Решение уравнений системы (8) с учетом граничных условий при $t = 0$ дает:

$$x_1 = \frac{K^2}{2}\left(\frac{t}{K} - \sin\frac{t}{K}\right), \qquad x_2 = \frac{K^2}{2}\left(1 - \cos\frac{t}{K}\right),$$

$$\psi_1 = 1, \qquad \psi_2 = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2K}\right),$$

где K — произвольная постоянная. Нахождение постоянных $K > 0, T > 0$ с помощью правого граничного условия $x|_{t=T} = a$ приводит к системе двух конечных уравнений

$$a_1 = R(\theta - \sin\theta), \quad a_2 = R(1 - \cos\theta) \tag{9}$$

относительно неизвестных R, θ, где $K = [2R]^{1/2}, T = [2R]^{1/2}\theta$. Система (9) влечет формулы (4)–(6) для времени. Проблема обоснования оптимальности времени (4) требует специального изучения, так как обычно предполагаемые условия гладкости правых частей уравнений (1) нарушены при $x_2 = 0$, и, в частности, в граничной точке $(0,0)$. Косвенным признаком неприменимости напрямую классических теорем принципа максимума является неограниченность сопряженной переменной $\psi_2(t)$ при $t = 0$, что не мешает, однако, получению верного результата. Сформулированное **Утверждение** дает полное решение задачи: обоснование оптимальности времени (4), которое записано в явном виде в терминах специальной функции $\theta(a)$, возможность записать оптимальную обратную связь, построить явную зависимость оптимальной траектории $x(t, K)$ от времени t и на этой основе записать параметрические уравнения изохронных кривых в задаче о брахистохроне. Есть основания полагать, что описанный опыт обоснования оптимальности для задачи (2) может быть интересен в методическом плане при преподавании основ курса оптимального управления и полезен при исследовании некоторых прикладных нелинейных задач быстродействия.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ТЕРМИНАХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Ю. Н. Киселев

МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: kiselev@cs.msu.su

1. Введение

Принцип максимума Понтрягина [1,2], является мощным средством исследования оптимизационных задач в динамических управляемых системах, причем его роль не ограничивается лишь теоретическим аспектом проблемы: конструкции принципа максимума могут служить основой для для разработки численных алгоритмов поиска оптимальных решений.

Как известно, в нелинейных задачах управления принцип максимума является только необходимым условием оптимальности. Могут быть сконструированы примеры задач управления, в которых имеется несколько решений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума, причем не все из них оптимальны (см. [3]). В то же время для определенных классов нелинейных задач управления решение, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума, оказывается оптимальным. Именно к такому типу задач относится ряд задач экономической динамики (например, модели диффузии инноваций, "Рост"и др.). Для этих задач возникла проблема обоснования оптимальности решений, получаемых на основе краевой задачи принципа максимума при численном анализе задачи.

В статье формулируются *достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума*. Эти условия даются в форме, позволяющей охватить упомянутые выше классы прикладных задач *без особых режимов*. Описание соответствующих конструкций представляет определенный методологический интерес.

Модификация применяемых рассуждений и формулировок позволяет, сохраняя технический аппарат исследования, охватить и некоторые задачи управления, допускающие *особые режимы*. Представленный материал содержит изложение достаточных условий оптимальности в терминах конструкций клас-

Работа поддержана грантом Миннауки

сического принципа максимума [1,2]. Рассматривается несколько типов задач управления (задачи на максимум и минимум, функционал интегрального и терминального типа, некоторые типичные варианты граничных условий).

В основу подхода положена *интегральная формула приращения функционала* для экстремального процесса в терминах функции Гамильтона-Понтрягина K [1,2] и *интегральная оценка приращения функционала* для экстремального процесса в терминах функции Гамильтона M. Функцию M — *промаксимизированную по управлению* функцию Гамильтона–Понтрягина — можно трактовать как обобщенное преобразование Лежандра функции K. После обоснования оптимальности предъявленного экстремального решения автоматически снимается проблема *существования* оптимального решения.

2. Задача на максимум. Интегральный функционал. Свободный правый конец. Фиксированные концы траектории

2.1. Постановка задачи максимизации. Интегральный функционал. Свободный правый конец траектории. Фиксированные концы траектории. Рассматривается задача управления

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u), \quad x \in R^n, \quad t \in [t_0, t_1], \quad u \in U, \\ x(t_0) = x_0, \\ J[u] = \displaystyle\int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) \to \min_{u(\cdot)}, \end{cases} \tag{1}$$

где x — фазовая переменная, u — управление, подчиненное геометрическому ограничению $u \in U$, где U — область управления; x_0 — заданное начальное состояние управляемого объекта.

Запишем функцию Гамильтона–Понтрягина

$$K(t, x, \psi, u) = f^0(t, x, u) + (\psi, f(t, x, u)). \tag{2}$$

Здесь положено $\psi_0 = 1$; ψ — n-мерный вектор.

Рассмотрим условие максимума

$$K(t, x, \psi, u) \to \max_{u \in U}, \tag{3}$$

и предположим, что экстремальная задача (3) допускает единственный максимизатор

$$u_*(t, x, \psi) = \operatorname*{argmax}_{u \in U} \; K(t, x, \psi, u) \tag{4}$$

при каждом наборе параметров t, x, ψ.

Привлекая максимизатор (4) и условие трансверсальности $\psi(t_1) = 0$, запишем краевую задачу принципа максимума

$$\begin{cases} \dot{x} = \;\; K'_\psi(t, x, \psi, u)|_{u=u_*(t,x,\psi)} \equiv F(t, x, \psi), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{\psi} = -K'_x(t, x, \psi, u)|_{u=u_*(t,x,\psi)} \equiv G(t, x, \psi), \quad \psi(t_1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть

$$(x(t), \psi(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{6}$$

— решение краевой задачи (5). В общем случае таких решений может существовать более одного. Положим

$$u(t) = u_*(t, x, \psi)\Big|_{\substack{x = x(t) \\ \psi = \psi(t)}}, \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{7}$$

т.е. допустимое управление $u(t)$ строится как суперпозиция максимизатора (4) и решения (6) краевой задачи (5). Тройку функций

$$(x(t), \psi(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{8}$$

будем называть *экстремальной тройкой*, а пару функций

$$(x(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{9}$$

— *экстремальным процессом.*

Сформулируем теперь **Основной вопрос**: *является ли процесс (9) оптимальным для задачи управления (1)?* Достаточные условия для положительного ответа на поставленный вопрос содержат сформулированные ниже теоремы.

Наряду с функцией Гамильтона–Понтрягина (2), зависящей от четырех аргументов, важная роль отводится функции Гамильтона

$$M(t, x, \psi) = \max_{v \in U} \; K(t, x, \psi, v), \tag{10}$$

зависящей от трех аргуметов. Ясно, что

$$M(t, x, \psi) = K(t, x, \psi, v)|_{v=u_*(t,x,\psi)}. \tag{11}$$

Ниже предполагается, что

а) существует непрерывный градиент $M'_x(t,x,\psi)$ функции (10) по аргументу x;

б) сопряженное уравнение

$$\dot\psi = -K'_x(t,x,\psi,v)|_{v=u_*(t,x,\psi)}$$

допускает запись в форме

$$\dot\psi = -M'_x(t,x,\psi), \tag{12}$$

т.е. имеет место равенство

$$K'_x(t,x,\psi,v)|_{v=u_*(t,x,\psi)} = M'_x(t,x,\psi). \tag{13}$$

В конкретных задачах проверка равенства (13) часто не представляет значительных трудностей. Эти предположения сделаны для определенной стройности изложения. Они могут быть ослаблены, именно, для дальнейшего достаточно предположить выполнение уравнения (12) вдоль решения (6):

$$\dot\psi(t) = -M'_x(t,x(t),\psi(t)), \quad t_0 \le t \le t_1. \tag{14}$$

Вместе с тем следует отметить, что проверка (4) требует знания решения (6), тогда как проверка выполнения (13) этого не требует и может оказаться более удобным для применения при анализе конкретных примеров. Ясно, что для тройки (8) выполнены соотношения

$$K(t,x(t),\psi(t),u(t)) = M(t,x(t),\psi(t)) \tag{15}$$

$$K(t,\hat x,\psi(t),\hat u) \le M(t,\hat x,\psi(t)) \qquad \forall \hat x, \forall \hat u \in U. \tag{16}$$

2.2. Интегральное представление приращения функционала в задаче управления (1). Оценка приращения функционала. Здесь речь идет о приращении функционала и оценке этого приращения для экстремального процесса с участием соответствующей сопряженной переменной. Итак, пусть $(x(t),\psi(t),u(t))$, $\quad t_0 \le t \le t_1$, — экстремальная тройка (8), а

$$(x(t),u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{17}$$

— экстремальный процесс, отвечающий сопряженной переменной $\psi(t)$, которая удовлетворяет условию

$$\dot\psi(t) = -M'_x(t,x(t),\psi(t)), \quad t_0 \le t \le t_1. \tag{18}$$

Наряду с экстремальным процессом (11) рассмотрим произвольный допустимый процесс

$$(\hat x(t),\hat u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{19}$$

$$\hat x(t_0) = x_0, \tag{20}$$

$$\hat u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le t_1. \tag{21}$$

Определим **приращения:**

приращение траектории

$$\Delta x(t) = \hat x(t) - x(t); \tag{22}$$

приращение управления

$$\Delta u(t) = \hat u(t) - u(t); \tag{23}$$

приращение функционала

$$\Delta J = J[u+\Delta u] - J[u]. \tag{24}$$

Отметим очевидные соотношения

$$\Delta x(t_0) = 0, \tag{25}$$

$$(d/dt)\Delta x(t) = f(t,\hat x(t),\hat u(t)) - f(t,x(t),u(t)), \tag{26}$$

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[f^0(t,\hat x(t),\hat u(t)) - f^0(t,x(t),u(t))\right] dt, \tag{27}$$

$$\psi(t_1) = 0. \tag{28}$$

Лемма 1. *Приращение ΔJ функционала допускает следующее интегральное представление*

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \Big[K(t,\hat x(t),\psi(t),\hat u(t)) - M(t,x(t),\psi(t)) - \\ - \big(M'_x(t,x(t),\psi(t)),\Delta x(t)\big)\Big] dt. \tag{29}$$

Доказательство леммы 1. Привлекая соотношения (25)–(28), (18), (2), (15), запишем цепочку равенств

$$\Delta J = \Delta J + 0 =$$

$$= \{(25),(28)\} =$$

$$= \Delta J + (\psi(t), \Delta x(t))\big|_{t=t_0}^{t=t_1} =$$

$$= \Delta J + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\psi(t), \Delta x(t))\, dt =$$

$$= \Delta J + \int_{t_0}^{t_1} \Big((\dot\psi(t), \Delta x(t)) + (\psi(t), \Delta\dot x(t)) \Big)\, dt =$$

$$= \{(26),(18)\} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \big[f^0(t, \hat x(t), \hat u(t)) - f^0(t, x(t), u(t)) +$$

$$+ (\psi(t), f(t, \hat x(t), \hat u(t))) - (\psi(t), f(t, x(t), u(t))) -$$

$$- (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)) \big]\, dt =$$

$$= \{(2)\} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \big[K(t, \hat x(t), \psi(t), \hat u(t)) - K(t, x(t), \psi(t), u(t)) -$$

$$- (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)) \big]\, dt =$$

$$= \{(15)\} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \big[K(t, \hat x(t), \psi(t), \hat u(t)) - M(t, x(t), \psi(t)) -$$

$$- (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)) \big]\, dt.$$

Формула (29) получена, и лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Приращение функционала допускает следующую оценку сверху*

$$\Delta J \le \Delta J^+ \equiv \int_{t_0}^{t_1} \big[M(t, \hat x(t), \psi(t)) - M(t, x(t), \psi(t)) -$$

$$- (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \hat x(t) - x(t)) \big]\, dt. \quad (30)$$

Лемма 2 вытекает из (29) и (16).

Оценка (30) служит основой для получения достаточных условий оптимальности в задаче (1). Оптимальность процесса (9) означает выполнение неравенства

$$\Delta J \le 0 \quad (31)$$

для любого допустимого процесса (19). Неположительность правой части неравенства (30) влечет (31), т.е. оптимальность процесса (9):

$$\Delta J^+ \le 0 \Longrightarrow \Delta J \le 0.$$

Здесь ΔJ^+ есть интеграл в правой части оценки (30). Можно предложить ряд достаточных условий, гарантирующих выполнение неравенства $\Delta J^+ \le 0$. Обратим внимание на то, что в интеграл ΔJ^+ не входит управление $\hat u(t)$, но входят исследуемая траектория $x(t)$, произвольная допустимая траектория $\hat x(t)$, а также сопряженная переменная $\psi(t)$, связанная с исследуемым процессом (9).

2.3. Достаточные условия оптимальности. Введем обозначение

$$D(t, \hat x, x, \psi) = M(t, \hat x, \psi) - M(t, x, \psi) - (M'_x(t, x, \psi), \hat x - x).$$

Тогда интеграл в правой части (30) записывается в форме

$$\Delta J^+ = \int_{t_0}^{t_1} D(t, \hat x(t), x(t), \psi(t))\, dt. \quad (32)$$

Пусть $X(t)$ — множество достижимости в момент времени $t \in [t_0, t_1]$ управляемой системы (1), и пусть $X(t)$ — компакт. Очевидно, что

$$D(t, x, x, \psi) = 0, \qquad \Delta J^+ = 0 \quad \text{при} \quad \hat x(t) = x(t). \quad (33)$$

Положим

$$D_0(t) = \max_{\hat x \in X(t)} D(t, \hat x, x(t), \psi(t)), \qquad t \in [t_0, t_1]. \quad (34)$$

Так как $\hat x(t) \in X(t)$, то в силу (33) функция (34) неотрицательна:

$$D_0(t) \ge 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (35)$$

Теорема 1. *Если $D_0(t) = 0, t \in [t_0, t_1]$, то процесс (9) оптимален для задачи управления (1).*

Действительно, имеем:

$$\Delta J \le \Delta J^+ = \int_{t_0}^{t_1} D(t, \hat{x}(t), x(t), \psi(t))\, dt \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t_1} \max_{\hat{x} \in X(t)} D(t, \hat{x}, x(t), \psi(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} D_0(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} 0\, dt = 0,$$

что влечет утверждение теоремы 1.

Замечание 1. *Достаточные условия оптимальности, сформулированные в теореме 1, выражены в терминах функции $D_0(t)$, которая определяется с участием множества достижимости $X(t)$ управляемой системы. Знание множеств достижимости типично для одномерных управляемых систем. В многомерном случае построение множеств достижимости является сложной вычислительной задачей, которую можно приближенно решать численными методами. Поэтому представляют интерес другие варианты достаточных условий оптимальности, не требующие точного знания множеств достижимости $X(t)$.*

Обратим внимание на то, что интегрант в формуле (32) является разностью приращения функции M по втрому аргументу и линейным членом тейлоровского разложения. Поэтому вогнутость этой функции по второму аргументу позволяет сделать вывод о нужном знаке функции D. Приведем более развернутые формулировки, раскрывающие высказанную идею.

Предположение вогнутости. *Функция*

$$m(t, x) \equiv M(t, x, \psi(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{36}$$

вогнута по переменной $x \in X^+(t)$ $\forall t \in [t_0, t_1]$, где $X^+(t)$ — выпуклое множество, содержащее множество достижимости $X(t)$.

Замечание 2. *В ряде прикладных задач фазовые переменные положительны, так что в качестве внешней оценки $X^+(t)$ множества достижимости можно взять положительный ортант R^n_+. Таким образом можно обойтись априорно известными качественными свойствами множества достижимости $X(t) \subset R^n$ без точного знания самого множества достижимости. В некоторых примерах можно брать $X^+(t) = R^n$.*

Вогнутость функции (36) по второму аргументу означает выполнение неравенства

$$m(t, \hat{x}) - m(t, x) - (m'_x(t, x), \hat{x} - x) \le 0 \quad \forall \hat{x}, x \in X^+(t), \tag{37}$$

которое при $\hat{x} = \hat{x}(t), x = x(t)$ превращается в неравенство

$$M(t, \hat{x}(t), \psi(t)) - M(t, x(t), \psi(t)) - $$
$$- \left(M'_x(t, x(t), \psi(t)), \hat{x}(t) - x(t)\right) \le 0.$$

Последнее неравенство влечет неположительность величины (32), что, в силу (30), в свою очередь, влечет неравенство $\Delta J \le 0$ для любой допустимой траектории $\hat{x}(t)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *При выполнении* **Предположения вогнутости** *процесс (9), удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности с сопряженной переменной $\psi(t)$, является оптимальным в задаче управления (1).*

Замечание 3. *Достаточные условия оптимальности теоремы 2 и* **Предположение вогнутости** *не требуют точного знания исследуемой траектории $x(t)$, ограничиваясь лишь грубой оценкой $X^+(t)$ множества достижимости $X(t)$. Иногда удается установить оценку для сопряженной переменной $\psi(t)$ вида*

$$\psi(t) \in \Psi^+(t), \quad t \in (t_0, t_1),$$

где $\Psi^+(t)$ — некоторое множество в n-мерном пространстве; например, если удается доказать положительность сопряженных переменных $\psi_i(t)$, то в качестве оценки $\Psi^+(t)$ можно взять положительный ортант R^n_+. Поэтому **Предположение вогнутости** *можно заменить следующим.*

Модифицированное предположение вогнутости. *Функция*

$$M(t, x, \psi)$$

вогнута по аргументу $x \in X^+(t)$ при любых фиксированных $t \in (t_0, t_1)$ и $\psi \in \Psi^+(t)$, где $X^+(t) \supseteq X(t)$, $\Psi^+(t) \ni \psi(t)$.

Теорема 3. *При выполнении* **Модифицированного предположения вогнутости** *процесс (9) является оптимальным в задаче управления (1).*

2.4. Достаточные условия оптимальности без предположения о единственности максимизатора (4). Предположение о единственности максимизатора (4) в задачах управления, допускающих особые режимы, заведомо существенным образом нарушается. Чтобы охватить задачи с особыми режимами, следует слегка видоизменить некоторые формулировки, оставляя без изменений основную канву рассуждений.

Пусть процесс $(x(t), \psi(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности с сопряженной переменной $\psi(t)$, т.е.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0, \\ \dot{\psi}(t) = -K'_x(t, x(t), \psi(t), u(t)), & \psi(t_1) = 0, \end{cases}$$

$$K(t, x(t), \psi(t), u(t)) = M(t, x(t), \psi(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Предположим, что существует непрерывный градиент $M'_x(t, x, \psi)$ по аргументу x функции Гамильтона M, и что имеет место равенство (18). Тогда справедливы леммы 1, 2 и теоремы 1, 2, 3 о достаточных условиях оптимальности.

2.5. Задача (1) с фиксированными концами траектории. Рассмотрим задачу управления (1) с дополнительным условием

$$x(t_1) = x_1, \tag{38}$$

где $x_1 \in R^n$ — заданное конечное состояние управляемого объекта. Укажем необходимые изменения в анализе задачи (1), (38). Сейчас для сопряженной переменной $\psi(t)$ условие трансверсальности отсутствует и в краевой задаче принципа максимума (5) вместо него фигурирует конечное условие (38). Использованное при доказательстве леммы 1 представление нуля

$$0 = (\psi(t), \Delta x(t))|_{t=t_0}^{t=t_1}$$

остается верным, так как сейчас $\Delta x(t_0) = \Delta x(t_1) = 0$. Определение (34) функции $D_0(t)$ заменяется следующим

$$D_0(t) = \max_{\hat{x} \in X(t) \cap Y(t)}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где $X(t)$, как и раньше, — множество достижимости в момент времени $t \in [t_0, t_1]$, $X(t_0) = \{x_0\}$, а $Y(t), t \in [t_0, t_1]$, $Y(t_1) = \{x_1\}$ — множество достижимости из точки x_1 в обратном времени. После этих изменений теорема 1 остатся верной для задачи (1), (38).

В формулировке **Предположения вогнутости** и **Модифицированного предположения вогнутости** внешняя оценка $X^+(t) \supseteq X(t) \cap Y(t)$ строится для пересечения множеств $X(t)$ и $Y(t)$. С этими изменениями теоремы 2 и 3 применимы к задаче (1), (38) с фиксированными концами траектории.

Таким образом, фиксация правого конца траектории не приносит новых принципиальных трудностей при выводе достаточных условий оптимальности.

3. Задача на минимум. Интегральный функционал

При изучении задачи (1) на минимум следует при определении функции K следует положить $\psi_0 = -1$ и вместо (2) пользоваться формулой

$$K(t, x, \psi, u) = -f^0(t, x, u) + (\psi, f(t, x, u)). \tag{39}$$

Условие оптимальности (31) заменяется неравенством

$$\Delta J \ge 0 \quad \text{или} \quad -\Delta J \le 0.$$

Представление (29) приращения функционала в лемме 1 приобретает вид

$$-\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \big[K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - M(t, x(t), \psi(t)) - \\ - \big(M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)\big)\big]\, dt,$$

а оценка (30) для приращения функционала в случае задачи на минимум принимает вид

$$-\Delta J \le \int_{t_0}^{t_1} \big[M(t, \hat{x}(t), \psi(t)) - M(t, x(t), \psi(t)) - \\ - \big(M'_x(t, x(t), \psi(t)), \hat{x}(t) - x(t)\big)\big]\, dt.$$

Предположения вогнутости и **Модифицированного предположения вогнутости** формулируются так же, как и раньше, с учетом изменений в определении функции K, см. формулу (39). Достаточные условия оптимальности сохраняют прежний вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М. 1961.
2. *Понтрягин Л.С.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М. Наука. 1990.
3. *Киселев Ю.Н.* Построение точных решений для нелинейной задачи быстродействия специального вида. // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Том 3. Выпуск 3. стр. 847 - 867.

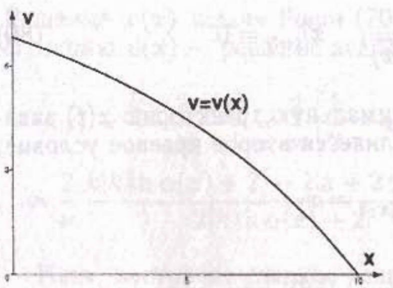

Рис. 13.

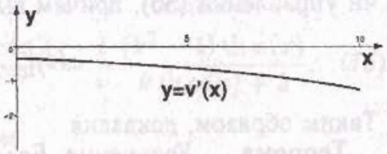

Рис. 14.

прямыми выкладками. Отметим, что применение принципа максимума приводит к построению оптимального управления в программной форме

$$u(t, q_{\text{opt}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + q_{\text{opt}} e^{\nu t}}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_{\text{opt}}, \tag{81}$$

то есть в в виде функции времени t. Метод динамического программирования приводит к построению оптимального управления в форме синтеза

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - v'(x)}}, \tag{82}$$

то есть в виде функции фазовой переменной x. Интересно отметить совпадение траекторий, отвечающих программному (81) и синтезирующему(82) управлениям.

На рис. 13, 14 построены графики функций $v(x)$, $v'(x)$ при

$$\nu = 0.1; \; x_1 = 10; \; k = 3.$$

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. 1961.
2. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина. // Сб. Математические модели в экономике и биологии. Материалы научного семинара. Планерное, Московская обл. М.: МАКС Пресс, 2003, С.57-67.
3. S. Avvakumov, Yu. Kiselev. Boundary value problem for ODE with applications to optimal control. // Report at the Conference SSI-2004. USA. Orlando. Florida. 5 p.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н. Л. Григоренко, Д. В. Камзолкин, Л. Н. Лукьянова

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T) = a,$$

$$J = \int_0^T e^{-\delta t}\left[-mbu(t) - pP_{max} - \frac{s\alpha P_{max}^2}{2u(t)} + s\alpha b P_{max}\right] dt \longrightarrow \mathrm{m}$$

$$\frac{P_{max}}{b} \leqslant u(t) \leqslant \frac{Q_{max}}{b},$$

в которой измеримое управление $u(t)$ подчинено геометрическо ограничению (3), положительные параметры a, P_{max}, Q_{max}, b, p, s, α и δ считаются заданными, и удовлетворяющими следующ ограничениям:

$$P_{max} < Q_{max}, \quad m + p < s\alpha b, \quad m < p, \quad 2ms\alpha b < (s\alpha b - p)^2.$$

Задача (1)–(4) есть задача оптимального управления с функцио лом интегрального типа при фиксированном правом конце тра тории и с нефиксированным конечным моментом времени T. Д построения оптимального решения этой задачи применим прин максимума Понтрягина [1], который в рассматриваемой задаче ляется необходимым и достаточным условием оптимальности [

2. Краевая задача принципа максимума Понтрягина

Перейдем к построению краевой задачи принципа максиму которая определяет оптимальные решения. Отметим, что су ствование оптимального управления в задаче (1)–(4) может б обосновано, например, с помощью результатов [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-080 офи-п), программы поддержки ведущих научных школ (НШ.1846.2003 программы "Университеты России" (УР.03.02.522).