется при начальном условии (61). Введём новую неизвестную функцию

$$w(x) = \frac{k - \nu v(x)}{2}, \quad (68)$$

которая удовлетворяет начальному условию

$$w(x_1) = \frac{k}{2}. \quad (69)$$

После замены переменной (68) уравнение (67) принимает вид

$$-\frac{2}{\nu} w'(x) = 1 - w^2(x),$$

или

$$w'(x) = \frac{\nu}{2} [w^2(x) - 1]. \quad (70)$$

Разделение переменных в последнем уравнении позволяет записать

$$\frac{dw}{w^2 - 1} = \frac{\nu}{2} dx,$$

откуда интегрированием получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{w(x) - 1}{w(x) + 1} \right| &= \frac{\nu}{2} (x - x_1) + \frac{1}{2} \ln |C|, \\ \frac{w(x) - 1}{w(x) + 1} &= C e^{-2\alpha(x)}, \end{aligned} \quad (71)$$

где C — постоянная интегрирования, а

$$\alpha(x) \equiv \frac{\nu}{2} (x_1 - x) \quad (72)$$

— линейная функция аргумента x . Полагая в (71) $x = x_1$ и учитывая условия (69) и (72), определяем постоянную интегрирования C :

$$C = \frac{k - 2}{k + 2}. \quad (73)$$

Из (71) находим

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1 + C e^{-2\alpha(x)}}{1 - C e^{-2\alpha(x)}} = \frac{e^{\alpha(x)}(k + 2) + e^{-\alpha(x)}(k - 2)}{e^{\alpha(x)}(k + 2) - e^{-\alpha(x)}(k - 2)} = \\ &= \frac{k \operatorname{ch} \alpha(x) + 2 \operatorname{sh} \alpha(x)}{k \operatorname{sh} \alpha(x) + 2 \operatorname{ch} \alpha(x)} = \frac{k + 2 \operatorname{th} \alpha(x)}{k \operatorname{th} \alpha(x) + 2}. \end{aligned} \quad (74)$$

Решение $w(x)$ задачи Коши (70), (69) получено. Из (68) находим функцию $v(x)$ — решение задачи Коши (67), (61):

$$v(x) = \frac{k - 2w(x)}{\nu} = \frac{2}{\nu} \left[\frac{k}{2} - w(x) \right] = \frac{2}{\nu} \left[\frac{k}{2} - \frac{k + 2 \operatorname{th} \alpha(x)}{k \operatorname{th} \alpha(x) + 2} \right] = \frac{2}{\nu} \frac{k[k \operatorname{th} \alpha(x) + 2] - 2[k + 2 \operatorname{th} \alpha(x)]}{2[k \operatorname{th} \alpha(x) + 2]} = \frac{1}{\nu} \frac{(k^2 - 4) \operatorname{th} \alpha(x)}{k \operatorname{th} \alpha(x) + 2}. \quad (75)$$

Итак, построено гладкое решение

$$V(x, t) = e^{-\nu t} v(x) \quad (76)$$

дифференциального уравнения Беллмана (58) при граничном условии (59), где функция $v(x)$ определяется равенством (75), в котором функция $\alpha(x)$ определяется равенством (71). На основании (76) получаем оптимальное значение I_{opt} функционала в задаче (56):

$$I_{\text{opt}} = V(x, t)|_{x=0, t=0} = v(0) \equiv \frac{1}{\nu} \frac{(k^2 - 4) \operatorname{th} a}{k \operatorname{th} a + 2}, \quad (77)$$

где, напомним, $a = \alpha(0) = \frac{\nu}{2} x_1 > 0$.

Сравнение формулы (77) для оптимального значения I_{opt} в задаче (56) и формулы (22) для J_{opt} в задаче (14) показывает, что $J_{\text{opt}} = -I_{\text{opt}}$. Это позволяет утверждать, что экстремальное решение задачи (14), описанное в разделах 2 и 3, является оптимальным, так как решения, получаемые средствами динамического программирования являются оптимальными. Формула (65) для максимизатора u_* определяет оптимальное управление задачи (55) в форме синтеза (обратная связь),

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - v'(x)}}. \quad (78)$$

Подстановка синтезирующей функции (78) в уравнение движения задачи (1) приводит к замкнутому уравнению

$$\dot{x} = u(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v'(x)}}, \quad (79)$$

которое при начальном условии $x|_{t=0} = 0$ определяет оптимальную траекторию $x(t)$, то есть $x(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - v'(x)}}, \quad x|_{t=0} = 0. \quad (80)$$

Задача Коши (80) определяет оптимальную траекторию $x(t)$ задачи управления (55), причём выполняется второе краевое условие:

$$x(t)|_{t=T_{\text{opt}}(x_1)} = x_1.$$

Таким образом, доказана

Теорема. Уравнение Беллмана (58) при граничном условии (59) имеет гладкое решение $V(x, t)$, определяемое формулой (76), где функция $v(x)$, зависящая только от фазовой переменной x , определяется формулой (75), в которой линейная функция $\alpha(x)$ имеет вид (72). Функция $v(x)$ обладает свойствами:

$$v(0) = \frac{1}{\nu} \frac{(k^2 - 4) \operatorname{th} a}{k \operatorname{th} a + 2} > 0, \quad a \equiv \alpha(0) = \frac{\nu}{2} x_1 > 0,$$

$$v(x_1) = 0,$$

$$v(x) > 0 \quad \text{при } x \in [0, x_1],$$

$$v'(x) < 0 \quad \text{при } x \in [0, x_1].$$

В задаче управления (55) оптимальный синтез (обратная связь) определяется формулой (78). Замкнутое уравнение имеет вид (80); оптимальная траектория $x(t)$ определяется задачей Коши (80) и в момент времени $t = T_{\text{opt}}$, см. вторую из формул (21), удовлетворяет условию

$$x(t)|_{t=T_{\text{opt}}} = x_1.$$

Оптимальное значение I_{opt} функционала $I[u]$ в задаче (55) определяется формулой (77). Оптимальное значение J_{opt} функционала $J[u]$ в задаче (14), см. формулы (49), (22), отличается от I_{opt} только знаком: $J_{\text{opt}} = -I_{\text{opt}}$.

Замечание 5. Расчётные формулы, полученные при решении задачи (14) на основе принципа максимума, позволяют выдвинуть гипотезу о виде функции Беллмана $V(x, t)$ и прямыми выкладками проверить, что эта функция является гладким решением уравнения Беллмана (58), (59). На этом пути достигается обоснование оптимальности экстремального решения задачи (14), построенного на основе принципа максимума Понтрягина. Выше решения $V(x, t)$ дифференциального уравнения Беллмана найдено

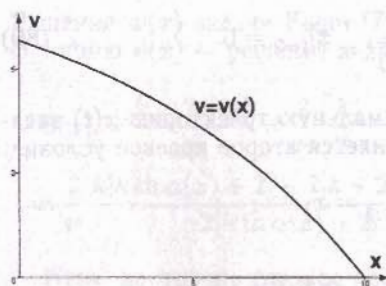


Рис. 13.

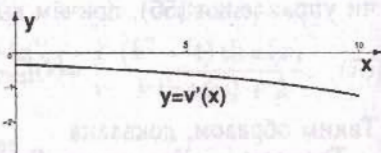


Рис. 14.

прямыми выкладками. Отметим, что применение принципа максимума приводит к построению оптимального управления в программной форме

$$u(t, q_{\text{opt}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + q_{\text{opt}} e^{\nu t}}}, \quad 0 \leq t \leq T_{\text{opt}}, \quad (81)$$

то есть в виде функции времени t . Метод динамического программирования приводит к построению оптимального управления в форме синтеза

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - v'(x)}}, \quad (82)$$

то есть в виде функции фазовой переменной x . Интересно отметить совпадение траекторий, отвечающих программному (81) и синтезирующему (82) управлениям.

На рис. 13, 14 построены графики функций $v(x)$, $v'(x)$ при

$$\nu = 0.1; \quad x_1 = 10; \quad k = 3.$$

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. 1961.
2. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина. // Сб. Математические модели в экономике и биологии. Материалы научного семинара. Планерное, Московская обл. М.: МАКС Пресс, 2003. С.57-67.
3. S. Avvakumov, Yu. Kiselev. Boundary value problem for ODE with applications to optimal control. // Report at the Conference SSI-2004. USA. Orlando. Florida. 5 p.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н. Л. Григоренко, Д. В. Камзолкин, Л. Н. Лукьянова

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T) = a, \quad (1)$$

$$J = \int_0^T e^{-\delta t} \left[-mbu(t) - pP_{\text{max}} - \frac{s\alpha P_{\text{max}}^2}{2u(t)} + s\alpha b P_{\text{max}} \right] dt \rightarrow \max_{u(\cdot)} \quad (2)$$

$$\frac{P_{\text{max}}}{b} \leq u(t) \leq \frac{Q_{\text{max}}}{b}, \quad (3)$$

в которой измеримое управление $u(t)$ подчинено геометрическому ограничению (3), положительные параметры a , P_{max} , Q_{max} , b , m , p , s , α и δ считаются заданными, и удовлетворяющими следующим ограничениям:

$$P_{\text{max}} < Q_{\text{max}}, \quad m + p < s\alpha b, \quad m < p, \quad 2ms\alpha b < (s\alpha b - p)^2. \quad (4)$$

Задача (1)–(4) есть задача оптимального управления с функционалом интегрального типа при фиксированном правом конце траектории и с нефиксированным конечным моментом времени T . Для построения оптимального решения этой задачи применим принцип максимума Понтрягина [1], который в рассматриваемой задаче является необходимым и достаточным условием оптимальности [2].

2. Краевая задача принципа максимума Понтрягина

Перейдем к построению краевой задачи принципа максимума, которая определяет оптимальные решения. Отметим, что существование оптимального управления в задаче (1)–(4) может быть обосновано, например, с помощью результатов [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-08034-офи-п), программы поддержки ведущих научных школ (НШ.1846.2003.1), программы "Университеты России" (УР.03.02.522).