

Моделирование движения мобильного робота по сложному маршруту

Зенкевич С. Л., Назарова А. В., Лисицын Д. М.

МГТУ им. Баумана, центр "Робототехника", Москва.
e-mail: {zenkev,anv}@rk10.bmstu.ru

Рассматриваются вопросы моделирования движения колесного мобильного робота. Приведены кинематическая и динамическая модели робота. Динамическая модель построена с использованием метода Анпеля. Описан программный пакет моделирования движения робота, позволяющий пользователю подключать как различные модели робота (кинематическую, динамическую, в том числе с учетом приводов ведущих колес), так и разные алгоритмы управления. Приведены результаты моделирования.

Введение

Мобильные роботы представляют собой весьма интересный объект для исследования. Будучи востребованными в настоящее время для использования в широком спектре приложений (в основном, связанных с выполнением различного рода операций в экстремальных средах), мобильные роботы представляют собой нетривиальный объект с точки зрения управления им. Замкнутая кинематическая цепь, наличие неголономных связей делают проблему управления чрезвычайно трудной.

В предлагаемой работе рассмотрен, по-видимому, самый простой представитель мобильных роботов, а именно робот, имеющий два ведущих и одно ведомое (пассивное) колесо, движущийся по плоскому рельефу. Мотивацией работы может стать то обстоятельство, что роботы именно такой конструкции участвовали в соревнованиях, проводимых в рамках молодежного фестиваля «Мобильный робот 99» в институте механики МГУ, где выступала команда МГТУ. Работы, посвященные той же проблеме, были опубликованы в трудах конференции [1,2]. Мы используем здесь несколько иной подход к выводу уравнений движения, основанный на методах аналитической механики.

1. Кинематическая модель

Поскольку движение робота осуществляется в горизонтальной плоскости, то достаточно рассмотреть плоский случай.

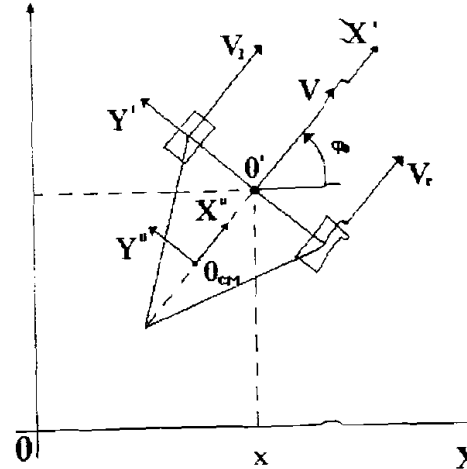


Рис 1. Трехколесный мобильный робот.

На рис. 1 изображен мобильный робот. В точках L и R расположены колеса, оси вращения которых совпадают с отрезком LR, длина которого равна l . Свяжем с роботом систему координат $O'X'Y'$, расположив O' посередине LR и направив ось X' перпендикулярно LR. Тогда положение основания робота как твердого тела задается тройкой чисел ϕ, x, y , где ϕ - угол между осями X и X' , x, y координаты точки O' в абсолютной системе координат OXY .

Введем матрицу 3×3 перехода от $O'X'Y'$ к OXY :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

-матрица, задающая ориентацию связанной системы координат,

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2)$$

-вектор, задающий положение начала системы координат O' .

Тогда, если обозначить как V, V_1, V_r векторы линейных скоростей точек O', L и R соответственно, а через ω - угловую скорость (рис. 1), то можно записать следующие соотношения.

$$\begin{cases} V_1 = V + \omega\Omega r_1 \\ V_r = V + \omega\Omega r_r \end{cases} \quad (3)$$

$$\quad (4)$$

где Ω - матрица и имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что Ω является ортогональной матрицей, обеспечивающей поворот произвольного вектора на $\pi/2$.

Запишем теперь следующие очевидные соотношения:

$$r_1 = \frac{1}{2} y'$$

$$r_r = -\frac{1}{2} y' \quad (6)$$

$$V_1 = V_1 x'$$

$$V_r = V_r x'$$

где x' и y' - единичные орты системы координат $O'X'Y'$. Тогда учитывая соотношения (6), а так же имея в виду указанное свойство матрицы Ω , после элементарных преобразований соотношений (3) и (4), получим

$$V = \frac{1}{2} (V_r + V_1) \quad (7)$$

$$\omega = \frac{1}{l} (V_r - V_1)$$

Если ввести теперь в рассмотрение координаты x, y, ϕ , нетрудно видеть, что:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos\phi \\ \dot{y} = V \sin\phi \\ \dot{\phi} = \omega \end{cases} \quad (8)$$

Подставив (7) в соотношение (8) получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2} (V_r + V_1) \cos\phi \\ \dot{y} = \frac{1}{2} (V_r + V_1) \sin\phi \\ \dot{\phi} = \frac{1}{l} (V_r - V_1) \end{cases} \quad (9)$$

Соотношения (9) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений 3-его порядка относительно фазового вектора с компонентами (x, y, ϕ) . Скаляры V_1 и V_r , заданные тем или иным образом (как функции времени или как функции фазовых координат), определяют движение платформы. Таким образом, соотношения (9) можно рассматривать как кинематическую модель трехколесного мобильного робота. Линейная скорость и угловая скорость ищутся из соотношения (7).

2. Динамическая модель

Прежде чем перейти к выводу уравнений движения, рассмотрим более детально связи, наложенные на робот.

2.1 Анализ связей

Мобильный робот перемещается по плоскому рельефу, имея два ведущих колеса радиуса r . Колеса вращаются без проскальзывания, и оси их вращения совпадают с линией LR.

Учет последнего условия обеспечивается выполнением очевидного соотношения

$$x \sin\phi - y \cos\phi = 0$$

полученного из (8).

Это соотношение устанавливает ограничения на координаты и скорости и представляет собой одно из уравнений связи, геометрическая интерпретация которого состоит в том, что вектор

скорости $V = (\dot{x}, \dot{y})^T$ перпендикулярен орту Y' . Таким образом, налагаемая связь является неголономной.

Рассмотрим теперь условия непроскальзывания. Мы рассматриваем робот как систему трех твердых тел, включающую платформу и два ведущих колеса. Положение этой системы задается следующим набором параметров:

x, y, ϕ - положение платформы,

q_l, q_r - углы поворота правого и левого колес соответственно.

Аналитическое выражение для условия непроскальзывания получим, воспользовавшись соотношением (9), а также тем обстоятельством, что:

$$V_r = \rho \cdot \dot{q}_r$$

$$V_l = \rho \cdot \dot{q}_l$$

Тогда уравнения связей имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\rho}{2} (\dot{q}_r + \dot{q}_l) \cos \phi \\ \dot{y} = \frac{\rho}{2} (\dot{q}_r + \dot{q}_l) \sin \phi \\ \dot{\phi} = \frac{\rho}{1} (\dot{q}_r - \dot{q}_l) \end{cases}$$

из которых последнее интегрируется:

$$\phi = \frac{\rho}{1} (q_r - q_l) + C, \text{ где } C - \text{некоторая постоянная}$$

Окончательно уравнения связи имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\rho}{2} (\dot{q}_r + \dot{q}_l) \cos \phi \\ \dot{y} = \frac{\rho}{2} (\dot{q}_r + \dot{q}_l) \sin \phi \\ \phi = \frac{\rho}{1} (q_r - q_l) + C \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, рассмотренная система имеет $5-1=4$ обобщенные координаты, например (x, y, q_l, q_r) , и $5-3=2$ степени свободы.

2.2 Вывод уравнений движения

Для вывода уравнений движения воспользуемся уравнением Аппеля в форме:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n-r$$

где

n - число обобщенных координат

r - число неголономных уравнений связей

S - энергия ускорения

q_i - обобщенные координаты

Q_i - обобщенные силы.

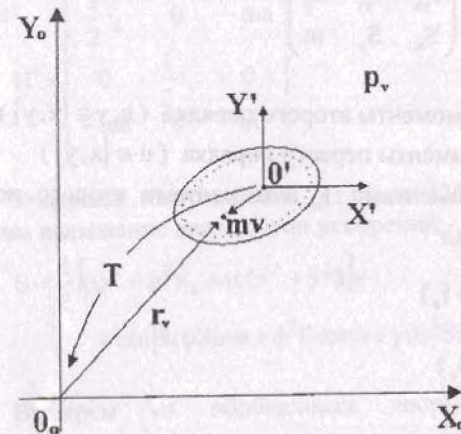


Рис 2. Твердое тело с абсолютной OXY и связанной $O'X'Y'$ системами координат.

Рассмотрим твердое тело (рис.2). Пусть M - произвольная точка массы m_v , а r_v и ρ_v - однородные вектора, характеризующие ее положение в абсолютной и связанной системах координат.

$$r_v = T \rho_v, \quad (11)$$

где T - матрица 3×3 , задающая положение и ориентацию $O'X'Y'$ относительно OXY и заданная соотношением (1)

Известно, что энергия ускорения S выражается следующим образом:

$$S = \frac{1}{2} \sum m_v \ddot{\mathbf{r}}_v^T \ddot{\mathbf{r}}_v \quad (12)$$

Продифференцировав дважды (11):

$$\ddot{\mathbf{r}}_v = \ddot{\mathbf{T}} \mathbf{p}_v$$

и подставляя в (12), после несложных преобразований получим:

$$S = \frac{1}{2} \text{tr}(\ddot{\mathbf{T}} \mathbf{H} \ddot{\mathbf{T}}^T) \quad (13)$$

где \mathbf{H} – матрица инерции, имеющая вид:

$$\mathbf{H} = \sum m_v \mathbf{p}_v \mathbf{p}_v^T = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & S_x \\ I_{yx} & I_{yy} & S_y \\ S_x & S_y & m \end{pmatrix} \quad (14)$$

где

$$I_{uv} = \sum m_v u_v v_v - \text{моменты второго порядка } (u, v \in \{x, y\})$$

$$S_u = \sum m_v u_v - \text{моменты первого порядка } (u \in \{x, y\})$$

Связь между моментами I_{uv} и моментами второго порядка вокруг осей i_u имеет вид:

$$I_{xx} = \frac{1}{2} (-i_x + i_y + i_z)$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2} (i_x - i_y + i_z) \quad (15)$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} (i_x + i_y - i_z)$$

Сделаем следующие предположения:

1. Моменты инерции колес значительно меньше соответствующих моментов платформы.
2. Центр масс платформы лежит на оси X' в точке с координатами $(-a, 0)$ (Рис. 1)
3. Матрица инерции платформы в системе координат $O^*X^*Y^*$, связанной с центром масс, имеет вид:

$$\mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix},$$

где m – масса платформы.

Тогда, вычисляя матрицу инерции \mathbf{H}' в системе $O^*X^*Y^*$, получим

$$\mathbf{H}' = \mathbf{A} \mathbf{H}^* \mathbf{A}^T,$$

где \mathbf{A} – матрица перехода от $O^*X^*Y^*$ к $O'X'Y'$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} i_z & 0 & -ma \\ 0 & \frac{1}{2} i_z & 0 \\ -ma & 0 & m \end{pmatrix} \quad (16)$$

Учитывая соотношения (13) и (16) после вычислений получим выражение для энергии ускорения:

$$S = \frac{1}{2} [(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2) i_z + m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)] + am [\ddot{x}(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + \ddot{y}(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)] \quad (17)$$

Выберем из обобщенных координат x, y, q_1, q_2 две координаты q_1, q_2 , а для нахождения скоростей и ускорений $\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ воспользуемся уравнениями связи (10). После соответствующих преобразований получим:

$$S = \frac{1}{2} \left[(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2) i_z + \frac{m \rho^2}{4} (\ddot{q}_r + \ddot{q}_l)^2 \right] + \frac{\rho}{2} \dot{\varphi}^2 (\ddot{q}_r + \ddot{q}_l) - \frac{\rho}{2} \ddot{\varphi} \dot{\varphi} (\dot{q}_r + \dot{q}_l) \quad (18)$$

В соответствии с уравнением Аппеля имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial q_r} = Q_r$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_l} = Q_l$$
(19)

В предположении, что обобщенными силами являются моменты τ_r и τ_l , развиваемые моторами, которые приводят в движение колеса, после преобразования получим:

$$\begin{cases} m\dot{V} = -am\omega^2 + \frac{1}{\rho}(\tau_l + \tau_r) \\ i_r\dot{\omega} = am\omega V + \frac{1}{2\rho}(\tau_r - \tau_l) \end{cases}$$
(20)

Соотношение (20) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно фазового вектора с компонентами $(V, \omega)^T$, а τ_r, τ_l -компоненты вектора управления, порождающие движение системы.

В целях моделирования удобной формой представления является следующая:

$$\dot{\psi} = \omega \begin{cases} \dot{x} = V \cos \varphi \\ \dot{y} = V \sin \varphi \\ \dot{V} = -a\omega^2 + \frac{1}{\rho m}(\tau_l + \tau_r) \\ \dot{\omega} = \frac{am\omega V}{i_r} + \frac{1}{2\rho i_2}(\tau_r - \tau_l) \end{cases}$$
(21)

2.3 Уравнения движения с учетом приводов

Известно, что уравнение двигателя постоянного тока имеет вид:

$$L\dot{i} + Ri + K_w \omega_m = U$$
(22)

где

- L – индуктивность обмотки якоря
- i – ток якоря
- R – сопротивление обмотки якоря
- ω_m – угловая скорость вращения вала двигателя
- U – напряжение, подаваемое на обмотку якоря

Угловые скорости вращения вала ω_m и колеса ω_w связаны соотношением:

$$\omega_m = \omega_w i$$
(23)

где i – передаточное отношение редуктора. Выражение для момента τ , развиваемого двигателем, имеет вид:

$$\tau = K_M I$$
(24)

Учитывая соотношение (24), представим (22) в виде:

$$\dot{\tau} = -\frac{R}{L}\tau - \frac{K_M K_w i}{L}\omega_w + \frac{K_M}{L}U$$
(25)

или окончательно для правого и левого колеса:

$$\begin{cases} \dot{\tau}_l = -\frac{R}{L}\tau_l - \frac{K_M K_w i}{L}\omega_l + \frac{K_M}{L}U_l \\ \dot{\tau}_r = -\frac{R}{L}\tau_r - \frac{K_M K_w i}{L}\omega_r + \frac{K_M}{L}U_r \end{cases}$$
(26)

Заметим, что в (26) мы предполагаем, что параметры правого и левого колеса одинаковы. Выразим теперь ω_l и ω_r через фазовые координаты. Воспользовавшись соотношением (7) и учитывая, что $V_l = \omega_l \rho$ и $V_r = \omega_r \rho$ получим:

$$\omega_r = \frac{1}{\rho} \left(V + \frac{\omega l}{2} \right)$$

$$\omega_l = \frac{1}{\rho} \left(V - \frac{\omega l}{2} \right)$$
(27)

Подставив полученные соотношения (27) в (26) и пополнив систему (21), получим следующую систему, описывающую движение мобильного робота:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \varphi \\ \dot{y} = V \sin \varphi \\ \dot{V} = -a\omega^2 + \frac{1}{\rho m} (\tau_l + \tau_r) \\ \dot{\omega} = \frac{am\omega V}{i_z} + \frac{1}{2\rho i_z} (\tau_r - \tau_l) \\ \dot{\tau}_l = -\frac{R}{L} \tau_l - \frac{K_M K_w i}{L} (V - \frac{\omega l}{2}) + \frac{K_M}{L} U_l \\ \dot{\tau}_r = -\frac{R}{L} \tau_r - \frac{K_M K_w i}{L} (V + \frac{\omega l}{2}) + \frac{K_M}{L} U_r \end{cases} \quad (28)$$

Система (28) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений седьмого порядка с фазовым вектором $(x, y, V, \varphi, \omega, \tau_l, \tau_r)^T$ и вектором управления $(U_l, U_r)^T$.

2.4 Движение по наклонной плоскости.

В завершении обсудим небольшое обобщение предыдущей задачи, состоящее в том, что робот движется по наклонной плоскости.

В этом случае появляется дополнительная к рассмотренным в 2.3 моментам активная сила веса $P=mg$. Ясно, что можно сохранить ранее использованный подход (т.е. по-прежнему рассматривать плоский случай), если учесть только проекцию силы веса на плоскость, в которой происходит движение, поскольку сила, перпендикулярная плоскости, не влияет на движение.

Пусть f_x, f_y - проекция силы веса на оси X_0, Y_0 , абсолютной системы координат, построенной так, что ось Z_0 перпендикулярна плоскости движения. Тогда выражения для элементарной работы имеет вид:

$$\delta A = \tau_l \delta_l + \tau_r \delta_r + f_x \delta_x + f_y \delta_y$$

Выражая δ_x и δ_y из уравнения связей через $\delta \varphi_l$ и $\delta \varphi_r$, получим следующие выражения для обобщенных сил:

$$Q_l = \tau_l + \frac{\rho}{2} (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi) \quad (29)$$

$$Q_r = \tau_r + \frac{\rho}{2} (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi)$$

Тогда, используя выражения (29) получим вместо (21) следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \varphi \\ \dot{y} = V \sin \varphi \\ \dot{V} = -a\omega^2 + \frac{1}{m} (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi) + \frac{1}{\rho m} (\tau_l + \tau_r) \\ \dot{\omega} = \frac{am\omega V}{i_z} + \frac{1}{2\rho i_z} (\tau_r - \tau_l) \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, в выражении для линейного ускорения появился дополнительный член, в то время как выражение для углового ускорения осталось без изменений. Это, в частности, означает, что для того чтобы удержать робот неподвижным на наклонной плоскости, необходимо приложить два одинаковых ненулевых момента.

Программная реализация модели

Основная цель создания моделирующего пакета – апробация алгоритмов управления трехколесным мобильным роботом, участвующим в соревнованиях, проводимых в рамках фестиваля «Мобильные роботы 2000». Исходя из вышесказанного, программа была создана таким образом, чтобы было возможно заменять алгоритмы управления роботом без перекомпиляции всей программы. Эта способность была расширена и другие компоненты пакета, такие как математические модели, средства графического представления информации, что сделало возможным добавление к ней любого количества новых элементов. Таким образом, программа представляет собой интерфейсную оболочку, к которой в качестве подключаемых модулей, присоединяются остальные компоненты. Этот механизм использует технологию динамически подключаемых библиотек (Dynamic Link Libraries, или DLL). Подключение и отключение модулей осуществляется во время работы программы.

На сегодняшний день моделирующий пакет содержит следующие компоненты:

1. Модель площадки на которой происходят соревнования. Этот компонент предоставляет пользователю возможность задавать размеры площадки и устанавливать на ней от одного до пятнадцати маяков.
2. Кинематическая модель мобильного робота. Как было сказано выше, управлением в этом случае являются угловые скорости ведущих колес робота.
3. Динамическая модель мобильного робота приводов, которая управляется по моментам, приложенным к ведущим колесам.
4. Динамическая модель мобильного робота с учетом. Управление должно осуществляться по напряжениям, подаваемым на двигатели.
5. Алгоритмы управления мобильным роботом, реализующие выполнение следующих заданий: наведение на один маяк, въезд в ворота (проезд между двумя маяками), объезд двух маяков фигурой «восьмерка», проезд цепи маяков («змейка»). Каждый алгоритм управления выполнен как отдельный подключаемый модуль.
6. Средства вывода на экран графиков различных переменных параметров моделей.
7. Средство вывода на экран траектории движения робота. (показывает так же установленные на площадке маяки)
8. Изображение робота в движении и маяков.

Результаты моделирования

На Рис.3 представлены результаты моделирования с использованием всех перечисленных алгоритмов управления.

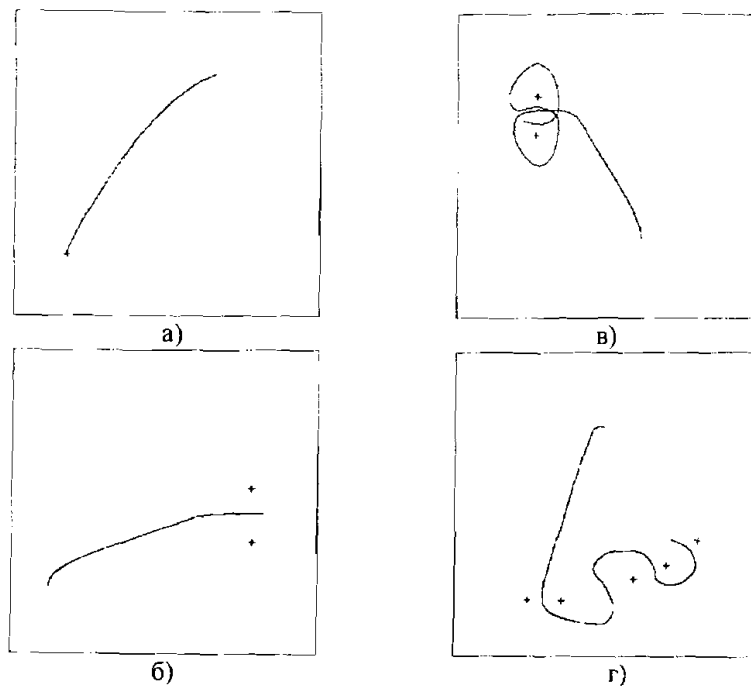


Рис 3. Результаты моделирования: а- наведение на маяк, б- въезд в ворота, в- «восьмерка», г- «змейка».

Заключение

Авторы искренне благодарят профессора Девянина Е.А., чья работа [1] послужила стимулом для написания настоящей статьи.

Литература

1. Девянин Е.А. О движении колесных роботов. Труды конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы», Москва 1998, стр. 169-200.
2. Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г. Неголономная динамика мобильных роботов и ее моделирование в реальном времени. Труды конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы», Москва 1998, стр. 107-123.