

Рис. 13.

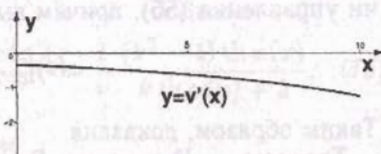


Рис. 14.

прямыми выкладками. Отметим, что применение принципа максимума приводит к построению оптимального управления в программной форме

$$u(t, q_{opt}) = \frac{1}{\sqrt{1 + q_{opt} e^{\nu t}}}, \quad 0 \leq t \leq T_{opt}, \quad (81)$$

то есть в виде функции времени t . Метод динамического программирования приводит к построению оптимального управления в форме синтеза

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - v'(x)}}, \quad (82)$$

то есть в виде функции фазовой переменной x . Интересно отметить совпадение траекторий, отвечающих программному (81) и синтезирующему (82) управлениям.

На рис. 13, 14 построены графики функций $v(x)$, $v'(x)$ при

$$\nu = 0.1; \quad x_1 = 10; \quad k = 3.$$

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. 1961.
2. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина. // Сб. Математические модели в экономике и биологии. Материалы научного семинара. Планерное, Московская обл. М.: МАКС Пресс, 2003, С.57-67.
3. S. Avvakumov, Yu. Kiselev. Boundary value problem for ODE with applications to optimal control. // Report at the Conference SSI-2004. USA. Orlando. Florida. 5 p.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н. Л. Григоренко, Д. В. Камзолкин, Л. Н. Лукьянова

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T) = a, \quad (1)$$

$$J = \int_0^T e^{-\delta t} \left[-mbu(t) - pP_{max} - \frac{s\alpha P_{max}^2}{2u(t)} + scabP_{max} \right] dt \rightarrow \max_{u(\cdot)} \quad (2)$$

$$\frac{P_{max}}{b} \leq u(t) \leq \frac{Q_{max}}{b}, \quad (3)$$

в которой измеримое управление $u(t)$ подчинено геометрическому ограничению (3), положительные параметры a , P_{max} , Q_{max} , b , m , p , s , α и δ считаются заданными, и удовлетворяющими следующим ограничениям:

$$P_{max} < Q_{max}, \quad m + p < scab, \quad m < p, \quad 2msab < (scab - p)^2. \quad (4)$$

Задача (1)–(4) есть задача оптимального управления с функционалом интегрального типа при фиксированном правом конце траектории и с нефиксированным конечным моментом времени T . Для построения оптимального решения этой задачи применим принцип максимума Понтрягина [1], который в рассматриваемой задаче является необходимым и достаточным условием оптимальности [2].

2. Краевая задача принципа максимума Понтрягина

Перейдем к построению краевой задачи принципа максимума, которая определяет оптимальные решения. Отметим, что существование оптимального управления в задаче (1)–(4) может быть обосновано, например, с помощью результатов [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-08034-офи-п), программы поддержки ведущих научных школ (НШ.1846.2003.1), программы "Университеты России" (УР.03.02.522).

Рассмотрим нормальный случай. Составим функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$H(t, u, \psi) = -e^{-\delta t} \left[mbu + pP_{max} - \frac{s\alpha}{2} \left(2bP_{max} - \frac{P_{max}^2}{u} \right) \right] + \psi u = \\ = e^{-\delta t} \left[u(\psi e^{\delta t} - mb) - \frac{s\alpha P_{max}^2}{2u} \right] - e^{-\delta t} P_{max}(p - s\alpha b),$$

где вспомогательная переменная ψ является решением сопряженной системы:

$$\dot{\psi}(t) = -H'_x(t, u(t), \psi(t)) = 0, \quad \psi(0) = \psi_0. \quad (5)$$

Откуда получаем $\psi(t) = \psi_0$ для всех $t \in [0, T]$. Из условия максимума функции $H(t, u, \psi_0)$ по параметру u , удовлетворяющему условию (3), находим максимизатор

$$u^*(\psi_0, t) = \underset{u \in [\frac{P_{max}}{b}, \frac{Q_{max}}{b}]}{\text{Arg max}} H(t, u, \psi_0).$$

Максимизатор определяется однозначно и может быть описан конструктивно. Введем обозначения

$$c_1 = b \left(m - \frac{s\alpha b}{2} \right), \quad c_2 = b \left(m - \frac{s\alpha b P_{max}^2}{2 Q_{max}^2} \right).$$

В силу (4) имеем $c_1 < 0$ и $c_1 < c_2$. Максимизатор имеет вид

$$u^*(\psi_0, t) = \begin{cases} \frac{Q_{max}}{b}, & \psi_0 e^{\delta t} > c_2; \\ u_2^*(\psi_0, t) = P_{max} \sqrt{\frac{s\alpha}{2(mb - \psi_0 e^{\delta t})}}, & c_1 \leq \psi_0 e^{\delta t} \leq c_2; \\ \frac{P_{max}}{b}, & \psi_0 e^{\delta t} < c_1. \end{cases} \quad (6)$$

Известно, что изменение допустимого управления $u(t)$ на множестве меры нуль из $[0, T]$ не влияет на результат. Поэтому в дальнейшем ограничимся только непрерывными оптимальными управлениями вида (6). Пусть $M(\psi, t) = H(t, u^*(\psi, t), \psi)$. Из условия принципа максимума $M(\psi(T), T) = 0$ получаем следующие соотношения. Если в конечный момент времени $u^*(\psi_0, T) = \frac{P_{max}}{b}$, то для ψ_0 и T выполнено соотношение

$$\psi_0 e^{\delta T} = b \left(m + p - \frac{s\alpha b}{2} \right) = c_3. \quad (7)$$

Если в конечный момент времени $u^*(\psi_0, T) = \frac{Q_{max}}{b}$, то выполнено соотношение

$$\psi_0 e^{\delta T} = b \left(m + p \frac{P_{max}}{Q_{max}} - s\alpha b \frac{P_{max}}{Q_{max}} + \frac{s\alpha b P_{max}^2}{2 Q_{max}^2} \right) = c_4. \quad (8)$$

И наконец если в конечный момент времени $u^*(\psi_0, T) = u_2^*(\psi_0, T)$, то выполнено соотношение

$$\psi_0 e^{\delta T} = b \left(m - \frac{(s\alpha b - p)^2}{2s\alpha b} \right) = c_5. \quad (9)$$

В силу (4) имеем $c_1 < c_3$ и $c_5 < 0$.

В аномальном случае имеем два экстремальных управления: $u^*(t) = \frac{Q_{max}}{b}$, $t \in [0, T]$ при $\psi_0 > 0$ и $u^*(t) = \frac{P_{max}}{b}$, $t \in [0, T]$ при $\psi_0 < 0$.

Таким образом, в силу (1)–(9), краевая задача принципа максимума имеет следующий вид:

$$\dot{x}(t) = u^*(\psi_0, t), \quad x(0) = 0, \quad x(T) = a, \quad (10)$$

$$\psi(t) = \psi_0, \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

где $u^*(\psi_0, t)$ определяется соотношением (6) или соотношениями аномального случая и выполнены условия (7)–(9).

3. Исследование краевой задачи

Рассмотрим нормальный случай. Покажем, что для оптимального процесса случай $u^*(\psi_0, T) = \frac{P_{max}}{b}$ не возможен.

В силу неравенств (4) имеем $c_1 < c_3$. Так как экстремальное управление удовлетворяет (6), то при $u^*(\psi_0, T) = \frac{P_{max}}{b}$ нет таких ψ_0, T , для которых соотношение (7) выполнено, и следовательно такое управление не оптимально.

Далее покажем, что для оптимального процесса условие $u^*(\psi_0, T) = \frac{Q_{max}}{b}$ при $p \leq s\alpha b \left(1 - \frac{P_{max}}{Q_{max}} \right)$ не может быть выполнено, а условие $u^*(\psi_0, T) = u_2^*(\psi_0, T)$ не может быть выполнено при $p > s\alpha b \left(1 - \frac{P_{max}}{Q_{max}} \right)$.

В силу неравенств (4), в случае $p \leq s\alpha b \left(1 - \frac{P_{max}}{Q_{max}} \right)$, имеем $c_4 \leq c_2$. Так как экстремальное управление удовлетворяет равенству (6), то при $u^*(\psi_0, T) = \frac{Q_{max}}{b}$ нет таких ψ_0, T , для которых соотношение (8) выполнено. Если $p > s\alpha b \left(1 - \frac{P_{max}}{Q_{max}} \right)$, то

в силу неравенств (4) получаем $c_5 > c_2$ и следовательно при $u^*(\psi_0, T) = u_2^*(\psi_0, T)$ соотношение (9) не выполняется.

В случае $c_2 \geq 0$ из неравенств (4) следует, что $p \leq sab(1 - \frac{P_{max}}{Q_{max}})$ и значит условие $u^*(\psi_0, T) = \frac{Q_{max}}{b}$ не выполняется.

Наконец докажем, что в случае $c_2 > 0$ управление $u_2^*(\psi_0, t)$ при $\psi_0 > 0$ не является оптимальным. Предположим, что это управление оптимально, на некотором временном интервале $[0, T_1]$. Рассмотрим другое постоянное управление $\bar{u} = \frac{P_{max}}{b} \sqrt{\frac{sa}{2mb}}$ и соответствующий ему конечный момент времени T_2 . Из условия $c_2 > 0$ следует, что $\bar{u} < \frac{Q_{max}}{b}$. Заметим, что \bar{u} является точкой максимума по переменной u подынтегральной функции в функционале (2) при $u \geq \frac{P_{max}}{b}$, и кроме того из условий (4) следует, что при $u = \bar{u}$ значение подынтегральной функции положительно. Так как $\bar{u} < u_2^*(\psi_0, t)$ при $\psi_0 > 0$, то из (1) следует, что $T_2 > T_1$. Сравнивая значения функционала на двух рассматриваемых управлениях приходим к противоречию с оптимальностью $u_2^*(\psi_0, t)$.

В аномальном случае оба экстремальных управления не являются оптимальными, так как функция Гамильтона–Понтрягина не обращается в ноль в конечный момент времени.

С использованием полученных свойств краевой задачи (6)–(11) ее решение можно представить в виде следующей таблицы. Положим $\Theta_j(\psi_0) = \frac{1}{\delta} \ln(\frac{c_j}{\psi_0})$, $j = 2, 5$, $\Theta_4 = \frac{ab}{Q_{max}}$.

Таблица 1.

	Параметры	Управление	Конечный момент времени	ψ_0
1	$c_2 \geq 0$	$u_2^*(\psi_0, t), t \in [0, T]$	$T = \Theta_5(\psi_0)$	$c_5 < \psi_0 < 0$
2	$c_2 < 0$ $p \leq sab(1 - \frac{P_{max}}{Q_{max}})$	$\frac{Q_{max}}{b}, t \in [0, \Theta_2(\psi_0)]$,	$T = \Theta_5(\psi_0)$	$c_2 < \psi_0 < 0$
		$u_2^*(\psi_0, t), t \in [\Theta_2(\psi_0), T]$		
		$u_2^*(\psi_0, t), t \in [0, T]$	$T = \Theta_5(\psi_0)$	$c_5 < \psi_0 \leq c_2$
3	$c_2 < 0$ $p > sab(1 - \frac{P_{max}}{Q_{max}})$	$\frac{Q_{max}}{b}, t \in [0, T]$	$T = \Theta_4$	$c_4 < \psi_0$

Соответствующие линии переключения для различных сочетаний параметров задачи и соотношения на конечный момент времени приведены на рисунках 1–3.

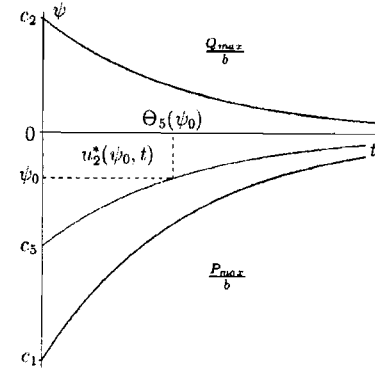


Рис. 1. $c_2 \geq 0$

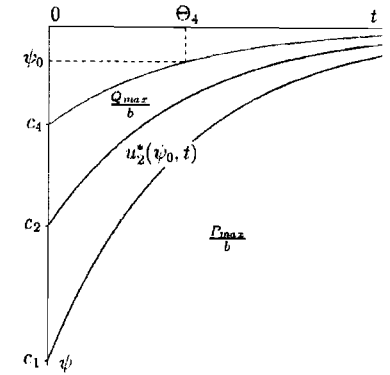


Рис. 2. $c_2 < 0, p > sab(1 - \frac{P_{max}}{Q_{max}})$.

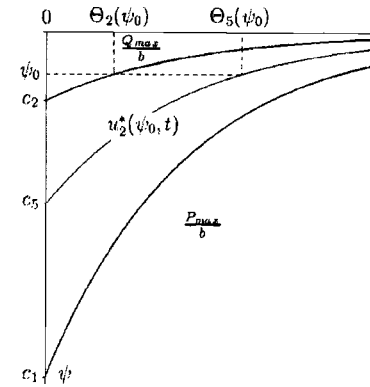


Рис. 3. $c_2 < 0, p \leq sab(1 - \frac{P_{max}}{Q_{max}})$.

Найдем параметр ψ_0 из краевого условия $x(T) = a$. С учетом (10) представим это условие в интегральной форме

$$\int_0^T u^*(\psi_0, t) dt = a. \tag{12}$$

Для случая 1 (см. таблица 1) параметров процесса имеем уравнение относительно ψ_0 :

$$P_{max} \frac{\sqrt{sa}}{\sqrt{2}} \int_0^{\Theta_5(\psi_0)} \frac{dt}{\sqrt{mb - \psi_0 e^{\delta t}}} =$$

$$= -P_{max} \frac{\sqrt{s\alpha}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\delta\sqrt{mb}} \ln \frac{\sqrt{mb - \psi_0 e^{\delta t}} + \sqrt{mb}}{\sqrt{mb - \psi_0 e^{\delta t}} - \sqrt{mb}} \Big|_{\Theta_2(\psi_0)}^{\Theta_5(\psi_0)} = a.$$

Так как $\psi_0 < 0$, то получаем единственное решение

$$\psi_0 = -4mb \frac{e^{\Lambda(a)}}{(e^{\Lambda(a)} - 1)^2} = \psi_0^1(a), \quad (13)$$

где

$$\Lambda(a) = \ln \frac{\sqrt{mb - c_5} + \sqrt{mb}}{\sqrt{mb - c_5} - \sqrt{mb}} + \frac{a\delta\sqrt{2mb}}{P_{max}\sqrt{s\alpha}}.$$

Покажем, что значения функции $\psi_0^1(a)$ из (13) принадлежат интервалу $(c_5, 0)$. Действительно, функция $\psi_0^1(a)$ — монотонно возрастает от $\psi_0^1(0) = c_5$ до 0 при $0 < a < +\infty$. Получаем, что значения функции $\psi_0^1(a)$ принадлежат интервалу $(c_5, 0)$.

Для случая 2 (см. таблица 1) параметров процесса, в зависимости от области изменения параметра ψ_0 получаем следующие уравнения для нахождения ψ_0 . Для интервала $c_5 < \psi_0 \leq c_2$ параметр ψ_0 определяется равенством (13), а для $c_2 < \psi_0 < 0$ искомым параметр ψ_0 является решением уравнения

$$\int_0^{\Theta_2(\psi_0)} \frac{Q_{max}}{b} ds + \frac{\sqrt{s\alpha}}{\sqrt{2}} P_{max} \int_{\Theta_2(\psi_0)}^{\Theta_5(\psi_0)} \frac{dt}{\sqrt{mb - \psi_0 e^{\delta t}}} = a,$$

или после преобразования

$$\frac{Q_{max}}{b} \Theta_2(\psi_0) - P_{max} \frac{\sqrt{s\alpha}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\delta\sqrt{mb}} \ln \frac{\sqrt{mb - \psi_0 e^{\delta t}} + \sqrt{mb}}{\sqrt{mb - \psi_0 e^{\delta t}} - \sqrt{mb}} \Big|_{\Theta_2(\psi_0)}^{\Theta_5(\psi_0)} = a.$$

Введем обозначения

$$\Delta = -P_{max} \frac{\sqrt{s\alpha}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\delta\sqrt{mb}} \times \left(\ln \frac{\sqrt{mb - c_5} + \sqrt{mb}}{\sqrt{mb - c_5} - \sqrt{mb}} - \ln \frac{\sqrt{mb - c_2} + \sqrt{mb}}{\sqrt{mb - c_2} - \sqrt{mb}} \right),$$

$$\Delta_1(a) = \frac{b\delta}{Q_{max}} (a - \Delta).$$

Тогда для ψ_0 имеем уравнение $\ln \left(\frac{c_2}{\psi_0} \right) = \Delta_1(a)$, откуда находим ψ_0

$$\psi_0 = \frac{c_2}{e^{\Delta_1(a)}} = \psi_0^2(a). \quad (14)$$

Покажем что функция $\psi_0^2(a)$ — возрастающая функция параметра a . Так как $\Delta_1(a)$ — возрастающая функция, то $e^{\Delta_1(a)}$ — так же возрастающая функция, и $\psi_0^2(a)$ — возрастающая функция в силу $c_2 < 0$.

Заметим, что $\psi_0^2(\Delta) = c_2 < 0$ и $\Delta > 0$ при $c_5 < c_2 < 0$. Следовательно, $\psi_0^2(a)$ — возрастающая функция параметра a и удовлетворяет условию $c_2 < \psi_0^2(a) < 0$ при $a \in (\Delta, +\infty)$. Кроме того имеем равенство $\psi_0^1(\Delta) = c_2$. Получаем значение вспомогательной переменной в зависимости от параметра a

$$\psi_0 = \begin{cases} \psi_0^1(a) = -4mb \frac{e^{\Lambda(a)}}{(e^{\Lambda(a)} - 1)^2}, & \text{если } a \leq \Delta; \\ \psi_0^2(a) = \frac{c_2}{e^{\Delta_1(a)}}, & \text{если } a > \Delta. \end{cases}$$

Таким образом во втором случае параметров задачи оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} u_2^*(\psi_0^1(a), t), & t \in [0, \Theta_5(\psi_0^1(a))], & \text{если } a \leq \Delta; \\ \begin{cases} \frac{Q_{max}}{b}, & t \in [0, \Theta_2(\psi_0^2(a))], \\ u_2^*(\psi_0^2(a), t), & t \in [\Theta_2(\psi_0^2(a)), \Theta_5(\psi_0^2(a))], \end{cases} & \text{если } a > \Delta. \end{cases}$$

Для случая 3 (см. таблица 1) параметров процесса значение вспомогательной переменной ψ_0 не представляет интереса.

Формулы для нахождения ψ_0 для всех случаев параметров задачи приведены в таблице 2, являющейся продолжением таблицы 1.

Таблица 2.

	ψ_0
1	$\psi_0^1(a) = -4mb \frac{e^{\Lambda(a)}}{(e^{\Lambda(a)} - 1)^2}$
2	$\begin{cases} \psi_0^1(a) = -4mb \frac{e^{\Lambda(a)}}{(e^{\Lambda(a)} - 1)^2}, & \text{если } a \leq \Delta; \\ \psi_0^2(a) = \frac{c_2}{e^{\Delta_1(a)}}, & \text{если } a > \Delta. \end{cases}$
3	

Качественное поведение оптимальной траектории и оптимального управления приведены на рисунках 4 и 5 соответственно.

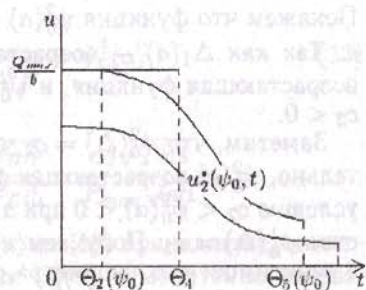
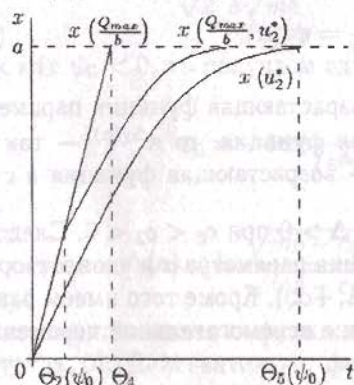


Рис. 4. Оптимальные траектории. Рис. 5. Оптимальные управления.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкrelидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
3. Cesari L. Optimization theory and applications. Problems with ordinary differential equations. Springer - Verlag, 1983.

О РЕШЕНИЯХ С УЧАЩАЮЩИМИСЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В МИКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Э. В. Григорьева, Е. Н. Хайлов

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления максимизации прибыли для нелинейной математической модели микроэкономической системы, описывающей производство, хранение и продажу товара повседневного спроса.

Для такой задачи выписывается краевая задача принципа максимума, образующая необходимое условие оптимальности. Рассматриваются условия на параметры, характеризующие исходную систему, при которых у решения краевой задачи принципа максимума возникает участок особого режима. Показывается, что этот участок особого режима сопрягается с неособыми участками, содержащими бесконечное число переключений на конечном отрезке времени. Для исследования такого явления привлекается теория, развитая М.И. Зеликиным и В.Ф. Борисовым. Доказывается, что решение краевой задачи принципа максимума является локально-оптимальным в рассматриваемой задаче оптимального управления. Поэтому, соответствующая оптимальная траектория состоит из трех участков. Первый участок представляет собой неособый участок, на котором исходная система с бесконечным числом переключений за конечное время выходит на особый режим. Второй участок является участком особого режима. Последний, третий участок представляет собой траекторию рассматриваемой системы, которая с учащающимися переключениями в обратном времени сходит с особого режима.

Рассмотрим нелинейную математическую модель микроэкономической системы, состоящей в производстве, хранении и продаже товара повседневного спроса, ранее предложенной в [1, 2]. Она записывается следующим образом: