Соломко Дмитрия

413 группа

~~Теория особых~~ рее

Особые оптимал. управления

~~Кириллова~~, Кирилова

~~Габасов~~ Габасов

Мат. модели динамических управляемых процессов

$\dot{x} = f(x, u, t)$

Реальный процесс → Выбор модели

Идентификация

Задачи управления

Управление в условиях неопредел.

Прогноз поведения моделей

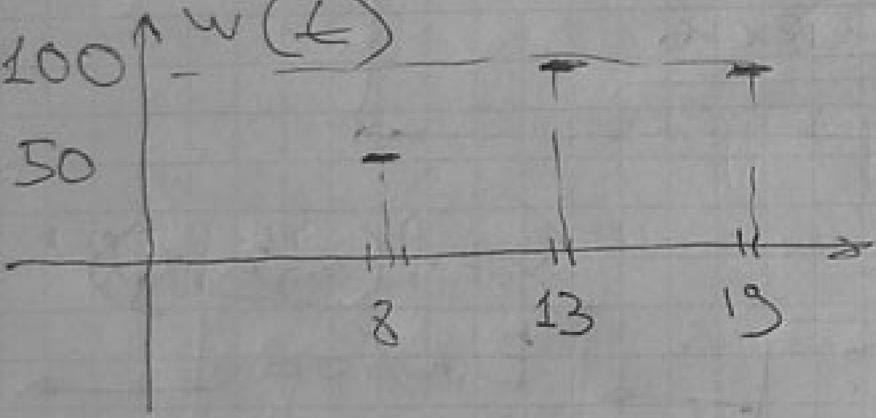
инсулин

$x(0) = x_0$

$y(0) = 0$

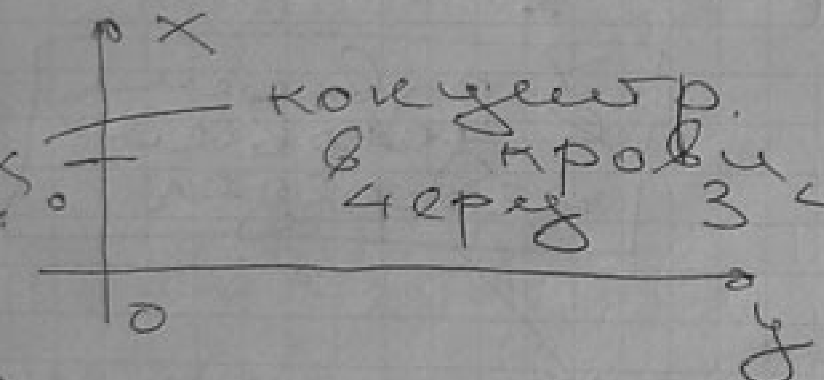
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a_1 xy + a_2(x_0 - x_1)H(x_0 - x_1) + w(t) \\ \dot{y}(t) = b_1(x - x_0)H(x - x_0) - b_2 y + z(t) \end{cases}$$

внешние инъекции инсулина



$w(t)$ – график приёма пищи

x_0 – концентр. инсулина в крови.



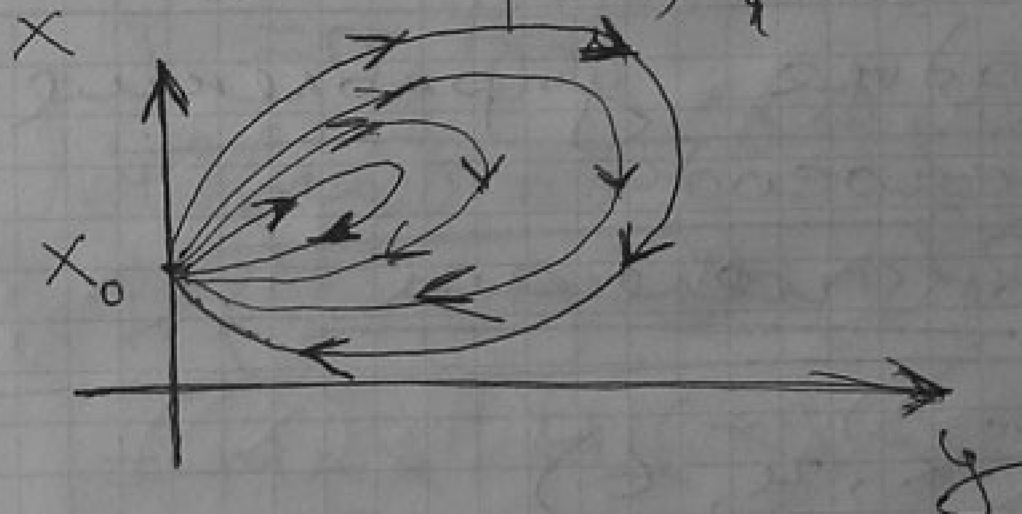
концентр. глюкозы ~~инсулина~~ в крови ~~после~~ ~~обе~~ через 3 часа после обеда

сахарная кривая здорового человека

$$\int_0^{24} \left((x(t) - \bar{x}(t))^2 + A z^2(t) + B(w - \bar{w}(t))^2 \right) dt \to \min_{z(t)}$$

H – ф-ция heavyside

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi \le 0 \end{cases}$$



$$\dot{x} = f(x, u, t, \gamma, \alpha)$$

внешняя неопределённость

параметр

$u(t, x(t), \psi(t))$

интегр. показатель качества $\le \gamma_0^2$

Это дифференц игры.

Особые управления и способы их вычисления

$\dot{x} = f(x, u, t)$

$x(t_0) = x_0$

$x \in R^n$

$u \in U \subset R^2$

$J(u) = \varphi(x(t_1)) \to \min_{u \in U}$

t_0, t_1 – фиксир

Опр. 1 $u^0(t)$ – о. х. назыв. экстрем. Понтрягина

$x^0(t)$

$\dot{x}^0(t) = f(x^0, u^0, t)$

$x^0(t_0) = x_0$

$\dot{\psi}^0 = -\frac{\partial H}{\partial x}$

$\psi^0(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}$

$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)$

$= \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u$

Опред. 2 $\forall t \in [t_0, t_1$

$\exists \ \omega(t) \in U$

$H(x^0(t), \psi^0(t), u, t)$

$\equiv H(x^0(t), \psi^0(t), u(t), t$

$\forall u \in \omega(t)$

$\boxed{\psi(t)}$ $u(t)$

Как искать оптимальное управление???

~~Вычисление~~

$$\dot{x} = \underbrace{f_0(x)}_{} + \underbrace{u f_1(x)}_{}$$

$x \in R^n$, $u \in R^n$

$H(x, \psi, u) =$

$= (\psi, f_0(x) + u f_1(x)) =$

$= H_0(x, \psi) + u\, H_1(x, \psi)$

$(\psi, f_0(x))$ $(\psi, f_1(x))$

$H_1(x(t), \psi(t)) \equiv 0$

$\forall t \in [t_0, t_1]$

$$\psi(t): \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial f_0}{\partial x}\psi - u\frac{\partial f_1}{\partial x}\psi$$

Скобки Пуассона и их свойства

$$\begin{cases} v = v(x, \psi) & x \in R^n \\ w = w(x, \psi) & \psi \in R^n \end{cases}$$

Опр. 3 Скобкой Пуассона назовем

$$\{v, w\} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

Свойства

1. $\{v, w\} = -\{w, v\}$

2. $\{v, v\} = 0$

3. $\{v, w_1 + w_2\} =$

$\{v, w_1\} + \{v, w_2\}$

4. $\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} \equiv 0$

$$S = S(x, \psi)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, \psi, u)}{\partial \psi}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x, \psi, u)}{\partial x}$$

$$H(x, \psi, u) = (\psi, f(x, u))$$

$$\frac{dS}{dt} = \{S, H\}$$

$$\frac{d}{dt} H_1(x(t), \psi(t)) = \{H_1, H\} = -\{H_0, H_1\} + u\{H_1, H_1\}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} H_1 = -\frac{d}{dt}\{H_0, H_1\} = -\{\{H_0, H_1\}, H\} = \{H_0, \{H_0, H_1\}\} + u(t)\{H_1, \{H_0, H_1\}\} \equiv 0$$

$$u(t) = \frac{-\{H_0, \{H_0, H_1\}\}}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}}$$

$$\frac{d^k}{dt^k} H_1 = (-1)^k \underbrace{\{H_0, \{H_0, \ldots, \{H_0, H_1\}, \ldots\}}_{\text{К ЧЛЕНОВ}} + (-1)^k u(t) \{H_1, \{H_0, \ldots, \{H_0, H_1\} \ldots\}$$

Теорема Кэли.

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad s = 1, \dots, 2q-1$$

$$\boxed{(-1)^q}\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\frac{\partial H}{\partial u} \le 0$$

$\boxed{09.09.09}$

~~$\dot{x} = f_0(x) + u f(x)$~~

$$\dot{x} = f_0(x) + u f_1(x)$$
$$x \in R^n \qquad u \in R^1$$
$$H(x, \psi, u) = H_0(x, \psi) + u H_1(x, \psi)$$

$$H_1(x, \psi) = 0 \quad \overset{\text{ч}}{0}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = (\psi, f_1(x)) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial u} = (\psi, [f_0, f_1]) \equiv 0$$

$$\frac{d^m}{dt^m}\frac{\partial H}{\partial u} = (-1)^m \cdot$$
$$\cdot (\psi, [f_0, [f_0, \dots, [f_0, f_1], \dots]])$$

$$m < 2k \quad 2m$$

$$u(t) = -\frac{\overbrace{\{H_0, \{H_0, \dots \{H_0, H_1\} \dots\}\}}^{2m}}{\{H_1, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\}}_{2m-1} \dots\}\}}$$

Далее выписали условие Кэли.

В том случае, если $u \in [-1, 1]$.

Если $\{$ u есть (u_1, u_2).

Опред. 1 Квадр. форма
$A(x) = A(x_1, \dots, x_n) =$
$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

$a_{ij} = a_{ji} \quad i,j = 1, \dots, n$

Опред. 2 $A(x) > 0$
$\forall x \in R^n, x \neq 0$
$A(x) < 0, \forall x \in R^n, x \neq 0$

~~Опред. 3~~

Теорема Если 1) $f(x) \in C^2(x_0 + S_\varepsilon(0))$

2) $df(x_0) = 0$

Тогда если квадр. форма

$A(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) =$
$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_i dx_j$

$A(dx) > 0$ x_0 - строг. мин.
$A(dx) < 0$ x_0 - строг. MAX

Критерий Сильвестра.

$A(x) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$

$a_{ij} = a_{ji} \quad i,j = 1, \dots, n$
была положит. определена, необходимо и достаточно, чтобы

$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots,$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Для отрицат. определённости нужен чередующ. знак

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ a_{31} & \dots & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \quad \dots$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Теорема сформулирована для такого класса управлений

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \varphi_s^n(x)$$

$$|u_s| \le 1, \quad x(0) = x_0$$

$$J = \int_0^{t_1} \left(F(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \Phi_s(x)\right) dt \to \min_{u_1 \dots u_s}$$

$$H = -\left(F + \sum_{s=1}^{k} u_s \Phi_s(x)\right) + \psi\left(f(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \varphi_s(x)\right) =$$

$$= Q(\psi, x) + \sum_{s=1}^{k} u_s M_s(\psi, x)$$

$$[-F + (\psi, f)] \qquad M_s = [-\Phi_s(x) + (\psi, \varphi_s(x))]$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H(x,\psi,u)}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_s} = 0 \quad s = 1 \dots k$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_s \partial \varphi_p} = 0 \quad p, s = 1 \dots k$$

$t \in [\tau_1, \tau_2]$ это есть выполнение след соотношения

$$\boxed{H_s(\psi(t), x(t)) \equiv 0 \quad s = 1, \dots, k}$$

$$\frac{dM_s(\psi, x)}{dt} = \frac{\partial M_s}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial M_s}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} =$$

$$= \left(\varphi_s, -\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial M_s}{\partial x}, f + \sum_{p=1}^{m} u_p \varphi_p(x)\right) =$$

$$= \sum_{p=1}^{k} u_p \left[-\left(\varphi_s, \frac{\partial H_\varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial M_s}{\partial x}, \varphi_p(x)\right)\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial M_s}{\partial x}, f\right) - \left(\varphi_s, \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right] \equiv 0$$

$A(x)$, $G(x)$

$s = 1, \dots, k$

Элементы матрицы A:

$$a_{sp} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial M_s}{\partial x^i} \varphi_p^i - \frac{\partial M_p}{\partial x^i} \varphi_s^i\right)$$

$$s, p = 1, \dots, m$$

$$a_{sp} = -a_{ps} \quad a_{ss} \equiv 0$$

Необход. условия оптимальности.

1) $$a_{sp} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial M_s}{\partial x^i} \varphi_*^i - \frac{\partial M_s}{\partial x^i} \varphi_s^i\right) = 0$$

$s, \varphi = 1$

2-е условие

$$\sum_{s,\varphi=1}^{k} \frac{\partial}{\partial H_\varphi}\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial u_s}\right)\right)\delta u_s \delta u_\varphi \geq 0$$

Условия Лежандра-Клебша.

$$\dot{x} = f(x, u, t),\ x(t_0) = x_0$$
$$t \in [t_0, t_1]$$
$$x \in R^n$$
$$u \in R^n$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -\dfrac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\psi(t) \\ \psi(t_1) = -\dfrac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x} \end{cases}$$

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\Phi(t) - \Phi(t)\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2(\psi(t) f(x,u,t))}{\partial x^2},$$

$$\Phi^0(t_1) = -\frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2}$$

$$H(x,\psi,u,t) = (\psi, f(x,u,t$$

$$\Delta_v f(x,u,t) = f(x,v,t) - f($$

Теорема. Пусть $f(x,u,t)$, $\varphi(x)$ таков... что $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

~~$[t_1, t_2]$~~

отрезок $[t_0, t_1]$

$\sigma \subset [t_0, t_1]$ — на кото... имеет место особ... режим

$u^0(t) \to x^0(t), \psi^0(t)$

$t \in \sigma$

НЕОБХОДИМО ЧТОБ...

$t \in [t_0, t_1] \setminus \sigma$

$(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) =$

$\max\limits_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t)$

$t \in \sigma$

$\Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \overset{n}{} \Phi^{0}_{n\times n}(t)$

$\Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) +$

$\psi^0(t) \dfrac{\partial \overset{n}{\Delta_v} f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial t}$

$\Delta \quad n$

$\Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \le$

≤ 0

Пример.

Пусть управ. система имеет вид

$\dot{x}_1 = \dfrac{u_1 - 1}{2}, \quad x_1(0) = 0$

$\dot{x}_2 = \dfrac{u_2 - 1}{2}, \quad x_2(0) = 0$

$\dot{x}_3 = \dfrac{u_1 - 1}{2} x_2, \quad x_3(0) = 0$

$t \in [0, 1]$

$\cancel{V} \; U = \{(u_1, u_2) : |u_1| \le 1, |u_2| \le 1\}$

$\varphi(x) = x_3$

$H = \psi_1 \dfrac{u_1 - 1}{2} + \psi_2 \dfrac{u_2 - 1}{2} -$

$- \dfrac{u_1 - 1}{2} x_2 =$

$= u_1 \left(\dfrac{\psi_1}{2} - \dfrac{x_2}{2} \right) + u_2 \left(\dfrac{\psi_2}{2} \right) + .$

$u_1^* = \mathrm{sign}\,(\psi_1 - \psi_2)$

$u_2^* = \mathrm{sign}\;\psi_2$

$$\begin{cases} x_2 = \psi_1 \\ \psi_2 = 0 \end{cases}$$

$\dot{\psi}_1 = 0, \; \psi_1(1) = 0$

$\dot{\psi}_2 = \dfrac{u_1 - 1}{2}, \; \psi_2(1) = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{1}{2}(\psi_1 - x_2) \equiv 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{1}{2}\psi_2 \equiv 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u_1}\right) = -\frac{u_2}{4} + \frac{1}{4} \equiv 0$$

$\tilde{u}_2 = 1$

$x_1^\circ(t) = x_2^\circ(t) = x_3^\circ(t) \equiv 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u_0}\right) = \frac{u_1}{4} - \frac{1}{4} \equiv 0$$

$\tilde{u}_1 = 1$

$\psi_1^\circ(t) = \psi_2^\circ(t) = 0$

$\psi_3^\circ(t) = -1$

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi}_0 & \cdots & \dot{\Phi}_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{\Phi}_{31} & \cdots & \dot{\Phi}_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_1 - 1}{2} & 0 \end{Bmatrix} \underset{3\times 3}{\Phi(t)} -$$

$$- \Phi(t) \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_1 - 1}{2} & 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Phi(1) = 0 \qquad \Phi_{ij} = 0$

$$\Delta_v f(x, u, t) = \left\{ \frac{v_1 - 1}{2}, \frac{v_2 - 1}{2}, 0 \right.$$

$$\frac{\partial\left(\Delta_v f(x, u, t)\right)}{\partial x} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_1 - 1}{2} & 0 \end{Bmatrix}$$

$-\frac{1}{4}(V_1-1)(V_2-1) \le 0.$

$\boxed{16.09.09}$

Достаточные условия оптимальности в схеме конструкции ПМП.

$\dot{x} = f(x,t,u),\ x \in R^n,\ t \in [t_0, t_1],\ u \in U$

$x(t_0) = x_0$

$J(u) = \int f^0(x(t), t, u(t))\,dt \to \max_{u(\cdot)\in U}$

$u \in R^p,\ U \subset R^p$

Формулировка условий.

$K(t,x,\psi,u) = f^0(t,x,u) + (\psi, f(t,x,u)) \to \max$

$\psi_0 = 1$

$u_*(t,x,\psi) = \arg\max_{u \in U} K(t,x,\psi,$

Когда правый конец свободен $\Rightarrow$ есть условие трансверсальности

$\psi(t_1) = 0.$

$\cancel{K'_\psi(t,x,\psi,u)}$

$$\begin{cases} \dot{x} = K'_\psi(t,x,\psi,u)\big|_{u=u_*(t,x,\psi} = F(t,x,\psi),\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{\psi} = -K'_x(t,x,\psi,u)\big|_{u=u_*(t,x} = G(t,x,\psi),\ \psi(t_1) = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ экстрем. проц.

$(x(t), \psi(t)),\ t \in [t_0, t_1]$

$u(t) = u_*(t,x,\psi)\big|_{x=x(t),\ \psi=\psi(t),\ t\in[t_0,t_1]}$

~~$t \in [t_0, t_1]$~~

Будем рассматривать тройку ф-ций $(x(t), \psi(t), u(t))$ — экстрем. тройка.

Вопрос: является ли процесс $(x(t), \psi(t))$ оптимальным для исходной задачи???

Рассмотрим ф-цию

$$M(t,x,\psi) = \max_{v \in U} K(t,x,\psi,v)$$

Предположение:

а) $\exists\ M'_x(t,x,\psi)$ то есть $\exists$ непр. градиент $\exists$

б) $\dot\psi = -K'_x(t,x,\psi,v)\big|_{v=u_x(t,x,\psi)}$

$\dot\psi = -M'_x(t,x,\psi)$.

Рассмотрим $(x(t), \psi(t), u(t))$, $t \in [t_0, t$

$(x(t), \psi(t))$ — соотв. экстрем. процесс

$\dot\psi(t) = -M'_x(t, x(t), \psi(t))$

$t \in [t_0, t_1]$

$(\hat x(t), \hat\psi(t))$ — произв. допустимый процесс

$\hat x(t_0) = x_0$

$\hat u(t) \in U$

$t \in [t_0, t_1]$

$\Delta x(t) = \hat x(t) - x(t)$

$\Delta u(t) = \hat u(t) - u(t)$

$\boxed{\Delta J = J[u + \Delta u] - J[u]}$ это вычислить

$x(t_0) = 0$

$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) -$

$- f(t, x(t), u(t))$

$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} [f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) -$

$- f^0(t, x(t), u(t))] \, dt$

$(t_1) = 0$

ЛЕММА 1

$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} [K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) -$

$M(t, x(t), \psi(t)) -$

$(M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t))] \, dt$

$J = \Delta J + 0 =$

$\Delta J + (\psi(t), \Delta x(t)) \Big|^{t=t_1} -$

$= \Delta J + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\psi(t), \Delta x(t)) \, dt =$

$= \Delta J + \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{\psi}(t), \Delta x(t)) +$

$+ (\psi(t), \Delta \dot{x}(t))] \, dt =$

$= \int_{t_0}^{t_1} [f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) -$

$- f^0(t, x(t), u(t)) +$

$+ (\psi(t), f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) -$

$- (\psi(t), f(t, x(t), u(t)) -$

$- (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t))] \, d$

$= \int_{t_0}^{t_1} [K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) -$

$M(t, x(t), \psi(t))$

$- K(t, x(t), \psi(t), u(t)) -$

$- (M'(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t))] \, d$

$\Rightarrow$ т.к. $\quad = '' \quad \Rightarrow$

лемму 1 доказали.

<u>Лемма 2</u> $\Delta J \leq \Delta J^+ =$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [M(t, \hat{x}(t), \psi(t)) -$$

$$- M(t, x(t), \psi(t)) -$$

$$- (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \hat{x}(t) - x(t))] dt$$

$\Delta J^+ \leq 0$ - если сможем это обосновать, то получаем утв., что управление соответств. тройке и будет оптимальным.

$$\mathcal{D}(t, \hat{x}, x, \psi) =$$

$$= M(t, \hat{x}, \psi) - M(t, x, \psi) -$$

$$- (M'_x(t, x, \psi), \hat{x} - x))$$

$$\Delta J^+ = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{D}(t, \hat{x}(t), x(t), \psi(t)) dt$$

$X(t)$ - множество достижим. этой управл. системы.

Если $\hat{x}(t) = x(t) \Rightarrow$

$\mathcal{D}(t, x, x, \psi) = 0 \Rightarrow \Delta J^+ = 0$

$$\mathcal{D}_0(t) = \max_{\hat{x} \in X(t)} \mathcal{D}(t, \hat{x}, x(t), \psi(t))$$

$t \in [t_0, t_1]$.

Так как $\hat{x}(t)$ - произв. траект. $\Rightarrow \hat{x}(t) \in X(t)$

$\mathcal{D}_0(t) \geq 0$, $t \in [t_0, t_1]$.

<u>Теор. 1</u> Если $\mathcal{D}_0(t) = 0$ $\forall t \in [t_0, t_1]$, то экстрем. процесс $(x(t), u(t))$ является оптимальным

$$\Delta J \le \Delta J^{+} \le \int_{t_0}^{t_1} \max_{\hat{x}\in X(t)} \mathcal{D}(t, \hat{x}, x(t), \psi(t))\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{D}_0(t)\, dt .$$

$m(t,x) = M(t, x, \psi(t))$

$t \in [t_0, t_1]$

$x \in X^{+}(t)$

$x(t) \in X^{+}(t)$

Условие вогнутости

$m(t,\hat{x})$ вогнуто по вектору $\hat{x}$, если

$$m(t,\hat{x}) - m(t,x) - (m'_x(t,x), \hat{x} - x) \le 0$$

$\forall \hat{x}, x \in X^{+}(t)$

Если $\hat{x} = \hat{x}(t)$, $x = x(t)$, то условие вогнутости

$$M(t, \hat{x}(t), \psi(t)) - M(t, x(t), \psi(t)) - (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \hat{x}(t) - x(t)) \le 0$$

$\Delta J \le 0 \qquad \hat{x}(t)$

Теор. 2

$x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$

Достаточные условия оптимальности

$$\mathcal{D}_0(x) = \max_{\hat{x}\in X(t)\cap Y(t)} \mathcal{D}(t, \hat{x}(t), x(t)$$

$X(t)$ – мн-во достижимости управляемой системы, если $x(t_0) =$

$Y(t)$ – движение

в обратном времени
(мн-во достижимости
в обратном времени)

Математич. модель
малого предприятия

Производств. ф-ция

$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ — Кобба-Дугласа. ф-ция производст.

объём трудовых ресурсов

$\alpha + \beta = 1$

$\alpha \geq 0$

$\beta \geq 0$

...ъём ...питало-...ложений.

...бъём внеипущенной ...родукции.

$A = 1,01$

$\alpha = 0,25$ в 20-х годов

$\beta = 0,75$ Америки

30.09.0...

Опред. произв. ф-ции:

$f: D \to U$

$D \subseteq R^n_+$ - вект. затрат произв. ресурс...

$U \subseteq R^m_+$ - вектор колич. оценок. результат... произв. при опред. затрат ресурсов

$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$

производ. ф-ция

$\alpha \in (0, 1)$

$\beta \in (0, 1)$

$\alpha + \beta = 1$

K - объём капит.

L - объём трудовых ресурсов

объём вып. продукции

$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$

$K, L > 0.$ чем объём фондов больше, тем скорость уменьшается

$y = \frac{Y}{L}$ – средняя производит. труда.

z – средняя фондоотдача. $\cancel{z = \frac{Y}{L}}$ $z = \frac{Y}{K}$

$v = \frac{\partial F}{\partial L}$ – предел. произв. труда $= f - kf'$

$r = \frac{\partial F}{\partial K}$ – предельная фондоотдача $=$ $= f''$

$\alpha = \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}$ – коэфф $= \frac{kf'}{f}$

$\boxed{\text{эластичности}}$ по фондам

Коэф. $\boxed{\text{эластичности}}$

по труду. $\beta = \frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} =$

$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$

$\lambda > 0$

неоклассич. производ. ф-ция

$k = \frac{K}{L}, y = \frac{Y}{L}, f(k) = F(1$

$\boxed{y = f(k)}$

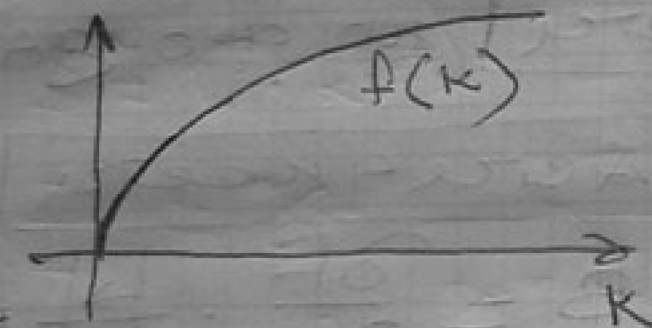
Средняя производ. труд

$f' > 0 \quad f'' < 0, f(0) = 0$

$\lim_{k \to \infty} f(k) = \infty$

$\lim f'(k) = \infty$

$\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$



например

$f = \sqrt{k}$ или

$f = k^{\alpha}$

$\alpha \in (0,1)$

Ашманов С.А. ~~Учебник~~ Введение в матем. экономику.

CES – производ. ф-ция.

$Y = F(K, L)$ – двух-фактор. произв. ф-ция

$K + \Delta K$

$$0 = dY = \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \underline{dK} + \frac{\partial F}{\partial L} \cdot \underline{dL}$$

$\boxed{\text{vtunnel.com}}$

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$$

$$S_k = -\frac{dK}{dL} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} -$$

предельная норма замещения. // далее k – маленькое

$$S_k = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k$$

$$S_k^{(\text{Кобб-Дуглас})} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot k -$$

линейная ф-ция от фондовоорyже

$$\sigma_k^{-1} = \frac{dS_k}{dk} \cdot \frac{k}{S_k}$$

$$\sigma_k = \boxed{-\frac{\gamma f'(f - kf')}{k[(1-\gamma)(f')^2 + ff'']}} = \ldots$$

// const

$\frac{dk}{ds}\cdot\frac{s}{k}=\sigma$

$s = C\cdot k^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}$

$\frac{f'}{f} = \cancel{\gamma}\ \frac{\gamma}{k + Ck^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}}$ // k – малое

$\ln f = \gamma\int\frac{dk}{k+C\cdot k^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}}$

$\boxed{k = t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}$

$\|$

$\frac{\sigma}{\sigma-1}\ln C_1\left(k^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}+C\right)$

$f = C_1\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+C\right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}$

$Y = C_1\left(K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+CL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}$

$\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}$

$Y = F(K,L) = A\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}}$

$A>0,\ 0\le\gamma\le 1,\ \rho\ge -1$

$Y = A\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{\left(-\frac{\gamma}{\rho}\right)}$

$\xi_1 k + \xi_2$

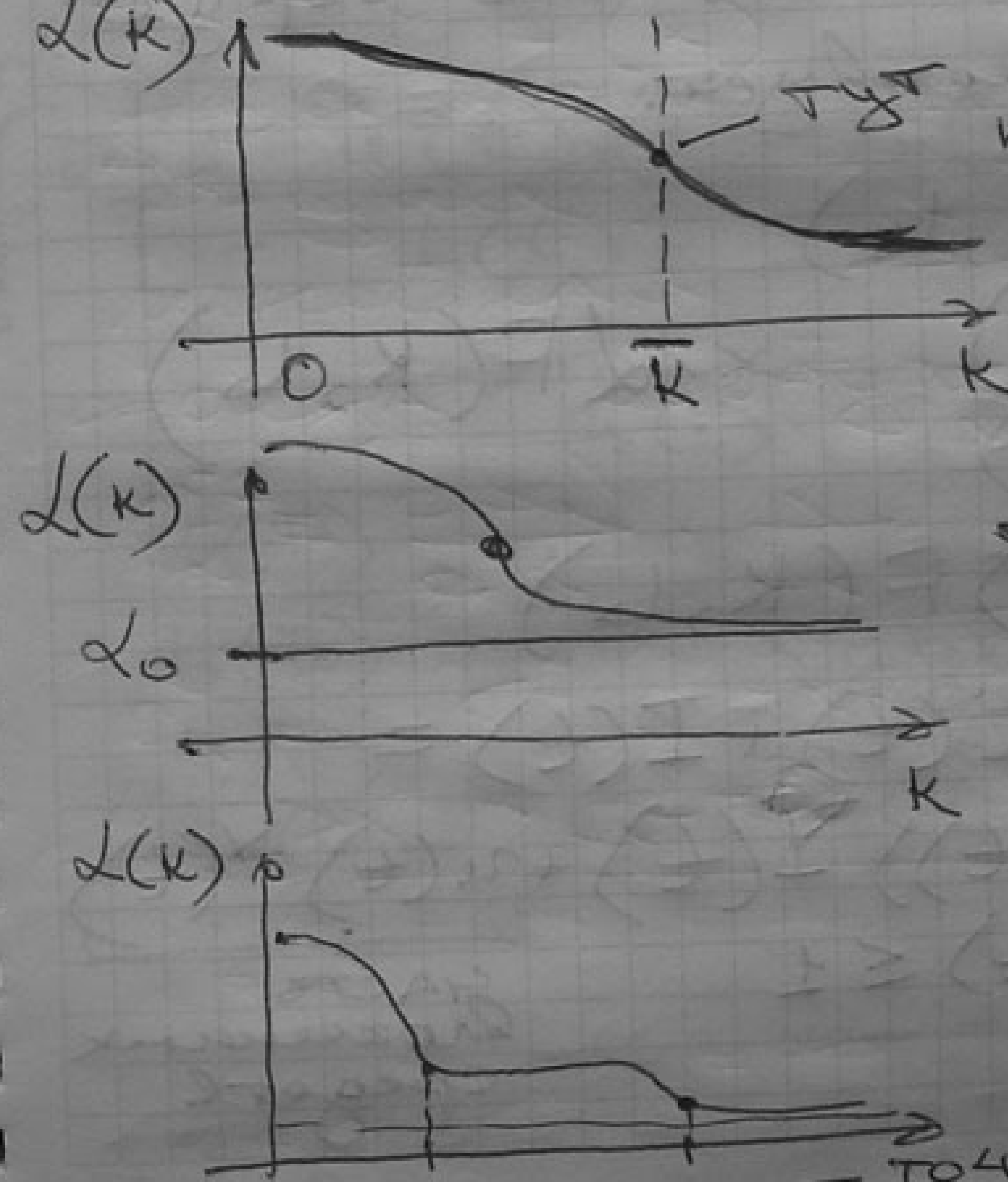
Какие производ. ф-ци...

Кобб-Дуг., CES,

CES × Кобб-Дуг. – чаще

всего встреч. на практи...

$Y_1 = A\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}}K^{\alpha}L\ldots$



показате...
эласти...
коэфе...

~~70~~

$\boxed{7.10.09.}$

Модель Рамсея (1924)

$\ldots = F(K, L)$

никто ничего не ворует,
не пьянствует.

$\ldots = \alpha F(K, L)$

$\alpha \in (0, 1) \qquad \alpha F(K, L)$

$\ldots = (1-\alpha) F(K, L)$

$Y(t) = C(t) + I(t) =$

$(1 - u(t)) Y(t) + \underbrace{u(t)\, Y(t)}_{\text{часть вложенных средств}}$

$0 \le u(t) \le 1$

Ур-ние для инвестиций:

$$\dot K(t) = \underbrace{u(t)}(1-\alpha) F(K(t), L(t)) - \mu K(t)$$

μ — коэфф. амортизации

$K(0) = K_0$

$K(T) \ge K_T$ — объём основных средств предприятия.

$$\int_0^{T} e^{-\delta t} \left[\frac{(1 - u(t))(1-\alpha) F(K(t), L(t))}{L(t)} \right] dt \to \max_{u(\cdot)}$$

$\dfrac{K(T)}{L(T)} \ge k_T$

$\dfrac{K(0)}{L(0)} = k_0$

— иметь такую фондовооружённость на момент времени T.

Задача ОУ такого вида.

$k = \frac{K}{L}$

малое

$c = \frac{C}{L}$

$f(k) = \cancel{f\left(\frac{K}{L}\right)}\ f\left(\frac{K}{L}, 1\right)$

$f'_k > 0 \quad f''_k < 0, \quad f(0) = 0$

$\lim_{k \to \infty} f(k) = \infty$

$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$

$\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$

$\dot{k} = u(t) f(k) - \mu \cdot k$

$k(0) = k_0$

$k(T) \geq k_T$

$0 \leq u(t) \leq 1$

$\int_0^T (1 - u(t)) f(k(t)) e^{-\delta t} dt \to \max$

ЗАДАЧА

$H(\psi, k, u, t) = (1-u) e^{-\delta t} f(k) +$

$+ \psi [u f(k) - \mu k]$

$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -(1-u) e^{-\delta t} f'(k) -$

$- \psi [u f'(k) - \mu]$

$\max_{0 \leq u \leq 1} H = f(k) e^{-\delta t} \max_{u \in [0,1]} [u \cdot$

$\cdot (\psi e^{\delta t} - 1)] +$

$+ e^{-\delta t} f(k) - \psi \mu k$

малое $\qquad$ малое

$\boxed{q = \psi e^{\delta t}}$ – обозначение

$u^*(t) = \begin{cases} 1, & q > 1 \\ 0, & q < 1 \\ u^{**}(t), & q \equiv 1. \end{cases}$

1-й шаг:

$H = \underbrace{\qquad}_{\text{некот. выраж.}} + u(q-1)$

$\frac{\partial H}{\partial u} = q - 1 \equiv 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) - \dot q =$$

$$\begin{cases} \dot q = \dot\psi e^{\delta t} + \underbrace{\psi\delta e^{\delta t}}_{=\delta q} = \cancel{(\dot\psi + \psi\delta)}e^{\delta t} \\ = \cancel{\delta q} + \dot\psi e^{\delta t} = \delta q - (1 - u + uq) f'(k) \end{cases}$$

$$(\delta + \mu) q$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = \dot q =$$

$$= (\delta+\mu) q - (1 + u(\underbrace{q-1}_{=0})) f'(k) =$$

$$= (\delta + \mu) q - f'(k) = 0$$

$$\boxed{f'(k) = \delta + \mu}$$

$k = k^*$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = (\delta+\mu)\dot q - f''(k)\dot k =$$

$$= (\delta+\mu)\left[\underbrace{(\delta+\mu) - f'(k)}_{=0}\right] -$$

$$- f''(k)(uf - \mu k) = 0$$

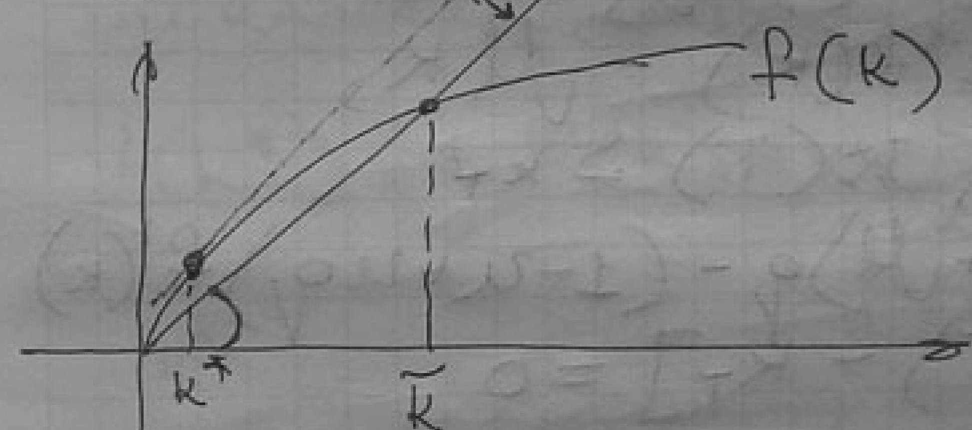
$$\boxed{u^{**} = \frac{\mu k^*}{f(k^*)}} \in [0, 1]$$

является ли допустимым - ???

$$\boxed{f(\tilde k) = \mu \cdot \tilde k}$$

При выполнении неоклассических условий

$k^* < \tilde k$



всегда $\tilde k$ расположена правее, чем k^*.

Условие Кэли:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial u}\right) \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(-f''(k)\cancel{f(u)}f\cdot u\right) =$$

$$= -f''(k)\, f \geq 0$$

$$u^*(q) = \begin{cases} 1, & q > 1 \\ 0, & q < 1 \\ \frac{\mu k^*}{f(k^*)}, & q \equiv 1 \end{cases}$$

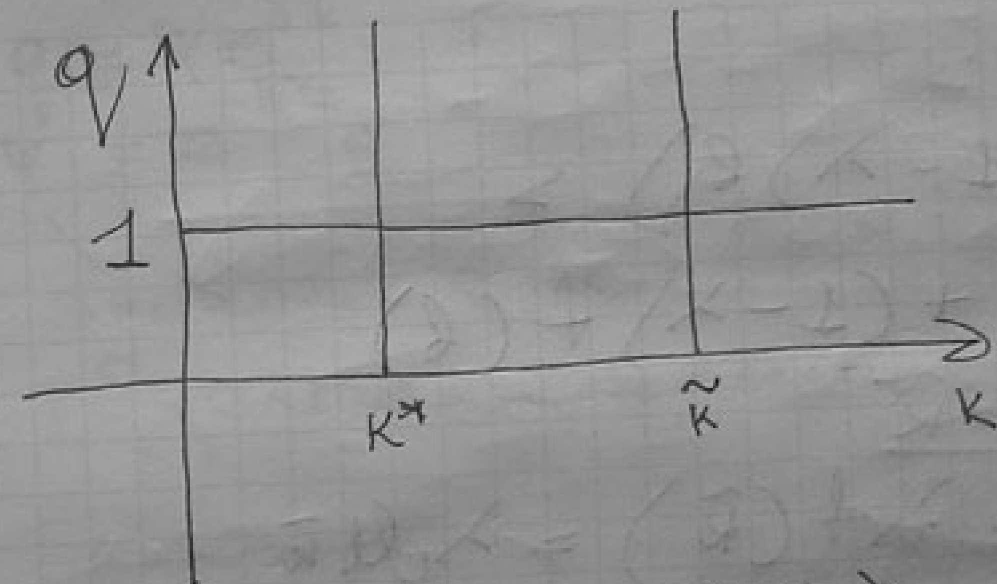
$$f'(k^*) = \delta + \mu. \quad \cancel{u^{**}(k^*)}$$

Краевая задача:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = u^* f(k) - \mu k, \\ k(0) = k_0, \ k(T) \geq k_T \\ \dot{q}(t) = (\delta+\mu) q - (1 - u + uq) f'(k) \\ q(T)\left[k(T) - k_T\right] = 0 \end{cases}$$

$\boxed{1)\ q > 1}$

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k) - \mu k \\ \dot{f} = (\delta+\mu) q - q f'(k) \end{cases}$$



$$f'(k^*) = \delta + \mu \qquad f(\tilde{k}) = \mu \tilde{k}$$

Вначале аккуратно покажем, что $k^* < \tilde{k}$.

$$f(k^*) = \int_0^{k^*} f'(k)\,dk > \quad \substack{k \in [0, k^*] \\ f'(k) > \delta + \mu}$$

$$> \int_0^{k^*} (\delta + \mu)\,dk = (\delta + \mu) k^* > \mu k^*$$

в (.) k^*: $f(k^*) > \mu k^*$

в (.) $\tilde{k}$: $f(\tilde{k}) > \mu \tilde{k}$

$f''(k)<0$

$f(\lambda a+(1-\lambda)b) >$

$> \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$

$b=0,\ a=\tilde{k}$

$f(\lambda\tilde{k}) > \lambda f(\tilde{k}) = \lambda M\tilde{k}$

т. к. $\lambda\in(0,1)$

$f(\lambda\tilde{k}) > M(\lambda\tilde{k})$

$\boxed{k^*<\tilde{k}}$ — это мы доказали.

— качеств. вид траекторий.

$\frac{d^2q}{dk^2} = \dots$ //не написал.

особый режим. (это одна эта точка)

$q=\psi e^{\delta t}$

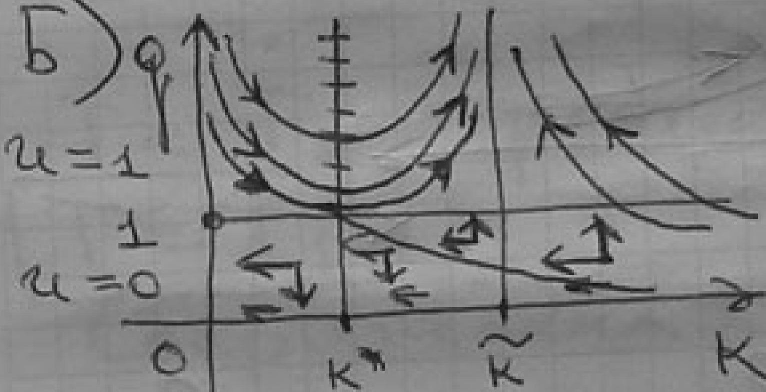
$\psi = e^{-\delta t} q$

эконом. смысл: эффективн… обусловл. цены.

14.10.09

2-й случай

б)



← " - вектор "скоростей"

— //внизу выгнутые траектории

$f'(k^*)=\delta+M$

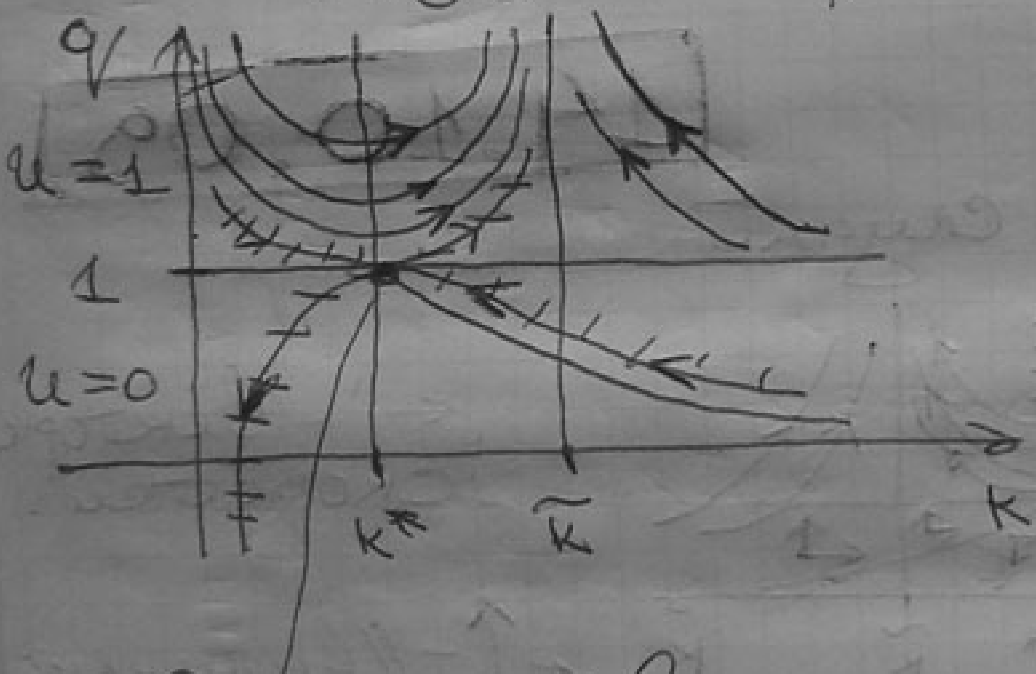
$f(k)=Mk$

б) $u^* = 0$

$$\begin{cases} \dot{k} = -\mu k \\ \dot{q} = (\delta+\mu) q - f'(k) \end{cases}$$

$$q = \frac{f'(k)}{\delta+\mu}$$

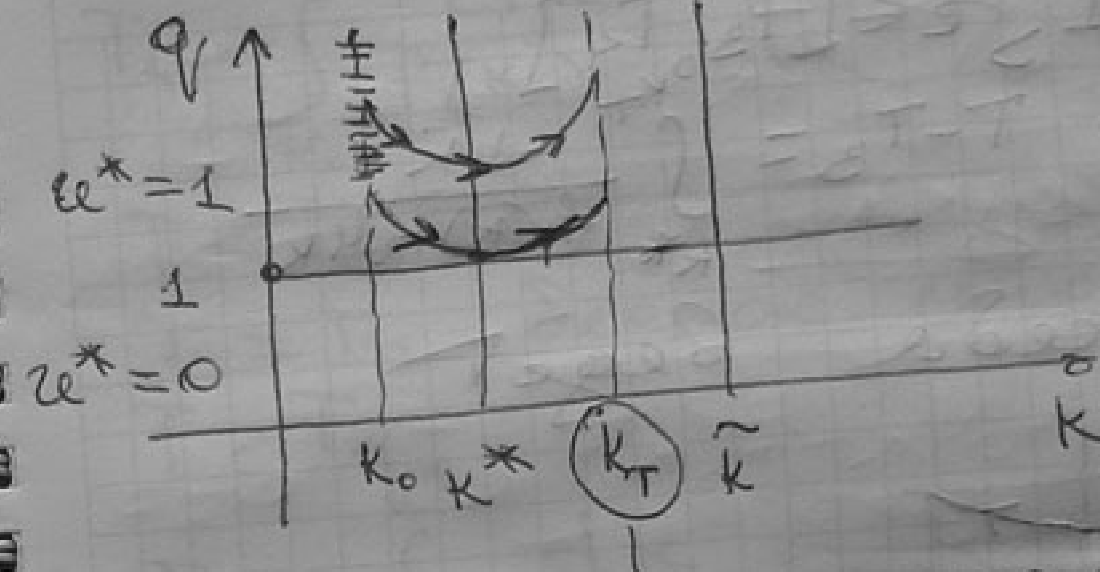
/ Рамсей.



Входит / выходит в эту точку.

$k_0 \quad k_T$ – есть в нашей задаче.

Надо определить: $T, u^*(t)$



не приходим

$$T_1 = \int_{k_0}^{k_T} \frac{dk}{f(k) - \mu k}$$

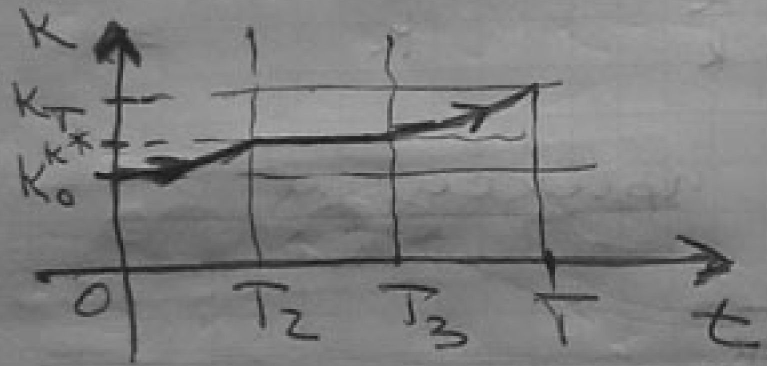
$T < T_1$ – решений нет.

$\boxed{T = T_1}$ Сопряженная перемен. эффективно обделова. цена.

$T > T_1$ $\quad u^*(t) = \begin{cases} 1, t \in [0, T \\ T_2 = \int_{k_0}^{k^*} \frac{dk}{f(k) - \mu \ldots} \\ \frac{\mu k^*}{f(k^*)}, t \in [\ldots \end{cases}$

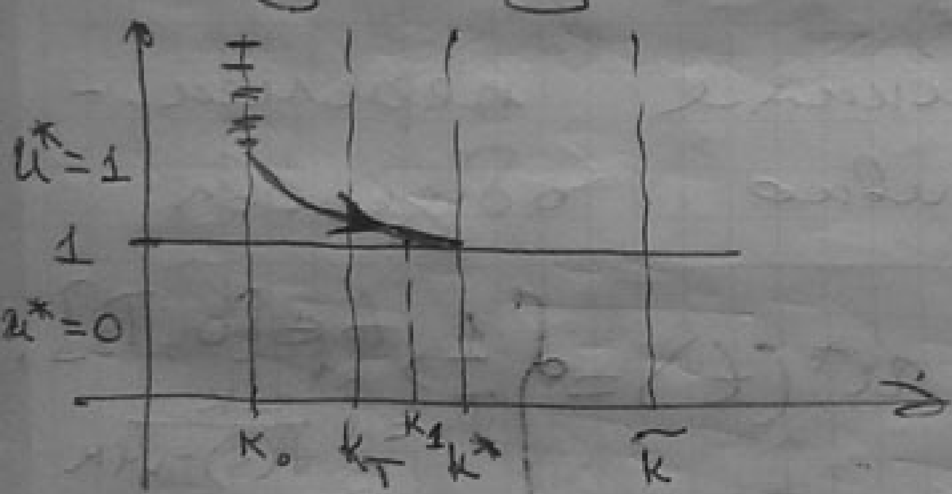
$$\begin{cases} 1, t\in[T_3, T_4], \\ T - T_3 = \int\limits_{k^*}^{k_T} \frac{dk}{f(k)-\mu k} \end{cases}$$

Как себя ведёт



$k_T > k_0$

След. случай:



$$T_4 = \int\limits_{k_0}^{k_T} \frac{dk}{f(k)-\mu k}$$

$T < T_4$ $\varnothing$

$T = T_4$ – бескон. много

$T > T_4$

$$T_5 = \int\limits_{k_0}^{k^*} \frac{dk}{f(k)-\mu k}$$

Решать $T_5 > T > T_4$

$$T_6 : \int\limits_{k_0}^{k_1} \frac{dk}{f(k)-\mu k} + \int\limits_{k_1}^{k_T} \frac{dk}{(-\mu k)} =$$

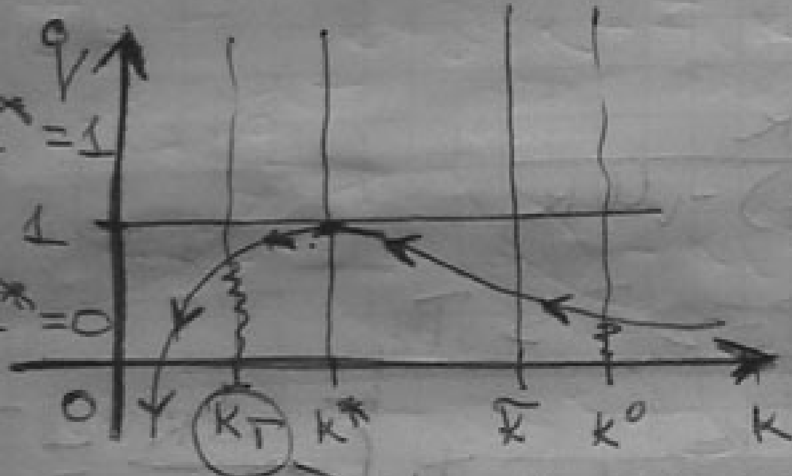
* ур-ние относит. уровня k_1.

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, t\in[0, T_6] \\ 0, t\in[T_6, T] \end{cases}$$

Если $T > T_5$

3-й случай

$k_0 > k_T$



ф-л качества.

Как устроено решение при этих значениях k^0, T.

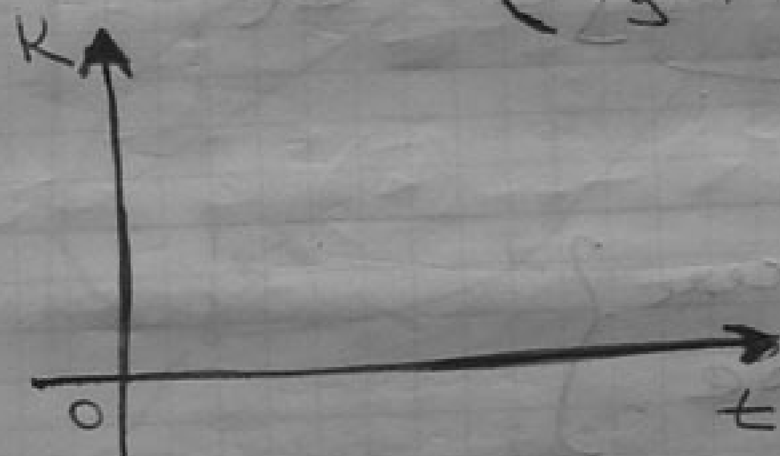
$$T_7 = \int_{k_0}^{k_T} \frac{dk}{\mu k}$$

Если $T < T_7$, то решения задачи управл. нет.

$T = T_7$ — бесконечно много решений.

$T > T_7$

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_8] \\ & T_8 = \int_{k_0}^{k^*} \frac{dk}{-\mu k} \\ \frac{\mu k^*}{f(k^*)}, & t \in [T_8, T - T_9], \\ 0, & t \in [T - T_9, T], \\ & T_9 = T_7 - T_8 \end{cases}$$



Достаточность ПМП для модели Рамсея.

$\dot{k} = u f(k) - \mu k, \quad u \in [0, 1]$

$J = \int_0^T -(1-u) f(k) e^{-\delta t} dt \to \min$

$J = \int_0^T [\dot{k} + \mu k - f(k)] e^{-\delta t} dt =$

$= e^{-\delta T} k(T) - k(0) + \int_0^T [\underbrace{(\mu+\delta) k - f(k)}_{\Omega(k)}] e^{-\delta t} dt$

$\left\{ \begin{array}{l} \bar{k}(t) - \text{оптим.} \\ k(t) - \text{любое} \end{array} \right\}$

$\Delta J = J(k) - J(\bar{k}) =$

$= \int_0^T (\Omega(k) - \Omega(\bar{k})) e^{-\delta t} dt \geq 0$

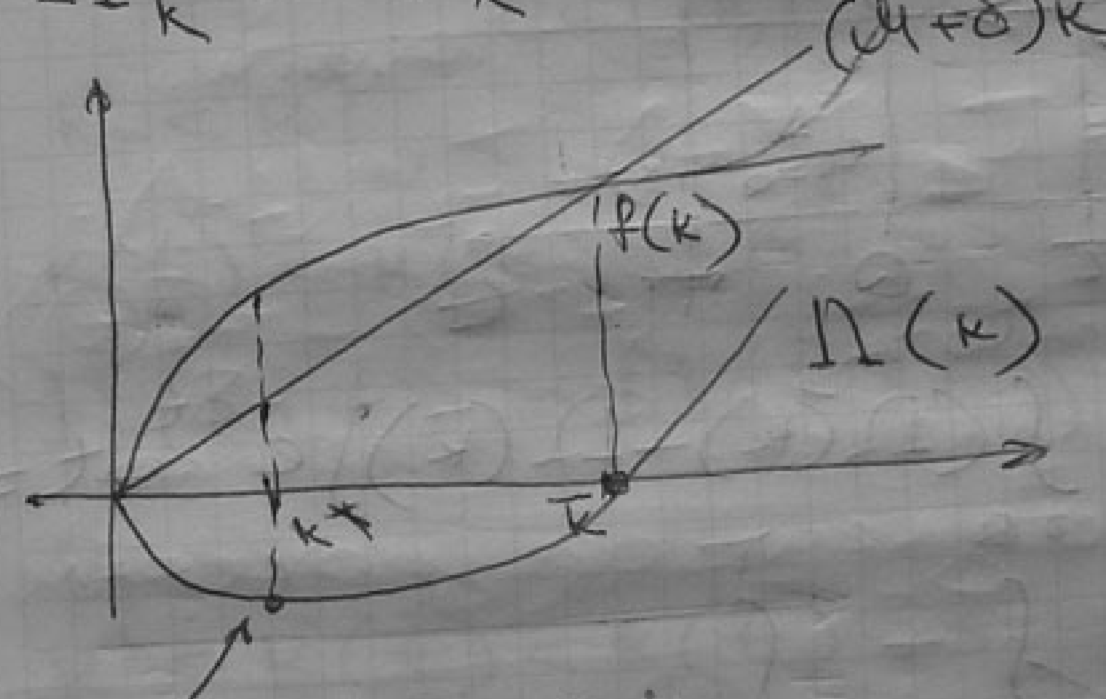
$\Omega(k) = (\mu + \delta) k - f(k)$

$\Omega(0) = 0$

$\Omega(\tilde{k}) = 0 \quad (\tilde{k} : f(\tilde{k}) = (\mu+\delta)\tilde{k})$

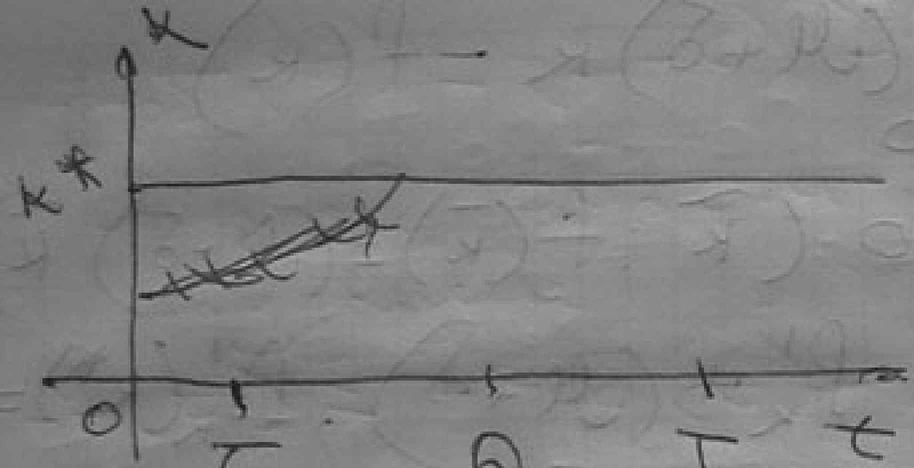
$\Omega'_k(k) = -f'_k + (\mu + \delta), \quad \Omega'_k(k^*) = 0$

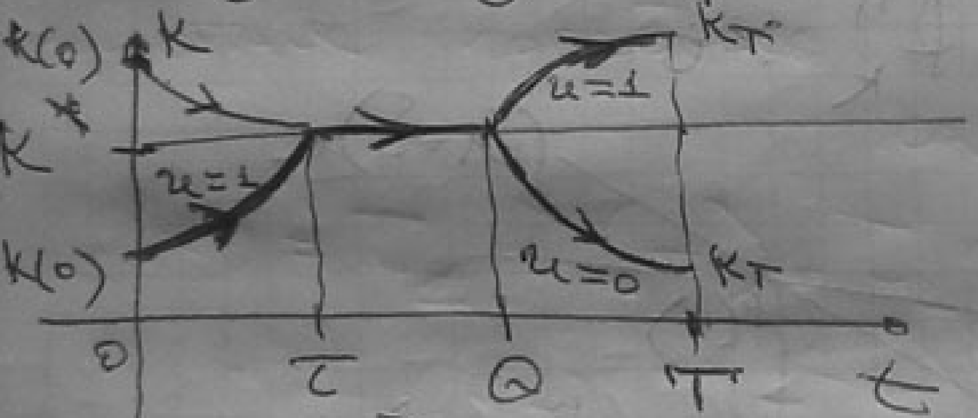
$\Omega''_k = -f''_k > 0$



достигает min.

$\Delta J = \int_0^T (\Omega(k) - \Omega(\bar{k})) e^{-\delta t} dt$





$$\Delta J = \int_0^T \left(\Pi(k) - \Pi(\bar{k})\right) e^{-\delta t}\, dt = \int_0^\tau + \int_\tau^\Theta + \int_\Theta^T$$

$$\int_\tau^\Theta \left(\Pi(k(t)) - \Pi(\underset{\overset{\|}{k^*}}{\bar{k}(t)})\right] e^{-\delta t}\, dt \geq 0$$

$$\int_0^T \left[\Pi(k(t)) - \Pi(\bar{k}(t))\right] e^{-\delta t}\, dt \geq 0$$

$$k(t) \leq \bar{k}(t) \leq k^*, \quad t \in [0, \tau]$$

$$0 \geq \Pi(k(t)) \geq \Pi(\bar{k}(t))$$

$$t \in [0, T],$$

$$k_T < k^*,$$

$$k(t) < \bar{k}(t) \leq k^* \Rightarrow$$

$$\Pi(k(t)) > \Pi(\bar{k}(t))$$

$$k_T > k^*,$$

$$k^* < \bar{k}(t) < k(t) \Rightarrow$$

$$\Pi(\bar{k}(t)) < \Pi(k(t)).$$

Имеем $F(K, L)$ – произв. ф-ция.

$$Y(f) = f\, F(K, L)$$

$$M_{об}(t) = (1-c)\,Y(t)$$

общий объём выпуск. продукции.

$$M(t) = M_{об}(t) - N(t)$$

чистая прибыль | налоги.

$$N(t) = \tau_1 Y(t) + \tau_2 \eta (1-\xi)\cdot((1-c)\,Y - N(t))$$

{ставка налога}

ξ — вкладов в пр-во

$(1-\xi)$ — отдаём акционерам.

$$\boxed{21.10.09.}$$

$Y(t)$ — выпуск. пр-ции в момент t.

f — показатель фондоотдачи.

$K(t)$ — основные производ. фонды.

c — удельная себестоимость

$M_{общ}(t)$ — общая прибыль

$M(t)$ — чистая прибыль.

$N(t)$ — налоговые отчисл.

$$P(t) = \underbrace{f}_{\text{продаже. цена}}\, F(K, L)$$

$$M_{общ}(t) = (1-c)\,P(t)$$

$$M(t) = M_{общ}(t) - N(t)$$

~~подставим~~

налоги

$$N(t) = \tau_1 P(t) + \tau_2 \kappa (1-\xi)\, M(t)$$

доля чистой прибыли, отчисл. на ре-инвестирование

подставим

$0 \le k \le 1$

$0 \le \varsigma \le 1$

Подставим:

$$N(t) = \frac{[\tau_1 + \tau_2 k(1-\varsigma)(1-\varphi)]\,P(t)}{1+\tau_2 k(1-\varsigma)}$$

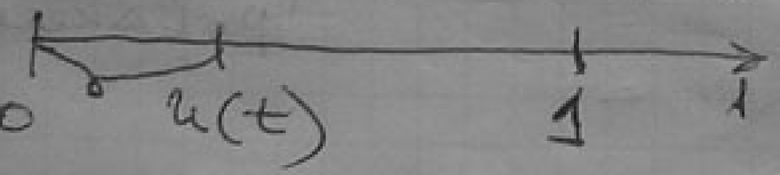
$$\frac{dH(t)}{dt} = \varsigma M(t) - \mu K(t)$$

Теперь $N(t)$ подставляем в $M(t) = M_{общ}(t) - N(t)$.

$$M(t) = \varsigma\left[\frac{1-c-\tau_1}{1+\tau_2 k(1-\varsigma)}\right] P(t)$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = \hat{a} P(t) - \mu K(t)$$

$$\hat{a} = \varsigma\,\frac{1-c-\tau_1}{1+\tau_2 k(1-\varsigma)}$$



$T(u(\cdot))$

$K(0) = K_0$, $\boxed{K(T) = K_T}$

$$\int_0^T e^{-\delta t}(1-u)H(t)\,dt \to \max_{u(\cdot)}$$

Модель Эндогенного Научно-Технич. Прогресса.

Экзогенные улуч. — деньги на научные разработки взяты извне.

K — объём основных фондов.

L — объём трудовых ресурсов.

Q — суммарное вложение в научно-технич.-прогре

$F(K, L)$

$A(Q)$ – мультипликатор прогресса.

$Y = A(Q) F(K, L)$

~~$g(K)$~~ $g(K)\cdot h(L)$

$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$

$F(0, L) = F(K, 0) = 0$

$F(K, \infty) = F(\infty, L) = \infty$

$A'(Q) \geq 0 \quad A''(Q) < 0$

$A(0) = 1$

$\lim_{Q \to \infty} A(Q) = \infty$

$\lim_{Q \to \infty} A'(Q) = 0$

$\lim_{Q \to 0} A'(Q) = \infty$

$0 \leq u \leq 1$

$Y = uY + (1-u)Y$

$$\begin{cases} \dot{K} = uY = u A(Q) g(K) h(L) \\ K(0) = K_0 \\ \dot{Q} = (1-u)Y = (1-u) A(Q) \times \\ \times g(K) h(L) \\ Q(0) = Q_0 \\ \dot{L} = p(L), \; L(0) = L_0 \end{cases}$$

Цель управления

$K(T) = \bar{K}$.

$T \to \min$ – задача быстродействия.

Пусть ψ_1, ψ_2, ψ_3 – сопр. же переменные.

$H = \psi_1 u Y + \psi_2 (1-u) Y + \psi_3 p(L)$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = - \psi_1 u \frac{\partial Y}{\partial K} - \psi_2 (1-u) \frac{\partial Y}{\partial K} \\ \dot{\psi}_2 = - \psi_1 u \frac{\partial Y}{\partial Q} - \psi_2 (1-u) \frac{\partial Y}{\partial Q} \\ \dot{\psi}_3 = - \psi_1 u \frac{\partial Y}{\partial L} - \psi_2 (1-u) \frac{\partial Y}{\partial L} - \psi_3 p'(L) \end{cases}$$

Условия трансверсал.

$$\psi_1(T)=1,\quad \psi_2(T)=0,\quad \psi_3(T)=0$$

$$\varphi(t)=\psi_1(t)-\psi_2(t)$$

$$u^*(t)=\begin{cases}0, & \varphi(t)<0\\ 1, & \varphi(t)>0\\ u^{**}(t), & \varphi(t)\equiv 0\end{cases}$$

Особый режим.

$$\varphi(t)\equiv 0,\quad t\in[t_1,t_2]$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=(\psi_1-\psi_2)\Psi\equiv 0 \Rightarrow$$

1-е соотношение

$$\boxed{\psi_1(t)\equiv\psi_2(t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)=(\dot\psi_1-\dot\psi_2)\Psi+\underbrace{(\psi_1-\psi_2)}_{=0}\dot\Psi=0$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial K}-\frac{\partial \tilde I}{\partial Q}\right)\underbrace{(-\psi_1 u-\psi_2(1-u))}_{\neq 0}\underbrace{\tilde I}_{\neq 0}=0$$

$\Rightarrow$ получаем след.

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=\frac{\partial \tilde I}{\partial Q}$$

$$\boxed{\frac{A(Q)}{A'(Q)}=\frac{g(K)}{g'(K)}\equiv\tilde g(K)}$$

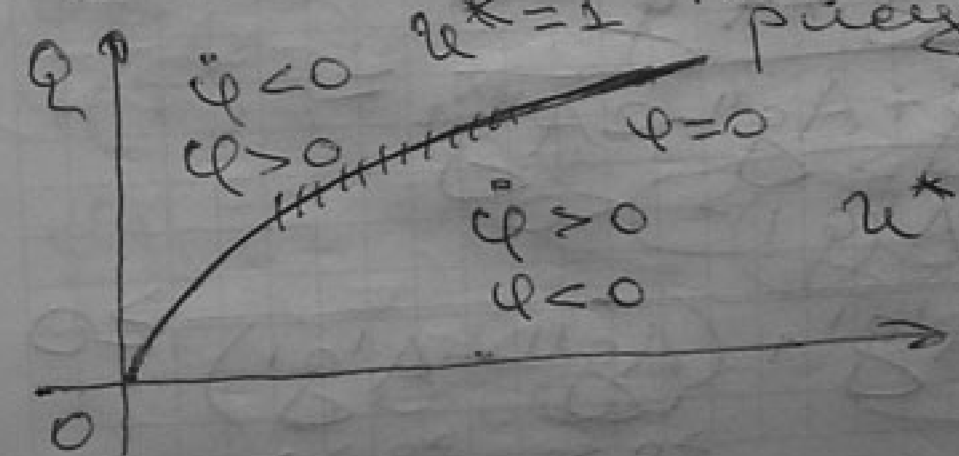
$$\tilde A(Q)=\frac{A(Q)}{A'(Q)}$$

$\tilde A(Q)$ – монот. возр.

Можно записать:

$$\boxed{Q=\tilde A^{-1}\tilde g(K)}$$

Получающийся рисунок.



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial H}{\partial k}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Y}{\partial k}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Y}{\partial Q}\right)=$$

$$=(A(Q)g'(k)h(L))'-$$

$$-(A'(Q)g(k)h(L))'=$$

$$=Q''(A'_Q g'_k-A''g)+$$

$$+k'(Ag''-A'g')\leq 0$$

После такой группировки:

$$(A'g'-A''g)=$$

$$=u(2A'g'-A''g-Ag'')$$

$$u^{**}=\frac{-A'g'+A''g}{A''g+Ag''-2A'g'}=$$

$$=\frac{\overbrace{A''g-A'g'}^{<0}}{\underbrace{A''g-A'g'}_{<0}+(\underbrace{Ag''}_{>0\ <0}-\underbrace{A'g'}_{>0\ >0})}\geq 0$$

$$u^{**}=\frac{\tilde{A}'(Q)}{\tilde{A}'(Q)+\tilde{g}'(k)}\leq 1.$$

Ф-ция, обратная к возраст. является возраст.

Когда $k\to 0$, $Q\to 0$.

<u>Лемма 1.</u>

$\psi_1(t)>0 \quad \forall\, t<T$

$\psi_2(t)>0 \quad \forall\, t<T$

<u>Док-во:</u>

$u\geq 0,\ (1-u)\geq 0,$

$\frac{\partial\psi}{\partial k}>0,\ \frac{\partial\psi}{\partial Q}>0,$

$\psi(T)=1,\ \psi_2(T)=0$

$$\frac{d\psi_1}{d\psi_2}=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial k}}{\frac{\partial\psi}{\partial Q}}$$

$$\int_t^T d\psi_1 = \frac{\frac{\partial Y}{\partial K}}{\frac{\partial Y}{\partial Q}} \int_t^T d\psi_2,$$

$$f(K,Q)$$

$$\underbrace{\psi_1(T)}_{=1} - \psi_1(t) = f(K,Q)\,(\underbrace{\psi_2(T)}_{=0} - \psi_2(t))$$

$$\boxed{\psi_1(t) = 1 + f(K,Q)\,\psi_2(t)}$$

$\forall t \in [0,T)$

$$\dot\psi_2(t) = -\varkappa \frac{\partial Y}{\partial Q}(1 + f(K,Q)\psi_2) - \psi_2(1-\varkappa)\frac{\partial Y}{\partial Q} =$$

$$= -\underbrace{\frac{\partial Y}{\partial Q}\,\underbrace{a}_{>0}}_{b_2^{>0}(t)>0} - \psi_2\underbrace{\left(\varkappa\frac{\partial Y}{\partial K} + (1-\varkappa)\frac{\partial Y}{\partial Q}\right)}_{a_2(t)>0} =$$

$$= -\underbrace{a_2(t)}_{>0}\psi_2 - \underbrace{b_2(t)}_{>0}$$

$$\psi_2(t) = e^{\int_0^t -a_2(\tau)d\tau}.$$

$$\cdot\left(\psi_2^0 - \int_0^t \underbrace{e^{-\int_s^t a_2(\tau)d\tau}}_{>0} \underbrace{b_2(s)}_{>0} ds\right)$$

$$\psi_2(T) = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_2^0 = \int_0^T e^{-\int_s^T a(\tau)d\tau} b_2(s)ds > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_2(t) > 0 \quad \forall t < T.}$$

Аналогично $\psi_2(t) > 0$.

28.10.09.

$\dot{k} = uY = uA(Q)g(k)h(L)$

$k(0) = k_0$

$\dot{Q} = (1-u)Y =$

$= (1-u)A(Q)g(k)h(L)$

$Q(0) = Q_0$

$\dot{L} = p(L)$, $L(0) = L_0$

$k(T) = k_T$

$T \to \min$

$0 \le u \le 1$

$\dot{k} = uf(k) - \mu k$

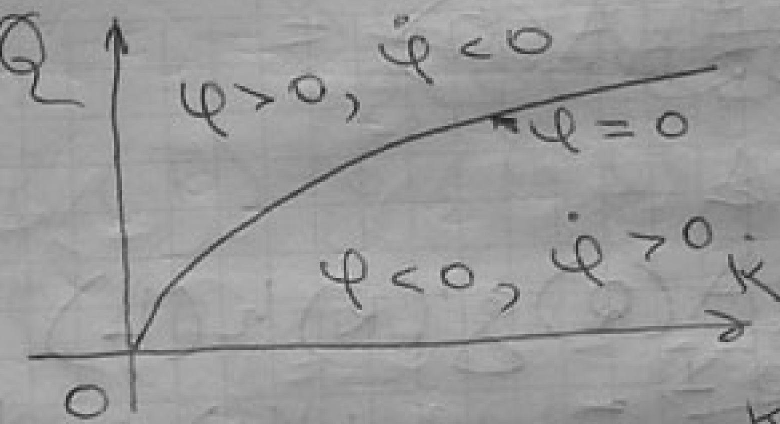
Лемма 1

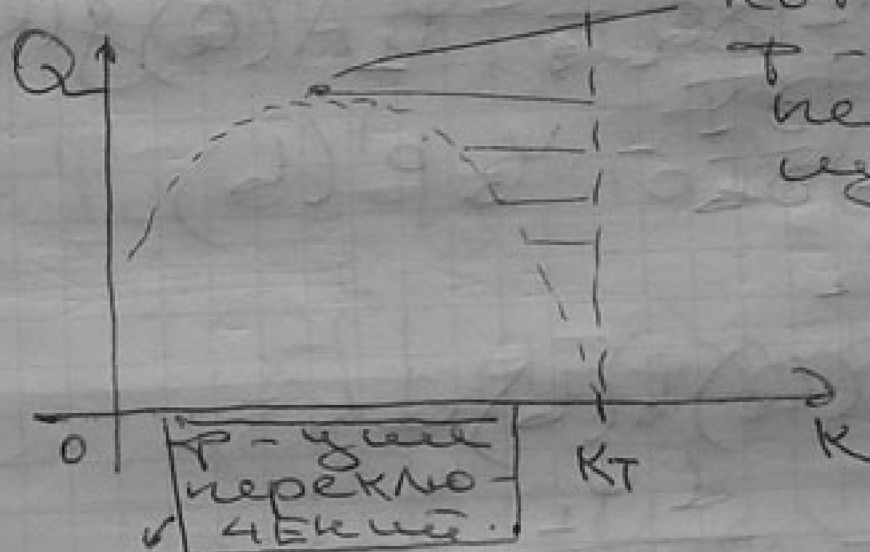
Сопряж. $\psi_1(t) > 0 \quad \forall t < T$.

$\psi_2(t) > 0 \quad \forall t < T$.

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2 = (-\underbrace{\psi_1}_{>0} u - \underbrace{\psi_2}_{>0}(1-u)) \times \left(\frac{\partial Y}{\partial k} - \frac{\partial Y}{\partial Q}\right)$$

$$\text{sign}\ \dot{\varphi} = -\text{sign}\left(\frac{\partial Y}{\partial k} - \frac{\partial Y}{\partial Q}\right)$$





когда ф-ция переключ. изменяет знак.

$\varphi(T) = 1 = \psi_1(T) - \psi_2(T)$

$\varphi(t) > 0$ в некот. окре

$u(t) = 1$

$\dot{k} = Y = A(Q)g(k)h(L)$

$\dot{Q} = 0$

$\dot{L} = p(L)$

$$\dot\psi_1 = -\psi_1 \frac{\partial I}{\partial K} = \cancel{A(Q)} =$$

$$= \cancel{-\psi_1 A}$$

$$= -\psi_1 A(Q) g'(K) h(L)$$

$$\dot\psi_2 = -\psi_1 \frac{\partial I}{\partial Q} = -\psi_1 A'(Q) g(K) h(L)$$

$$\dot\psi_3 = -\psi_1 \frac{\partial I}{\partial L} - \psi_3 p'(L)$$

$$\psi = \psi_1 - \psi_2$$

$$\frac{dK}{g(K)} = A(Q) h(L)\, dt = -\frac{d\psi_1}{g'(K)\psi_1}$$

$$\int_t^T \frac{dg(K)}{g(K)} = -\int_t^T \frac{d\psi_1}{\psi_1}$$

$$K(T) = K_T,\ \psi_1(T) = 1$$

$$\boxed{\psi_1(t) = \frac{g(K_T)}{g(K(t))}}$$

$$\dot\psi_2 = -\frac{g(K_T)}{g(K)} A'(Q) g(K) h(L)$$

$$\psi_2(T) = 0,\ Q(t)_t = Q(T)$$

$$\psi_2(t) = \psi_2(0) - \int g(K_T) \times A'(Q) h(L)\, dt = \psi_i(0) - g(K_T) A'(Q(t)) \times \int_0^t h(L(t))\, dt$$

$$0 = \psi_2(T) = \psi_2(0) - g(K_T) A'(Q(T)) \int^T h(L)\, d$$

$$\psi_2(t) = \psi_2(0) - g(\dot K_T) A'(Q(\times \int_t^T h(L)\, dt$$

подставлено в

$$\psi = \psi_1 - \psi_2$$

$$\varphi = \psi_1 - \psi_2 = \frac{g(K_T)}{g(K)} - g(K_T)A'(Q(T))\int_t^T h(L)\,dt =$$

$$= g(K_T)\left[\frac{1}{g(K)} - A'(Q(t))\int_t^T h(L)\,dt\right]$$

$$t = T,\ \varphi = 1$$

$$u^* = 1,\ \varphi > 0,\ t \in [\hat{t}, T]$$

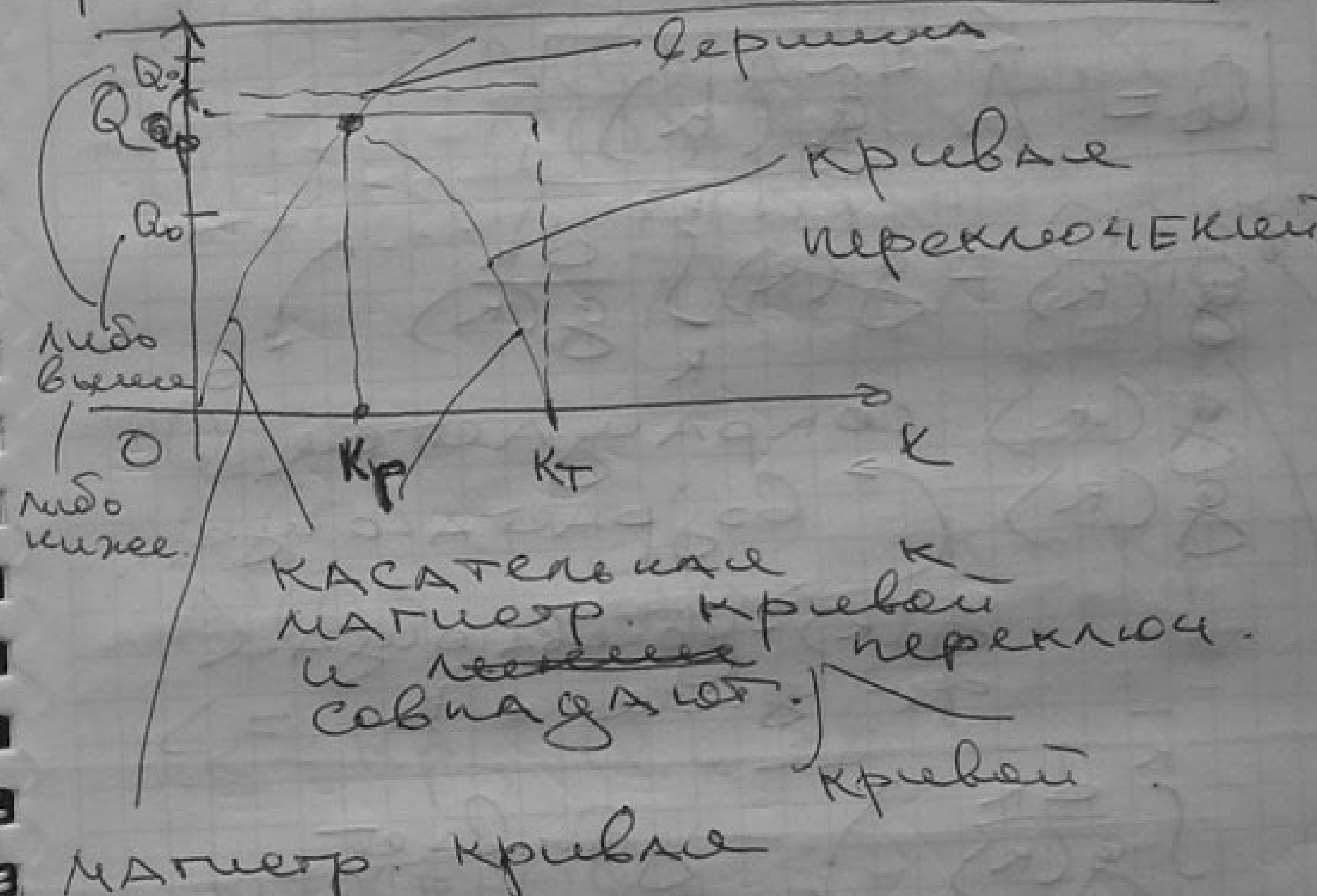
$$\boxed{\int_{\hat{t}}^{T} h(L(\tau))\,d\tau = \frac{1}{g(K)A'(Q(T))}}$$

$$\int_K^{K_T} \frac{dK}{A(Q)g(K)} = \int_{\hat{t}}^{T} h(L)\,dt$$

проинтегрируем:

$$g(K)\int_K^{K_T}\frac{dK}{g(K)} = \frac{A(Q)}{A'(Q)} = \hat{A}(Q)$$

$$\boxed{Q = \hat{A}^{-1}\left(g(K)\int_K^{K_T}\frac{dK}{g(K)}\right)}$$



Если $K = 0 \Rightarrow g(K) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{A(Q)}{A'(Q)} = 0 \Rightarrow Q = 0$$

$$K = K_T,\ \int_K^{K_T}\frac{dK}{g(K)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{A(Q)}{A'(Q)} = 0 \Rightarrow Q = 0$$

$$\boxed{Q = \tilde{A}^{-1}\tilde{g}(k)}$$

$$\frac{g(k)}{g'(k)} = g(k)\int_k^{\bar{k}} \frac{dk}{g(k)} \to 0$$

$g(k)$ сокращается.

$g(k)$ возрастающая.

$g'(k)$ – убывающая ф-ция k. $\Rightarrow$

$$\int_k^{\bar{k}} \frac{dk}{g(k)} \to 0 \text{ – убывает.}$$

единств. корень: k_p

$$g'(k)\cdot\int_k^{k_T}\frac{dk}{g(k)} - g(k)\cdot\frac{1}{g(k)} = \left(\frac{A(Q)}{A'(Q)}\right)'\cdot Q'_k$$

$$\int_k^{k_T}\frac{dk}{g(k)} = \frac{A(Q)}{A'(Q)\,g(k)}$$

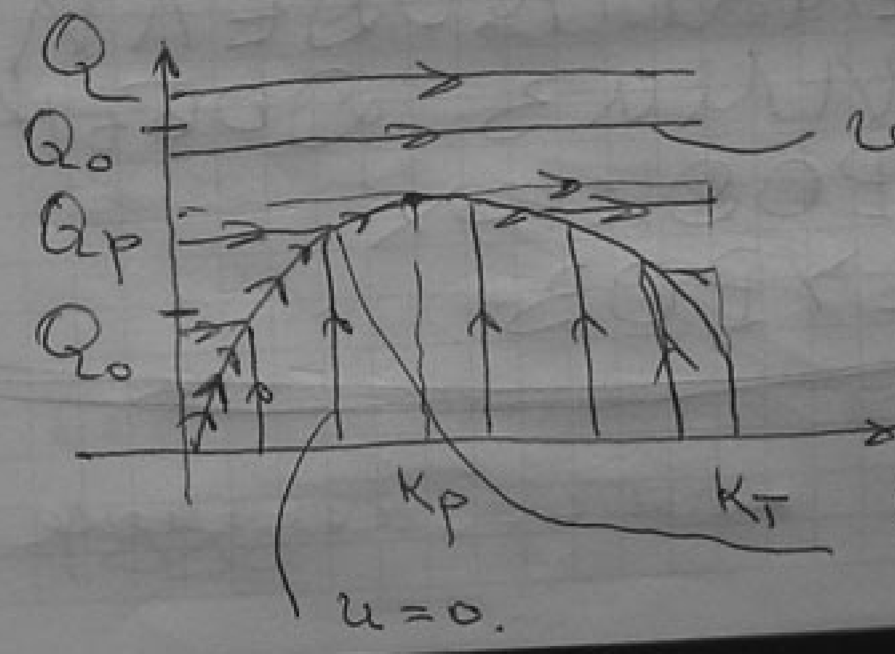
$$Q'_k = \frac{\left(\frac{A(Q)}{A'(Q)}\frac{g'(k)}{g(k)} - 1\right)}{\left(\frac{A(Q)}{A'(Q)}\right)'}$$

$$Q'_k = 0$$

$$\frac{A(Q)}{A'(Q)} = \frac{g(k)}{g'(k)},\quad k = k_p.$$

$k < k_p$, $Q'_k > 0$.

$k > k_p$, $Q'_k < 0$



движение по маг. кривой.

$$r^* = \frac{\tilde{A}'(Q)}{\tilde{A}'(Q)+\tilde{g}'(K)}$$

K_T – сколько уйдёт на это время ???

$Q(t)$

K_T

T

Мультипликатор прогресса

$$Y = A(Q)F(K, L)$$

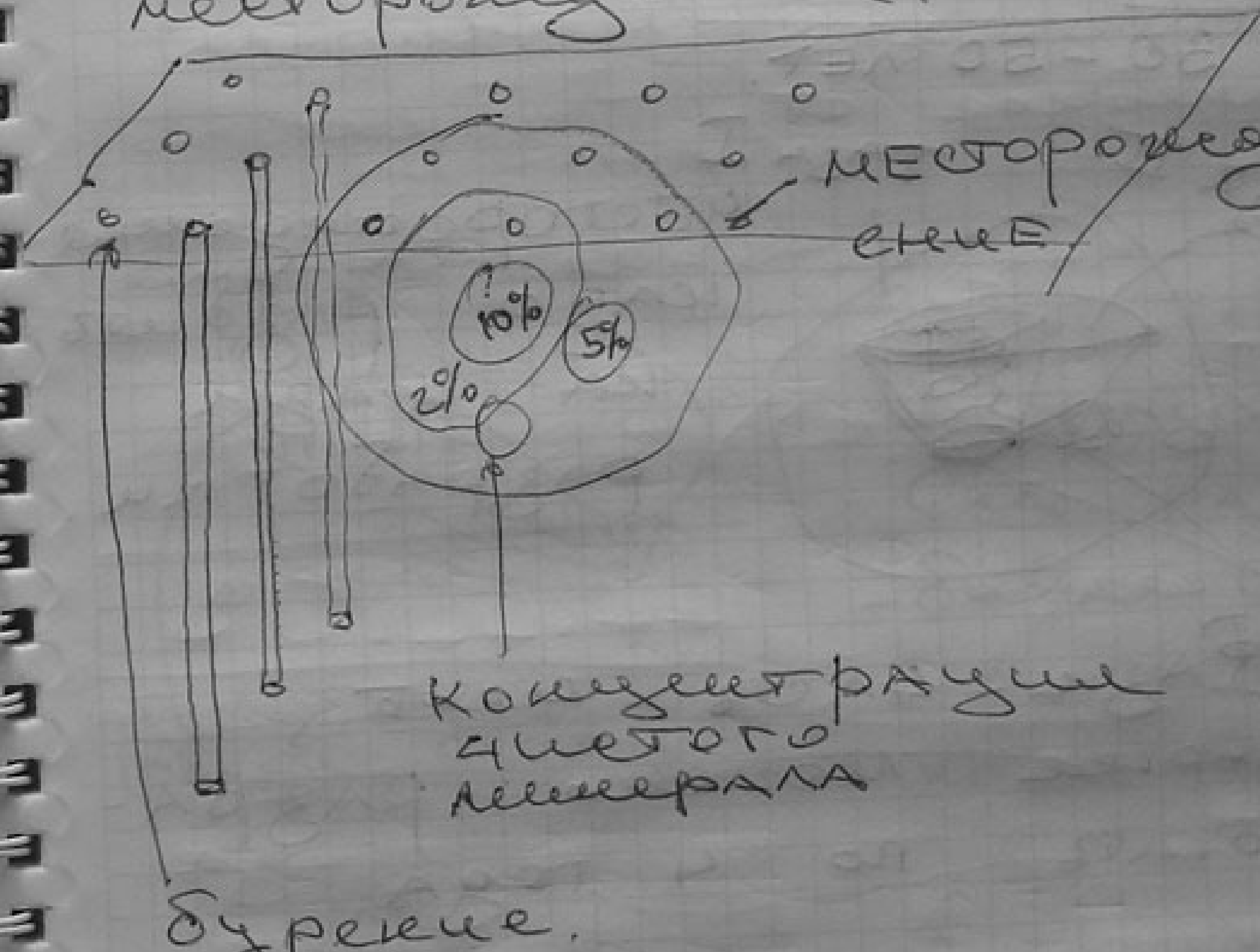
3

МАТЕМАТ. МОДЕЛИ ОПТИМИЗ. ДОБЫЧИ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ.

Добыча минерала.

I-й этап: оценка кол-во ископаемого

II-й этап: разработка месторождения.



Обратная задача: восстановить форму рудного тела по

материалам с глубины.
Компьют. модель в виде кубиков.

$\boxed{\text{III}}$-й шаг.

30 – 50 лет.

месторождение надо разбить на фазы разработки.

Фазы – часть мест., к-рые можно разработать по 4 года.

карьер.

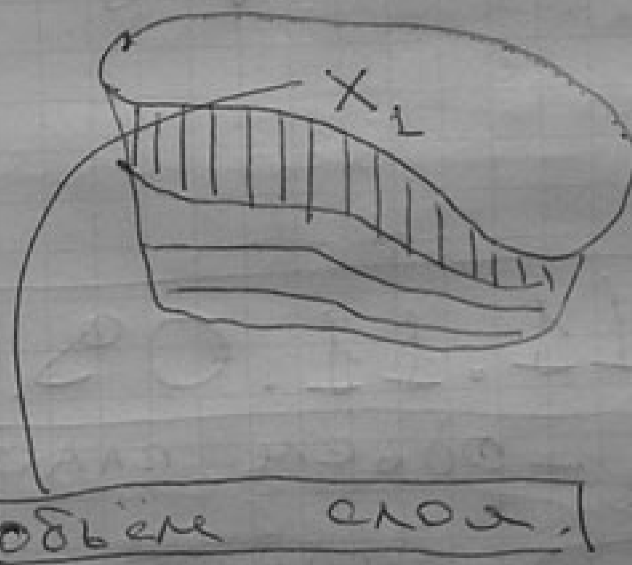
дно фазы.

Наше месторождение

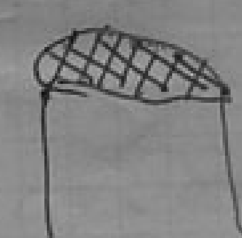
надо разбить на 7 фаз

Фаза II строится, чтобы использовать дороги фазы I.

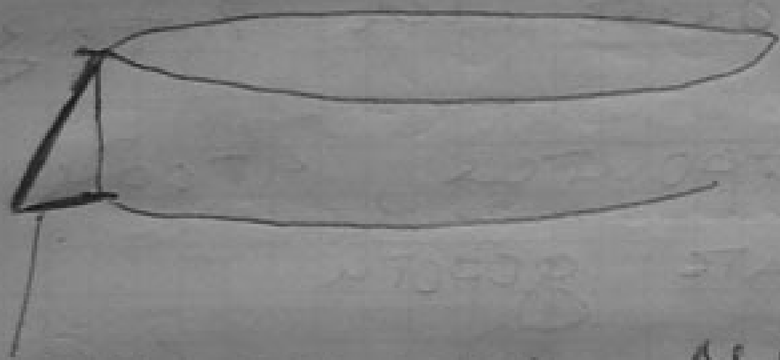
$\boxed{\text{IV}}$). -й шаг.



Пусть есть I фаза. Она разбивается на слои по 30 мет



выкапываем цилиндр 30 метров.

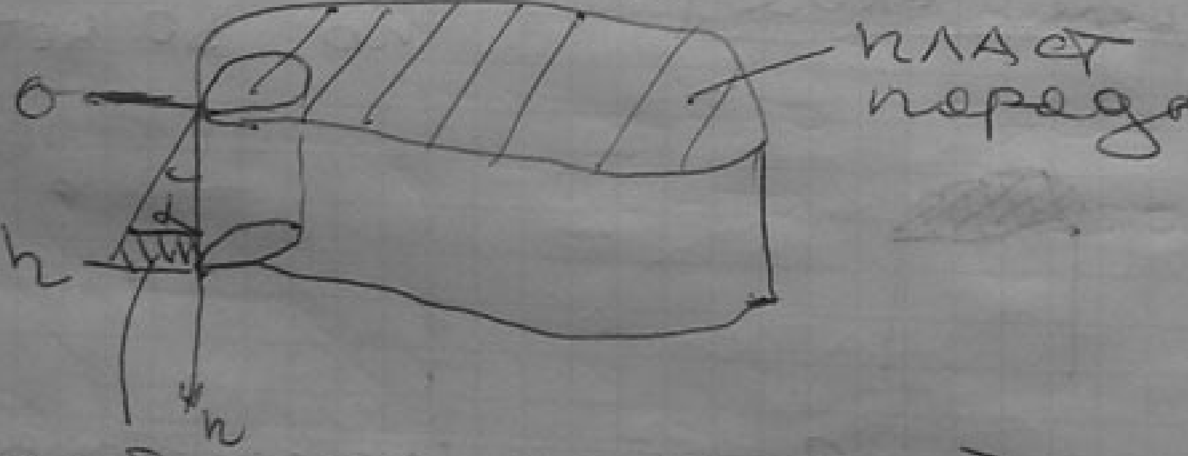


концентрация минерала: линейное от глубины

– квадратичная ф-ция.

$\boxed{11.11.09}$

a – объем пласта



забирать некоторый объем

α – концентр. чистого минерала на глубине h равна αh.

$\dot{y} = v,\ y(0) = 0,$

$y(T(v(\cdot))) = a,$

$P \le v \le Q$

скорость выкапывания.

$J(v(\cdot)) =$

$= \int_0^{T(v(\cdot))} e^{-\nu t} (-S_1(t, v(t)) -$

$- S_2 + S_3(t, v(t)))dt$

S – те затраты, к-р[ые] надо произвести, чтобы выкопать

руду.

выкапывания

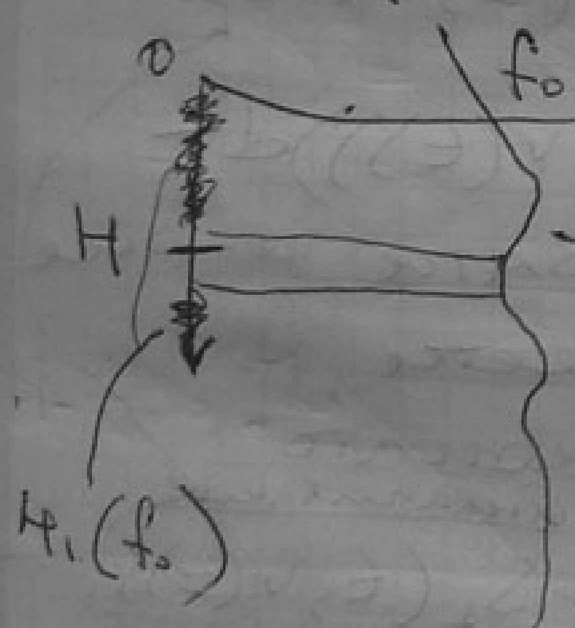
$\boxed{-S_1(t, v(t)}$

стоимость переработки пред

m – 1 т. руды
$mv(t)$ – стоимость выкапывания

$S_2 \quad - p \cdot P$
(p малое на
P большое)

$S_3(t, v(t))$ – рыночная стоимость чистого минерала.



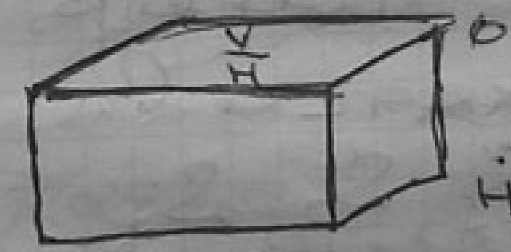
$f_0 \; f(h)$ – некоторой уровень

– где-то густо, где-то пусто.

$H_1(f_0) = \{h : h \in [0, H],$
$f(h) \geq f_0\}$

мера мн-ва –
$mes\, H_1(f_0)$ определ

$P = \frac{V}{H}\, mes\, H_1(f_0) \Rightarrow \boxed{f_0}$



$h \in H_1(f_0)$

$h \notin H_1(f_0)$

Очень редко в мес
рождениях присутству
только 1 минерал.

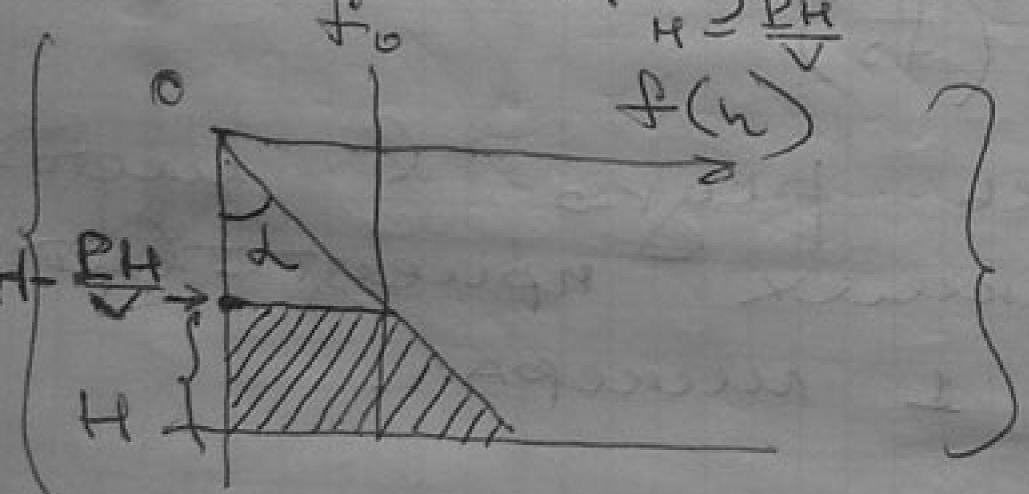
$$S\frac{V}{H}\int\limits_{H_1(f_0)} f(h)\,dh$$ — объём чистого минерала

$$S\frac{V}{H}\int\limits_{H_1(f_0)} f(h)\,dh$$ — стоимость на рынке.

Перепишем интегр. показатель качества, подставив S_1, S_2, S_3.

$$f(h) = \alpha h$$

$$F(V) = \frac{SV}{H}\int_{H-\frac{PH}{V}}^{H} \alpha h\,dh =$$



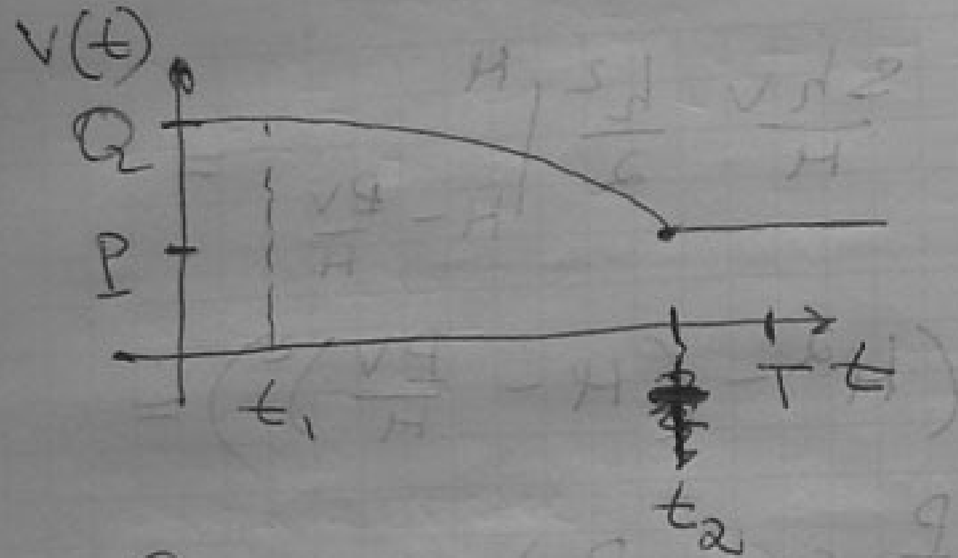
$$= \cancel{\frac{S\alpha V}{H}\int}\ \frac{S\alpha V}{H}\,\frac{h^2}{2}\Bigg|_{H-\frac{PV}{H}}^{H} =$$

$$= \frac{S\alpha V}{2H}\left(H^2 - \left(H - \frac{PV}{H}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{S\cdot\alpha HP}{2}\left(2 - \frac{P}{V}\right)$$

В итоге получим задачу:

$$J(v(\cdot)) = \int_0^{T(v(\cdot))} e^{-rt}\left(-mv(t) - p\cdot P + S\cdot P\left(2 - \frac{P}{v(t)}\right)\right)dt \to \max_{v(\cdot)\in[P,Q]}$$



Сколько параметров, относит. к-рых зависит решение нашей задачи. цехи.

(a, P, Q, r, m, p, S)

Цель: научиться рассчитывать $V(\cdot)$, $T(V(\cdot))$, $J(V(\cdot))$, $J(V^*(\cdot), t)$ $t \in [0, T]$

Зафиксируем P.

капиталовл. в перераб. оборудова-

$Q \to \infty$.

На каком $Q(P)$ надо остановиться, чтобы эти инвестиции давали отдачу????

Симметрич. форма:

$c_1 = (2s - p)P$

$c_2 = m$

$c_3 = s \cdot P^2$

$u = \sqrt{\frac{c_2}{c_3}}\, v$

$x = \sqrt{\frac{c_2}{c_3}} \cdot y$

$\dot{x} = u,\ x(0) = 0,\ x(T) = x_1 =$

$= \frac{a}{p}\sqrt{\frac{m}{s}} > 0$

$\sqrt{\frac{m}{s}} = P_1 \le u \le Q_1 = \frac{Q}{P}\sqrt{\frac{m}{s}}$

$$J_1[u] = \int_0^{T(u(\cdot))} e^{-\nu t}\left[k - u - \frac{1}{u}\right] dt \to \max_{u(\cdot) \in [P_1, Q_1]}$$

$$k = \frac{2s - p}{\sqrt{sm}}$$

Параметры.

(x_0, P_1, Q_1, k, v_0)

$k \in (-\infty, +\infty)$

Решение задачи для 5 переменных.

$$H(t, u, \psi, a_0) = -a_0 \cdot e^{-\nu t}\left(-k + u + \frac{1}{u}\right) + \psi u$$

$$\ell(x_0, x(T), t_0, T, \bar{a}) = a_1 (x(T) - x_1)$$

$$u^*(t, a_0) = \arg\max_{u \in [P_1, Q_1]} H(t, u, \psi, a_0)$$

$$H(T, u, \psi, a) = \frac{\partial \ell}{\partial T} = 0$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\psi(T) = -\frac{\partial \ell}{\partial y} = -a_1.$$

Ф-ция Лагранжа.

$$\ell(x, y, t, T, a) = \ell(x_0, x(T), t_0, \ldots = a_1(x(T) - x \ldots$$

$\frac{\partial \ell}{\partial y}$ это производная эта ...

Пусть $a_0 = 0$ (а нормальный случай)

$$H = -a_1 u$$

$$u^*(t, a_1) = \begin{cases} P_1, & a_1 > 0 \\ Q_1, & a_1 < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим нормальный случай $(a > 0)$.

$$H(t, q, u) = a_0 e^{-\nu t} K(t, q, u)$$

$$q = \frac{a_1}{a_0}$$

$$K(t,q,u) = k - \overset{(q,t)}{b}u - \frac{1}{u}$$

$$\boxed{b = b(q,t) = 1 + q e^{\gamma t}}$$

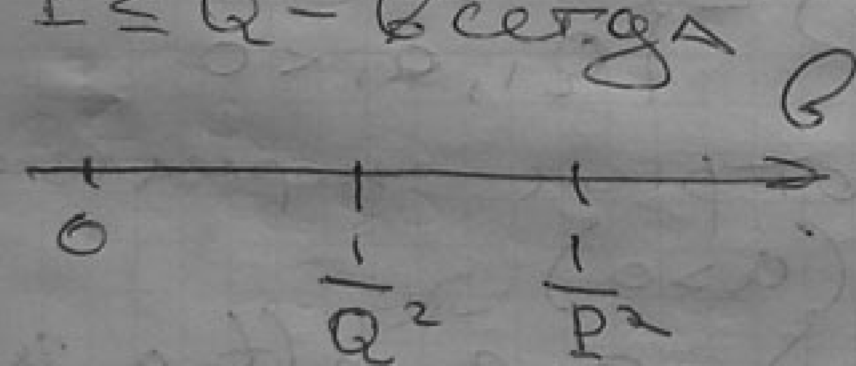
хорошее решение, т.к. можно завести такую ф-цию.

Лемма 1.

$$K(t,q,u) = K(b,u), \quad b(q,t)$$

$$u^*(b) = \begin{cases} Q_1, & b < \frac{1}{Q_1^2} \\ \frac{1}{\sqrt{b}}, & \frac{1}{Q_1^2} \le b \le \frac{1}{P_1^2} \\ P_1, & b > \frac{1}{P_1^2} \end{cases}$$

$P \le Q$ – всегда



$$K(t,q,u) = k - b(q,t)u - \frac{1}{u}$$

$$= k - bu - \frac{1}{u}$$

$$K'_u = -b + \frac{1}{u^2} < 0$$

$$b > \frac{1}{P_1^2}$$

$$K'_u > 0 \quad b < \frac{1}{Q_1^2}$$

$$K'_u = 0$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{b_1}} \qquad q = \frac{a_1}{a_0}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = u^*(b(q,t)), & x(0) = \ldots, \ x(T) = x\ldots \\ \dot{\psi} = 0 \end{cases}$$

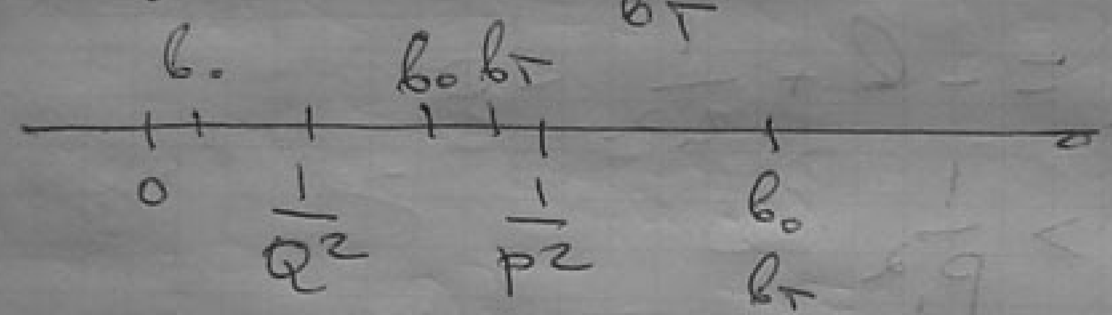
$u(0) = -\ldots$

$K(T,q,u^*(b(\ldots$

$= 0$

a_0, a_1, T

$$b(q,0),\ b(q,T).$$
$$b(q,0) = b_0, \quad b(q,T) = b_T$$



Несколько вариантов возможного расположе. b_0, b_T

6 вариантов всего.

$$\begin{cases} x(T,q) = x_1 \\ x(T,q, u^*(b(q,T))) = 0 \end{cases} \Bigg|_{T(q)}$$

$$q = \frac{a_1}{a_0} > 0$$

q либо равно 0, либо $\neq 0$.

$$I_0 = \{(q,T) : q = 0\}$$

$$b(q,t) = b(0,t) = 1$$

$$u^*(b(0,t)) = \begin{cases} Q_1, & 1 < \frac{1}{Q_1^2} \\ 1, & \frac{1}{Q_1^2} \le 1 \le \frac{1}{P_1^2} \\ P_1, & 1 > \frac{1}{P_1^2} \end{cases}$$

P_1, Q_1 — параметры нашей задачи.

След. случай $q \neq 0$.

$\boxed{18.11.09.}$

$$\dot{x} = u,\quad x(0) = 0,\quad x(T) = x_1,$$

$$P_1 \le u \le Q_1$$

$$J[u, P, Q] = \int_0^{T(u(\cdot))} e^{-\nu t}\left[k - u - \frac{1}{u}\right]dt \to \max_{u(\cdot)\in[P_1, Q_1]}$$

$x_1,\ P_1,\ Q_1,\ \nu,\ k.$

$u^*,\ J[u^*]$ и другие хар-ки.

Получаем:

$$b(q, t) = 1 + q e^{\nu t},\quad q = \frac{a_1}{a_0}$$

$$u^*(b) = \begin{cases} Q_1, & b < \frac{1}{Q_1^2} \\ \frac{1}{\sqrt{b(q,t)}}, & \frac{1}{Q_1^2} \le b \le \frac{1}{P_1^2} \\ P_1, & b > \frac{1}{P_1^2} \end{cases}$$

$$k(b, u) = k - bu - \frac{1}{u}$$

для различ. b

Рисунки:

$b > \frac{1}{P_1^2}$

краевая задача

$$\begin{cases} \dot{x} = u^*(b(q(t))), \\ x(0) = 0,\quad x(T) = x_1 \\ \dot{\psi} = 0,\quad \psi(0) = -a_1,\quad t \in [0, T] \\ k(T, q, u^*(b(q, T))) = 0 \end{cases}$$

$(T, q) = x_1$

$X(T, q, u^*(b(q, T)))] = 0 \mid T, q.$

1–4 шаг.

Перебираем всевозм.
варианты нулей T, q.

0) $q = 0$.
В этом случае
$b(0, t) = 1$

$$u^*(b(0,t)) = \begin{cases} Q_1, & 1 \le \frac{1}{Q_1^2} \\ 1, & \frac{1}{Q_1^2} \le 1 \le \frac{1}{P_1^2} \\ P_1, & 1 > \frac{1}{P_1^2} \end{cases}$$

1) $q > 0$,

$u^* = Q_1 \qquad u^* = \frac{1}{\sqrt{b(q,t)}} \qquad u^* = P_1$

$\frac{1}{Q_1^2} \qquad \frac{1}{P_1^2} \qquad b(q(t))$

1. $q > 0$.
$b(q, 0) \ge \frac{1}{P_1^2}$, $b(q, T) \ge \frac{1}{P_1^2}$

2. $q > 0$, $\frac{1}{Q_1^2} \le b(q, 0) \le \frac{1}{P_1^2}$,
$b(q, T) \ge \frac{1}{P_1^2}$

3. $q > 0$,
$\frac{1}{Q_1^2} \le b \le \frac{1}{P_1^2}$,
$b(q, T) < \frac{1}{P_1^2}$.

4. $q > 0$,
$b(q, 0) < \frac{1}{Q_1^2}$, $Q(q, T) \ge \frac{1}{P_1^2}$

5. $q > 0$
$b(q, 0) < \frac{1}{Q_1^2}$, $\frac{1}{Q_1^2} \le b(q, T) \le \frac{1}{P_1}$

6. $q > 0$
$b(q, 0) < \frac{1}{Q^2}$, $b(q, T) < \frac{1}{Q^2}$.

7. $q<0$,

$$b(q,0) > \frac{1}{P_1^2}, \quad b(q,T) < \frac{1}{Q_1^2}$$

8. $q<0$

$$b(q,0) > \frac{1}{P_1^2}$$

$$\frac{1}{Q_1^2} < b(q,T) < \frac{1}{P_1^2}$$

9. $q<0$.

$$b(q,0) > \frac{1}{P_1^2}, \quad \frac{1}{P_1^2} < b(q,T)$$

10. $q<0$.

$$\frac{1}{Q_1^2} < b(q,0) < \frac{1}{P_1^2}$$

$$b(q,T) < \frac{1}{Q^2}$$

11. $q<0$

$$\frac{1}{Q_1^2} < b(q,0) < \frac{1}{P_1^2},$$

$$\frac{1}{Q_1^2} \le b(q,T)$$

12. $q<0$

$$b(q,0) \le \frac{1}{Q_1^2}, \quad b(q,T) \le \frac{1}{Q_1^2}.$$

1. $u^* = P_1, \quad t \in [0,T]$

$$\begin{cases} x(T,q) = x_1 \\ \cancel{K(T,q)} \\ K(T,q,u^*(b(q,T))) = 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{x_1}{P_1}$$

$$K(T,q,P_1) = 0$$

$$K - bP_1 - \frac{1}{P_1} = 0$$

$$1 + qe^{\lambda t} = \frac{1}{P_1}\left(K - \frac{1}{P_1}\right)$$

$$\boxed{q = \frac{1}{e^{\lambda t}P_1}\left(K - P_1 - \frac{1}{P_1}\right)}$$

1-e yerd

$q >$

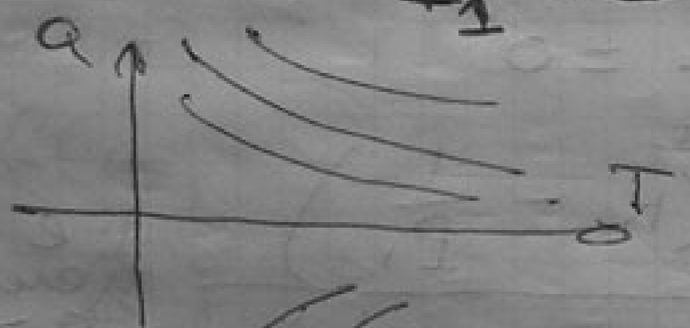
$$1+q \geq \frac{1}{P_1^2}$$

$$k > \frac{1}{P_1}\left(1+P_1^2\right)$$

$$k > \frac{1}{P_1}\left(1+P_1^2+e^{\nu T}\left(1-P_1^2\right)\right)$$

Итоговые соотношения

$$\begin{cases} k > \frac{1}{P_1}\left(1+P_1^2\right), & P_1 \geq 1 \\ k > \frac{1}{P_1}\left(1+P_1^2+e^{\nu T}\left(1-P_1^2\right)\right), & P_1 < 1. \end{cases}$$



2-я область

$$q > 0, \quad \frac{1}{Q_1^2} \leq b(q,0) \leq \frac{1}{P_1^2},$$

$$b(q,T) \geq \frac{1}{P_1^2}$$

$$u^*(q,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b(q,t)}}, & t \in [0, t_2(q) \\ P_1, & t \in (t_2(q), T \end{cases}$$

$$1+q e^{\nu t_2} = \frac{1}{P_1^2},$$

$$\boxed{t_2(q) = \frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{1}{q}\left(\frac{1}{P_1^2}-1\right)\right)}$$

$$k(T,q,P_1) = 0,$$

$$k - b P_1 - \frac{1}{P_1} = 0,$$

$$\frac{1}{P_1}\left(k-\frac{1}{P_1}\right) = 1+q e^{\nu T}$$

(*)

$$\boxed{T_2(q) = \frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{1}{qP_1}\left(k - P_1 - \frac{1}{P_1}\right)\right)}$$

$$(**)\ \int_0^{t_\varepsilon(q)} \frac{1}{\sqrt{b(q,t)}}\,dt + P_1\big(T(q) - t_2(q)\big) = x_1$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{\sqrt{1+qe^{\nu t}}} =$$

$$= \frac{1}{\nu}\ln\left[\frac{\sqrt{1+qe^{\nu t}}-1}{\sqrt{1+qe^{\nu t}}+1}\right]\Bigg|_\alpha^\beta$$

$$q = \frac{4M_1}{(M_1-1)^2}$$

$$M_1 = e^{x_1\nu}\,\frac{1+P_1}{1-P_1}\left(\frac{k - P_1 - \frac{1}{Q_1}}{P_1\left(\frac{1}{P_1^2}-1\right)}\right)^{-P_1}$$

$q > 0$, $1 + q < \frac{1}{P_1^2} \Rightarrow P_1 < 1$.

След. условие

$\cancel{t_2(q)}$

$$T(q) \geq t_2(q) > 0 \Rightarrow$$

$$k > \frac{2}{P_1}$$

$$k > P_1 + \frac{1}{P_1}$$

$$\frac{1}{P_1^2} > q + 1$$

$$2:\quad P_1 \leq Q_1 < 1$$

$$Q < \frac{e^{\nu x_1}(1+P_1) - (1-P_1)}{e^{\nu x_1}(1+P_1) + (1-P_1)};\ P <$$

$$a_2(P, \nu, x_2, Q) < k < a_1(P, \nu, x_1)$$

$$\frac{e^{\nu x_1}(1+P_1) - (1-P_1)}{e^{\nu x_1}(1+P_1) + (1-P_1)} \leq$$

$$\leq Q \leq 1,$$

$P_1 < 1$:

$$\frac{2}{P_1} \le k \le a_1(P, \nu, x_1)$$

$$a_1(P, \nu, x_1) = \frac{1}{P_1}\left(1 + P_1^2 + e^{\frac{\nu x_1}{P_1}}(1 - P_1^2)\right)$$

$$a_2(P, \nu, x, Q) = \frac{1}{P_1}\left(1 + P_1^2 + e^{\frac{\nu x_1}{P_1}}(1 - P_1^2)\right) \times$$

$$\times \left(\frac{(1-Q)(1+P_1)}{(1+Q)(1-P_1)}\right)^{\frac{1}{P_1}}$$

3-я область.

3) $q > 0$, $\frac{1}{Q_1^2} \le b(q, 0) \le \frac{1}{P_1^2}$,

$$b(q, T) < \frac{1}{P_1^2}$$

$$u^* = \frac{1}{\sqrt{b(q,T)}}, \quad t \in [0, T]$$

$$K\left(T, q, \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = 0$$

$k = 2\sqrt{b}$,

$$\frac{b^2}{4} = 1 + q e^{\nu T}$$

$$T(q) = \frac{1}{\nu} \ln\left(\frac{1}{q}\left(\frac{b^2}{4} - 1\right)\right).$$

$$\int_0^{T(q)} \frac{dt}{\sqrt{b(q,t)}} = x_1$$

Получаем

$$\boxed{q = \frac{4M_2}{(M_2 - M_1)^2},}$$

$$M_2 = e^{x_1 \nu \frac{k+2}{k-2}}$$

1-е соотнош.

$1 + q \le \frac{1}{P_1^2}$, $P_1 < 1$.

2-е соотн.

$T(q) > 0$, $k > 2$

3) $1+q\,e^{\nu t} < \frac{1}{P_1^2}$, $k < \frac{2}{P_1}$.

Если

$Q<1$, $P<1$ то для k должно быть выполнено соотношение:

$$\frac{2(1+Q_1+e^{\nu x_1}(1-Q))}{1+Q_1-e^{\nu x_1}(1-Q)} \le k \le$$

$$\le \frac{2(1+P_1+e^{\nu x_1}(1-P_1))}{1+P_1-e^{\nu x_1}(1-P_1)}$$

$\boxed{25.11.09.}$

$\dot{x} = u$, $x(0)=0$, $x(T)=x_1$

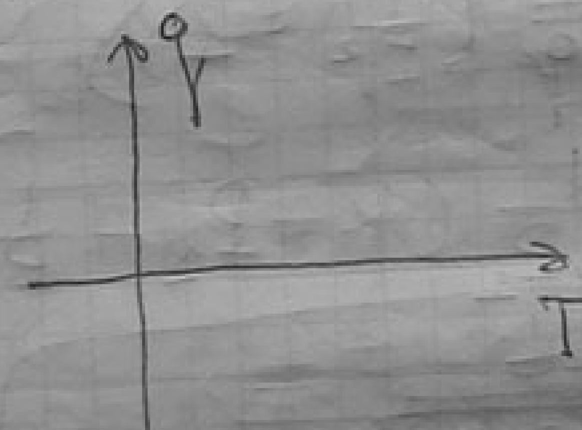
$P_1 \le u \le Q_1$

$$J_1[u(\cdot)] = \int_0^{T(u(\cdot))} e^{-\nu t}\left[k-u-\frac{1}{u}\right]dt \to \max_{u(\cdot)\in[P_1,Q_1]}$$

(x_1, P_1, Q_1, ν, k)

$$\begin{cases} x(T,q) = x_1 \\ K(T,q,u^*(b(q,T))) = 0 \end{cases}$$

По q,t выделение 12 областей.



4) $\{(q,T):\ q>0$

$\underset{b(q,0)}{\overset{\shortparallel}{1+q}} < \frac{1}{Q_1^2}$, $b(q,T) \ge \frac{1}{P_1^2}\}$

В этом случае

$$u^*(q,T) = \begin{cases} Q_1, & t \in [0, t_1(q)] \\ \frac{1}{\sqrt{b(q,t)}}, & t \in [t_1(q), t_2(q)] \\ P_1, & t \in [t_2(q), T(q)] \end{cases}$$

$$t_1(q) = \frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{1}{q}\left(\frac{1}{Q_1^2}-1\right)\right)$$

$$t_2(q) = \frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{1}{q}\left(\frac{1}{P_1^2}-1\right)\right)$$

$$T(q) = \frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{1}{qP_1}\left(k - P_1 - \frac{1}{P_1}\right)\right)$$

$$\boxed{Q_1 \cdot t_1(q) + \int\limits_{t_1(q)}^{t_2(q)} \frac{dt}{\sqrt{b(q,t)}} + P_1\left(T(q) - t_2(q)\right) = x_1}$$

Решается и получается:

$$q = \left(\frac{1}{Q_1^2}-1\right)\left(\frac{(1-P_1)(1+Q_1)}{(1+P_1)(1-Q_1)}\right)^{\frac{1}{Q_1}} \times$$

$$\times \left(\frac{k - P_1 - \frac{1}{P_1}}{P_1\left(\frac{1}{P_1^2}-1\right)}\right)^{\frac{P_1}{Q_1}} e^{\left(-\left(\frac{x_1 \nu}{Q_1}\right)\right)}$$

$Q_1 < 1$, $P_1 < 1$, для k:

$$\frac{2}{P_1} \le k \le P_1 + \frac{1}{P_1} + P_1\left(\frac{1}{P_1^2}-2\right) \cdot e^{\left(\frac{\nu x_1}{P_1}\right)}\left[\frac{(1+P_1)(1-Q_1)}{(1-P_1)(1+Q_1)}\right]^{\frac{1}{P_1}}.$$

Проверяем условие $Q > 0$, $t_1 > 0$ . . . , $t_2 > t_1$

5) $\{(q,T) : q > 0,$

$b(q,0) < \frac{1}{Q_1^2}$,

$\frac{1}{Q_1^2} \le b(q,T) \le \frac{1}{P_1^2}\}$

$$u^*(q,t) = \begin{cases} Q_1, & t \in [0, t_1(q)] \\ \frac{1}{\sqrt{b(q,t)}}, & t \in [t_1(q), T(q)] \end{cases}$$

$$t_1(q) = \frac{1}{\nu} \ln\left(\frac{1}{q}\left(\frac{1}{Q_1^2} - 1\right)\right)$$

$$T(q) = \frac{1}{\nu} \ln\left(\frac{1}{q}\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)\right)$$

$$\boxed{Q_1 t_1(q) + \int_{t_1(q)}^{T(q)} \frac{dt}{\sqrt{b(q,t)}} = x_1}$$

получается такое уравнение.

$$q = \left(\frac{1}{Q_1^2} - 1\right)\left[\frac{(k-2)(1+Q_1)}{(k+2)(1-Q_1)}\right] e^{-\frac{1}{Q_1} - \frac{x_1 \nu}{Q_1}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2}{Q_1} \le k \le \frac{2}{P_1}, \quad Q_1 < 1, \\ e^{\nu x_1} > \frac{1+Q}{1-Q} \\ \frac{2}{Q_1} \le k < \frac{2(1+Q_1 + e^{\nu x_1}(1-Q_1))}{1+Q_1 - e^{\nu x_1}(1-Q_1)} \\ Q_1 < 1, \quad e^{\nu x_1} < \frac{1+Q}{1-Q} \end{array}\right.$$

6) Для $\{(q,T) : q > 0,$ $b(q,0) < \frac{1}{Q_1^2}, b(q,T) < \frac{1}{Q_1^2}\}$

В этом случае экстремаль для управления постоянная.

$u^*(q,t) = Q_1,$

$T = \frac{x_1}{Q_1}, \quad q = \frac{1}{e^{\nu T} Q_1}\left(k - Q_1 - \frac{1}{Q_1}\right)$

$$\boxed{Q_1 < 1, \quad \frac{1}{Q_1} + Q_1 < k < \frac{2}{Q_1}}$$

7) $\{(q,T) : q < 0,$ $b(q,0) > \frac{1}{P_1^2}, \quad b(q,T) \le \frac{1}{Q_1^2}\}$

$$u^*(q,t) = \begin{cases} P_1, & t \in [0, t_3(q)] \\ \frac{1}{\sqrt{b(q,T)}}, & t \in [t_3(q), t_4 \ldots \\ Q_1, & t \in [t_1(q), T(\ldots \end{cases}$$

$$t_3(q)=\frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{1}{q}\left(\frac{1}{P_1^2}-1\right)\right)$$

$$t_4(q)=\frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{1}{q}\left(\frac{1}{Q_1^2}-1\right)\right)$$

$$T(q)=\frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{1}{qQ_1}\left(K-Q_1-\frac{1}{Q_1}\right)\right)$$

$$P_1 t_3(q)+\int_{t_3(q)}^{t_4(q)}\frac{dt}{\sqrt{b(q,t)}}+$$

$$+Q_1\left(T(q)-t_1(q)\right)=x_1$$

$$q=\left(\frac{1}{P_1^2}-1\right)\left(\frac{(Q_1-1)(1+P_1)}{(1+Q_1)(P_1-1)}\right)^{\frac{1}{P_1}}\times$$

$$\times\left(\frac{K-Q_1-\frac{1}{Q_1}}{Q_1\left(\frac{1}{Q_1^2}-1\right)}\right)^{\frac{Q_1}{P_1}}e^{-\frac{x_1\nu}{P_1}}$$

$$Q_1\geq P_1>1,\quad \frac{2}{Q_1}>K>Q_1+\frac{1}{Q_1}+$$

в) $\{(q,T):\ q<0,$

$b(q,0)>\frac{1}{P_1^2},\ \frac{1}{Q_1^2}<b(q,T)<\frac{1}{P_1^2}\}$

Что будет в этой области???

$$u^*(q,t)=\begin{cases}P_1, & t\in[0,t_3(q)]\\ \frac{1}{\sqrt{b(q,t)}}, & t\in[t_3(q),T(q)]\end{cases}$$

$$t_3(q)=\frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{1}{q}\left(\frac{1}{P_1^2}-1\right)\right)$$

$$T(q)=\frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{1}{q}\left(\frac{K^2}{2}-1\right)\right)$$

$$P_1 t_3(q)+\int_{t_3(q)}^{T(q)}\frac{dt}{\sqrt{b(q,t)}}=x_1$$

$$q=\left(\frac{1}{P_1^2}-1\right)\left(\frac{(2-K)(1+P_1)}{(2+K)(P_1-1)}\right)e^{-\frac{x_1}{P_1}\dots}$$

$$\frac{2}{Q_1} \le k \le \frac{2}{P_1} \quad P_1 > 1 \quad e^{\nu x_1} > \frac{P_1+1}{P_1-1}$$

$$\max\left\{\frac{2}{Q_1}, \frac{2(1+P_1-e^{\nu x_1}(P_1-1))}{1+P_1+e^{\nu x_1}(P_1-1)}\right\} < k < \frac{2}{P_1}$$

$$P_1 > 1, \; e^{\nu x_1} < \frac{P_1+1}{P_1-1}.$$

9) $\{(q,T) : q<0,$
$b(q,0) > \frac{1}{P_1^2}, \frac{1}{P_1^2} < b(q,T)\}.$

$$u^*(q,t) = P_1$$

$$T = \frac{x_1}{P_1}, \; q = \frac{1}{e^{\nu T P_1}}\left(k - P_1 - \frac{1}{P_1}\right)$$

$$\boxed{P_1 > 1, \; \frac{2}{P_1} < k < P_1 + \frac{1}{P_1}}$$

10) $\{(q,T) : q<0,$
$\frac{1}{Q_1^2} \le b(q,0) \le \frac{1}{P_1^2},$
$b(q,T) < \frac{1}{Q_1^2}\}$

$$u^*(q,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b(q,t)}}, & t \in [0, t_4(q)] \\ Q, & t \in [t_4(q), T(q)] \end{cases}$$

$$T(q) = \frac{1}{\nu} \ln\left(\frac{1}{qQ_1}\left(k - Q_1 - \frac{1}{Q_1}\right)\right)$$

$$\int_0^{t_4(q)} \frac{dt}{\sqrt{b(q,t)}} + Q_1(T(q) - t_4(q)) = x_1$$

$$q = \frac{-4M_5}{(M_5+1)^2}$$

$$M_5 = e^{x_1\nu} \frac{Q_1+1}{Q_1-1}\left(\frac{k - Q_1 - \frac{1}{Q_1}}{Q_1\left(\frac{1}{Q_1^2}-1\right)}\right)$$

11) $\{(q,T) : q<0, \frac{1}{Q_1^2} < b(q,0) < \frac{1}{P_1^2}$
$b(q,T) \ge \frac{1}{Q_1^2}\}$

В этом случае

$$u^*(q,t) = \frac{1}{\sqrt{b(q,t)}}$$

$$T(q) = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{1}{q}\left(\cancel{Q^2}\,\frac{K^2}{4}-1\right)\right)$$

$$\int_0^{T(q)} \frac{dt}{\sqrt{b(q,t)}} = x_1$$

$$q = \frac{-4M_6}{(M_6+1)^2}$$

$$M_6 = e^{x_1\gamma}\left(\frac{Q+1}{Q-1}\right)$$

1a) $\{(q,T):\ q<0,$

$b(q,0) \le \frac{1}{Q_1^2},\ b(q,T) \le \frac{1}{Q_1^2}\}$

$u^*(q,T) = Q_1$

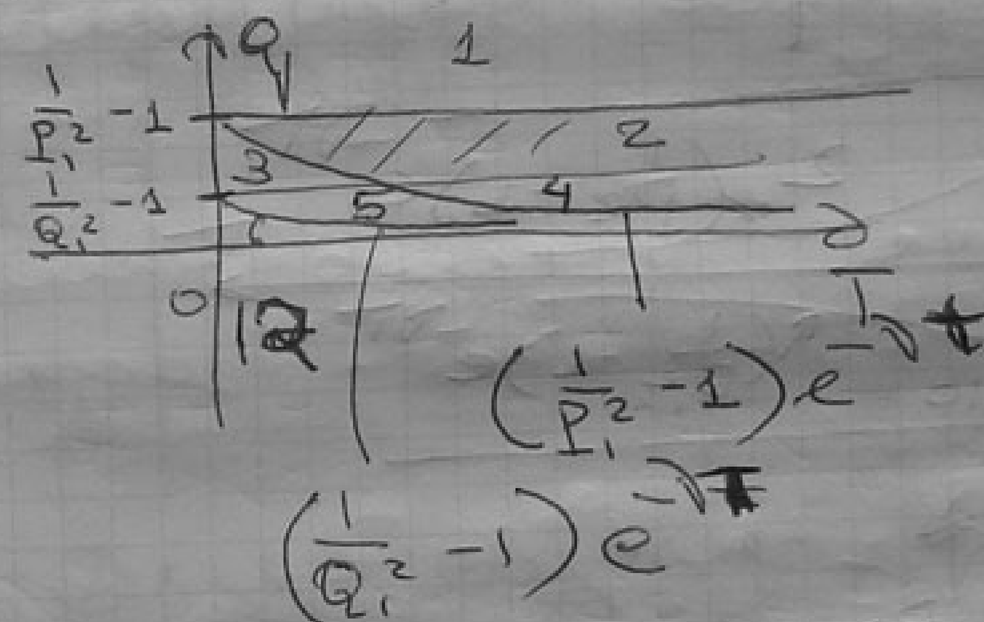
$T = \frac{x_1}{Q_1},\quad q = \frac{1}{e^{\gamma T} Q_1}\left(K - Q_1 - \frac{1}{Q_1}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} K \le Q_1 + \frac{1}{Q_1} + e^{\gamma T}\left(\frac{1}{Q_1} - Q_1\right),\ Q_1 \ge 1 \\ K < Q_1 + \frac{1}{Q_1},\ Q_1 < 1 \end{array}\right.$$

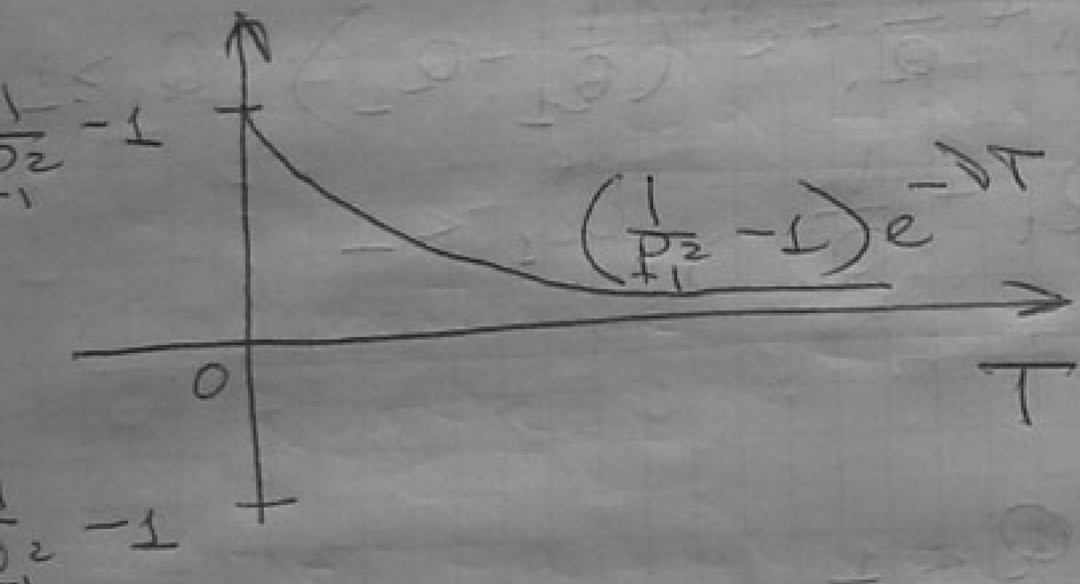
~~R_1~~

$P_1 \le Q < 1$

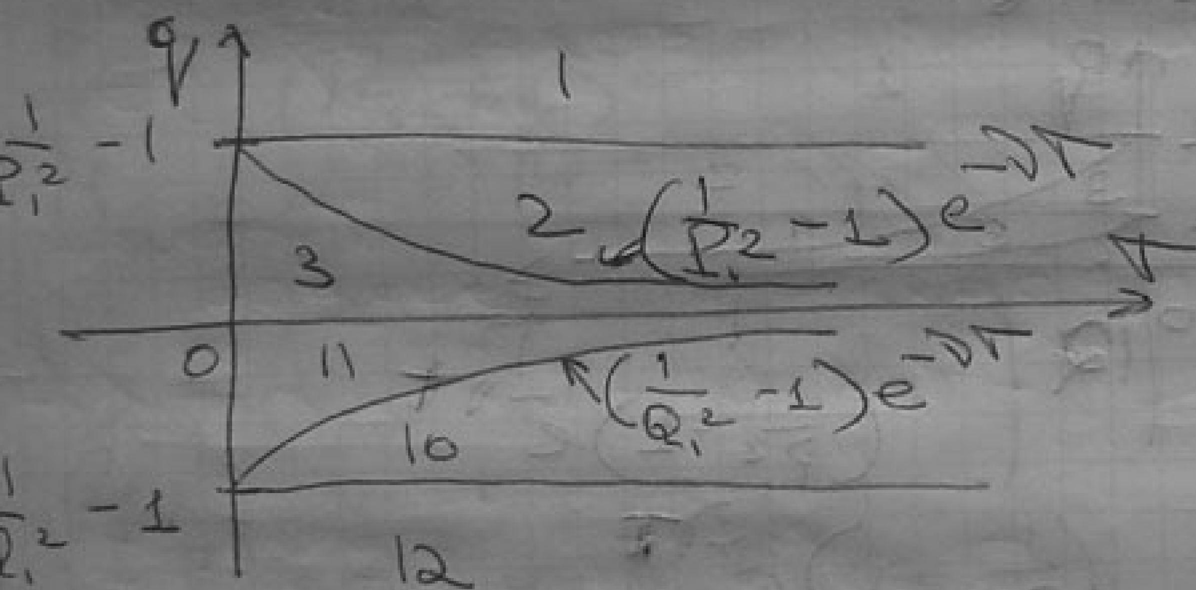
Если захотим нарисовать.



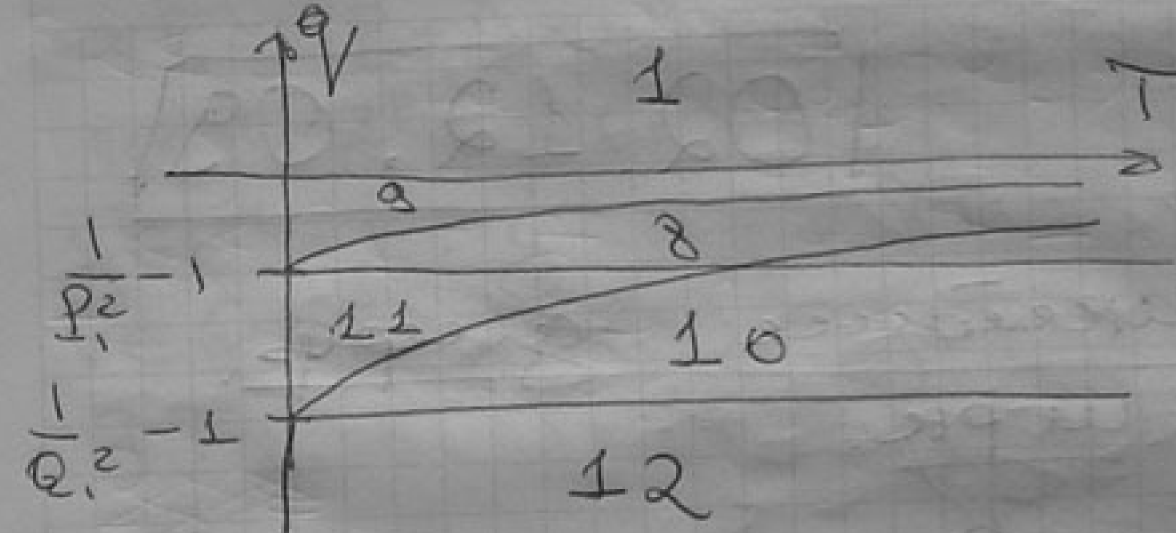
Пусть у нас $Q_1 \ge 1,\ P_1 \le 1$.



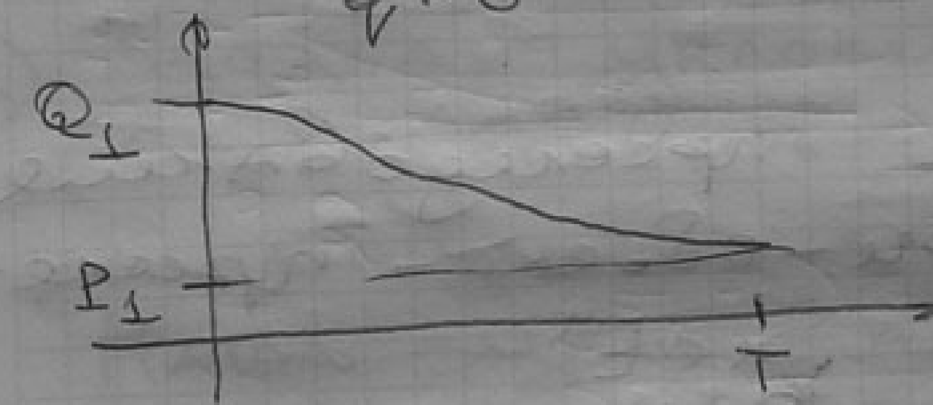
$Q_1 \geq 1,\ P_1 \leq 1$



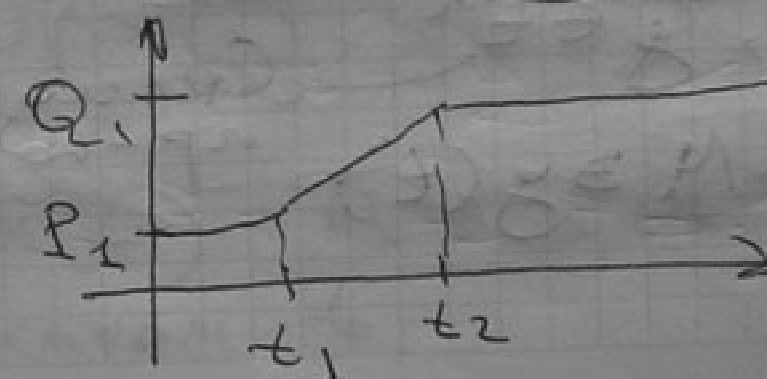
$Q > 1,\ P > 1$



Для случая $q>0$: типичный вид следующий:



Для случая $q<0$



$\boxed{02.12.09}$

Линейные дифф. игры.

$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + B_1 u - C_1 v$, $z(0) = z_0$

$u \in P \subset R^p$

$v \in Q \subset R^q$

$z(T) \in M_1$

Процесс преследования

$P: \dot{x} = Ax + Bu$ – объект – преследователя $x \in E^n$

$E: \dot{y} = Cy + Dv$, $v \in Q$,

$y(0) = y_0$, $y \in E^n$ — евклидово пр-во

$\exists T: x(T) + M \ni y(t)$

$x \in E^n$ $P: Ax + Bu = \dot{x}$

$u \in P \subset R^p$, $x(0) = x_0$

$y \in E^n$ $E: \dot{y} = Cy + Dv$

$v \in Q \in E^n$, $y(0) = y_0$

$\exists T: x(T) + M \ni y(T)$

Мы хотим построить такую стратегию:

1) $u(x(\cdot), y(\cdot), v(\cdot))$

$0 \le s \le t$.

2) Задача уклонения. (Отождествить себя с убегающим игроком).

Наша цель – построить стратегию

$v(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$

$\forall t$

$x(t) + M \not\ni y(t)$ – ни при каком t.

3) Задача поиска.

$u(x_0, y_0, t)$

Что такое игра???

$z = (x, y) \in E^{2n}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Очень часто управление 2-го игрока - целый интеграл.

1-я задача - задача преследования.

Цель - построение стратегии

$\boxed{u(z(\cdot), v(\cdot))}$ - контр - управление.

$u(z(\cdot))$ - позиционная стратегия.

$\forall \varepsilon > 0$ стратегия будет гарантировать, что $\exists T_\varepsilon$

$z(T_\varepsilon) \in M_1 + S^n_\varepsilon(0)$

Сейчас - решение диф игры в классе контр-управления.

Примеры.

$z \in E^n$

$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \; z(0) = z_0$

$u \in P \subset E^p \quad v \in Q \subset E^q$

$z(T) \in M = M^1 + M^2$

$\boxed{u(z(\cdot), v(\cdot))}$

$M^1 \subset E^n$ - линейное подпр-

$E^n = M^1 \oplus L^1$

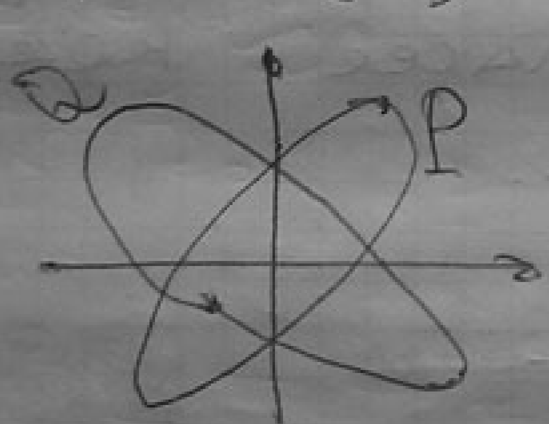
$M^2 \subset L^1$, $\pi : E^n \to L^1$

Рассмотрим мн-во

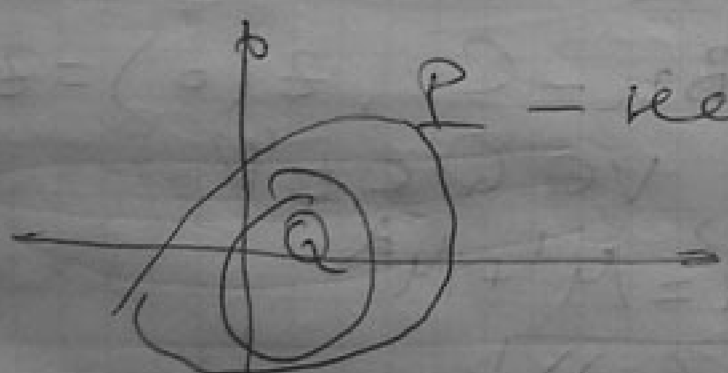
$P(\tau) = \pi e^{\tau A} B P$

$Q(\tau) = \pi e^{\tau A} C Q$

$\hat{W}(\tau) = P(\tau) \overset{*}{-} Q(\tau)$



— пусто



— непуста

$\overset{*}{-}$

$\hat{W}(\tau) = P(\tau) \overset{*}{-} \mathcal{D}(\tau) Q(\tau) =$

матрица поворота

$= \bigcap\limits_{v \in Q} \left(P(\tau) - \mathcal{D}(\tau) \pi e^{\tau A} C \pi \right)$

$M^3(t) = M^2 \overset{*}{-} \int_0^t (\mathcal{D}(\tau) - E) \pi e^{\tau A} C Q d$

$\boxed{\text{Пример 1}}$

$\exists \mathcal{D}(\tau)$:

$\hat{W}(\tau) \neq \emptyset$, $\tau \in [0, \theta]$

$M^3(t) \neq \emptyset$, $\tau \in [0, \theta]$.

Как выглядят условие непустоты множества ???

Предположение 2.

$\int_0^t \cancel{-\hat{\omega}(\tau)d\tau}$

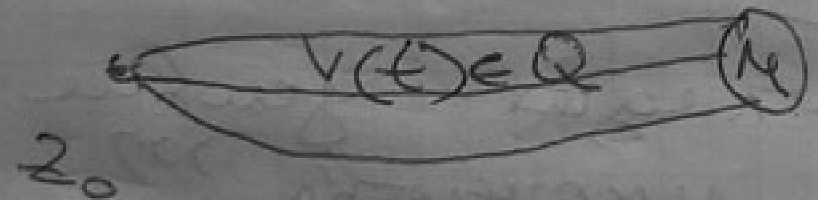
$$\pi e^{tA} z_0 \in M^3(t) + \int_0^t -\hat{\omega}(\tau)d\tau$$

$$\dot{z} = Az + Bu(z(\cdot), v(\cdot)) - Cv(t)$$

$v(t) \in Q$

Для z_0 и конечного мн-ва M:

При разных v — траектории разные.



$$\boxed{\begin{array}{l} u(z(s), v(s)) \in P \\ s \in [0, t] \end{array}}$$

Док-во теоремы.

Теорема. Если для игры (1) выполнены предп. 1, 2, тогда из кач. (·) z_0 1-й игрок обеспечит выполнение $z(T) \in M$.

Док-во

$z_0 \notin M$

$$M^3(T) + \int_0^T -\hat{\omega}(\tau)d\tau$$

$$m^3 + \int_0^T -\tilde{\omega}(\tau)d\tau.$$

селектор

$$\pi e^{TA} z_0 = m^3 + \int_0^T -\tilde{\omega}(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{D}(T-s)\pi e^{(t-s)A} CQ + \ldots \pi e^{(t-s)A} BP, \quad t \in [0, T$$

Фиксируем s, фиксируем $v \in Q$.

$\mathcal{D}(T-s)\Pi e^{(T-s)A} C v + \tilde{w}(T-s) = \Pi e^{(T-s)A} B u^P$ $\boxed{IV}$

По теореме Филиппова $u(s)$ будет измерима по Лебегу.

$u(s) \in P$.

$u(s, v(s)) \in P$

Хотим показать:

$\Pi z(T) = \Pi e^{TA} z_0 + \int_0^T \Pi e^{(T-s)A} B u(s)\, ds -$

$- \int_0^T \mathcal{D}(T-s) \Pi e^{(T-s)A} C v(s)\, ds +$

$+ \int_0^T (\mathcal{D}(T-s) - E) \Pi e^{(T-s)A} C v(s)\, ds =$

$= \Pi e^{TA} z_0 + \int_0^T \tilde{w}(T-s)\, ds +$

$+ \int_0^T (\mathcal{D}(T-s) - E) \Pi e^{(T-s)A} C v(s)\, ds \in$

$\in M_3(T) + \int_0^T (\mathcal{D}(T_0) - E) \Pi e^{(T-s)A} \times$

$\times C v(s)\, ds \subset M^2$

$u(s) \in \mathbf{U}(s, v(s))$

Этапы:

1) Найти $\hat{w}(\tau) =$

$= P(\tau) \overset{*}{-} \mathcal{D}(\tau) Q(\tau)$

2) Вычислить

$M^3(t) = M^2 \overset{*}{-} \int_0^t (\mathcal{D}(\tau) - E) \cdot$

$\cdot \Pi e^{\tau A} C Q\, d\tau$

2) Нахождение T.

$\Pi e^{TA}(z_0) \in M^3(T) + \int_0^T -\hat{w}(\tau)\, d\tau$

3) Вычисление τ - уш

$\tilde{\omega} \in \hat{\omega}(\tau)$

селектор.

4) Решение IV.

$\dot{z} = Az + BU(s, v(s)) + Cv(s)$.

$\boxed{09.12.09}$

$\dot{z} = Az + Bu - Cv$

$z(0) = z_0$

$u \in P \subset R^p$

$v \in Q \subset R^q$

$z(T) \in M = M^1 + M^2$

$M^1 \oplus L^1 = R^1$,

$M^2 \subset L^1$.

$\pi: R^n \to L^1$. (удовл. $\pi^2 = \pi$)

$\int_0^t \hat{\omega}(\tau) d\tau$

1. $\hat{\omega}(\tau) = P(\tau) \underset{t}{\overset{*}{-}} \mathcal{D}(\tau) Q(\tau)$

$M^3(t) = M^2 \overset{*}{-} \int_0^t (\mathcal{D}(t) - E) \pi e^{tA} C Q$

2. $T: \underset{T}{\pi} e^{TA} z_0 \in M^3(T) +$

$+ \int_0^T (-\hat{\omega}(\tau)) d\tau$

3. $\pi e^{tA} z_0 + \int_0^t \hat{\omega}(\tau) d\tau \in M^3(T$

4. $\pi e^{(T-t)A} Bu(t) = \mathcal{D}(T-t) \pi e^{(}$

С . . .

1. Игра „мальчик и крокодил".

$P: \begin{cases} \ddot{x} = a \\ \ddot{y} = b \end{cases}$
$E:$

$x, y, a, b \in R$

$a, b: \|a\| \le \varphi, \|b\| \le \sigma$

$\|x(t)-y(t)\| \le l$

$x(0)=x_0, \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0$

$y(0)=y_0$

$a(x(t), y(t), b(t))$

Решение этой задачи с помощью 1-го метода Понтрягина.

<u>1-й шаг</u>:

Переходим к соотв. дифф. игре

$z=(z_1, z_2)=(x-y, \dot{x}) \in R^{2\nu}$

$\dot{z}_1 = z_2 - b$

$\dot{z}_2 = a$

$Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \qquad Cv = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\nu \times 2\nu}$

$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} : \|a\| \le \rho \right\}$

$e^{tA} = \begin{pmatrix} E & t \\ 0 & \end{pmatrix}$

$Q = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} : \|b\| \le \sigma \right\}$

$M = \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : \|z\| \le l \right\}$ — цилиндр. мн-во.

$L = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} : z_1 \in R^\nu \right\}$

Оператор проектирования:

$\pi : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cancel{\begin{pmatrix} E, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}}$

$(E, 0) = \pi : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\pi e^{tA} B \underline{P} = S_{\mu}^{\partial}(0)$

$\pi e^{tA} C Q = S_{\sigma}^{\partial}(0)$

$\vartheta(\tau) = \mu(\tau) E$

$$\mu(\tau) = \begin{cases} \frac{\rho}{\sigma} t, & \tau \in [0, \frac{\sigma}{\rho}] \\ 1, & \tau > \frac{\sigma}{\rho} \end{cases}$$

$$\hat{\omega}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, \frac{\sigma}{\rho}] \\ S^{\partial}_{\rho\tau - \sigma}(0), & \tau > \frac{\sigma}{\rho}. \end{cases}$$

$$W(t, 0) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{\sigma}{\rho}] \\ S^{\partial}_{\left(\rho \frac{t^2}{2} - \sigma t + \frac{\sigma^2}{2\rho}\right)}, & t > \frac{\sigma}{\rho}. \end{cases}$$

$$M^3(t) = \begin{cases} S^{\partial}_{\pi(t)}(0), & t \in [0, \frac{\sigma}{\rho}] \\ S^{\partial}_{\left(\ell - \frac{\sigma^2}{2\rho}\right)}, & t > \frac{\sigma}{\rho}. \end{cases}$$

$\gamma(t) = \ell + \frac{\rho t^2}{2} - \sigma t$

$\boxed{\ell \geq \frac{\sigma^2}{2\rho}}$

$\xrightarrow{t \to \infty} \infty$

2-й этап

$\pi e^{tA} z_0 = \boxed{z_1^0 + z_2^0 t \in S^{\partial}_{\gamma(t)}(0)}$

$\|z_1^0\|^2 + 2(z_1^0, z_2^0) t + \|z_2^0\|^2 t^2 = \gamma^2(t)$

$\|z_1^0 + T z_2^0\| \neq 0,$

$$\tilde{\omega}(t) = -\frac{z_1^0 + z_2^0 T}{\|z_1^0 + z_2^0 T\|}\gamma(t)$$

$$u(t) = \left(\frac{M(T-t)v + \tilde{\omega}(T-t)}{T-t}\right)$$

Если

$\|z_1^0 + T z_2^0\| = 0$, то

$\tilde{\omega}(T) = 0$

$$u(t) = \frac{M(T-t)v(t)}{T-t}$$

$\ddot{x} = u(t, v(t))$

$\dot{y} = v(t)$ $\quad \underline{v(t)}$

09.12.09

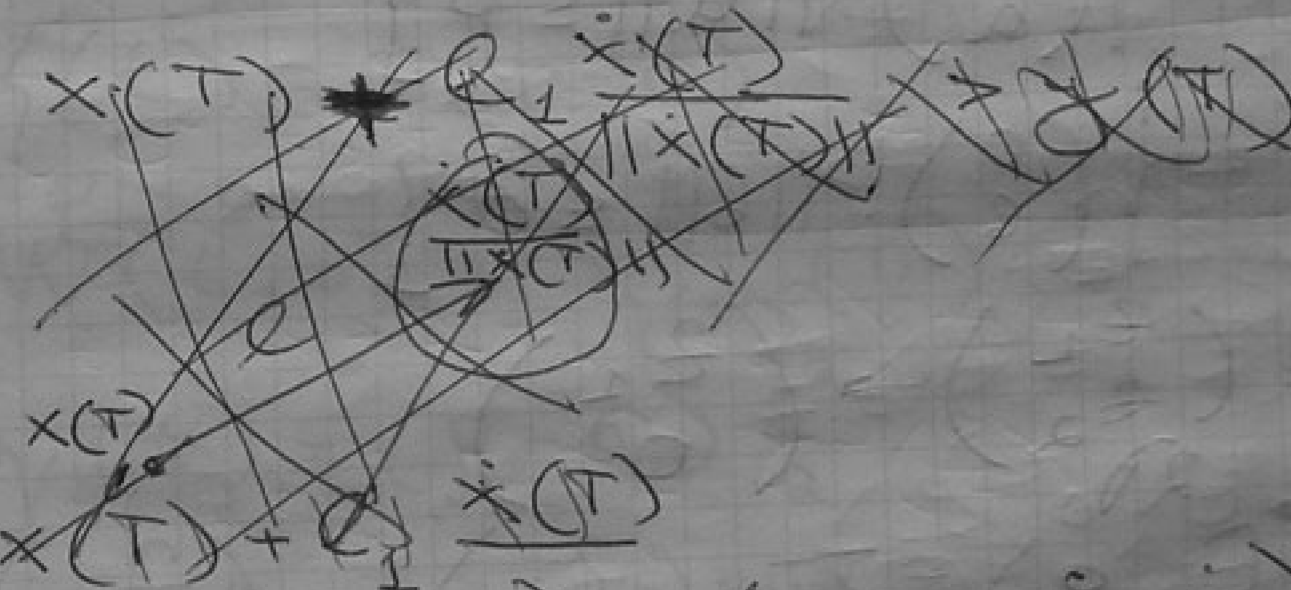
2. Игра "Два крокодила" (двух подводных лодок)

$P: \ddot{x} = a, \ \|a\| \le \rho$

$E: \ddot{y} = b, \ \|b\| \le \gamma$

$x, y, a, b \in R^\nu, \ \nu \ge 2$

$T: \|x(t) - y(t)\| \le l_1,$



$z = (z_1, z_2) = (x - y, \dot{x} - \dot{y}) \in$

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \dot z_2 = a - b \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$Cv = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$BP = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} : \|a\| \le \rho \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} : \|b\| \le \sigma \right\}$$

$$: \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2n$

$$(E, 0) = \pi : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi e^{\tau A} BP = S_{\rho\tau}(0)$$

$$\pi e^{\tau A} CQ = S_{\sigma\tau}(0)$$

$$\pi e^{\tau A} z_0 = \underline{z_1^0 + t z_2^0}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : \|z_1\| \le \ell \right\}$$

$$\rho > \sigma \Rightarrow \mathcal{D}(\tau) = E$$

$$\hat{\omega}(\tau) = S_{\xi(t)}(0),$$

$\neq \gamma$

$$\xi(t) = \tau(\rho - \sigma)$$

$\rho > \sigma$

$$W(t, 0) = S_{\gamma(t)}(0),$$

$$\gamma(t) = (\rho - \sigma)\frac{t^2}{2}$$

$$(\ell + \gamma(t))^2 = \|z_1^0\|^2 + 2t(z_1^0, z_2^0) + t^2\|z_2^0\|^2.$$

Общий вид селектора.

$$\|z_1^0 + T z_2^0\| \neq 0$$

$$\tilde{\omega}(t) = -\frac{z_1^0 + T z_2^0}{\|z_1^0 + T z_2^0\|}(\rho - \sigma)\tau$$

$$u(t) = v(t) - \frac{z_1^0 + z_2^0 T}{\|z_1^0 + z_2^0 T\|}(\rho - \sigma)$$

$$\|z_1^0 + T z_2^0\| = 0$$

$$\tilde{\omega}(\tau) = 0$$

$$u(t) = v(t)$$

$\boxed{\rho \le \sigma}$ => в этом случае

$$\vartheta(t) = \mu_0 E,$$

$$\mu_0 \in \left(0, \frac{\rho}{\sigma}\right)$$

1-й шаг

$$\hat{\omega}(t) = \vec{S}_{(\rho - \mu_0\sigma)\tau}(0)$$

$$W(t, 0) = \vec{S}'_{(\rho - \mu_0\sigma)\frac{t^2}{2}}(0)$$

$$\int_0^t (\mu_0 - 1)\vec{S}'_{\sigma t}(0)\,d\tau =$$

$$= \vec{S}'_{(1-\mu_0)\sigma\frac{t^2}{2}}(0)$$

$$M^3(t) = \cancel{\vec{S}}_{\cancel{(1-\mu_0)\sigma}}$$

$$= \cancel{\vec{f}}_{\cancel{(\rho-(1-\mu_0))\sigma\frac{t^2}{2}}} \quad \vec{S}'_{(\rho-(1-\mu_0))\sigma\frac{t^2}{2}}(0)$$

$\mu^3(t) \neq 0$

$$t \le \sqrt{\frac{2l}{(1-\mu_0)\sigma}} = t^*$$

2°, $\exists T \le t^*$

$$\|z_1^\circ + T z_2^\circ\| = l + (\rho - \sigma)\frac{T^2}{2}$$

$\tilde{w}(t) \in \hat{w}(\tau)$

$$\tilde{w}(\tau) = \left(-\frac{(z_1^\circ + T z_2^\circ)}{\|z_1^\circ + T z_2^\circ\|}(\rho - \mu_0\sigma)\tau\right)$$

$$u(t) = \mu_0 v(t) - \frac{(z_1^\circ + T z_2^\circ)}{\|z_1^\circ + T z_2^\circ\|}(\rho - \mu_0\sigma)$$

$\ddot{x} = u(t)$ $\quad x(0), \dot{x}(0)$

$\ddot{y} = v(t)$ $\quad y(0), \dot{y}(0)$

$\|v(t)\| \le \sigma$

$\|x(T) - y(T)\| \le l$

3. Контрольный пример Понтрягина сила трения

$\underline{P}$ $\ddot{x} + \alpha\dot{x} = \rho u$

E $\ddot{y} + \beta\dot{y} = \sigma v$

$x, y, u, v \in R^\nu$, $\nu \ge 2$

$\|u\| \le 1$, $\|v\| \le 1$

$\|x(t) - y(t)\| \le P$.

функциенкая модель?

~~Игровая за~~дача

16.12.0

Контрольные пример Л.С. Понтрягин

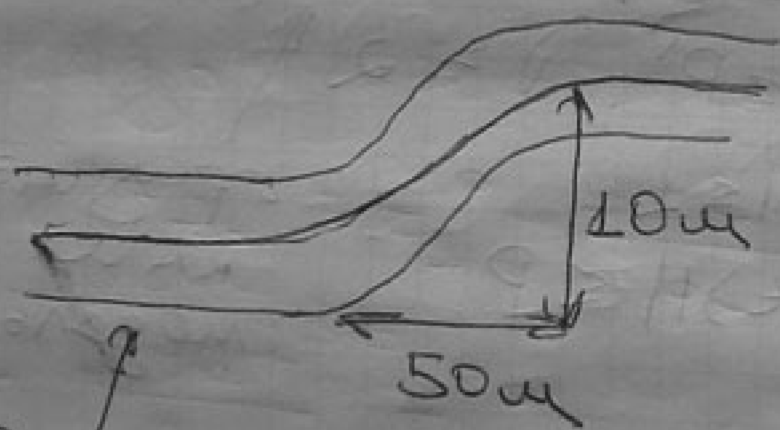
P: $\ddot{x} + \alpha\dot{x} = a$ $\quad \|a\| \le \rho$

E: $\ddot{y} + \beta\dot{y} = b$ $\quad \|b\| \le \sigma$

$x, y, a, b \in R^\nu$ $\nu \ge 2$

$\exists t: \|x(t) - y(t)\| \le b$

ГОСТ Переставка



Скорость, с к-рой автомобиль переезжает 67 км/ч. Если скорость больше, то колесо отрывается от дороги.

$z = (z_1, z_2, z_3) = (x - y, \dot{x}, \dot{y}) \in R^3$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3 \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + a \\ \dot{z}_3 = -\beta z_3 + b \end{cases}$$

$x(0), \dot{x}(0)$

$y(0), \dot{y}(0)$

$Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ $Cv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$

$M = \{z : \|z_1\| \le \ell\}$

$BP = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} : \|a\| \le \rho \right)$

$CQ = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} : \|b\| \le \sigma \right)$

$L = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : z_1 \in R^2 \right\}$

$\pi : (\underset{2\times 2}{E} ; \underset{2\times 2}{0} , \underset{2\times 2}{0})$

$A = \begin{pmatrix} 0 & E & -E \\ 0 & -\alpha E & 0 \\ 0 & 0 & -\beta E \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = \left(\begin{array}{c|c|c} E & \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}E & -\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}E \\ \hline 0 & e^{-\alpha t}E & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-\beta t}E \end{array}\right)$$

Надо вычислить

$$\pi e^{At} z_0 = z_1^0 + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} z_2^0 - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} z_3^0$$

$$\pi e^{tA} BP = \left\{ \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} a : \|a\| \le \rho \right\} = \overset{\circ}{S}_{r(t)}(0), \text{ где}$$

$$r(t) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho$$

$$\pi e^{tA} CQ = \left\{ \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} b : \|b\| \le \sigma \right\} = \overset{\circ}{S}_{s(t)}(0)$$

$$s(t) = \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} \sigma$$

1-й случай:

$l = 0 \Rightarrow M^2 = \{0\}$

~~$L^3(t)$~~

$M^3(t) \quad \mathcal{D}(\tau) = E$

$$w(t) = \pi e^{tA} BP \,\underline{*}\, \pi e^{tA} CQ = \overset{\circ}{S}_{\xi(t)}(0)$$

$$\xi(t) = \eta(t) - s(t)$$

$$W(t, 0)_t = \overset{\circ}{S}_{\gamma(t)}(0),$$

$$\gamma(t) = \int_0^t \xi(\tau)\, d\tau$$

Условие: $r(t) > 0$, $s(t) >$ ...

$\xi(t) > 0$, $\gamma(t) > 0$

Выполняется, когда

$$\boxed{p \geq \sigma, \quad \frac{p}{\alpha} \geq \frac{\sigma}{\beta}}$$

Годится случай:
либо $\geq$ $>$
либо $>$ $\geq$

Если два неравенства — равенства — разность могла быть пустой.

Этап 2

Нахожд. гарантиров. времени окончания $T(z^0)$.

$$\pi e^{tA} z^0 \in S_{\gamma(t)}(0)$$

$$\gamma^2(t) = \left(\pi e^{tA} z^0, \pi e^{tA} z^0\right)$$

гарантиров. время начала.

Этап 3

Нахожд. селектора мн-ва.

ш а) Если $\|\pi e^{T(z_0)A} z^0\| \neq 0$

$$\tilde{\omega}(\tau) = -\frac{\pi e^{T(z_0)A} z_0}{\|\pi e^{T(z_0)A} z_0\|} \xi(\tau)$$

Упр-ние.

$$\boxed{u(t)} = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha(T(z_0)-t)}} \times \left[\frac{1-e^{-\beta(T(z_0)-t)}}{\beta}\boxed{v(t)} + \tilde{\omega}(T(z^0)-t)\right]$$

получается контр-управление.

б) Если
$\|\pi e^{T(z^0)A} z^0\| = 0$, тогда
$\varpi(\tau) = 0$

$$u(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1-e^{-\beta(T(z^0)-t)}}{1-e^{-\alpha(T(z^0)-t)}} v(t)$$

Если $\boxed{l>0}$, то
$\varsigma(t) > 0$, $t \geq 0$ – это
условие не выполняется.

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{M}(t) E$$

$$\gamma(t) = z(t) - \mathcal{M}(t) s(t)$$

$$0 \leq \mathcal{M}(t) \leq \max\left\{\frac{\rho}{\sigma} \frac{\beta}{\alpha} \cancel{} \frac{1-e^{-\alpha t}}{1-e^{-\beta t}}, 1\right\}$$

Получ. след. выражения

$$w(t) = S^{\nu}_{\gamma(t)}(0)$$

$$W(t,0)_t = S^{\nu}_{\varkappa(t)}(0),$$

$$\varkappa(t) = \int_0 \gamma(s)\,ds$$

$$\mathcal{M}^3(t) = S^{\nu}_{(l-\varsigma(t))}(0),$$

$$\varsigma(t) = \sigma \int_0^t (\mathcal{M}(\tau)-1) \frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta} d\tau$$

$\mathcal{M}(t)$: $\gamma(t) \geq 0$, $l \geq \varsigma(t)$,
$t \in [0,T]$.

$$\pi e^{TA} z^0 \in S^{\nu}_{(l-\varsigma(T)+\gamma(T))}(0)$$

~~В~~ В этом случае,
если
а) $\|\pi e^{T(z^0)A} z^0\| \neq 0$

$$\tilde{\omega}(\tau) = -\frac{\Pi e^{T(z^0)A} z^0}{\|\Pi e^{T(z^0)A} z^0\|}\,\eta(t)$$

б) $\|\Pi e^{T(z^0)A} z^0\| = 0$,

$u(t) =$

$\tilde{\omega}(\tau) = 0$

$u(t) =$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha\dot{x} = \rho u(t, v(\cdot)) \\ \ddot{y} + \beta\dot{y} = \sigma v(t) \\ x(0), \dot{x}(0), y(0), \dot{y}(0) \end{cases}$$

$x(0), \dot{x}(0), y(0), \dot{y}(0) \to$

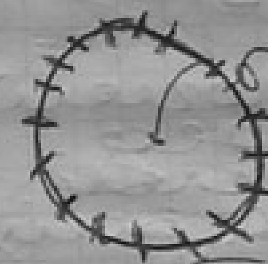
сейчас же $\longrightarrow T(z^0)$

получаем конкр. время оконч. игры.

$x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t)$

$\|x(t) - y(t)\| \le \varepsilon$

$u(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))$



$\tilde{\omega}(T) \in \hat{W}(\tau) = \Pi e^{\tau A} B P^*$

$\mathcal{D}(\tau)\, \Pi e^{\tau A} C Q$

Рассмотрим

$\dot{x} = w$, $x(0) = 0$

$u, x \in R^\nu$ $(\Pi : R^n \to L,\ \dim L = \nu)$

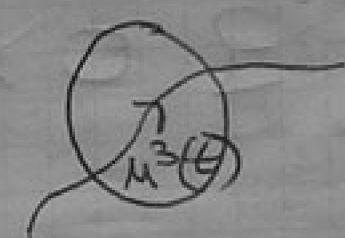
$w \in \hat{W}(\tau)$

Конечное мн-во

$M^3(t) - \Pi e^{tA} z^0$. Мы

хотели, чтобы

$x(t) \in M^3(t) - \Pi e^{tA} z^0$



$$\hat{w}(\tau) = \{u \in E^\nu : (u, Qu) \le 1\}$$

положит. опред. симм. матрица

~~c(ψ)~~

$$c(\psi) = \sqrt{(Q^{-1}\psi, \psi)}, \quad \psi \ne 0$$

$\psi \in E^\nu$

$\int_0^t \hat{w}(\tau)\,d\tau$ – мн-во достижимости.

$\exists t:$

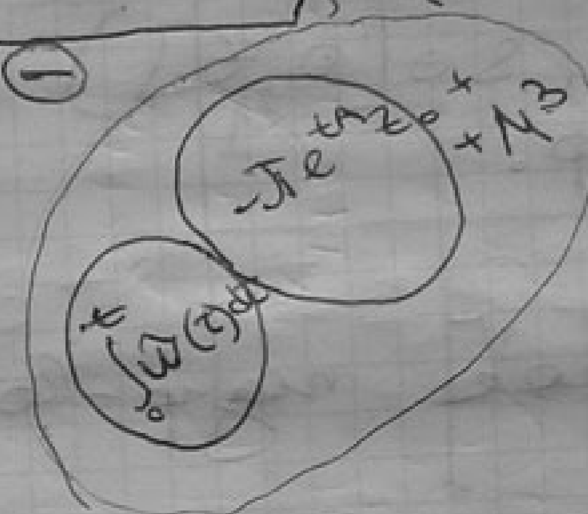
$$\int_0^t \hat{w}(\tau)\,d\tau \cap \left(M^3(t) - \pi e^{tA} z^0\right) \ne \emptyset$$

$T(z^0)$ – обознач. этого мн-ва.

В случае $\exists$ ОУ

$$w(t) = c'(\psi(t, p))$$

$\boxed{\dot{\psi} = -A^*\psi}$, $\psi(0) = p$, $\|p\| = 1$.



08.02.10.

Задача убегания.

$z \in R^n$.

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \quad z(0) = z_0$$

P: $u \in P \subset R^p$

E: $v \in Q \subset R^q$

(*)

Цель управления:

$z(t) \notin M$.

$\forall t \geq 0 \quad z_0 \notin M$

$u(t, v(s), s \in [0, t])$ —
регулятор.

$M = M^1 + M^2$,

M^1 — линейное подпр-во R^n.

~~[illegible]~~

$L^1 \oplus M^1 = R^n$, $M^2 \subset L^1$

$\pi : R^n \to L^1$

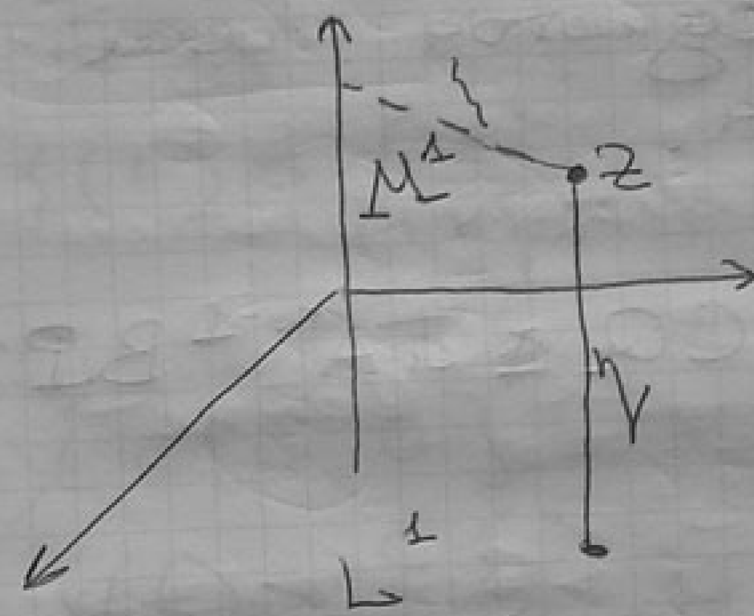
$\pi z(t) \notin M^2$

$\pi^2 = \pi$ — оператор ортогон. проектир. (такое св-во у него).

~~[illegible]~~ $W \subset L^1$

$\dim W = 2$

$\pi : R^n \to W$ (ортогон. проектиров.)



$z \to (\xi, \eta)$

$m \in M^1$, $\pi m = 0$

<u>Предположение 1</u>

$\exists W \subset L^2$, $\exists k \in N$:

a) $\pi A^i C Q$, $i = 0, 1, \dots, k-2$

$\pi A^i B \underline{P}$, $i = 0, 1, \dots, k-2$

$\pi C Q$ — одноточ. око
или нет?

ΠACQ – одноточ. или неодноточ.

$\Pi A^2 CQ$.

б) $\Pi A^{k-1} CQ \overset{*}{=} \Pi A^{k-1} BP \supset$
$\supset S^2_\alpha(B)$
$\alpha > 0$

Теорема

Пусть для игры (*) выполнено предп. 1 $\Rightarrow$
$\forall z_0 \notin M \ \exists \ v(t, z_0, u(s), s \in [0, t])$:
$z(t) \notin M$.

$\exists \ \Theta, \varepsilon, c, l$ и натур. k
(A, B, C, P, Q, M) :

1) Если $\xi_0 \geq \varepsilon$ (расст. для мн. подпр-ва от z_0)

Тогда

$$\xi(t) > \frac{C\varepsilon^k}{(1+\psi(t))^k}, \quad t \in [0, \infty)$$

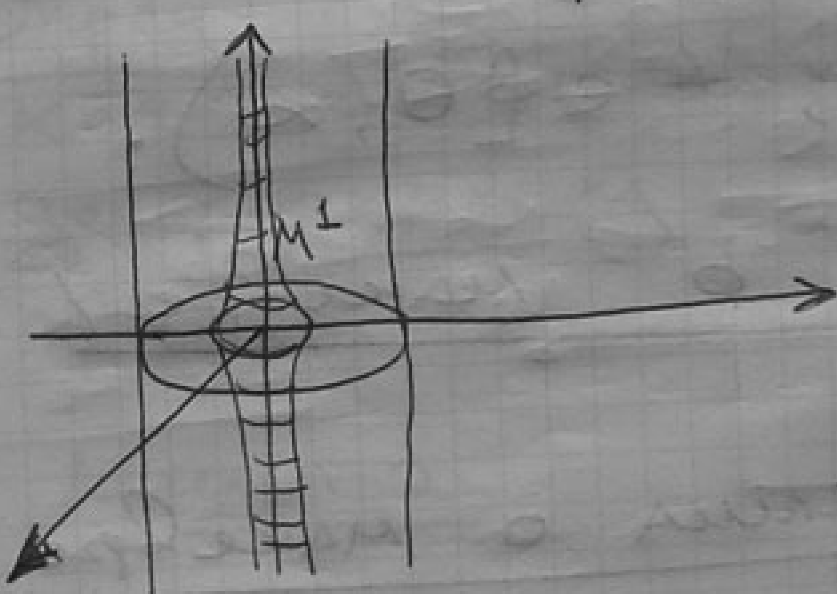
2) Если $\xi_0 < \varepsilon$, то

$\to t \in [0, \Theta]$

$$\xi(t) > \frac{C\xi_0^k}{(1+\psi(t))^k}$$

$\to t > \Theta$

$$\xi(t) > \frac{C\varepsilon^k}{(1+\psi(t))^k}.$$



Если в $z(0)$ позиции находится вне ε-трубе, в остал. моменты времени θ траект. никогда не войдёт "куда надо".

1) Если $\xi_0 > \varepsilon$, то $\xi(t) > \ell \quad \forall t \in [0, \infty)$

2) Если $\xi_0 < \varepsilon$

$$\xi(t) > \frac{c\,\xi_0^k}{(1+\psi(t))^k}, \quad t \in [0, \theta]$$

$$\xi(t) > \ell, \quad t \in [\theta, \infty).$$

Леммы о манёвре обхода.

§2. Лемма о манёвре обхода.

Лемма 1

Пусть есть Σ^1 – мн. конечномерное семейство вещ. аналит. ф-ций, $t \in [0, 1]$

Если $f_1 \in \Sigma^1$, $f_2 \in \Sigma^1 \Rightarrow$

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \in \Sigma^1.$$

Оп. Конечномерное:

$f_1(t), \ldots, f_n(t) \in \Sigma^1$

$\forall f(t) \in \Sigma^1 \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \ldots + \alpha_n f_n(t)$$

$$f(t) \not\equiv 0.$$

Опред. Аналитич. – бесконечное число раз дифференц.

~~$f(t) \not\equiv 0$~~

Лемма 2

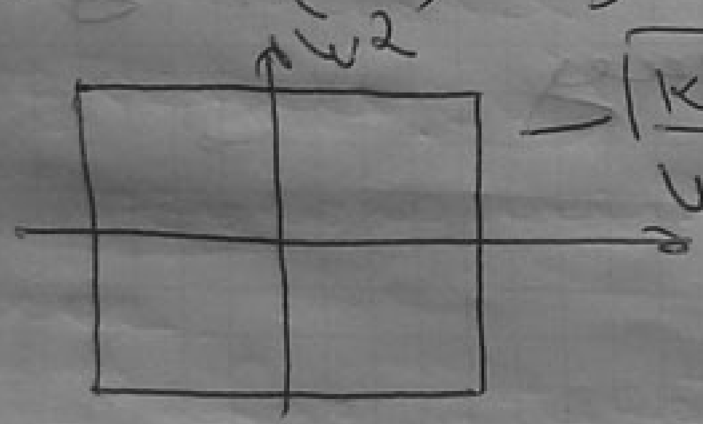
Если для каждой лин. игры расширим ф-лу Коши

$$\dot z = Az + Bu - Cv$$

$$\pi z(t) = \pi e^{tA} z_0 + \int_0^t \pi e^{A(t-s)} (Bu - Cv)\, ds.$$

Лемма 2 Пусть Σ_1' — линейное конечное семейство ф-ций, распр. на $[0, 1]$

W: $w = (w^1, w^2) \in W$



$\to$ квадрат со стороной a

$$\Gamma = \{(w^1, w^2) : |w^i| \le a,\ i = 1, 2,\ a > 0\}$$

$$v^i(t) = \varphi^i(t) - \alpha^i t^k$$
$i = 1, 2.$

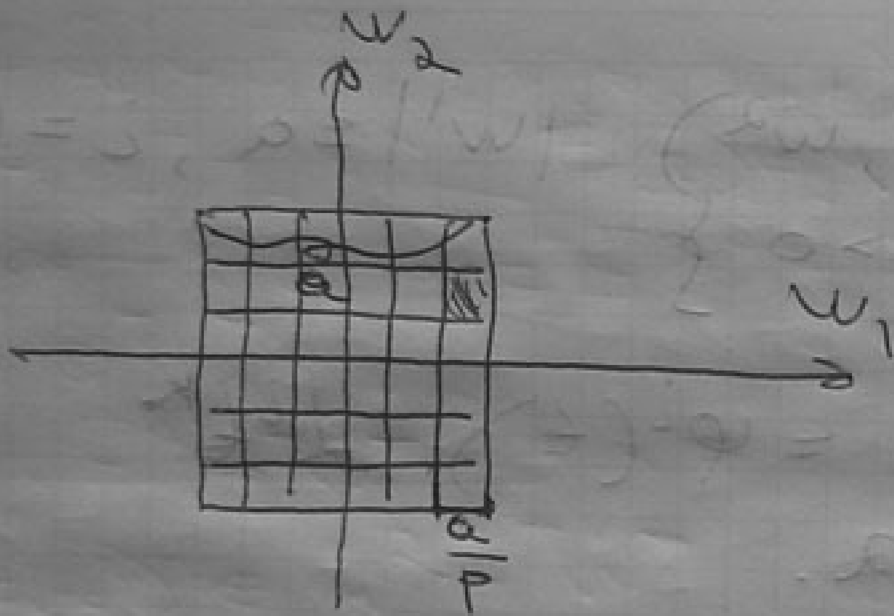
$\varphi^1(t), \varphi^2(t) \in \Sigma_1',\ \alpha^i \in \Gamma.$

~~$\alpha_i \in \Gamma$~~

Для ф-ции $v(t)$ справедливо след. условие:

$\|v(t)\| > \gamma t^k,\ t \in [0, 1].$

Семейство $\Sigma'' = \{\Sigma_1', t^k\}$, пусть m — число нулей, соотв. Σ'' на $[0, 1]$.



$p > 2m+1$

$\frac{\psi^i(t)}{t^k}$, $i=1,2$

$t \in [0,1]$

Обязат. найдётся 1 квадратик, через к-рый эта кривая не проходит.

Предположим противное.

p^2 квадратиков.

p^2-1 — посещает.

$\frac{p^2-1}{2}$ — ~~такое~~ не менее чем такое число раз пересечёт вертик./горизонт. прямые.

У нас всего $(p+1)$ вертикальных прямых.

$$\frac{p^2-1}{2(p+1)} = \frac{p-1}{2} > m.$$

$\boxed{15.02.10}$

Л. С. Понтрягин. } теорема
Е. Ф. Мищенко.

Управляемая система.

$\dot{z} = Az + Bu - Cv$, $z(0) = z^0 \notin M$

$u \in P \subset E^p$

$v \in Q \subset E^q \quad v(t, u(\cdot)):$

$M = M^1 + M^2 \quad z(t) \notin M, \forall t > 0$

$\cancel{\ } \quad M^1 \oplus L^1 = E^n$

$L^1 \ni W$

$\pi : E^n \to W$

$\pi z(t) \notin M^2$

$\|\pi z(t)\| > 0 \quad \forall t > 0$

$$\pi z(t) = \pi e^{tA} z_0 + \int_0^t \pi e^{(t-s)A} (Bu(s) - Cv(s)) \cdot ds =$$

$$= \pi e^{tA} z_0 + \int_0^t \pi e^{\tau A} (Bu(t-\tau) - Cv(t-\tau)) d\tau$$

$$\pi e^{tA}(Bu - Cv) = \underbrace{\pi Bu - \pi Cv}_{q_0} + \underbrace{(\pi ABu - \pi ACv)}_{q_1} \tau +$$

πBP – одного ч. очень част

πCQ – ——— || ———

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi ABP \quad \text{———} \quad || \quad \text{———} \\ \pi ACQ \quad \text{———} \quad || \quad \text{———} \\ \dim W = 2 \end{array} \right\}$$

$$+ q_{k-2} \frac{\tau^{k-2}}{(k-2)!} + \pi A^{k-1}(Bu - Cv) \cdot \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} + h(u, v, \tau)$$

$$\|h(u, v, \tau)\| \le l \cdot \tau^k$$

$$\pi z(t) = \pi e^{tA} z_0 + \sum_{i=0}^{k-2} q_i \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} - \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\pi A^{k-1}(Cv(s) - Bu(s)) \right] ds + \bar{h}(u(\cdot), v(\cdot), t)$$

$\|\bar{h}(u(\cdot), v(\cdot), t)\| \le l \tau^{k+1}$

$\pi A^{k-1} C Q \supset \pi A^{k-1} B P +$

$\underbrace{+ S^2_\alpha(0) + b}$

Пусть $w \in W$, $\|w\| \le \alpha$

Если в момент времени t:

$\pi A^{k-1} B u + w + b$

$\pi A^{k-1} C v \quad P$

Q

Если $u(t)$ измер. образом зависит от t → $v(t)$ будет измеримой функцией.

$\pi z(t) = \boxed{\pi e^{tA} z_0 + \sum_{i=0}^{k-2} q_i \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} - b \frac{t^k}{k!}} - w \frac{t^k}{k!} + \bar{h}(u(\cdot), v(\cdot), t)$

Лемма о маневре обхода

$\|\pi z(t)\| > 0 \quad \forall t \in [0, \theta]$

$0 \le \theta \le 1$.

$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \pi e^{tA} z_0 + \sum_{i=0}^{k-2} q_i \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} - b \frac{t^k}{k!}$

$= \psi(t) - w \frac{t^k}{k!} + \bar{h}(u(\cdot), v(\cdot), t)$

$= \psi(t) + t^k (\xi + \bar{\bar{h}}(u(\cdot), v(\cdot), t))$, где $\xi = \frac{w}{k!}$, $\bar{\bar{h}} = \frac{\bar{h}}{t^k}$

$\|\bar{\bar{h}}(u, v, t)\| \le l t$

$t \in [0, \theta]$

$\pi z(t) = \psi(t) + t^k (\xi + \bar{\bar{h}}(u(\cdot), v(\cdot), t))$

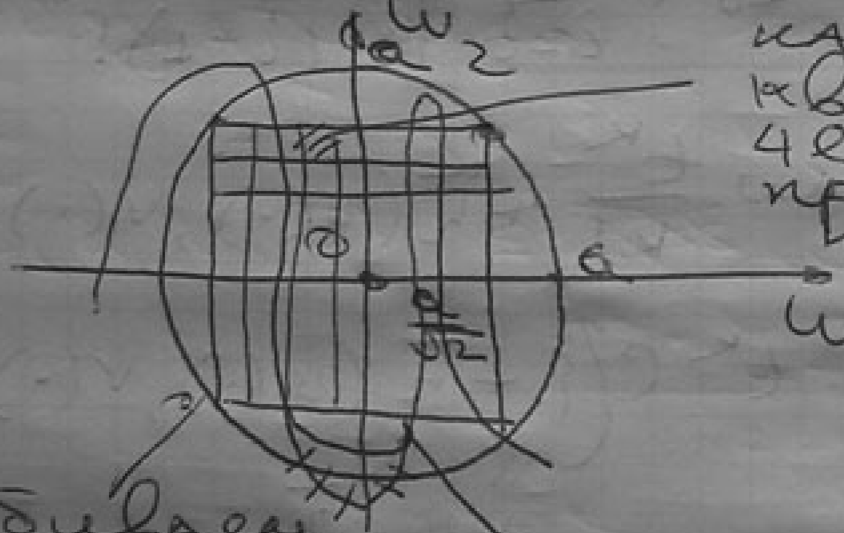
$\|\pi z(\cdot)\| > 0, \quad t > 0$

$$\frac{\pi z(t)}{t^k} = \frac{\psi(t)}{t^k} + \zeta + \bar{\bar{h}}(u, v, t)$$

$\|\bar{\bar{h}}\| \le lt$

$$\zeta = -\frac{\omega}{k!}$$

~~если~~ $\|\zeta\| \le \frac{\alpha}{k!} = a$



найдется 1 квадратик, через к-рый прямая не проходит.

разбиваем квадрат на p^2 квадратиков.

Действуем по лемме о маневре обхода.

$p > 2m + 1.$

$\xi \to m$

$t \in [0, \theta]$

$l\theta$ не выходит за четверть.

$l\theta < \frac{a\sqrt{2}}{4lp}$

$t \in [0, \theta] \quad \gamma$

$$\left\| \frac{\pi z(t)}{t^k} \right\| \ge \frac{a\sqrt{2}}{4p}$$

$\|\pi z(t)\| \ge \gamma t^k > 0, \quad t > 0.$

$$\left| \frac{\psi_i(t)}{t^k} - \zeta_i \right| \ge \gamma$$

$\left\| \frac{\varphi(t)}{t^k} - \xi \right\| \geq \gamma.$

$\Sigma \to m$

$\in E^2$

$v(t) = \varphi(t) - \alpha t^k$

$\varphi(t) \in E^2$, $\alpha t^k \in E^2$

$\varphi(t) \in \Sigma$

$\alpha \in \Gamma$

Обязательно найдётся

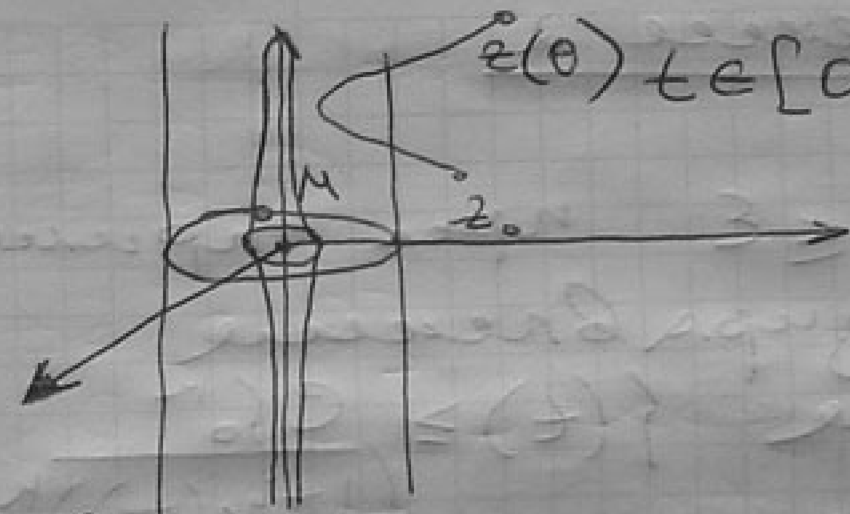
$\boxed{\exists\ \Gamma' \subset \Gamma,\ \alpha \in \Gamma',\ \|v(t)\| \geq \gamma t^k}$

$\|h(u, v, \tau)\| \leq \cancel{}\ e\tau^k.$

Идея о маневре обхода.

основной результат ~~каждые~~ манёвра обхода.

<u>1-й способ.</u>



включаем, когда траектория попадёт в ε-трубу.

$\varepsilon = \gamma \cdot \theta^k$

<u>Утверждение 1.</u>

$\forall z_0,\ z_0 \notin M$

$\xi(\theta) > \varepsilon = \gamma \theta^k.$

Т.к. для $\xi(\theta)$ справедлива оценка:

$\xi(\theta) \geq \|\pi z(\theta)\| \geq \gamma \theta^k = \varepsilon$

Утверждение 2.

$\exists\, c,$

$\forall z_0 \quad \zeta_0 \le \varepsilon$ при примен. след. управления убегания $\zeta(t) \ge \dfrac{c\zeta_0^k}{(1+\eta(t))^k}$.

$t \in [0, \theta]$.

$z \sim (\zeta, \eta)$

$\boxed{01.03.10}$

1 лекция пропущена.

$\boxed{01.03.10}$

$\ddot{x} = u$, $x, y, u, v \in R^2$,

$\dot{y} = v$ $\|u\| \le \rho$, $\|v\| \le \sigma$

$\exists\, t_1 : x(t_1) = y(t_1)$

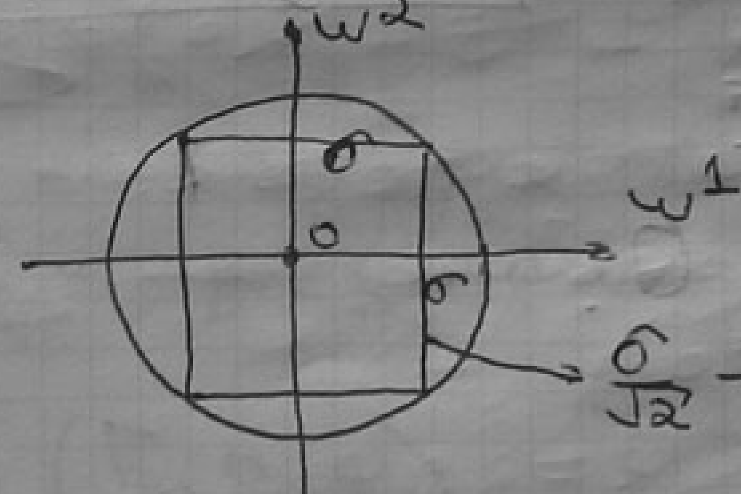
$z = (z_1, z_2) = (y - x, \dot{x})$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + v \\ \dot{z}_2 = -u \end{cases}$$

$K = 1$

Упр-ние имеет вид:

$v(t) = \beta_0$



$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ - половина стороны квадрата.

$= \frac{z_1^0 + z_2^0 t}{t} = \frac{z_1^0}{t} + z_2^0$, $t \in [0, 1] -$

Тогда это преследование.

Для

$\Pi z(t) = z_1^0 + z_2^0 t + t\left(\beta_0 + \cancel{\xi} \mathcal{L}_2(t)\right)$

$\| \mathcal{L}_2(t) \| \le \rho \frac{t}{2}$

$t \in [0, \theta]$

$\cancel{\rho \frac{\theta}{2}}$

$\rho \frac{\theta}{2} < \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} > \boxed{\theta < \frac{\sigma}{\rho 2\sqrt{2}}}$

$\gamma = \frac{\sigma}{4\sqrt{2}}$

$\boxed{\varepsilon} = \frac{\sigma}{12\sqrt{2}} \theta.$

Пример $x, y \in R^{D}, D \ge 2.$

P $\ddot{x} + \alpha \dot{x} = \rho u \quad \|u\| \le 1$

E $\ddot{y} + \beta \dot{y} = \sigma \boxed{v} \quad \|v\| \le 1$

$M = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) : x = y\}$

$x(0), \dot{x}(0)$

$y(0), \dot{y}(0)$

Если $x(0) \ne y(0)$,

Если $\sigma \ge \rho$ ~~тогда~~

$z = (z_1, z_2, z_3) = (x - y, \dot{x}, \dot{y})$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3 \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + \rho u \\ \dot{z}_3 = -\beta z_3 \ldots v \end{cases}$$

$\Pi : ($

Тогда это прямая линия.

Для

$\pi z(t) = z_1^0 + z_2^0 t + t(\beta_0 + \ell_2(t))$

$$\|\ell_2(t)\| \leq \rho \frac{t}{2}$$

$t \in [0, \Theta]$

$\cancel{\rho \frac{\Theta}{2}}$

$\rho \frac{\Theta}{2} < \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $\boxed{\Theta < \frac{\sigma}{\rho 2\sqrt{2}}}$

$\gamma = \frac{\sigma}{4\sqrt{2}}$

$\boxed{\varepsilon} = \frac{\sigma}{12\sqrt{2}}\Theta.$

<u>Пример</u> $x, y \in R^\nu, \nu \geq 2.$

P $\ddot{x} + \alpha\dot{x} = \rho u$ $\|u\| \leq 1$

E $\ddot{y} + \beta\dot{y} = \sigma \boxed{v}$ $\|v\| \leq 1$

$M = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) : x = y\}$

$x(0), \dot{x}(0)$

$y(0), \dot{y}(0)$

Если $x(0) \neq y(0)$,

Если $\sigma \geq \rho$, ~~тогда~~

$z = (z_1, z_2, z_3) = (x - y, \dot{x}, \dot{y})$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3 \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + \rho u \\ \dot{z}_3 = -\beta z_3 + \sigma v \end{cases}$$

$\pi: (E, 0, 0)$

$\pi B P = \pi C Q = \{0\}$

$\pi A B P = S_\rho^\nu(0)$

$\pi A C Q = S_\sigma^\nu(0)$

$k = 2$.

Игра двух крокодилов.

$\ddot{x} = u, \ \|u\| \le \rho, \quad x(0), \dot{x}(0)$

$\ddot{y} = v, \ \|v\| \le \sigma, \ y(0), \dot{y}(0)$

$x, y \in R^\nu$

$x(t) = y(t)$

Считаем, что $x(0) \ne y(0)$.

Оператор ортогон. проектиров.:

$\pi = (E, 0)$

$\pi B P = \pi C Q = \{0\}$

$\pi A B P = S_\rho^\nu(0)$

$\pi A C Q = S_\sigma^\nu(0)$; $k = 2$.

Для нелинейного управляемого процесса.

$$(1) \begin{cases} \dot{z} = f(z, u(t), v(t)) = F(z(t), t), \ z(0) = z_0 \\ z \in E^n, \ u \in P, \ v \in Q \end{cases}$$

1. Решение $\exists$.
2. Единственно.
3. Нелокально продолжение на $[0, +\infty)$.

Теорема Филиппова А. Ф.

Если $(z, f(z, u, v)) \le c(1 + \|z\|$ $\forall z \in R^n$, то решение не локально продолжим (Решение на конечн отрезке в ∞ уходит)

$M \subset E^n$, $z_0 \notin M$

$z(t) \notin M$ $\forall t > 0$

E: (1), P, Q, M,

$\forall t$: $z(t)$, $u(t)$

Под управлением второго игрока:

$v(t) = V(z_0, t_0, u_t(\cdot), z(\cdot), s \in [t - \varepsilon, t])$

Предположение 1.

$M = \{z \in E^n : G_1(z) = G_2(z) = 0\}$

$G_j : E^n \to E^1$, $j = 1, 2$

Ω - открытое множество.

φ: непр. дифф. ф-ция.

$\varphi : \Omega \to E^1$, $\varphi'(z)$

$\nabla\varphi(z) = \varphi'_z(z) \cdot f(z, u, v)$

Предполож. 2.

Пусть $\exists\, \Omega \subset E^n$, $\Omega \supset M$

$\exists$ $k_1, k_2 \in N$.

$\varphi_j^0(z) = G_j(z)$,

$\varphi_j^i(z) = \nabla\varphi_j^{i-1}(z)$

Для всех i, j от 1 до $k_j - 1$, $j = 1, 2$.

$\nabla\varphi_j^{k_j - 1}(z)$, $j = 1, 2$

$f_j(z, u, v)$

$f_0(z, u, v) = \begin{pmatrix} f_1(z, u, v) \\ f_2(z, u, v) \end{pmatrix}$

Для ф-ции f_0

Предполож. 3

$f_0(z, u, v)$ удовл. услови[я] Липшица:

$f_0(z_1, u, v) - f_0(z_2, u, v) \leq$
$\leq \lambda \| z_1 - z_2 \|.$

$F_j(z) = \bigcap_{u \in P} f_j(z, u, Q)$ $j = 0, 1, 2$

S^j - ед. замк. шар. в 0.

Предпол. 4

$\exists \varphi_0^{k_0} : \Omega \to E^2, \varepsilon_0 : \Omega \to E^1$
$\varphi_0^{k_0}(z) + \varepsilon_0(z) \cdot S^2 \subset$
$\subset F_0(z) \quad \forall z \in \Omega.$

Предполож. 5

$k_1 \neq k_2$, $\exists \varphi_j^{k_j} : \Omega \to E^1$ - непр., $\varepsilon_j : \Omega \to E^1$, что справедливо.
$\varphi_j^{k_j}(z) + \varepsilon_j(z) S^1 \subset F_j(z)$,
$\forall z \in \Omega$, $j = 1, 2.$

Теорема 1-4
1-3, 5

$\exists v(t) : z(t) \notin M$
$\forall t > 0.$

Рассмотрим
$\dot{z} = f(z, u(t), v(t))$.
$z(0) = z_0$

$\downarrow$

$z(t)$

$G_0(z) = \begin{pmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \end{pmatrix}$ где

$G_1(z), G_2(z)$ определ. термин. мн-во.

$\varphi_0^j(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1^j(z) \\ \varphi_2^j(z) \end{pmatrix}$

$i = 0, \dots, k_0.$

Рассмотрим случай:

$k_0 = k_1 = k_2$

$$G_0(z(t)) = \sum_{i=0}^{k_0-1} \varphi_0^i(z_0)\frac{t^i}{i!} + \frac{1}{(k_0-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{k_0-1} \cdot f_0(z(\tau), u(\tau), v(\tau))\,d\tau + h_1(t),$$

где

$$h_1(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k_0-1}}{(k_0-1)!}\Big(f_0(z(\tau), u(\tau), v(\tau)) - f_0(z_0, u(\tau), v(\tau))\Big)\,d\tau,$$

$$\|h_1(t)\| \le C(\Omega)\, t^{k_0+1}$$

Условие:

$$f_0(z_0, u(\tau), v(\tau)) = \varphi_0^{k_0}(z_0) + \varepsilon_0(z_0)\,\omega,$$

$\|\omega\| \le 1$.

$$G_0 z(t) = \sum_{i=0}^{k_0} \varphi_i^0(z_0)\frac{t^i}{i!} + \omega\,\varepsilon(z_0)\frac{t^{k_0}}{k_0!} + h_1(t).$$

$$(\beta_0 + \beta_1(t))\,t^{k_0}$$

$$\beta_0 = \frac{\omega + \varepsilon(z_0)}{k_0!}$$

$$\beta_1(t) = \frac{h_1(t)}{t^{k_0}}$$

$t \in [0, \theta]$

$$\|G_0 z(t)\| \ge \gamma\, t^{k_0}.$$

$\boxed{15.03.10.}$

Нелинейные дифф. игры

$$\begin{cases} \dot z = \boxed{f}(z, u, v), \; z(0) = z_0 \\ z \in E^n \\ u \in \boxed{P} \subset E^p \\ v \in \boxed{Q} \subset E^q \\ \boxed{M} \subset E^n, \; z_0 \in M \\ z(t) \notin M \end{cases}$$

$$G_0(z) = \begin{pmatrix} G_{01}(z) \\ G_{02}(z) \end{pmatrix}$$

При [illegible] условиях

$$G_0(z) = \sum_{i=0}^{k_0} \varphi_i^0(z_0) \frac{t^i}{i!} + \boxed{\omega}\,\varepsilon(z_0) \frac{t^{k_0}}{k_0!} + h_1(t)$$

$\|\omega\| \le 1$

$\|G_0(z)\| \ge \gamma \cdot t^{k_0}$

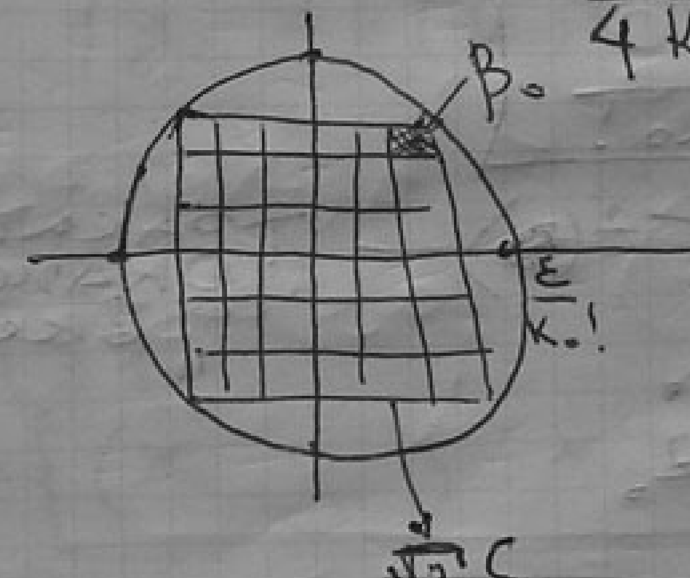
$(\beta_0 + \beta_1(t))\, t^{k_0}$

$$\beta_0 = \omega \frac{\varepsilon(z_0)}{k_0!}$$

$$\beta_1(t) = \frac{h_1(t)}{t^{k_0}}, \quad \|\beta_1(t)\| \le C(\Omega)$$

$$\|\beta_0\| \le \frac{\varepsilon}{k_0!}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon}{4 k_0!}$$



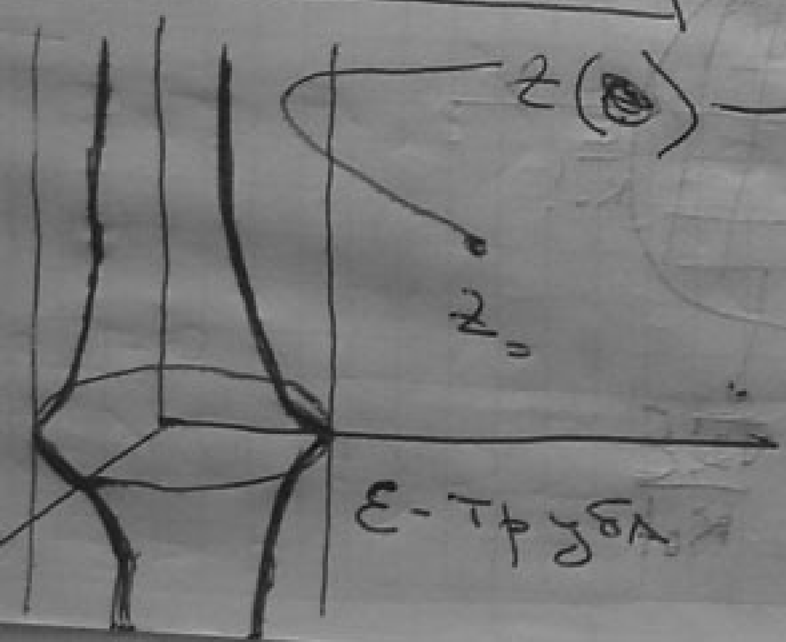
$=2m+2$
2 маленьких квадратиков.
$(t) = \sum_{i=0}^{k_0} \varphi_i^0(z_0)\frac{t^i}{i!} +$

$\frac{(t)}{t^{k_0}}, t\in[0,1].$

$[0,\Theta]$ такой, что Θ
такого, что

$C(\Omega)\Theta \le \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{4k_0!}$

$$\boxed{\Theta \le \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{4Ck_0!}}$$



$t\in[0,+\infty)$

Пример 1 (Шофер-убийца

$$P\begin{cases}\dot{x}_1 = a(t)\sin x_3 \\ \dot{x}_2 = a(t)\cos x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{a(t)}{R}u\end{cases}$$ — догоняющий объект

Убегающий объект:

$$E = \begin{cases}\dot{y}_1 = b(t)v_1(t) \\ \dot{y}_2 = b(t)v_2(t)\end{cases}$$

$x_i, y_j \in R^1, i=1,2,3, j=1,2$
$v\in Q(t)$
$|u|\le 1$
$M=\{(x_i,y_i): x_1=y_1, x_2=y_2$

$z_1 = x_1 - y_1, \; z_2 = x_2 - y_2, \; z_3 = x_3$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a(t)\sin z_3 - b(t)v_1(t) \\ \dot{z}_2 = a(t)\cos z_3 - b(t)v_2(t) \\ \dot{z}_3 = \dfrac{a(t)}{R}\omega \end{cases}$$

$M = \{(z_1, z_2 z_3) : z_1 = 0, z_2 = 0\}$

$L = \{(z_1, z_2 z_3) : (z_1, z_2, \theta),$

$z_1, z_2 \in R^1\}$

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi f(z, u, v) = \begin{pmatrix} a(t)\sin z_3 - b(t)v_1 \\ a(t)\cos z_3 - b(t)v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$k_0 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} b(t)Q(t) > S_p^2(t) \\ \forall t > 0 \end{array}}$$

R

~~Боевые возможности частей и подразделений РЭ войск.~~

~~Занятие 2~~
~~Радиолокационная разведка~~

Пример 2

$$\begin{cases} P: x^{(p)} = h(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x^{(p-1)}, u) \\ Q: y^{(q)} = g(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(q-1)}, v) \end{cases}$$

$x, y, u, v \in R^{\nu}$, $\nu \geq 2$

$u \in P$, $v \in Q$

$M = \{(x, \dot{x}, \dots, x^{(p-1)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(q-1)}) \mid x = y\}$

$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = u$ - тележка

$x \in R^2$.

$x \in R^2: \dddot{x} = u$

$x \in R^2: x^{(4)} = u$

Переходим к дифф игре:

$z = (z_1, \dots, z_p, z_{p+1}, \dots, z_{p+q}) = (x, \dot{x}, \dots, x^{(p-1)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(q-1)})$

$z \in R^{(p+q)\nu}$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dots \\ \dot{z}_p = +h(t, z_1, z_2, \dots, z_p, u) \\ \dot{z}_{p+1} = z_{p+2} \\ \dot{z}_{p+2} = z_{p+3} \\ \dots \\ \dot{z}_{p+q} = +g(t, z_{p+1}, \dots, z_{p+q}, v) \end{cases}$$

$M = \{z : z_1 = z_{p+1}\}$

$L \oplus M = R^{(p+q)\nu}$

$L = \{z : z_1 = -z_{p+1}\}$

$\pi : R^{(p+q)\nu} \to L$

$$\pi z = \left(\frac{z^1 - z^{p+1}}{2}, 0, \ldots, 0, -\frac{z^1 - z^{p+1}}{2}, 0, \ldots, 0 \right)$$

Пример 2

$$\dot{z} = Cz + g_1(t, z, u, v)$$

$$(0, \ldots, \underbrace{+h}_{p}, 0, \ldots, 0, \underbrace{+q}_{p+q})$$

$$\varphi(\dot{z}) = \pi C z + \pi g_1(t, z, u, v) = \pi C z$$

$$\varphi'(z) = \pi C^2 z + \pi C g_1(t, z, u, v) = \pi C^2 z$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi^{(q-2)}(z) = \pi C^{q-1} z + \pi C^{q-2} g_1(t, z, u, v) = \pi C^{q-1} z$$

$$\varphi^{(q-1)}(z) = \pi C^{q} z + \pi C^{q-1} g_1(t, z, u, v)$$

$q = p$

$$\pi C^{q-1} g_1(t, z, u, v) = \frac{1}{2}\left(\overset{(1)}{-h + q}, 0, \ldots, 0, \overset{(p+1)}{h - q}, 0, \ldots, 0\right)$$

$q < p$

$$\pi C^{q-1} g_1(t, z, u, v) = \frac{1}{2}\left(\overset{(1)}{q}, \ldots, \overset{(p+1)}{-q}, 0, \ldots, 0\right)$$

$W \subset L$, $\dim W = 2$,
$\tilde{\pi} : R^n \to W$

1. $p = q$

$\tilde{\pi} h(z_1, \dots, z_p, u)$

$\tilde{\pi} q(z_{p+1}, \dots, z_{p+q}, v)$

$\tilde{\pi} g(z_{p+1}, \dots, z_{p+q}, Q) \stackrel{*}{=}$

$\tilde{\pi} h(z_1, \dots, z_p, P) \supset S_\rho^2(0)$

$\rho > 0$, $\ell \in R$

2. $q < p$

$\tilde{\pi} q(z_{p+1}, \dots, z_{p+q}, v)$

$\tilde{\pi} q(z_{p+1}, \dots, z_{p+q}, Q) \supset S_\rho^2(0)$

$k = q - 1.$

Дифференциальные игры преследования несколькими объектами.

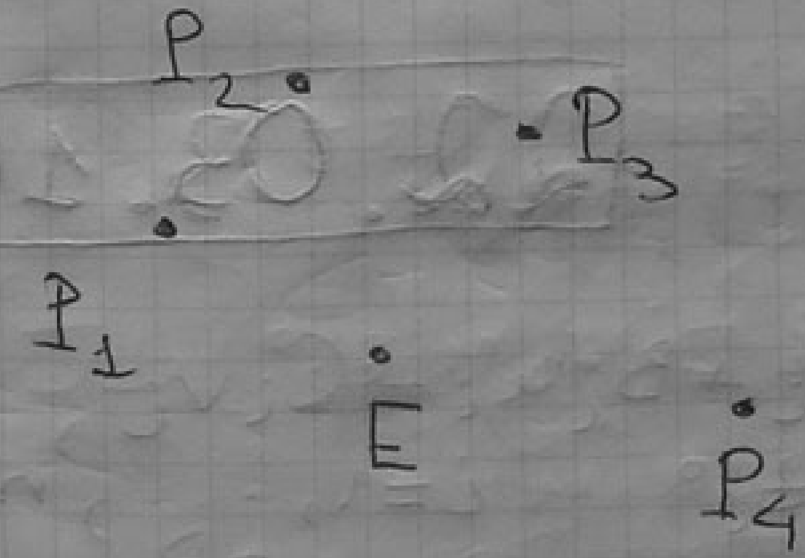
$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v$, $z_i(0) = z_i^0$,

$u_i \in P_i \subset R^p$, $z_i \in R^n$.

$v \in Q \subset R^q$

M

$i = 1, \dots, m$



P – преследоват.,
E – убегающий.

$M_i = M_i^1 + M_i^2$

$M_i^1 \oplus L_i^1 = R^n$

Хотя бы для одного номера i справедливо:

$z_{i_0}(t_{i_0}) \in M_{i_0}$.

$u_i(t, z_i(t), i=1,\dots,m, v(t))$.

$\boxed{22.03.10.}$

$\dot z_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v_i,$

$z_i(0) = z_i^0 \quad i=1,\dots,m$

$z_i \in R^{n_i}, \; u_i \in P_i \subset R^{p_i}$

$v \in Q \subset R^{q}$

$M_i = M_i^1 + M_i^2$

$M_i^1 \oplus L_i^1 = R^{n_i}$

$\pi_i z_i(T) \in M_i^1$

Предположение. 1

Рассмотрим мн-во

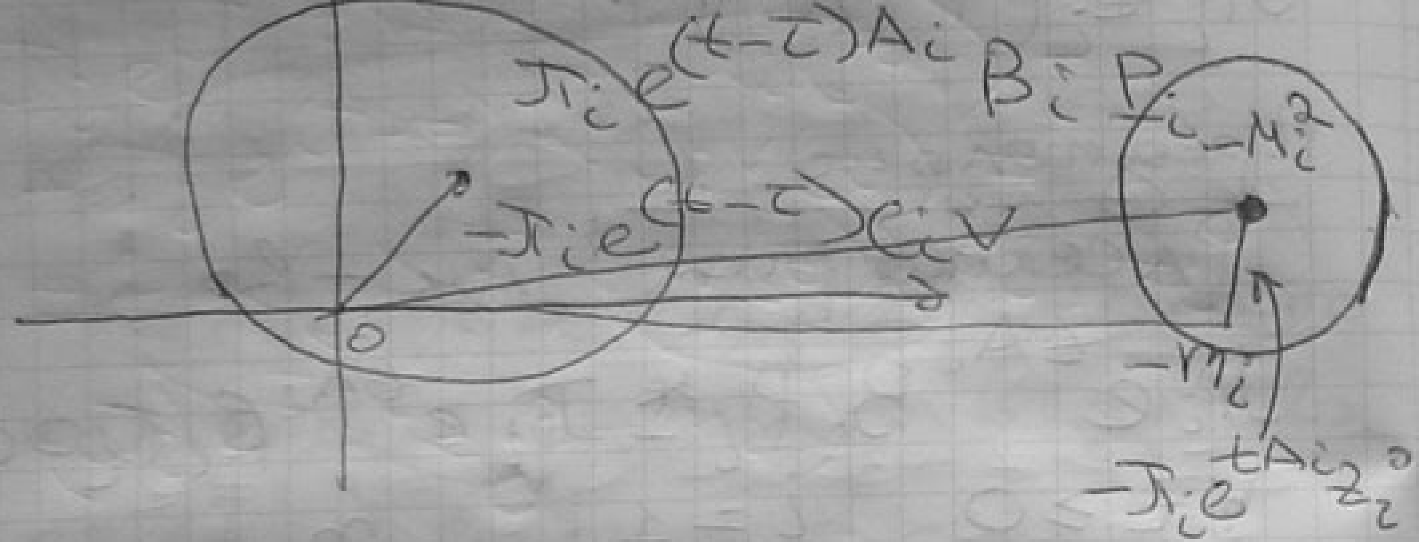
$\pi_i e^{tA_i} B_i P_i \overset{*}{-} \pi_i e^{tA_i} C_i Q \ni 0$

$\forall t \geq 0 \quad i=1,\dots,m.$

Для $t>0$, $\tau \in [0,t]$, $m_i \in M_i^2$

$\alpha(i, t, \tau, v, m_i, z_i^0) =$

$$= \begin{cases} \pi_i e^{tA_i} z_i^0 \neq m_i \Rightarrow \\ -\alpha(\pi_i e^{tA_i} z_i^0 - m_i) \in \\ \in \left(\pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i P_i - \pi_i e^{(t-\tau)A_i} C_i v\right) \\ \max\{\alpha : \alpha \geq 0 \\ \pi_i e^{tA_i} z_i^0 = m_i, \Rightarrow \frac{1}{t}. \end{cases}$$



$$\cancel{1 - \int_0^t \alpha(i, t, \tau, v, m_i, z_i^0)\, d\tau}$$

$$\delta(t, z_i^0) = \sup_{v(\cdot)} \min_{i=1,\dots,m} \Big(1 - \int_0^t \alpha(i, t, \tau, v, m_i, z_i^0)\, d\tau\Big).$$

Теорема. Если для позиции $z_0 = (z_1^0, \dots, z_m^0)$ $\exists\, m_i \in M_i^2$ игра окончится к моменту времени T.

Док-во

Пусть для z^0 справедливые условия предпол. 1 теоремы и пусть $\pi_i e^{tA_i} z_i^0 \neq m_i$.

$$\pi_i e^{tA_i} z_{i_0}^0 = m_{i_0} \in M_{i_0}^2$$

Пусть $\forall t \geq 0$ выполнено $\pi_i e^{tA_i} z_i^0 \neq m_i$

$$\delta_i(t, v(\cdot)) = 1 - \int_0^t \alpha(i, T, \tau, v(\tau), m_i, z_i^0)\, d\tau > 0$$

$u_i(t) \in P_i$.

$$\pi_i e^{(T-t)A_i} B_i u_i(t) - \pi_i e^{(T-t)A_i} C_i v(t) = -\alpha(i, T, t, v(t), m_i, z_i^0)(\pi_i e^{TA_i} z_i^0 - m_i)$$

$t_1^i \quad \pi_i(t_1^i, v(\cdot)) = 0,\ t \in (t_1^i, T]$

$$\pi_i e^{(T-t)A_i} B_i u_i(t) - \pi_i e^{(T-t)A_i} C_i v(t) = 0$$

$\dim L_i^1 = \nu_i.$

Ф-ла Коши.

$$\pi_i z_i(T) = \pi_i e^{TA_i} z_i^0 + \int_0^T (\pi_i e^{(T-t)A_i} B_i u_i(t) - \pi_i e^{(T-t)A_i} C_i v(t))\,dt =$$

$$= \pi_i e^{TA_i} z_i^0 + \int_0^{t_1^i} (\pi_i e^{(T-t)A_i} B_i u_i(t) - \pi_i e^{(T-t)A_i} C_i v(t))\,dt + \int_{t_1^i}^{T} \underbrace{\left(\begin{smallmatrix}\text{этой же}\\ \text{разности}\end{smallmatrix}\right) dt}_{=0} =$$

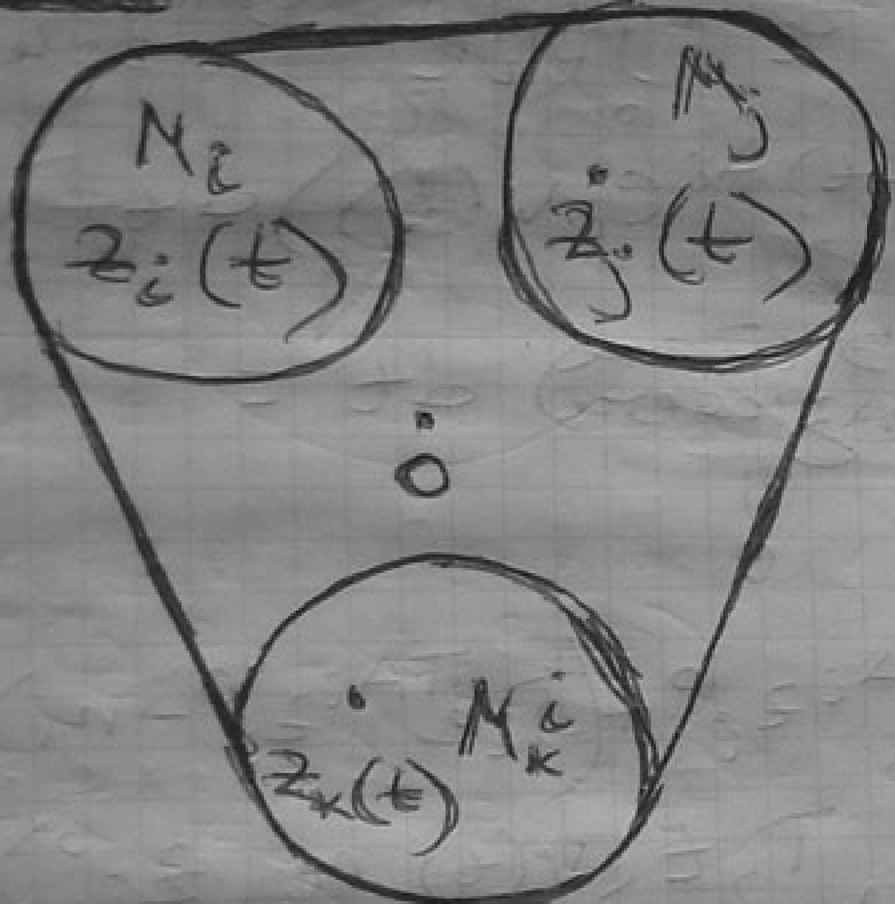
$$= \pi_i e^{TA_i} z_i^0 + (\pi_i e^{TA_i} z_i^0 - m_i) \times \int_0^{t_1^i} \alpha(i, T, t, v(t), m_i, z_i^0)\,dt =$$

$$= \pi_i e^{TA_i} z_i \Big(1 - \underbrace{\int_0^{t_1^i} \alpha(\ldots)\,dt}_{=0}\Big) - m_i \underbrace{\int_0^{t_1^i} \alpha(\ldots)\,dt}_{=1} = m_i.$$

1-й шаг

Для заданной нач. позиции $z^0 \to T(z^0) \to$

$\to$



Пример.

$\ddot{x}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, m$

$\ddot{y} = v$

$x_i, y, u_i, v \in R^\nu$

$\|u_i\| \le \rho_i$

$\|v\| \le \sigma$

$M_i = \{x_i, \dot{x}_i, y, \dot{y}$, где $x_i = y\}$.

$z = (z_{i1}, z_{i2}) = (x_i - y, \dot{x}_i - \dot{y})$

$$\begin{cases} \dot{z}_{i,1} = z_{i,2} \\ \dot{z}_{i,2} = u_i - v, \quad M_i = \{z : z_{i1} = 0\} \end{cases}$$

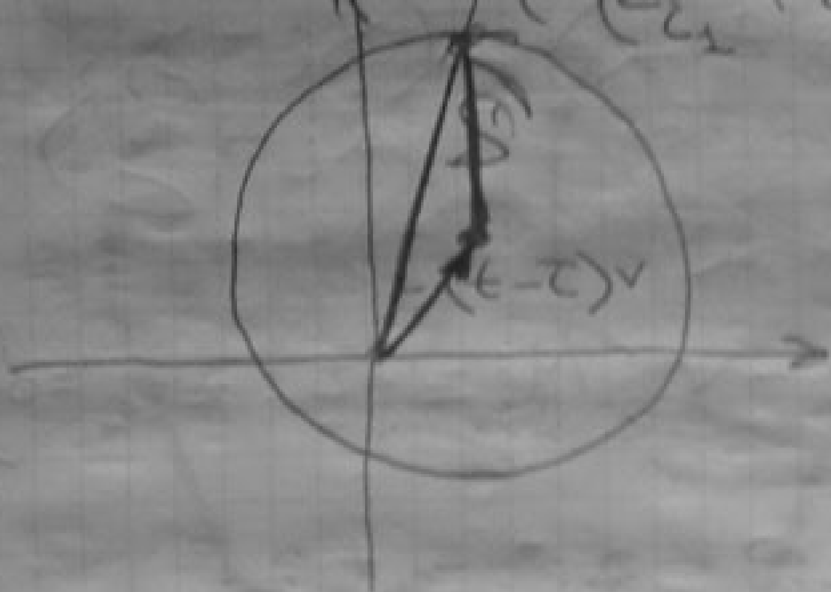
$\pi_i e^{tA_i} z_i^0 = z_{i1}^0 + t z_{i2}^0$

$\pi_i e^{tA_i}(B_i u_i - C_i v) =$
$= t(u_i - v).$

$\rho_i \ge \sigma.$

$\forall i = 1, \dots, m.$

$\alpha(i, t, \tau, v, z_i^0) =$
$= \max\{\alpha : \alpha \ge 0;$
$-\alpha(z_{i1}^0 + z_{i2}^0 t) \in S^\nu_{(t-\tau)\rho_i}(0) -$
$-(t-\tau)v\}$



$$-(z_{i_1}^\circ + z_{i_2}^\circ t)$$

$$-\alpha(z_{i_1}^\circ + z_{i_2}^\circ t) +$$
$$+(t-\tau)v$$

$$(-\alpha(z_{i_1}^\circ + z_{i_2}^\circ t) +$$
$$+(t-\tau)v,$$
$$-\alpha(z_{i_1}^\circ + z_{i_2}^\circ t) + (t-\tau)v) =$$
$$= \rho_i^2 (t-\tau)^2.$$

$$\alpha(i,t,\tau,v,z_i^\circ) =$$
$$=(t-\tau)*\left(\frac{z_{i_1}^\circ + z_{i_2}^\circ t}{\|z_{i_1}^\circ+z_{i_2}^\circ t\|^2}, v\right) +$$

$$+\tau\sqrt{\left(\frac{z_{i_1}^\circ+z_{i_2}^\circ t}{\|z_{i_1}^\circ+z_{i_2}^\circ t\|^2}, v\right)^2 + \frac{\rho_i^2-(v,v)}{\|z_{i_1}^\circ+z_{i_2}^\circ t\|^2}}$$

$$\beta \le 1 - t^2 \underbrace{\min_{\|v\|\le\sigma} \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^m K(i,t,v,z_i^\circ)}}_{\varphi(t,v)}}_{\eta(t,z^\circ)}$$

Утвержд. 1

Если v^* — точка минимума $\varphi(t,v)$

$$(v^*, \varkappa_1 + \dots + \varkappa_m) \le 0$$

$$\varkappa_i = \frac{z_{i_1}^\circ + z_{i_2}^\circ t}{\|z_{i_1}^\circ+z_{i_2}^\circ t\|^2}$$

Утвержд. 2

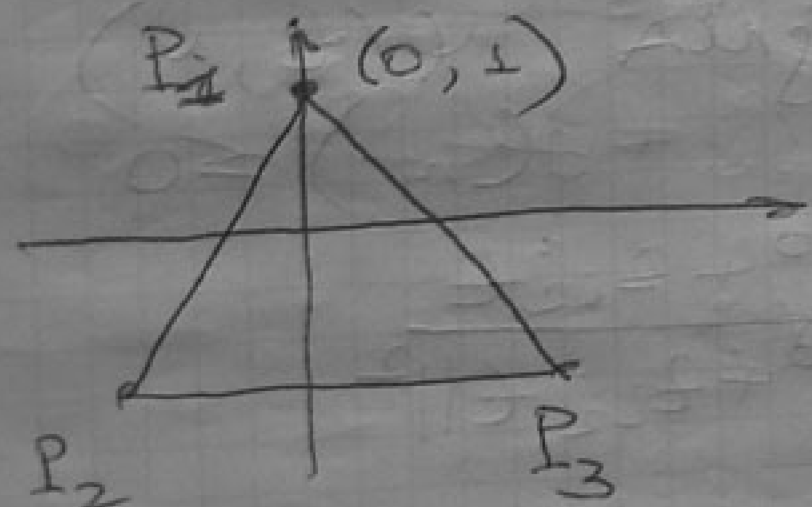
Для v^*, доставляющей $\min \varphi(t,v) \Rightarrow$ минимум всегда достигается на границе $\|v^*\| \leq \sigma$.

$$\eta(t, z^\circ) = \min_{\|v\|=\sigma} \varphi(t,v), \quad m=3.$$

1 : $z^\circ_{11} = (0,1)$ $\quad z^\circ_{12} = (0,0)$

2 : $z^\circ_{21} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad z^\circ_{22} = (0,0)$

3 : $z^\circ_{31} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad z^\circ_{32} = (0,0)$



1. $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \sigma$

$$\eta(t, z^\circ) = \sqrt{3}\,\sigma$$

2. $\rho_1 = \rho_2 = \sigma, \ \rho_3 > \sigma$

$$\eta(t, z^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma + \sqrt{\rho_3^2 - \frac{\sigma^2}{4}}$$

3. $\rho_1 = \sigma, \ \rho_2 = \rho_3 > \sigma$

$$\eta(t, z^\circ) = 2\sqrt{\rho_3^2 - \frac{\sigma^2}{4}}$$

4. $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 > \sigma \Rightarrow$

$$\eta(t, z^\circ) = \sqrt{\rho_3^2 - \sigma^2} + 2\sqrt{\rho_3^2 - \frac{\sigma^2}{4}}$$

$$u_i(t) = v(t) \cancel{f} - \overbrace{\left[\frac{z^\circ_{i1} + \theta z^\circ_{i2}}{\|z^\circ_{i1} + \theta z^\circ_{i2}\|^2} + \sqrt{(\ldots)^2 + \frac{\rho_i^2 - (v(t), v(t))}{\|z^\circ_{i1} + \theta z^\circ_{i2}\|^2}}\right]}^{K(i,\theta,v(t))} \times$$

$\times (z^{\circ}_{i1} + \theta z^{\circ}_{i2})$

$t \in [0, t^{i}_{1}]$

~~$t_1^i =$~~, где $\underline{t^{i}_{1} - \text{корень}}$,

$\delta_i(t, v(\cdot)) = 1 -$

$- \int_0^t (\theta - \tau) K(i, \theta, v(\tau)) z^{\theta}_{\varepsilon}) d\tau$

$(t^{i}_{1}, \theta]$

$u_i(t) = v(t)$.

29.03.10

$T, z(t) \in M$

$u(t, v(s), 0 \le s \le t)$

$v(t, u(s), 0 \le s \le t)$

$\exists u(t, z(t))$

$z(t) \in M + S_{\varepsilon}(0)$

Управление с поводырём

Красовский.

Динамика нелинейных управл. систем.

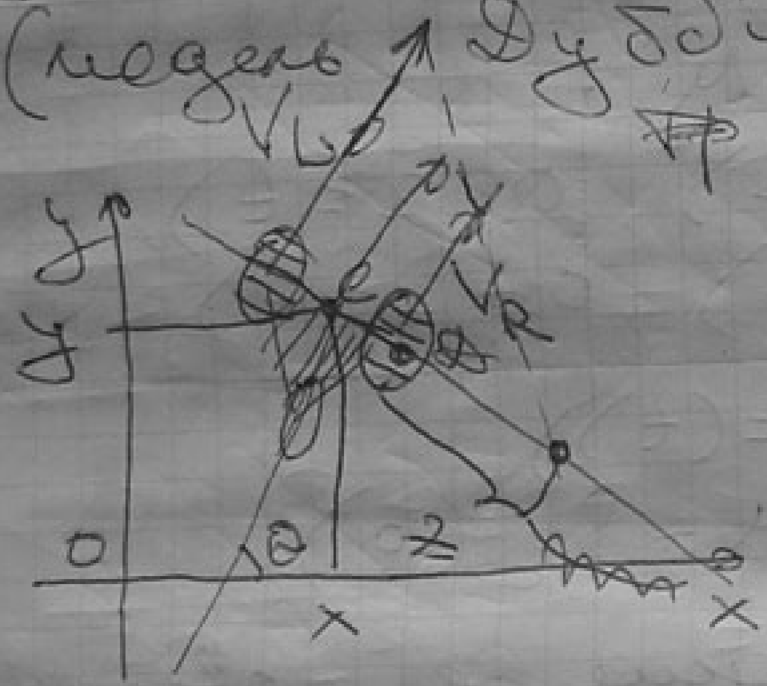
3^x колёсная тележка

4^x колесная тележка

зад. привод | полн. привод

перед. привод

1. Модель движения 3^x колесной тележки. (модель Дубинса)



$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}(V_R + V_L)\cos\theta \\ \dot{y} = \frac{1}{2}(V_R + V_L)\sin\theta \\ \dot{\theta} = \frac{1}{2}(V_R - V_L) \end{cases}$$

Пусть $V_L > V_R$. Можем определить мгновенный центр скоростей L.

$V_R = \omega(l + z)$ – по теор. о мгнов. центре скоростей.

$V_L = \omega z$, $\omega = \dot{\theta}$

$V_R - V_L = \omega l$

$\frac{1}{l}(V_R - V_L) = \omega$

$0 \le V_R \le \rho$, $0 \le V_L \le \rho$

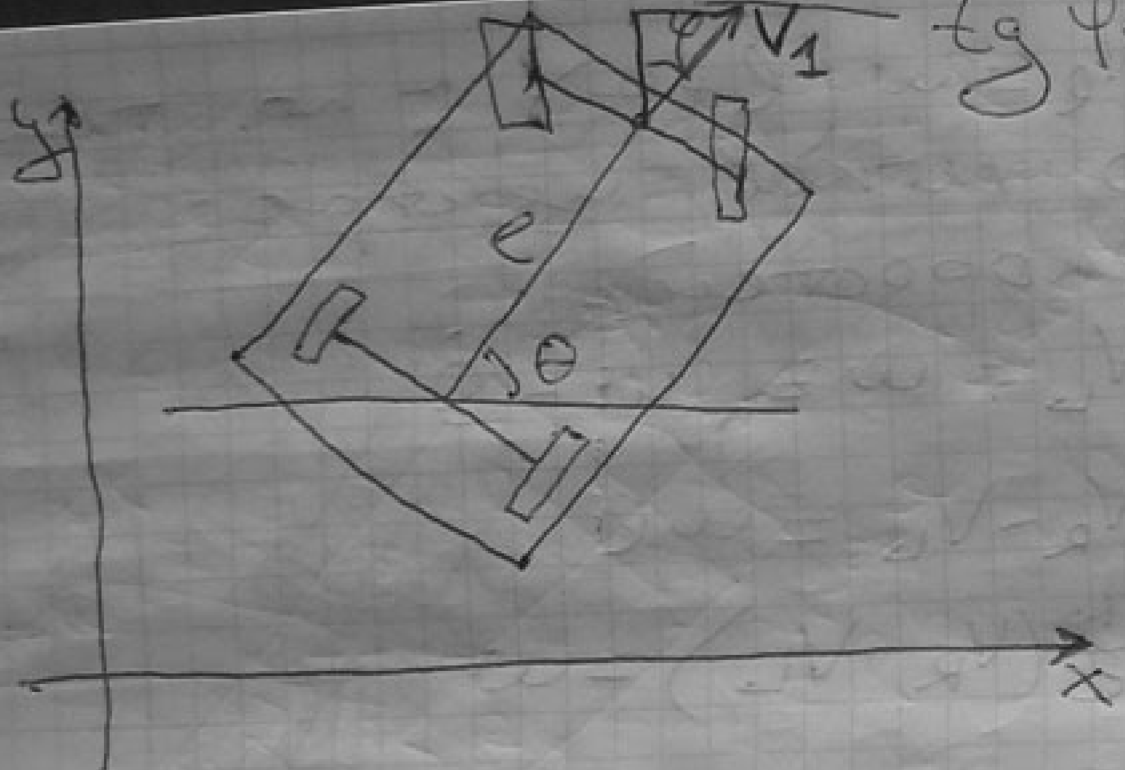
$x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$

$y(0) = y_0$, $y(T) = y_1$

$\theta(0) = \theta_0$, $\theta(T) = \theta_1$.

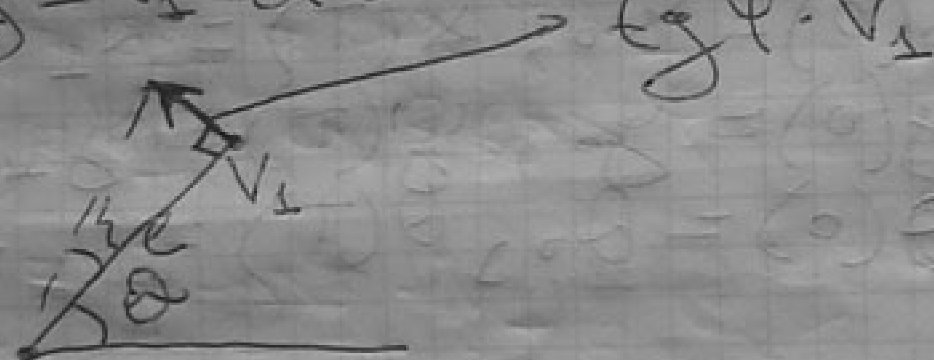
2. Модель движения 4-х колесной тележки (Дубинса)

Задача про управляемость.



$tg\,\varphi \cdot V_1$

$$\dot{x} = V_1 \cos\theta$$
$$\dot{y} = V_1 \sin\theta$$



$$tg\,\xi = \frac{tg\,\varphi \cdot V_1}{l}$$

$\cancel{\dot\theta}$ $\cancel{l\dot{\theta} = V_1}\, tg\,\varphi$

$$\begin{cases} \dot{x} = V_1 \cos\theta \\ \dot{y} = V_1 \sin\theta \\ l\dot{\theta} = V_1\, tg\,\varphi \\ \dot{\varphi} = V_2 \end{cases}$$

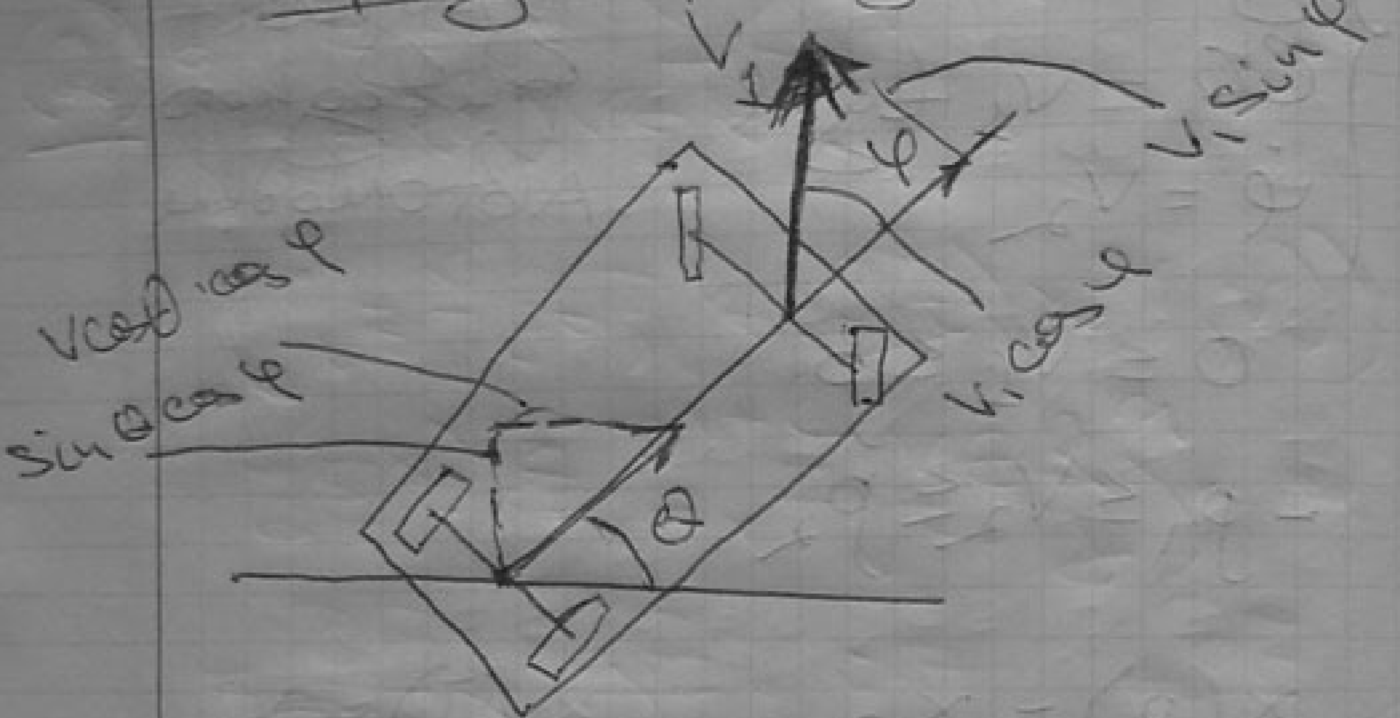
Для заднеприводного автомобиля

$$0 \le V_1 \le p$$
$$-p_1 \le V_2 \le p_2$$

$$x(0) = x_0 \qquad x(T) = x_1$$
$$y(0) = y_0 \qquad y(T) = y_1$$
$$\theta(0) = \theta_0 \rightarrow \theta(T) = \theta_1$$
$$\varphi(0) = \varphi_0. \qquad \varphi(T) = \varphi_1.$$

Модель ...

передн. движения



$$\begin{cases} \dot{x} = \cos\theta \cos\varphi \cdot V_1 \\ \dot{y} = V_1 \sin\theta \cos\varphi \\ \dot{\theta} = \dfrac{\sin\varphi}{l} \cdot V_1 \\ \dot{\varphi} = V_2 . \end{cases}$$

V_1 раскладываю на 2 составляющие.

$\theta(0) = \theta_0, \ \varphi(0) = \varphi_0$

перейти

$x(T) = x_1, \ y(T) = y_1,$

$\theta(T) = \theta_1, \ \varphi(T) = \varphi_1$

$0 \le V_1 \le \rho_1$

$-\rho_2 \le V_2 \le \rho_2 .$

Метод динамич. реализации

~~По~~ плоские

Flat system

$$(1)\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, u \in R^m. \\ x(t_0) = x_0, \\ x(t_f) = x_1 \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v) \\ u = b(t, x, \xi, v) \\ \xi \in R^l, v \in R^m. \\ \\ \dot{x} = f(t, x, b(t, x, \xi, v)) \end{cases}$

$(\xi, x) \in R^{n+l}, v \in R^m.$

(3) $\begin{cases} z = (x, \xi) \\ \dot{z} = F(t, z, v) \\ z \in R^{n+l}, v \in R^m \end{cases}$

$\begin{cases} t, \ y = Y(t, z, v, \dot{v}, \dots, v^{(l_1)}) \\ w = W(t, z, v, \dot{v}, \dots, v^{(l_2)}) \end{cases}$

(4) $\dot{y} = g(t, y, w), y \in R^s, w \in R^n.$

t,

$z = Z(t, y, w, \dot{w}, \dots, w^{(k_1)})$

$v = V(t, y, w, \dot{w}, \dots, w^{(k_2)}).$

<u>Опред.</u> Система (3)

$U \subset R^1 \times R^{n+l} \times R^m$

$y_i^{(n_i)} = w_i, \ i = 1, \dots, m.$

<u>Опред. 2.</u> Система (3) называется плоской в

U_1, $y = h(t, z, v, \dot{v}, \dots, v^{(l_1)})$

1. $z = F(t, \bar{y})$,

$\bar{y} = (y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(l_2)}).$

2. $\exists$ гладкая замена переменной

$\bar{y} = \Phi(t, z)$

$$V = \mathrm{P}(t, z, g)$$

$$\boxed{\Phi(t, z, v)} = g$$

$$g \in \Phi(U) \in R^n$$

$$(t, z, v) \in U$$

$$z(t) = F(t, \bar{y})$$

$$\frac{dz}{dt} = \cancel{\Phi}(t, F(t, \bar{y}), u) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \dot{y} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{e_2}} y^{(e_2+1)}$$

$$v = \mathrm{P}(t, F(t, \bar{y}), \frac{\partial F}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{e_2}} y^{(e_2+1)}) =$$

$$= \bar{\mathrm{P}}(t, \bar{y}, y^{(e_2+1)})$$

$$y^{(e_2+1)} = W.$$

1. $\begin{cases} y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(e)}) \\ \ldots \\ y_m = h_m(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(e)}) \end{cases}$

2. $t, \bar{y}(y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \ldots, y_m^{(n_m-1)})$.

3. $\bar{\xi} = (\xi, \dot{\xi}, \ldots, \xi^{(k_3)})$

ξ ~~$=$~~ $\xi = H(t, \bar{y})$

$\boxed{\dfrac{\partial(\xi, x)}{\partial \bar{y}}}$ — матрица была невырожденной.

4. $\dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_e$ и

$(u_1, \ldots, u_m)$ —

$t, \bar{y}, V = (V_1, \ldots, V_m)$;

$V_i = y^{(n_i)}$ $i = 1, \ldots, m$.

5. $(t, y, v) \to (t, ?, \lambda, v)$.

ПРОПУЩЕ-
НА
ЛЕКЦИИ.

05.04.10.

$$\boxed{12.04.10.}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} = u_1 \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{l} \\ \dot{\varphi} = u_2 \end{cases}$$

$0 \le u_1 \le 1$

$|\varphi| \le p_2$

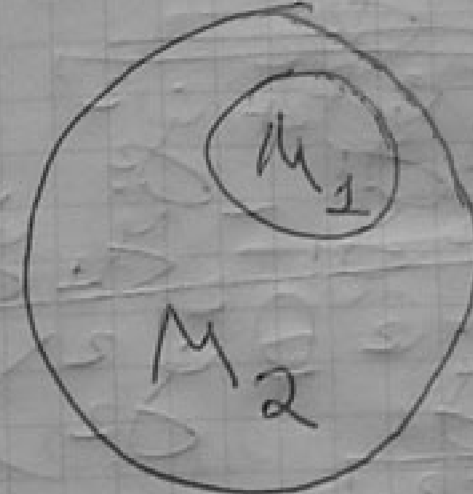
$-p_3 \le u_2 \le p_3$

$x(0), y(0), \theta(0), \varphi(0).$

перевести объект в

$x1, y1, \theta_1, \varphi_1.$

$(x(t), y(t)) \in M_2$



$y_1 = x$

$y_2 = y$

$\dot{y}_1 = u_1 \cos\theta$

$\dot{y}_2 = u_1 \sin\theta$

$\ddot{y}_1 = \dfrac{d}{dt}(u_1 \cos\theta)$

$\ddot{y}_2 = \dfrac{d}{dt}(u_1 \sin\theta)$

...

$$x = y_1$$
$$y = y_2$$
$$\theta = \arcsin \frac{\dot{y}_2}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\ell(\ddot{y}_2 \dot{y}_1 - \ddot{y}_1 \dot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$u_1 = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}$$
$$u_2 = \varphi$$
$$\begin{cases} \zeta_1 = u_1 = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \\ \zeta_2 = \dot{\zeta}_1 \end{cases}$$
$$y_1 = x$$
$$y_2 = y$$
$$\dot{y}_1 = \zeta_1 \cos\theta$$
$$\dot{y}_2 = \zeta_1 \sin\theta$$
$$\ddot{y}_1 = \dot{\zeta}_1 \cos\theta - \zeta_1 \sin\theta \cdot \dot{\theta}$$
$$\ddot{y}_2 = \zeta \sin\theta + \zeta_1 \cos\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\dddot{y}_1 = \dot{\zeta}_2 \cos\theta - \zeta_2 \sin\theta \, \dot{\theta} -$$
$$- \zeta_2 \sin\theta \, \dot{\theta} - \zeta_1 \cos\theta \cdot \dot{\theta} -$$
$$- \zeta_1 \sin\theta \, \ddot{\theta}$$
$$\dddot{y}_2 = \dot{\zeta}_2 \sin\theta + \zeta_2 \cos\theta \cdot \dot{\theta} +$$
$$+ \zeta_2 \cos\theta \cdot \dot{\theta} - \zeta_1 \sin\theta \, \dot{\theta} +$$
$$+ \zeta_2 \cos\theta \cdot \ddot{\theta}$$
$$\begin{cases} x = y_1, \; y = y_2 \\ \theta = \arcsin \frac{\dot{y}_2}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\ell(\ddot{y}_2 \dot{y}_1 - \ddot{y}_1 \dot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \zeta_1 = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} = u_1 \\ \zeta_2 = \frac{\dot{y}_1 \ddot{y}_1 + \dot{y}_2 \ddot{y}_2}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}} = \dot{\zeta}_1 \end{cases}$$

$$u_1 = \cancel{\frac{\sqrt{\dot y_1^2 + \dot y_2^2}}{\sqrt{\dot y_1^2 + \dot y_2^2}}}$$

$$u_1 = \sqrt{\dot y_1^2 + \dot y_2^2}$$

$$u_2 = \varphi = \frac{\ell}{\zeta_1^2 + \ell^2\dot\theta^2}\cdot\left(V_2\cos\theta - V_1\sin\theta - 3\zeta_2\dot\theta\right)$$

$$\begin{cases} \dddot y_1 = V_1 \\ \dddot y_2 = V_2 \\ \dot\zeta_1 = V_1\cos\theta + V_2\sin\theta \\ \dot\zeta_2 = \dfrac{\zeta_1^2 \operatorname{tg}\varphi}{\ell} + V_1\cos\theta + V_2\sin\theta \\ u_1 = \zeta_1 \\ u_2 = \dfrac{\ell(V_1\cos\theta - V_1\sin\theta - \zeta_2\dot\theta)}{\ell + \zeta_1\ell^2\dot\theta^2} \end{cases}$$

1) $0 \le u_1 \le \rho_1$, $\sqrt{\dot y_1^2 + \dot y_2^2} \le \rho_1$

2) $-\rho_2 \le \varphi \le \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\ell(\ddot y_2\zeta_1\cos\theta - \ddot y_1\zeta_1\sin\theta)}{\zeta_1^3}\right) \le \rho_2$

$$\boxed{\sqrt{\dot y_1^2 + \dot y_2^2} \le \operatorname{tg}(\rho_2)\frac{(\dot y_1^2 + \dot y_2^2)}{\ell}}$$

Так как

$-\rho_3 \le u_2 \le +\rho_3$

$$-\rho_3 \le \frac{\ell(V_2\cos\theta - V_1\sin\theta - 3\zeta_1\dot\theta)}{\zeta_1^2 + \ell^2\dot\theta^2} \le$$

$$\sqrt{V_1^2 + V_2^2} \le \frac{\rho_3(\zeta_1^2 + \ell^2\dot\theta^2)}{\ell} + 3\zeta_2\dot\theta$$

$$-\frac{\rho_3(\zeta_1^2 + \ell^2\dot\theta^2)}{\ell} + 3\zeta_2\dot\theta \le$$

$y_1(0) = x(0)$
$y_2(0) = y(0)$
$\dot{y}_1(0) = \dot{x}(0)$
$\dot{y}_2(0) = \dot{y}(0)$
$\ddot{y}_1(0) = \ddot{x}(0)$
$\ddot{y}_2(0) = \ddot{y}(0)$

$\cancel{y_1(T)}, \cancel{y_2(T)}$
$\cancel{\dot{y}_1(T)}, \cancel{\dot{y}_2(T)}$,

$y_1(T) = x_1$
$y_2(T) = y_1$
$\dot{y}_1(T) = \dot{x}(T)$
$\dot{y}_2(T) = \dot{y}(T)$
$\ddot{y}_1(T) = \ddot{x}(T)$
$\ddot{y}_2(T) = \ddot{y}(T)$

$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \le a$
$\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \le \rho_1$

$\max \int \frac{e\sqrt{\ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_2^2}}{\operatorname{tg} \rho_2}, \frac{g}{4\rho_3}(\ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_2^2) + \frac{a e}{\rho_3}$

Математические модели биофизики

Дин. численности изолиров. популяции.

1. Свободная популяция.

$\dot{x} = x[b(x) - d(x)]$

$b(x)$ – плодовитость

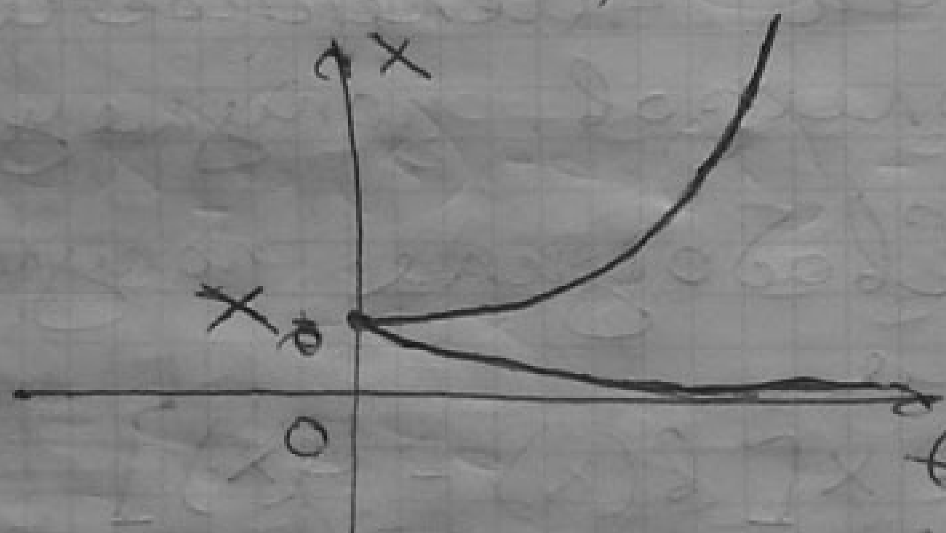
$d(x)$ – удельная скорость гибели особи (коэфф. смертности).

$$\left.\begin{aligned} b(x) &= b \\ d(x) &= d \end{aligned}\right\}$$ простейший случай

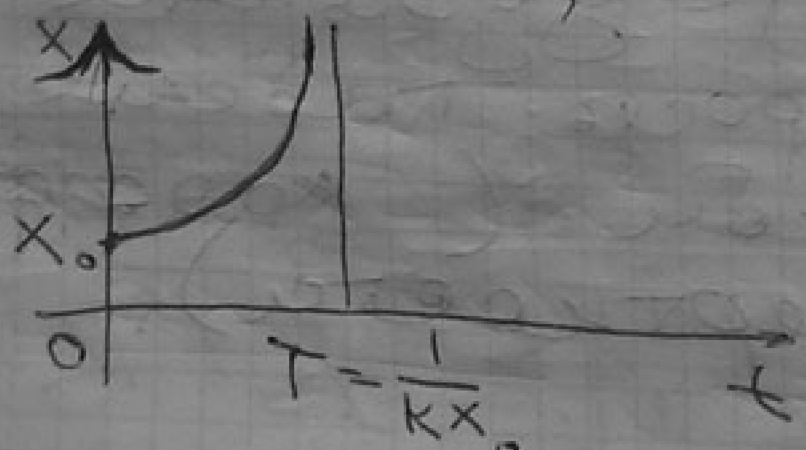
$$\boxed{\dot{x} = (b-d)x = ax}$$ — ур-ние Мальтуса

$$x(t) = e^{at}x_0$$

Если $b > d$, то



$$b(x) = kx, \quad \dot{x} = kx^2$$



1700 – 1960. — эти данные

$$b(x) = \frac{bx}{N+x}$$

Если $x \ll N \Rightarrow b(x) = kx$

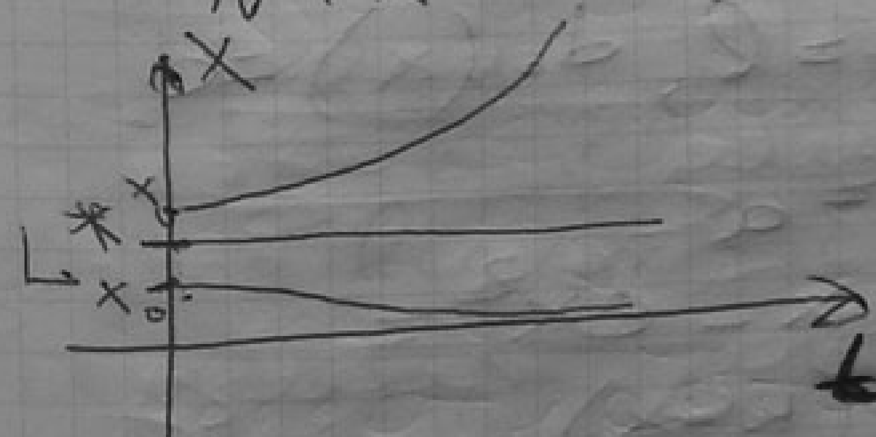
Если $x \gg N$ — закон Мальтуса.

$$\dot{x} = \frac{bx^2}{N+x} - dx$$

$$b - d = a$$

$$\frac{dN}{b-d} = L.$$ Тогда

$$\dot{x} = \frac{bx^2}{N+x} - dx = \frac{ax(x-L)}{N+x}$$



Если кол-во пищи, к-рую можно получать из природы.

2. Популяция на огр. ресурсе.

$$b(x) = b_0(x) - c_b x$$
$$d(x) = d_0(x) + c_d x$$

$$\dot{x} = x\left[b_0(x) - d_0(x) - e x\right]$$

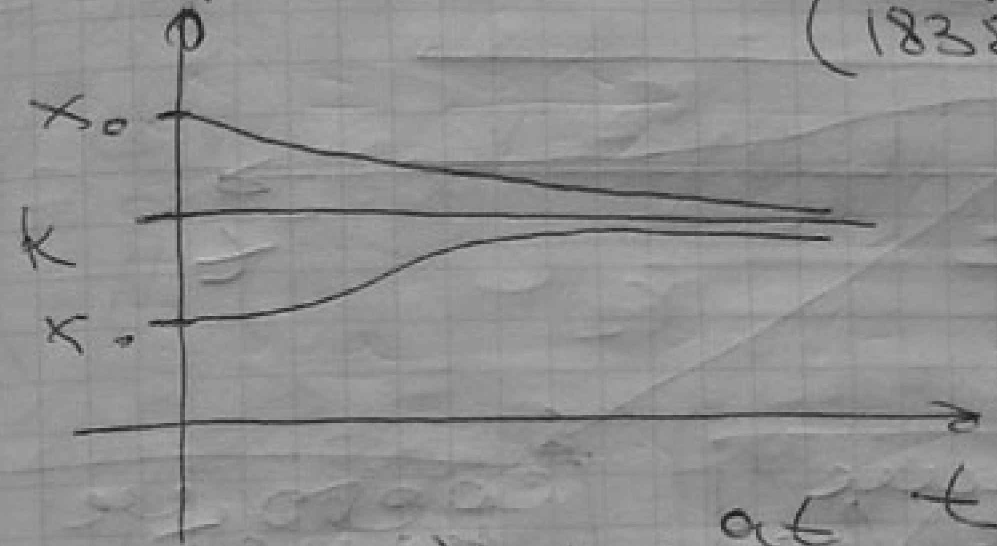
$$e = c_b - c_d$$

$$b_0(x) = b,\quad d_0(x) = d$$

$$b - d = a$$

$$\dot{x} = a x - e x^2 = \frac{a x (k - x)}{k},\quad k = \frac{e}{a}$$

Логистич. ур-ние Ферхюльста-Пирса (1838)



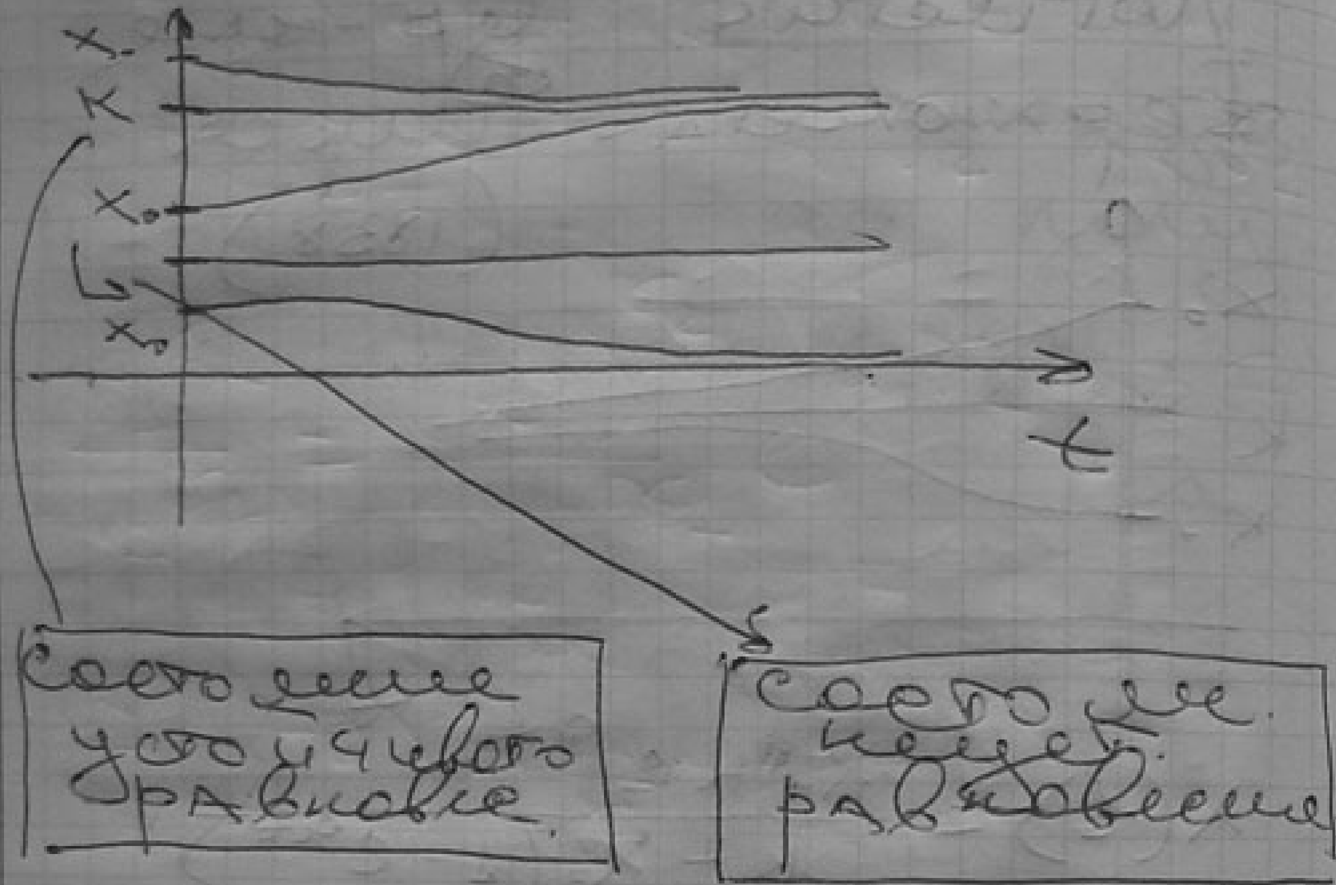
$$x(t) = \frac{x_0 k e^{at}}{k - x_0(1 - e^{at})}$$

$$\dot{x} = \frac{b x^2}{N + x} - d_0 x - e x^2 = \frac{a x (x - L)(k - x)}{(N + x) k}$$

$$a = e k$$

k, L: $x^2 - \left[\frac{b - d}{e} - N\right] x + \frac{d N}{e} = 0$

Как ведёт себя решение такого диффура??



$$
\begin{cases}
\dfrac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2))N_1 \\
N_1(0) = N_1^0 \\
\dfrac{dN_2}{dt} = (\alpha_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2))N_2 \\
N_2(0) = N_2^0
\end{cases}
$$

$$
F(N_1, N_2) = \begin{cases}
0, \; N_1 = N_2 = 0 \\
F(N_1, N_2) \to \infty \\
N_1 \to \infty, \; N_2 = const \\
F(N_1, N_2) \to \infty \\
N_1 = const, \; N_2 \to \infty
\end{cases}
$$

$\boxed{26.04.10}$

Матем. модели взаимод. видов

§1 Два вида борющ. за общ. пищу.

$$
\begin{cases}
\dfrac{d \ln N_1}{dt} = \alpha_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2) \\
\dfrac{d \ln N_2}{dt} = \alpha_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)
\end{cases}
$$

$$
\gamma_2 \frac{d \ln N_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d \ln N_2}{dt} = \alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1
$$

$$\frac{d\ln\left(\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}}\right)}{dt}=\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1$$

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}}=\frac{(N_1^0)^{\gamma_2}}{(N_2^0)^{\gamma_1}}e^{(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)t}$$

$$F(N_1^1,0)>\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$$

$\cancel{N_1(t)}$

$$F(N_1,N_2)>F(N_1^1,0)>\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$$

$$\frac{dN_1(t)}{dt}<0$$

Если $\frac{\alpha_1}{\gamma_1}>\frac{\alpha_2}{\gamma_2}$, тогда

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}}\xrightarrow[t\to\infty]{}\infty$$

$$N_2(t)\to 0$$

$$\alpha_1-\gamma_1F(N_1,0)=0$$

§2. Два вида — хищник, жертва.

$y(t)$ — числ. хищников

$x(t)$ — числ. жертв

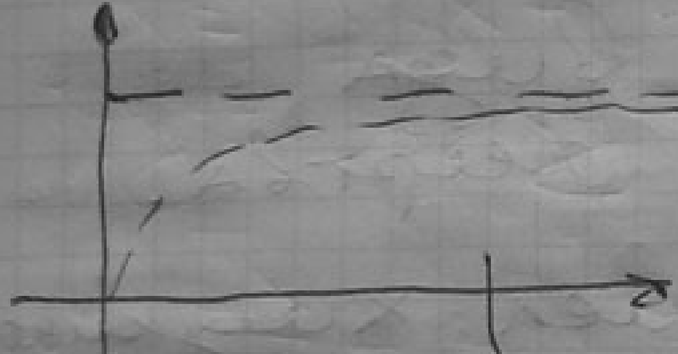
$V(x)$ — кол-во жертв, уничтож. хищником за единицу времени.

$\cancel{V(x)}$

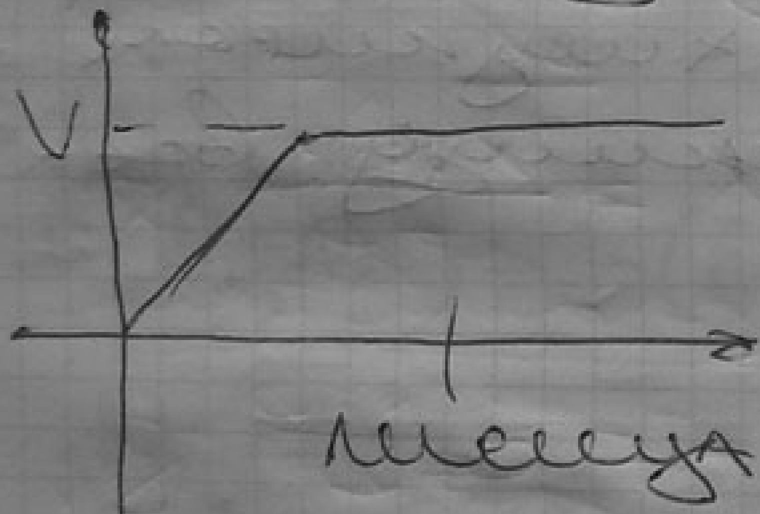
$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\lambda x-V(x)y\\ \frac{dy}{dt}=kV(x)y-\lambda_2 y\end{cases}$$

$$V(0)=0.$$

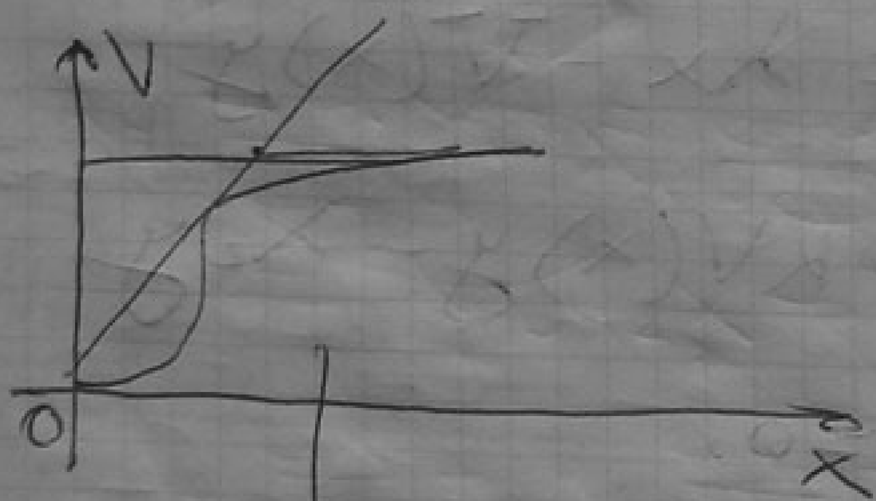
$V(x)$ — граничная ф-ция.



для закрытых водоемов.



Мешуа-Залу



кабаны и пенвятные.

$V(x) = M_1 x$

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - M_1 x y \\ \dot{y} = M_2 x y - \lambda_2 y \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (\lambda_1 - M_1 y)\,x \\ (M_2 x - \lambda_2)\,y \end{matrix}$$

Кол-во съеденн. биомассы жертв, идущих на увеличение численности.

$x(0) = x_0$

$y(0) = y_0$

Ф-ция на решении является константой — это решение.

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - \mu_1 x y \\ \dot{y} = \mu_2 x y - \lambda_2 y \end{cases} \begin{vmatrix} \mu_2 \\ \mu_1 \end{vmatrix} +$$

$$\mu_2 \frac{dx}{dt} + \mu_1 \frac{dy}{dt} = \lambda_1 \mu_2 x - \lambda_2 \mu_1 y$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} \frac{d\ln x}{dt} = \lambda_1 - \mu_1 y \\ \frac{1}{y} \frac{d\ln y}{dt} = -\lambda_2 + \mu_2 y \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda_2 \\ + \\ \lambda_1 \end{matrix}$$

$$\lambda_2 \frac{d\ln x}{dt} + \lambda_1 \frac{d\ln y}{dt} = \lambda_1 \mu_2 x - \lambda_2 \mu_1 y$$

$$\mu_2 \frac{dx}{dt} + \mu_1 \frac{dy}{dt} = \lambda_2 \frac{d\ln x}{dt} + \lambda_1 \frac{d\ln y}{dt}$$

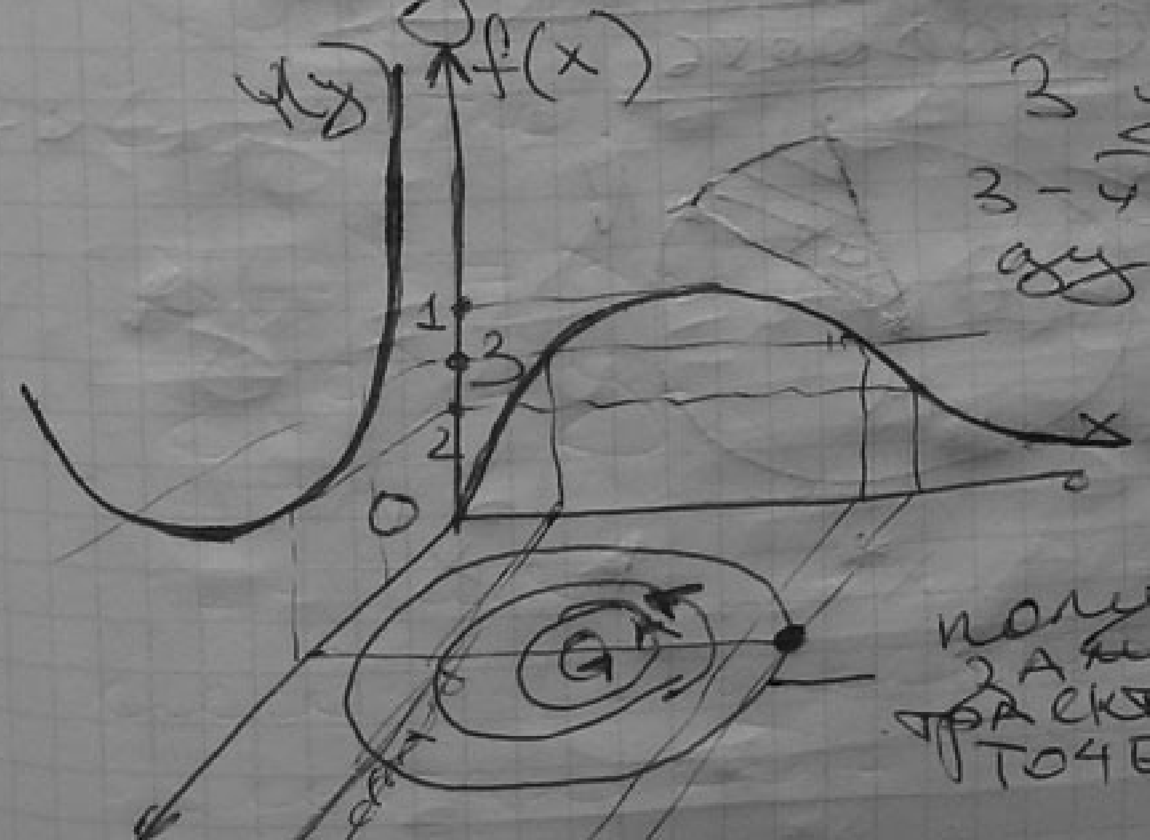
$$\lambda_2 \ln x + \lambda_1 \ln y - \mu_2 x - \mu_1 y = const$$

$$\boxed{x^{\lambda_2} e^{-\mu_0 x} y^{\lambda_1} e^{-\mu_1 y} = const}$$

1-й интеграл.

Метод фазовой плоскости.

$$f(x) = x^{\lambda_2} e^{-\mu_2 x} = C y^{-\lambda_1} e^{\mu_1 y} = \varphi(y)$$



3 уровня. 3-й между 1 и 2.

Получается замкнутая траектория точек.

$$\frac{dx^*}{dt} = 0$$

$$\frac{dy^*}{dt} = 0$$

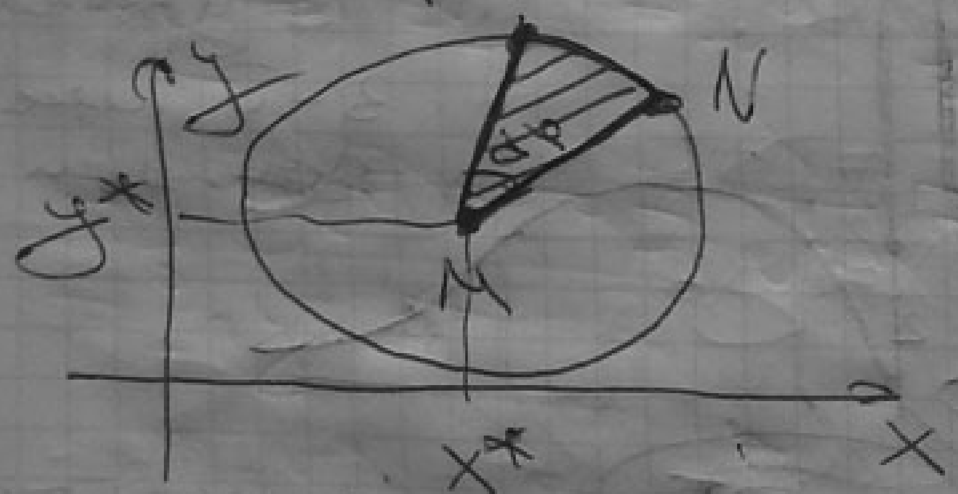
$$\dot{x} = (\lambda_1 - \mu_1 y)x$$

$$\dot{y} = (\mu_2 x - \lambda_2)y$$

$$y^* = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$$

$$x^* = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

Секториальная скорость



(ρ, ω)

$$ds = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$\frac{ds}{dt} > 0$ – против часовой

$\frac{ds}{dt} < 0$ – по часовой.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\Big[(x - x^*)\frac{dy}{dt} - (y - y^*)\frac{dx}{dt}\Big]$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\big[\mu_2 y (x - x^*)^2 + \mu_1 x (y - y^*)^2\big] > 0$$

Средняя численность особей за период.

T - время.

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - \mu_1 x y \\ \dot{y} = \mu_2 x y - \lambda_2 y \end{cases}$$

$$\int_0^T \left(\frac{d \ln x}{dt}\right) = \int_0^T (\lambda_1 - \mu_1 y)\, dt$$

$$\ln x(T) - \ln x(0) = 0 = \lambda_1 T - \mu_1 \int_0^T y(t)\, dt$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\, dt = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \boxed{y^*}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \boxed{x^*}$$

Как можно вычислить либо оценить период T-???

$$n_1 = \frac{x}{x^*}$$

$$n_2 = \frac{y}{y^*}$$

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = \lambda_1 n_1 (1 - n_2) \\ \frac{dn_2}{dt} = -\lambda_2 n_2 (1 - n_1) \end{cases}$$

n_1, n_2 близки к 1 в положении равновесия.

$v_1 = n_1 - 1$, $v_2 = n_2 - 1$

$$\begin{cases} \dfrac{dV_1}{dt} = -\lambda_1 V_2 \\ \dfrac{dV_2}{dt} = \lambda_2 V_1 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda_1 \lambda_2 x = 0$$

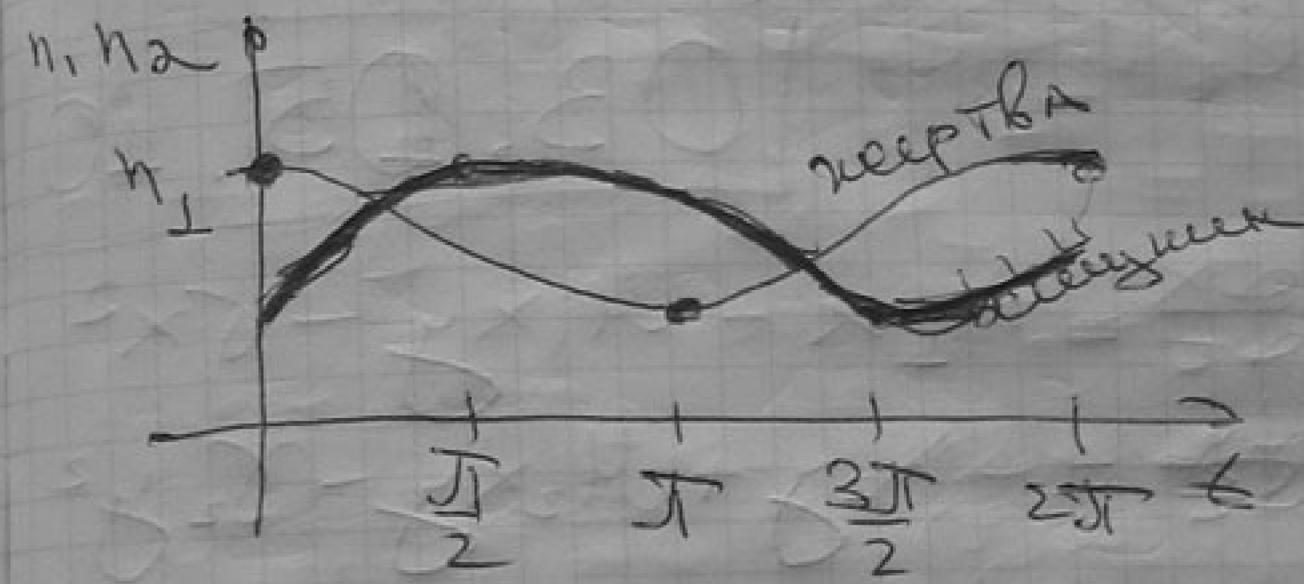
$$x(t) = A \cos \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}\, t + B \sin \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}\, t$$

$$A = C \cos \psi$$

$$B = C \sin \psi$$

$$\begin{cases} V_1(t) = C \cos(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}\, t - \psi) \\ V_2(t) = C \sqrt{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}} \sin(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}\, t - \psi) \end{cases}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}}$$



$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda_1 x - \mu_1 x y - \gamma x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda_2 y + \mu_2 x y \end{cases}$$

$$\gamma$$

$$\dot{x} = \lambda_1 x - \gamma x^2 = x(\lambda_1 - \gamma x).$$

$\boxed{03.05.10}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda_1 x - \mu_1 xy - \gamma x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda_2 y + \mu_2 xy - \gamma_2 y^2 \end{cases}$$

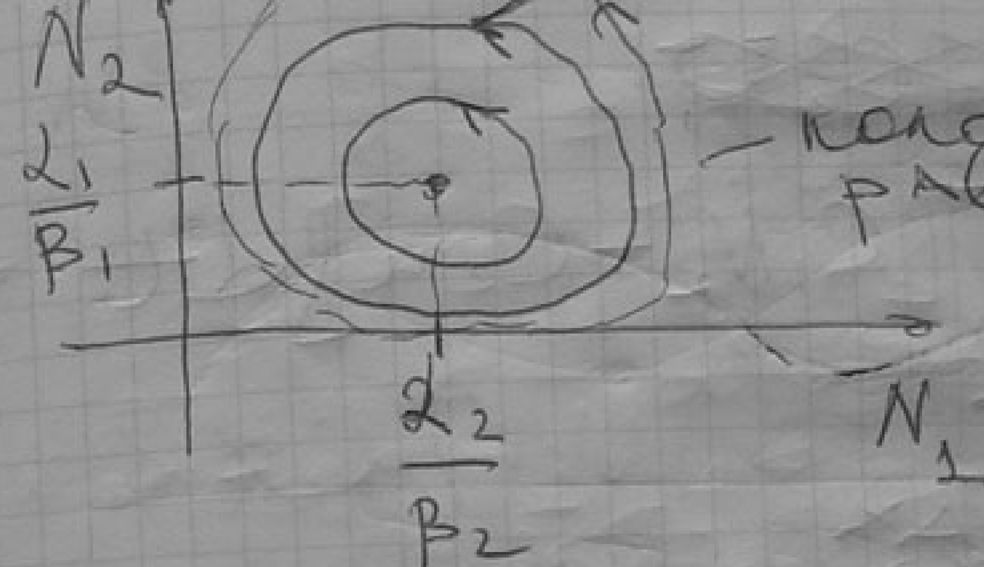
Оптимальное управление для модели хищник-жертва.

$N_1(t)$ – кол-во жертв
$N_2(t)$ – кол-во хищников.

$$\frac{dN_2}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2) N_1 + u$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2) N_2 + \beta_2 u N_2$$

(управление может входить аддитивно,



В качестве целевой точки будет положение равновесия.

$$N_1(t_0) = N_1^0$$
$$N_2(t_0) = N_2^0$$

$+u \cdot N_1$ $\quad 0 \le u \le u_{max}$

$+v \cdot N_2$ $\quad 0 \le v \le v_{max}$

$$N_1(t_f) = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$
$$N_2(t_f) = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

// в конечный момент времени.

$\boxed{03.05.10}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda_1 x - \mu_1 xy - \gamma x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda_2 y + \mu_2 xy - \gamma_2 y^2 \end{cases}$$

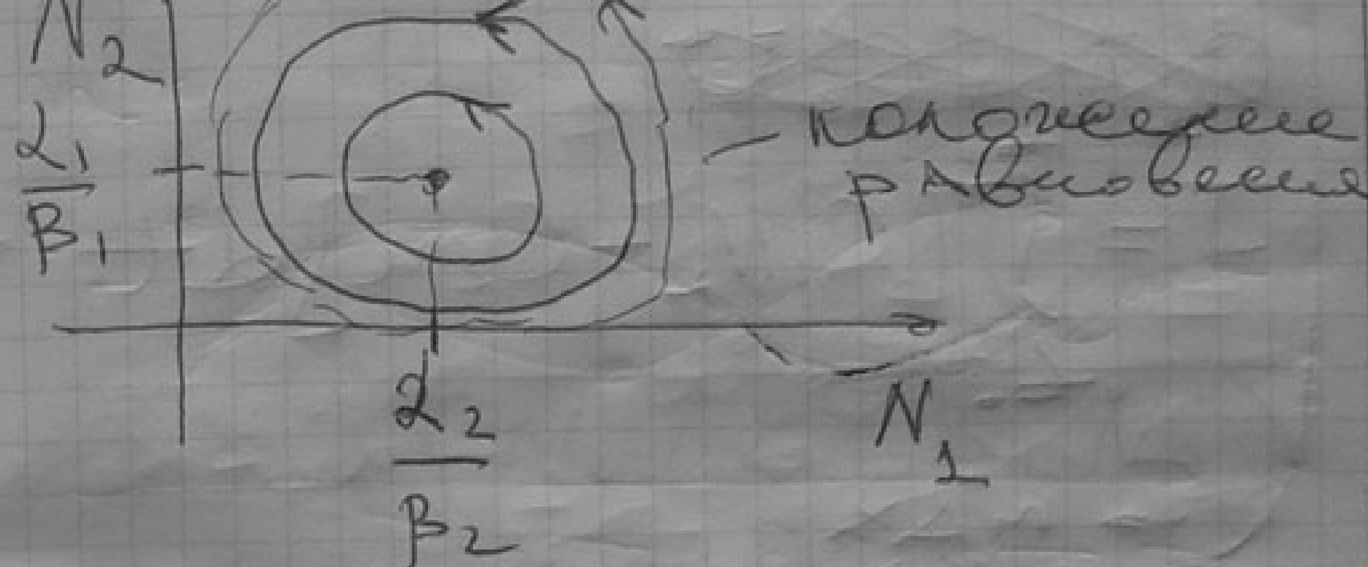
Оптимальное управление для модели хищник-жертва.

$N_1(t)$ – кол-во жертв
$N_2(t)$ – кол-во хищников.

$$\frac{dN_2}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2) N_1 + u$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2) N_2 - \theta_2 u N_2$$

(управление может входить аддитивно, а может мультив-



В качестве целевой точки будет положение равновесия.

$$N_1(t_0) = N_1^0$$
$$N_2(t_0) = N_2^0$$

$+u \cdot N_1$ $\qquad 0 \le u \le u_{max}$

$+v \cdot N_2$ $\qquad 0 \le v \le v_{max}$

$$N_1(t_f) = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$
$$N_2(t_f) = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

// в конечный момент времени.

$\cancel{C_1 N_1 + C_2 u}$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [C_1 N_2 + C_2 u]\, dt \to \max_{u(t)}$$

$C_1 > 0, \; C_2 > 0.$

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1(\alpha_1 - \beta_1 N_2) - b_1 u N_1 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = N_2(\beta_2 N_1 - \alpha_2) - b_2 u N_2 \end{cases}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0,$

$b_1 \geq 0, \; b_2 \geq 0, \; b_1 + b_2 > 0$

$0 \leq u \leq u_{max}$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [C_1 N_1 + C_2 u]\, dt \to \min_{u}$$

$N_1^0 \quad \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$ $\quad H(t, N, u, \lambda) =$

$$= \lambda_0 [C_1 N_1 + C_2 u] + \lambda_1 [N_1(\alpha_1 - \beta_1 N_2) - b_1 u N_1] + \lambda_2 [N_2(\beta_2 N_1 - \alpha_2) - b_2 u N_2]$$

$N_2^0 \quad \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial N_1} = \\ = -\lambda_0 C_1 - \lambda_1(\alpha_1 - \beta_1 N_2 - b_2 u) - \lambda_2 \beta_2 N_2 \end{cases}$$

$$\dot\lambda_2 = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = \lambda_1 \beta_1 N_1 - \lambda_2 (\beta_2 N_1 - \alpha_2 - b_2 u)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} > 0, \text{ то } u_{max} \\ \frac{\partial H}{\partial u} < 0, \ 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \ u^{**}(t) \end{cases}$$

особый режим.

$$H(t, N, u, \lambda) = u(\lambda_0 c_2 - \lambda_1 b_1 N_1 - \lambda_2 b_2 N_2)$$

Исследуем особый режим

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \boxed{\lambda_0 c_2 - \lambda_1 b_1 N_1 - \lambda_2 b_2 N_2 \equiv 0}$$

$$D\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)$$ / производ. в силу системы

$$D\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = \boxed{N_1 (b_1 c_1 \lambda_0 - b_2 \lambda_1 \beta_1 N_2 + \lambda_2 b_1 \beta_2 N_2) \equiv 0}$$

выполнено вдоль особого режима.

$$0 = D^2\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = N_1 N_2 [c_1 b_2 \beta_1 \lambda_0 + b_1 \beta_1 \beta_2 \lambda_1 N_1 +$$

$+l_2\beta_1\beta_2\lambda_2 N_2 +$

$+l_2\beta_1\lambda_2(\alpha_1+\alpha_2-$

$-(b_1-b_2)u-\beta_1 N_2-$

$-\beta_2 N_1)\} \equiv 0.$

① -й случай

$b_1 \neq 0,\ b_2 = 0$

$\partial^2 H_u = b_1\beta_1\beta_2 N_1^2 N_2 \lambda_1 = 0$

$b_1 > 0,\ \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1(t) = 0$

$\lambda_0 = 0,\ \lambda_2 = 0$

② -й случай.

$b_1 = 0,\ l_2 \neq 0$

$-b_2\beta_1' N_2\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1(t) \equiv 0$

$\lambda_0 = 0,\ \lambda_2(t) \equiv 0.$

$H(N^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \equiv 0$

$H = \lambda_0 C_1 N_1 + \lambda_2 N_2(\beta_2 N_1 - \alpha_2) = 0.$

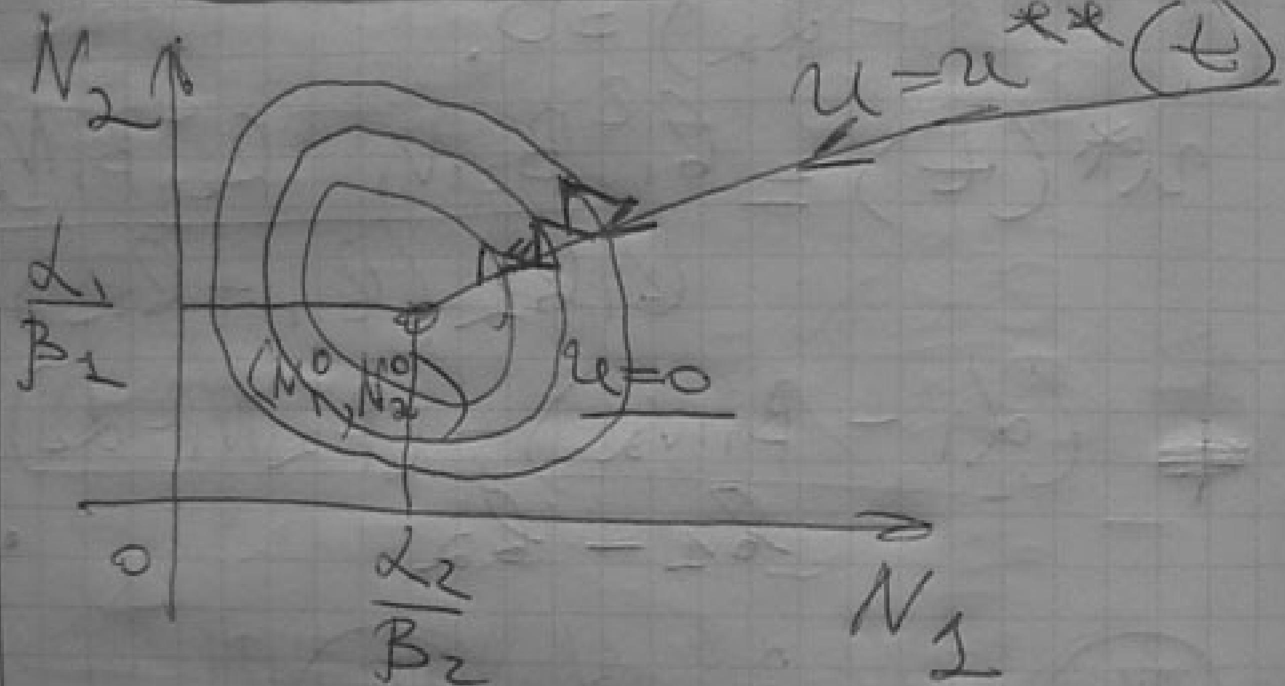
$$u^*(t) = \frac{b_1^2\beta_2 N_1 + l_2^2\beta_1 N_2}{b_1 b_2(b_1-b_2)} \neq \frac{(\alpha_1-\beta_1 N_2)-(\beta_2 N_1-\alpha_2)}{b_1-b_2}.$$

$$N_2 = \frac{b_1\beta_2\alpha_1 N_1}{(b_1-l_2)\beta_2\beta_1 N_1 + l_2\beta_1\alpha_2}$$

$\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$ — такая кривая на фазовой плоскости проходит в положение равновесия.

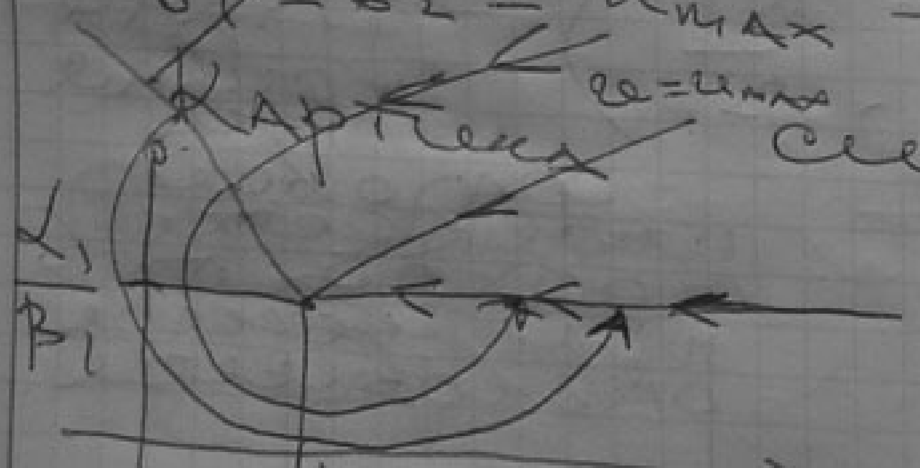
$N_1 \to \infty \quad N_2 \to \dfrac{b_1 \alpha_1}{(b_1 - b_2)\beta_1}$

$b_1 = 2, \; b_2 = 1$



Если $b_1 = b_2$, то тогда, если $b_1 = b_2 = u_{max} = 1$

Картинка следующая.



Не более 1/2 переключений.