

ОПОРНЫЕ ФУНКЦИИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ, КОНСТРУКТИВНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ СГЛАЖИВАНИЯ, ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ ¹

С.Н. АВВАКУМОВ, Ю.Н. КИСЕЛЁВ

asn@cs.msu.su kiselev@cs.msu.su

Содержание

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Введение | 3 |
| 1.1 | Общие соображения | 3 |
| 1.2 | Краткий обзор содержания статьи | 3 |
| 2 | Лунка L: пересечение двух кругов, геометрическая разность круга и отрезка | 5 |
| 2.1 | Лунка как пересечение двух кругов и её опорная функция, определяемая различными аналитическими выражениями в разных областях . . | 5 |
| 2.2 | Лунка как геометрическая разность круга и отрезка | 6 |
| 2.3 | Запись опорной функции лунки единым аналитическим выражением во всей области её определения | 7 |
| 2.4 | Представление лунки как геометрической разности двух специально сконструированных множеств с условием полного выметания | 10 |
| 2.5 | Опорная функция лунки как суперпозиция двух опорных функций . . | 10 |
| 2.5.1 | Опорные функции множеств U_1 и U_2 как суперпозиции двух опорных функций | 10 |
| 2.5.2 | Опорная функция лунки L как суперпозиция опорных функций. Сравнение двух представлений лунки в виде геометрической разности | 11 |
| 2.6 | Интегральное представление опорной функции лунки L | 12 |
| 3 | Сглаживание лунки L. Опорная функция сглаженной лунки L_μ | 13 |
| 4 | Полукруг. Сглаживание полукруга | 14 |
| 5 | Геометрическая разность круга и прямоугольника. Сглаживание | 16 |
| 5.1 | Опорная функция. Сглаживание | 16 |
| 5.2 | Два частных случая | 19 |
| 6 | Полулунка. Сглаживание | 20 |
| 6.1 | Полулунка типа “утюг” | 20 |
| 6.2 | Полулунка типа “круговой сегмент” | 21 |
| 6.3 | Замечание об опорных функциях тел вращения | 21 |

¹Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 04-01-08085 офи_a, УР.03.02.522, НШ.1846.2003.1, РФФИ 03-01-00474

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 7 | Геометрическая разность круга и треугольника. | |
| | Сглаживание | 22 |
| 7.1 | Множество D : геометрическая разность круга и треугольника | 22 |
| 7.2 | Невыпуклость разности опорных функций круга и треугольника и её геометрическая интерпретация в терминах градиентной кривой. Ласточкины хвосты | 23 |
| 7.3 | Представление множества D в форме геометрической разности двух выпуклых компактов с условием полного выметания. Опорная функция множества D как разность опорных функций | 24 |
| 7.4 | Представление опорной функции множества D в форме суперпозиции опорных функций. Сглаживание множества D | 28 |
| 8 | Исследование свойств выпуклости суперпозиций опорных функций гладких выпуклых компактов | 30 |
| 8.1 | Постановка задачи. Общая схема. Результат | 30 |
| 8.2 | Частный случай. Независимый анализ | 32 |
| 9 | УПВ-форма геометрической разности. Примеры. Проблема нахождения УПВ-формы геометрической разности | 32 |
| 10 | Метод поляр для геометрической разности | 36 |
| 10.1 | Формулировка общей схемы | 36 |
| 10.2 | Пример применения общей схемы для построения геометрической разности круга и отрезка | 37 |
| 11 | Алгоритм вычисления геометрической разности круга и многоугольника на основе дистанционной функции | 39 |
| 11.1 | Постановка задачи. Формулировка алгоритма | 39 |
| 11.2 | Вычисление дистанционной функции круга со сдвинутым центром | 41 |
| 11.3 | Программа для вычисления геометрической разности (74) круга и многоугольника. Примеры расчётов | 42 |
| 12 | Алгоритм вычисления геометрической разности круга и гладкого выпуклого компакта | 43 |
| 12.1 | Постановка задачи. Формулировка алгоритма | 43 |
| 12.2 | Вспомогательные выкладки | 45 |
| 13 | Алгоритм вычисления геометрической разности двух гладких выпуклых компактов на основе дистанционной функции с привлечением метода потенциалов | 48 |
| 13.1 | Постановка задачи | 48 |
| 13.2 | Формулировка алгоритма | 49 |
| 13.3 | Примеры расчётов | 51 |
| 14 | Алгебраическая сумма и геометрическая разность двух многогранных множеств | 55 |
| 14.1 | Многогранные множества: основные определения, геометрия многогранных множеств | 55 |
| 14.2 | Алгебраическая сумма двух многогранных множеств | 57 |
| 14.3 | Геометрическая разность двух многогранных множеств | 62 |

| | |
|---|----|
| 15 Пример задачи быстродействия с областью управления, имеющей форму лунки | 67 |
| 16 Примеры построения множеств достижимости (управляемости) в плоских линейных управляемых системах | 68 |

1 Введение

1.1 Общие соображения

Технология решения задач управления с негладкими выпуклыми компактными областями управления предполагает привлечение сглаженных выпуклых аппроксимаций этих областей [3]-[7]. Подчеркнём, что, говоря о сглаживании, см. [3]-[8], мы имеем в виду нахождение в "достаточно простой аналитической форме" опорной функции сглаженного выпуклого множества, и это представление опорной функции включается в вычислительную схему решения задачи управления. Именно этим объясняется интерес к рассматриваемым вопросам, а полученные расчётные формулы сглаживания образуют существенную компоненту в соответствующих вычислительных экспериментах [5]-[7]. В статье рассматриваются некоторые специальные множества: лунка, полулунка, другие плоские выпуклые множества, их многомерные аналоги. Описываются конструктивные процедуры сглаживания. Рассматриваются алгоритмы построения некоторых множеств типа геометрической разности двух множеств. Представляется интересным подход к построению опорных функций при сглаживании на основе суперпозиций опорных функций. Для применения в конкретных ситуациях подбор соответствующих опорных функций требует определённой изобретательности. Поэтому подробное описание этого подхода и окончательных расчётных формул для рассмотренных конкретных случаев представляется полезным для вычислительных приложений. Приводится пример численного решения задачи быстродействия с областью управления, имеющей форму лунки; формулы сглаживания лунки играют важную роль при решении краевой задачи принципа максимума Понтрягина. Статья содержит графический материал, поясняющий геометрические построения.

В статье термин "гладкий выпуклый компакт" понимается в следующем смысле, [4]: выпуклый компакт $M \subset \mathbb{R}^n$ называется гладким, если его опорная функция $c(p) = \max_{x \in M} (x, p)$, $p \in \mathbb{R}^n$, является гладкой в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и там же ранг её гессиана равен $n - 1$. Чтобы подчеркнуть зависимость опорной функции от множества M , для неё используется обозначение $c(M, p)$. Плоский гладкий выпуклый компакт ограничен кривой, кривизна которой конечна и отделена от нуля.

Описывается методика построения множеств достижимости и управляемости для линейных управляемых систем; в плоском случае приводится ряд примеров расчёта на эту тему.

1.2 Краткий обзор содержания статьи

В разделе 2 рассматривается лунка L с конкретными параметрами и приводятся различные формы записи её опорной функции. Лунку L — пересечение двух кругов — можно представить в виде геометрической разности круга и отрезка без условия полного выметания. Далее лунка представляется в виде геометрической разности другой

пары выпуклых множеств с условием полного выметания. Аналоги этого результата в дальнейшем излагаются для других пар множеств.

В разделе 3 рассмотрен вопрос о сглаживании лунки L .

В разделе 4 решён вопрос о сглаживании полукруга.

В разделе 5 аналогичные вопросы решаются для геометрической разности круга и прямоугольника.

В разделе 6 рассмотрены полулунки и вопросы их сглаживания.

В разделе 7 рассматривается геометрическая разность круга и треугольника.

Описывается градиентная кривая, которая при неправильных процедурах сглаживания может иметь “хвосты”.

В разделе 8 содержится исследование свойств выпуклости суперпозиции опорных функций. Содержание предыдущих разделов статьи служит естественной мотивацией для изучения предлагаемой конструкции. Отдельно и независимо от общего результата рассмотрен частный случай суперпозиции опорной функции с двумя аргументами.

В разделе 9 обсуждается УПВ-форма геометрической разности и даётся краткий обзор изученных ранее примеров. Приводится пример, иллюстрирующий свойство неединственности УПВ-формы геометрической разности.

В разделе 10 описан метод поляр для геометрической разности D . Ставится вопрос о нахождении опорной функции множества D и нахождении дистанционной функции множества D . Рассмотрена общая схема и примеры её применения для случая геометрической разности круга и отрезка.

В разделе 11 описан алгоритм вычисления геометрической разности круга и многоугольника.

В разделе 12 описан алгоритм вычисления геометрической разности круга и гладкого выпуклого компакта.

Раздел 13 содержит описание алгоритма построения геометрической разности двух гладких выпуклых компактов на основе дистанционной функции.

В разделе 14 представлены алгоритмы построения алгебраической суммы и геометрической разности двух многогранных множеств.

В разделе 15 представлен пример решения линейной задачи быстрогодействия с областью управления в форме лунки. Пример интересен тем, что демонстрирует полезность развитых методов сглаживания опорной функции лунки как предварительного этапа для решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина.

В разделе 16 рассмотрены примеры построения множеств достижимости в плоских линейных управляемых системах.

Результаты, представленные в этой статье, сопровождаются многочисленными иллюстрациями и численными экспериментами, которые являются важной составной частью статьи.

В статье представлено несколько подходов к вычислению геометрической разности. Выбор алгоритма для нахождения геометрической разности зависит от целей исследования и применяемых вычислительных средств.

Представляется, что материал статьи будет полезным и для студентов, изучающих методы решения задач оптимального управления.

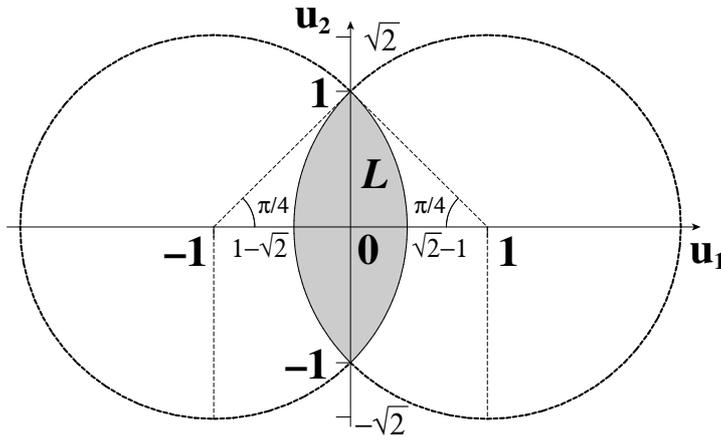


Рис. 1.

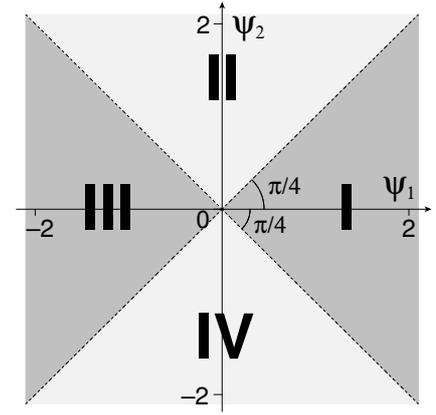


Рис. 2.

2 Лунка L : пересечение двух кругов, геометрическая разность круга и отрезка

2.1 Лунка как пересечение двух кругов и её опорная функция, определяемая различными аналитическими выражениями в разных областях

Одной из конкретных областей управления, возникающих в приложениях, является *лунка*

$$L = S_{\sqrt{2}}(-1, 0) \cap S_{\sqrt{2}}(1, 0)$$

— пересечение двух кругов радиуса $\sqrt{2}$ с центрами в точках $(\pm 1, 0)$, см. рис. 1. Граница лунки L содержит две угловые точки $(0, \pm 1)$, в которых нарушается свойство единственности опорных прямых. Лунка является строго выпуклым множеством.

Привлекая определение опорной функции и вводя в рассмотрение четыре угловых области

$$\begin{aligned} I &= \{\psi = (\psi_1, \psi_2) : \psi_1 \geq |\psi_2|\}, & II &= \{\psi = (\psi_1, \psi_2) : \psi_2 \geq |\psi_1|\}, \\ III &= \{\psi = (\psi_1, \psi_2) : \psi_1 \leq -|\psi_2|\}, & IV &= \{\psi = (\psi_1, \psi_2) : \psi_2 \leq -|\psi_1|\}, \end{aligned}$$

прямыми вычислениями получаем следующее выражение для опорной функции лунки L :

$$c(L, \psi) = \begin{cases} \sqrt{2} \|\psi\| - \psi_1, & \psi \in I, \\ \sqrt{2} \|\psi\| + \psi_1, & \psi \in III, \\ \psi_2, & \psi \in II, \\ -\psi_2, & \psi \in IV. \end{cases}$$

Эта формула может быть записана в более компактной форме:

$$c(L, \psi) = \begin{cases} \sqrt{2} \|\psi\| - |\psi_1|, & \psi \in I \cup III, \\ |\psi_2|, & \psi \in II \cup IV, \end{cases} \quad (1)$$

Области I, II, III, IV показаны на рис. 2.

Наряду с лункой L представляет интерес выпуклое множество “полулунка” $L_{1/2}$, см. рис. 3, а в трехмерном пространстве — выпуклые множества, полученные вращением лунки L вокруг вертикальной оси (“дыня” с острыми полюсами или “веретено”;

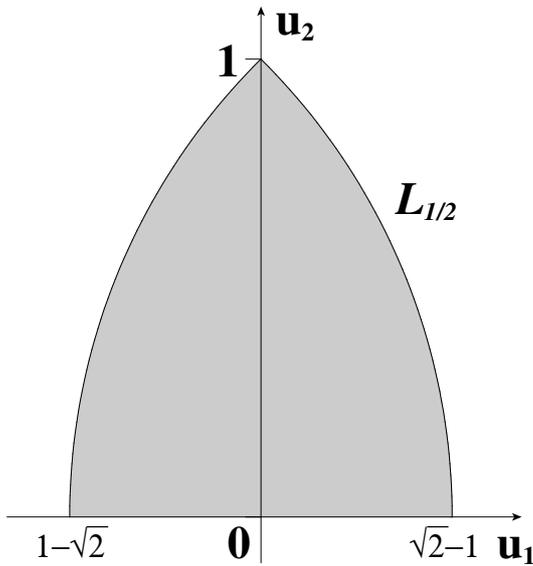


Рис. 3.

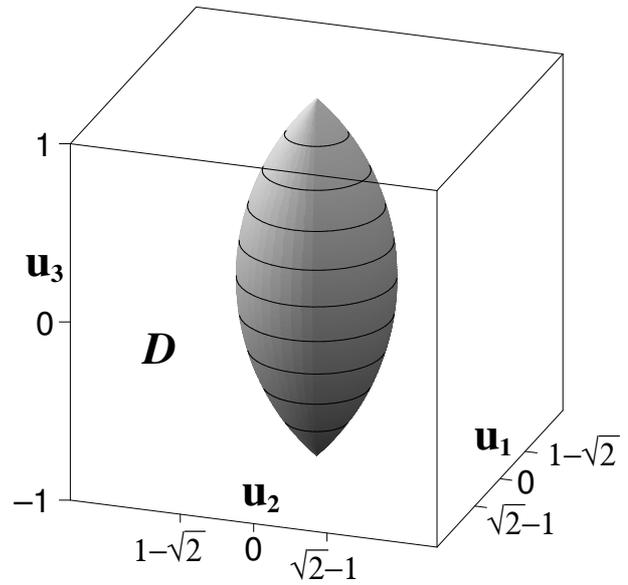


Рис. 4.

рис. 4), полулунки $L_{1/2}$ вокруг вертикальной оси (половина “дыни” $D_{1/2}$, рис. 5), лунки L вокруг горизонтальной оси (“тарелка” T с “острым ободом” — пересечение двух шаров, рис. 6), половина $T_{1/2}$ “тарелки” T , и т.д.

Подчеркнем ещё раз, что нашей целью является построение опорной функции для аппроксимирующих гладких выпуклых компактов. Крайне желательно получить для опорной функции аппроксимирующего семейства множеств “достаточно простое” аналитическое выражение, которое включалось бы в вычислительную схему решения задачи управления. Специально отметим, что сглаживание опорной функции интегральными средствами для нас неинтересны, так как при проведении реальных вычислений они малоэффективны.

Для того, чтобы подойти к этим вопросам, сделаем некоторые простые предварительные замечания, относящиеся к лунке L и её опорной функции².

2.2 Лунка как геометрическая разность круга и отрезка

Напомним определение геометрической разности³ двух множеств A и B .

Определение 1. Пусть A, B — множества из \mathbb{R}^n . Их геометрической разностью $D = A \stackrel{*}{-} B$ называется множество

$$D = \{c \in \mathbb{R}^n : c + B \subset A\}.$$

В общем случае геометрическая разность — множество D — может оказаться пустым множеством. Далее в примерах рассматривается случай $B \subset A$, гарантирующий выполнение условия $D \neq \emptyset$, при этом $c = 0 \in D$.

Лунка L является геометрической разностью круга $A = S_{\sqrt{2}}(0)$ и горизонтального отрезка $B = \{|u_1| \leq 1, u_2 = 0\}$:

$$L = A \stackrel{*}{-} B \equiv \{c : c + B \subset A\} \equiv \bigcup \{c : c + B \subset A\} \equiv \bigcap_{b \in B} \{A - b\},$$

²Аналогичным образом может быть рассмотрена лунка $L(R, a, b)$, являющаяся пересечением двух кругов радиуса R с центрами в точках $a, b \in \mathbb{R}^2$, $\|a - b\| < R$.

³См. книгу М.С. Никольского [2], стр. 32.

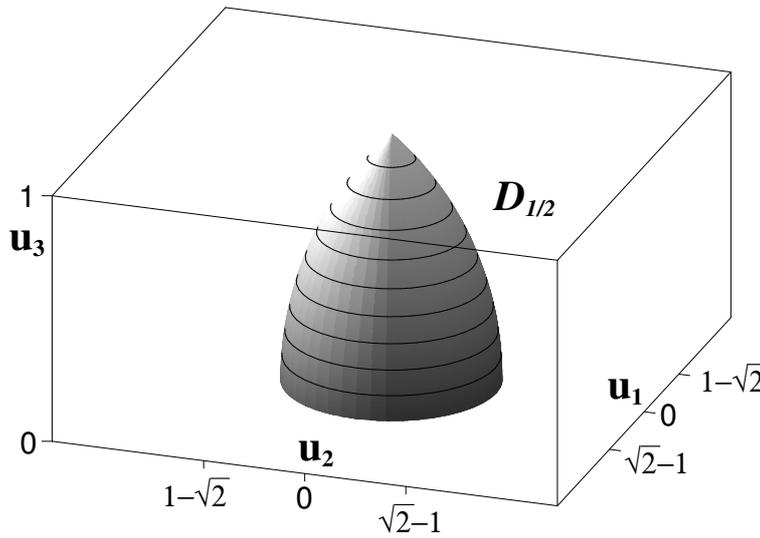


Рис. 5.

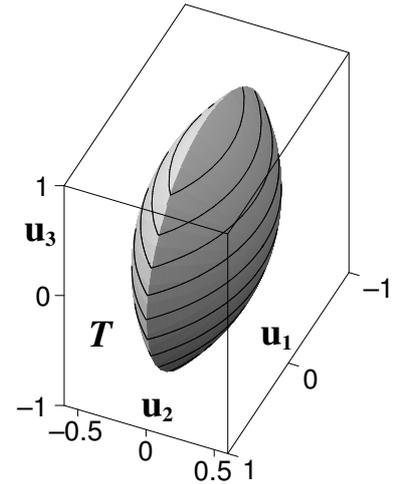


Рис. 6.

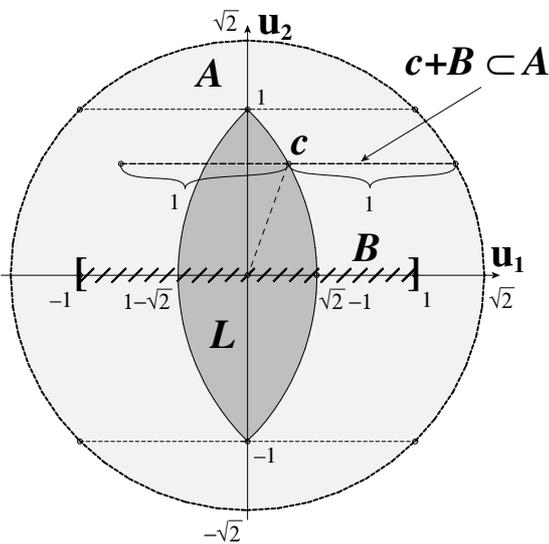


Рис. 7.

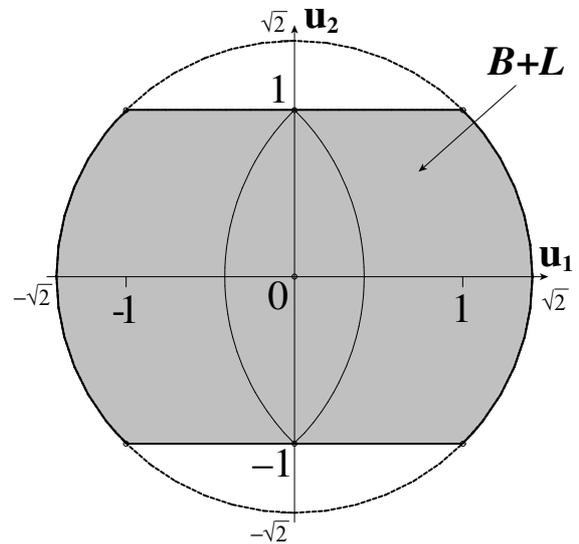


Рис. 8.

см. рис. 7. Множество $B + L$ представляет собой круг A за вычетом двух его сегментов, см. рис. 8. Ясно, что $B + L \neq A$; в этом случае говорят, что не выполнено условие полного выметания⁴.

2.3 Запись опорной функции лунки единым аналитическим выражением во всей области её определения

Опорная функция (1) лунки L допускает следующее аналитическое представление (единое для всех $\psi \in \mathbb{R}^2$):

$$c(L, \psi) = c(\psi), \quad (2)$$

⁴Условие полного выметания выражается равенством $B + L = A$.

где

$$c(\psi) = c_1(\psi) - c_2(\psi), \quad (3)$$

$$c_1(\psi) = \sqrt{\psi_1^2 + 3\psi_2^2 + |\psi_1^2 - \psi_2^2|}, \quad (4)$$

$$c_2(\psi) = \frac{|\psi_1 + \psi_2| + |\psi_1 - \psi_2|}{2}. \quad (5)$$

Действительно, для $\psi \in I$ имеем:

$$\left| \begin{array}{l} \psi_1^2 - \psi_2^2 \geq 0, \quad \psi_1 + \psi_2 \geq 0, \quad \psi_1 - \psi_2 \geq 0, \\ |\psi_1^2 - \psi_2^2| = \psi_1^2 - \psi_2^2, \quad |\psi_1 + \psi_2| = \psi_1 + \psi_2, \quad |\psi_1 - \psi_2| = \psi_1 - \psi_2, \\ c_1(\psi) = \sqrt{\psi_1^2 + 3\psi_2^2 + \psi_1^2 - \psi_2^2} = \sqrt{2} \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \sqrt{2} \|\psi\|, \\ c_2(\psi) = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_1 - \psi_2}{2} = \psi_1, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$c(\psi) = c_1(\psi) - c_2(\psi) = \sqrt{2} \|\psi\| - \psi_1, \quad \psi \in I;$$

аналогично для $\psi \in III$ получаем:

$$\left| \begin{array}{l} \psi_1^2 - \psi_2^2 \geq 0, \quad \psi_1 + \psi_2 \leq 0, \quad \psi_1 - \psi_2 \leq 0, \\ |\psi_1^2 - \psi_2^2| = \psi_1^2 - \psi_2^2, \quad |\psi_1 + \psi_2| = -\psi_1 - \psi_2, \quad |\psi_1 - \psi_2| = -\psi_1 + \psi_2, \\ c_1(\psi) = \sqrt{\psi_1^2 + 3\psi_2^2 + \psi_1^2 - \psi_2^2} = \sqrt{2} \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \sqrt{2} \|\psi\|, \\ c_2(\psi) = \frac{-\psi_1 - \psi_2 - \psi_1 + \psi_2}{2} = -\psi_1, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$c(\psi) = c_1(\psi) - c_2(\psi) = \sqrt{2} \|\psi\| + \psi_1, \quad \psi \in III.$$

Таким образом, в силу (6), (7) имеем:

$$c(L, \psi) = c(\psi) = \sqrt{2} \|\psi\| - |\psi_1|, \quad \psi \in I \cup III. \quad (8)$$

Для $\psi \in II$ имеем:

$$\left| \begin{array}{l} \psi_1^2 - \psi_2^2 \leq 0, \quad \psi_1 + \psi_2 \geq 0, \quad \psi_1 - \psi_2 \leq 0, \\ |\psi_1^2 - \psi_2^2| = -\psi_1^2 + \psi_2^2, \quad |\psi_1 + \psi_2| = \psi_1 + \psi_2, \quad |\psi_1 - \psi_2| = -\psi_1 + \psi_2, \\ c_1(\psi) = \sqrt{\psi_1^2 + 3\psi_2^2 - \psi_1^2 + \psi_2^2} = 2|\psi_2| = 2\psi_2, \\ c_2(\psi) = \frac{\psi_1 + \psi_2 - \psi_1 + \psi_2}{2} = \psi_2, \end{array} \right. \quad (9)$$

$$c(\psi) = c_1(\psi) - c_2(\psi) = 2\psi_2 - \psi_2 = \psi_2, \quad \psi \in II;$$

для $\psi \in IV$ получаем:

$$\left| \begin{array}{l} \psi_1^2 - \psi_2^2 \leq 0, \quad \psi_1 + \psi_2 \leq 0, \quad \psi_1 - \psi_2 \geq 0, \\ |\psi_1^2 - \psi_2^2| = -\psi_1^2 + \psi_2^2, \quad |\psi_1 + \psi_2| = -\psi_1 - \psi_2, \quad |\psi_1 - \psi_2| = \psi_1 - \psi_2, \\ c_1(\psi) = \sqrt{\psi_1^2 + 3\psi_2^2 - \psi_1^2 + \psi_2^2} = 2|\psi_2| = -2\psi_2, \\ c_2(\psi) = \frac{-\psi_1 - \psi_2 + \psi_1 - \psi_2}{2} = -\psi_2, \end{array} \right. \quad (10)$$

$$c(\psi) = c_1(\psi) - c_2(\psi) = (-2\psi_2) - (-\psi_2) = -\psi_2, \quad \psi \in IV.$$

Из (9), (10) следует, что

$$c(L, \psi) = c(\psi) = |\psi_2|, \quad \psi \in II \cup IV. \quad (11)$$

Окончательно, из (8), (11) и (1) получаем:

$$c(\psi) = c(L, \psi) \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^2.$$

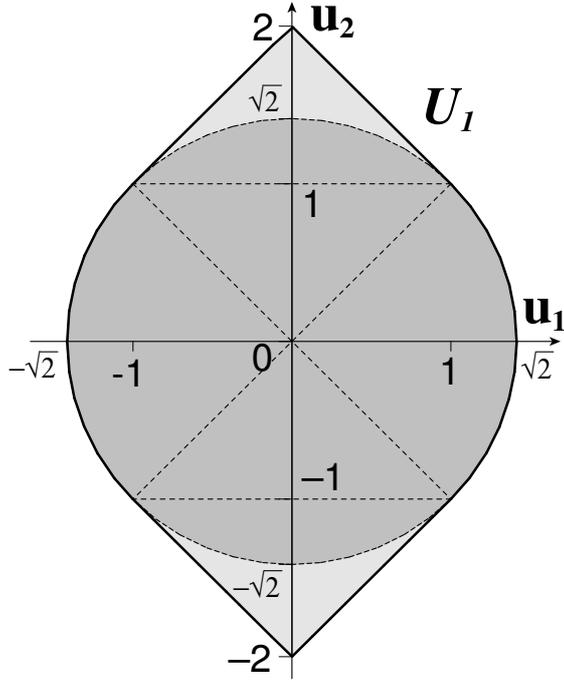


Рис. 9.

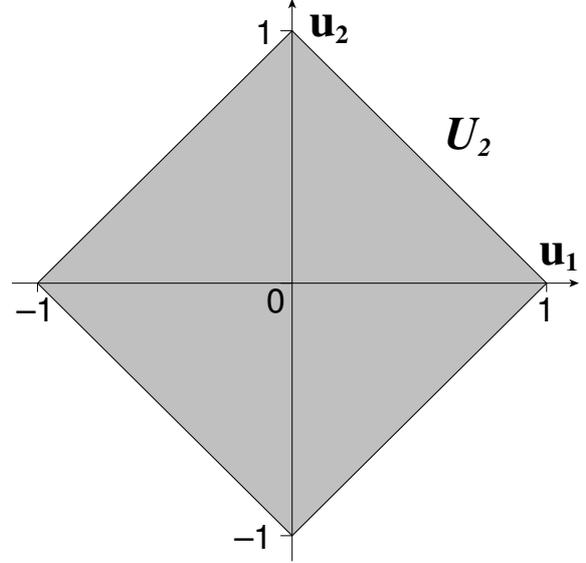


Рис. 10.

Итак, для опорной функции лунки L получено следующее выражение

$$c(L, \psi) = \sqrt{\psi_1^2 + 3\psi_2^2 + |\psi_1^2 - \psi_2^2|} - \frac{|\psi_1 + \psi_2| + |\psi_1 - \psi_2|}{2}, \quad (12)$$

справедливое для всех $\psi \in \mathbb{R}^2$. Эта формула в несколько *преобразованном* виде (15), как мы увидим далее, является основой для построения процедуры сглаживания лунки L .

Замечание 1. Функция (4) является опорной функцией множества

$$U_1 = \text{conv}\{S_{\sqrt{2}}(0), 2 \cdot I_2\}$$

— наименьшей выпуклой оболочки объединения круга $S_{\sqrt{2}}(0)$ радиуса $\sqrt{2}$ с центром 0 и вертикального отрезка $2 \cdot I_2 = \{u_1 = 0, |u_2| \leq 2\}$, см. рис. 9.

Функция (5) является опорной функцией квадрата $U_2 = \{|u_1 + u_2| \leq 1, |u_1 - u_2| \leq 1\}$, рис. 10. Квадрат U_2 можно представить в форме выпуклой оболочки двух отрезков:

$$U_2 = \text{conv}\{I_1, I_2\},$$

где множества

$$I_1 = \{|u_1| \leq 1, u_2 = 0\}, \quad I_2 = \{u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}$$

— горизонтальный и вертикальный отрезки, соответственно. Опорная функция квадрата U_2 может быть записана в форме

$$c(U_2, \psi) = \max \{c(I_1, \psi), c(I_2, \psi)\} = \max \{|\psi_1|, |\psi_2|\} = \frac{|\psi_1| + |\psi_2|}{2} + \left| \frac{|\psi_1| - |\psi_2|}{2} \right|.$$

Легко проверить, что эта функция совпадает с функцией $c_2(\psi)$, которая определена формулой (5). При выполнении процедур сглаживания предпочтительнее, однако, пользоваться не последней формулой, а формулой (5), как исходной.

2.4 Представление лунки как геометрической разности двух специально сконструированных множеств с условием полного выметания

Лунка L является геометрической разностью множеств U_1 и U_2 , см. рис. 9 и 10:

$$L = U_1 \overset{\star}{-} U_2.$$

При этом имеет место, как легко проверить, условие полного выметания: $L + U_2 = U_1$. Для опорных функций этих множеств выполняется равенство

$$c(L, \psi) + c(U_2, \psi) = c(U_1, \psi).$$

Таким образом,

$$c(L, \psi) = c(U_1 \overset{\star}{-} U_2, \psi) = c(U_1, \psi) - c(U_2, \psi) = c_1(\psi) - c_2(\psi),$$

и мы приходим к формуле (12).

2.5 Опорная функция лунки как суперпозиция двух опорных функций

2.5.1 Опорные функции множеств U_1 и U_2 как суперпозиции двух опорных функций

Рассмотрим два множества: *круг* радиуса $\sqrt{2}$ с центром 0

$$U_0 = S_{\sqrt{2}}(0) \equiv \{\|u\| \leq \sqrt{2}\}$$

и *квадрат*

$$U_2 = \{|u_1 + u_2| \leq 1, |u_1 - u_2| \leq 1\}.$$

Опорные функции этих множеств имеют вид:

$$c(U_0, \psi) = \sqrt{2} \|\psi\|, \quad c(U_2, \psi) = c_2(\psi) \equiv \frac{|\psi_1 + \psi_2| + |\psi_1 - \psi_2|}{2}.$$

Определим новую функцию $h(\psi)$ как специальную суперпозицию опорных функций множеств U_0 и U_2 :

$$h(\psi) = c(U_0, \psi) \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 \mapsto c(U_2, \psi) = c_2(\psi) \\ \psi_2 \mapsto \psi_2 \end{array} \right. \equiv \sqrt{2} \sqrt{[c_2(\psi)]^2 + \psi_2^2}.$$

Оказывается, что

$$h(\psi) = c(U_1, \psi) \equiv c_1(\psi).$$

Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} h(\psi) &= \sqrt{2} \sqrt{[c_2(\psi)]^2 + \psi_2^2} = \sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{|\psi_1 + \psi_2| + |\psi_1 - \psi_2|}{2}\right)^2 + \psi_2^2} = \\ &= \sqrt{2 \frac{(\psi_1 + \psi_2)^2 + 2|\psi_1^2 - \psi_2^2| + (\psi_1 - \psi_2)^2}{4} + 2\psi_2^2} = \\ &= \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + |\psi_1^2 - \psi_2^2| + 2\psi_2^2} = \sqrt{\psi_1^2 + 3\psi_2^2 + |\psi_1^2 - \psi_2^2|} \stackrel{(4)}{=} c_1(\psi). \end{aligned}$$

2.5.2 Опорная функция лунки L как суперпозиция опорных функций. Сравнение двух представлений лунки в виде геометрической разности

Рассмотрим два множества:

$$U_1 = \text{conv}\{U_0, 2 \cdot I_2\}, \quad U_2 = \{|u_1 + u_2| \leq 1, |u_1 - u_2| \leq 1\}.$$

Их опорные функции имеют вид:

$$c(U_1, \psi) = c_1(\psi), \quad c(U_2, \psi) = c_2(\psi).$$

Опорная функция лунки L

$$c(L, \psi) = c(U_1, \psi) - c(U_2, \psi) = c_1(\psi) - c_2(\psi).$$

Определим функцию $H(\psi)$ как специальную суперпозицию опорных функций:

$$\begin{aligned} H(\psi) &= [c(U_0, \psi) - c(I_1, \psi)] \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 \mapsto c(U_2, \psi) = c_2(\psi) \\ \psi_2 \mapsto \psi_2 \end{array} \right\} = \\ &= h(\psi) - |c_2(\psi)| = c_1(\psi) - c_2(\psi). \end{aligned}$$

Внешней функцией суперпозиции является опорная функция лунки в “существенной” области, т.е. $c(L, \psi)$, $\psi \in I \cup III$. Выше отмечалось, что опорная функция лунки L имеет вид

$$c(L, \psi) = c_1(\psi) - c_2(\psi).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} c(L, \psi) &= c(U_0 \star I_1, \psi) = [c(U_0, \psi) - c(I_1, \psi)] \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 \mapsto c_2(\psi) \\ \psi_2 \mapsto \psi_2 \end{array} \right\} = \\ &= c(U_1, \psi) - c(U_2, \psi) = c_1(\psi) - c_2(\psi). \end{aligned}$$

Замечание 2. Как отмечено в подразделе 2.2, лунка

$$L = U_0 \star I_1$$

является геометрической разностью круга $U_0 = S_{\sqrt{2}}(0)$ и отрезка $I_1 = \{|u_1| \leq 1, u_2 = 0\}$, причём условие полного выметания не выполняется, см. рис. 7, 8. Разность опорных функций множеств U_0 и I_1

$$\rho(\psi) \equiv c(U_0, \psi) - c(I_1, \psi) = \sqrt{2} \|\psi\| - |\psi_1|$$

не является *выпуклой* функцией аргумента $\psi = (\psi_1, \psi_2)$. Действительно, функция одномерного аргумента ψ_1

$$\rho_1(\psi_1) \equiv \rho(\psi_1, \psi_2)|_{\psi_2=1} = \sqrt{2} \sqrt{\psi_1^2 + 1} - |\psi_1|$$

не является выпуклой, см. рис. 11. Эта функция чётная; в области $\psi_1 > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \rho_1(\psi_1) &= \sqrt{2} \sqrt{\psi_1^2 + 1} - \psi_1, & \rho_1(0) &= \sqrt{2}, & \rho_1(+\infty) &= +\infty, \\ \rho_1'(\psi_1) &= \sqrt{2} \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_1^2 + 1}} - 1, & \rho_1'(1) &= 0, & \rho_1'(1) &= 1, \\ \rho_1'(\psi_1) &< 0, & 0 < \psi_1 < 1; & \rho_1'(\psi_1) > 0, & 1 < \psi_1 < +\infty, \\ \psi_1 &= 1 - \text{точка минимума.} \end{aligned}$$

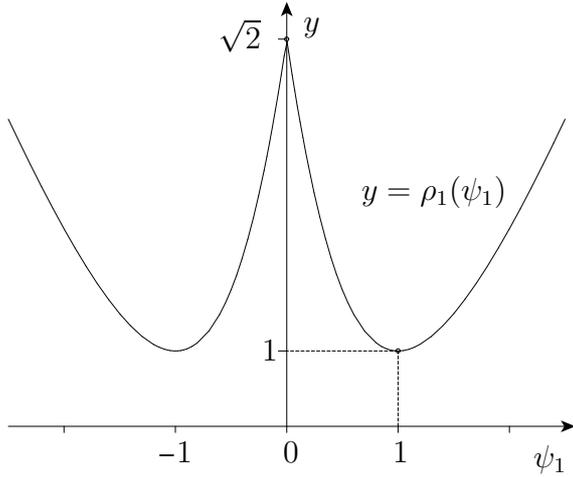


Рис. 11.

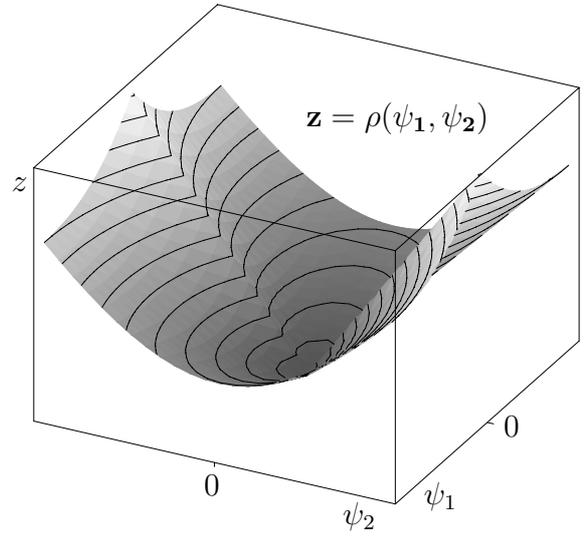


Рис. 12.

Итак, функция $\rho(\psi)$ не является выпуклой, поэтому она не является опорной функцией.

Формальная проверка невыпуклости функции $\rho(\psi)$ достигается следующей выкладкой: для трёх точек $a = (-1, 1)$, $b = (1, 1)$, $c = \frac{a+b}{2} = (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned}\rho(c) &= \sqrt{2}, \\ \frac{1}{2}\rho(a) + \frac{1}{2}\rho(b) &= 1, \\ \rho\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) &> \frac{1}{2}\rho(a) + \frac{1}{2}\rho(b),\end{aligned}$$

что говорит о невыпуклости функции $\rho(\psi)$. Наглядное представление о невыпуклости функции $\rho(\psi)$ даёт рис. 12.

Эти рассуждения показывают, что опорную функцию геометрической разности $L = U_0 \stackrel{*}{-} I_1$ нельзя получить простым вычитанием опорных функций множеств U_0 и I_1 .

Однако, имеется другое представление той же лунки L в форме геометрической разности

$$L = U_1 \stackrel{*}{-} U_2$$

с условием полного выметания

$$L + U_2 = U_1,$$

при котором опорная функция лунки L может быть получена простым вычитанием опорных функций множеств U_1 и U_2 :

$$c(L, \psi) = c(U_1, \psi) - c(U_2, \psi).$$

2.6 Интегральное представление опорной функции лунки L

Выпуклая плоская центрально-симметричная фигура F , половина границы которой описывается параметрическими уравнениями

$$x_1 = x_1(\alpha), \quad x_2 = x_2(\alpha), \quad \alpha \in [a, b], \quad (13)$$

имеет опорную функцию

$$c(F, \psi) = \frac{1}{2} \int_a^b |\psi_1 x_1'(\alpha) + \psi_2 x_2'(\alpha)| d\alpha. \quad (14)$$

Опираясь на формулу (14), можно получить интегральное представление опорной функции лунки L . Параметрические уравнения (13) принимают вид

$$x_1 = -1 + \sqrt{2} \cos \alpha, \quad x_2 = \sqrt{2} \sin \alpha, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

и применение формулы (14) даёт:

$$\begin{aligned} c(L, \psi) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |-\psi_1 \sqrt{2} \sin \alpha + \psi_2 \sqrt{2} \cos \alpha| d\alpha = \\ &= \frac{\|\psi\|}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left| -\frac{\psi_1}{\|\psi\|} \sin \alpha + \frac{\psi_2}{\|\psi\|} \cos \alpha \right| d\alpha. \end{aligned}$$

Представим вектор ψ в форме

$$\psi = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

Тогда предыдущая формула принимает вид

$$c(L, \psi) = \frac{\|\psi\|}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(\alpha - \beta)| d\alpha$$

или, после замены переменной интегрирования $\tau = \alpha - \beta$,

$$c(L, \psi) = \frac{\|\psi\|}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}-\beta}^{\frac{\pi}{4}-\beta} |\sin \tau| d\tau.$$

3 Сглаживание лунки L . Опорная функция сглаженной лунки L_μ

Для построения гладкой аппроксимации лунки L привлекается формула для её опорной функции в виде

$$c(L, \psi) = \sqrt{2} \sqrt{[c_2(\psi)]^2 + \psi_2^2} - c_2(\psi) \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^2, \quad (15)$$

где

$$c_2(\psi) = \frac{|\psi_1 + \psi_2| + |\psi_1 - \psi_2|}{2} \equiv c(U_2, \psi). \quad (16)$$

Сглаживание квадрата U_2 достигается следующим конструктивным образом:

$$U_{2,\mu} \approx U_2,$$

$$c(U_{2,\mu}, \psi) = \frac{1}{2} \sqrt{\mu(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (\psi_1 + \psi_2)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\mu(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (\psi_1 - \psi_2)^2} \equiv c_{2,\mu}(\psi), \quad (17)$$

здесь μ — малый положительный параметр сглаживания, расстояние Хаусдорфа

$$h(U_2, U_{2,\mu}) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow +0,$$

$U_{2,\mu}$ — гладкий выпуклый компакт, аппроксимирующий множество U_2 .

Сглаживание лунки L достигается (на основе формул (13) и (15)) следующим конструктивным образом:

$$L_\mu \approx L, \quad h(L, L_\mu) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow +0,$$

$$c(L_\mu, \psi) = \sqrt{2} \sqrt{[c_{2,\mu}(\psi)]^2 + \psi_2^2} - c_{2,\mu}(\psi), \quad (18)$$

L_μ — гладкий выпуклый, аппроксимирующий лунку L , компакт.

Можно показать, что функция (18) при $\mu > 0$ является гладкой выпуклой функцией аргумента $\psi \in \mathbb{R}^2$, причем ранг её гессиана равен 1 для всех $\psi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

4 Полуокруг. Сглаживание полукруга

Рассмотрим круг радиуса $R > 0$

$$S_R(0) = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\| \leq R\}$$

и *полуокруг*

$$K_{12} = \{u = (u_1, u_2) \in S_R(0) : u_2 \geq 0\}.$$

Опорная функция полукруга имеет вид:

$$c(K_{12}, \psi) = \begin{cases} R \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}, & \psi_2 \geq 0, \\ R |\psi_1|, & \psi_2 < 0. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что эта опорная функция допускает следующее, единое для всех ψ , аналитическое представление:

$$c(K_{12}, \psi) = R \sqrt{\psi_1^2 + \frac{1}{2} \psi_2 |\psi_2| + \frac{1}{2} \psi_2^2}.$$

Представим эту опорную функцию в виде, удобном для последующего сглаживания. Для этого введем два вспомогательных множества: *горизонтальный отрезок*

$$J_1 = \{|u_1| \leq 1, u_2 = 0\}$$

и *вертикальный отрезок*

$$J_2 = \{u_1 = 0, 0 \leq u_2 \leq 1\}.$$

Выпишем опорные функции этих отрезков:

$$s_1(\psi) \equiv c(J_1, \psi) = |\psi_1|, \quad s_2(\psi) \equiv c(J_2, \psi) = \frac{\psi_2 + |\psi_2|}{2}.$$

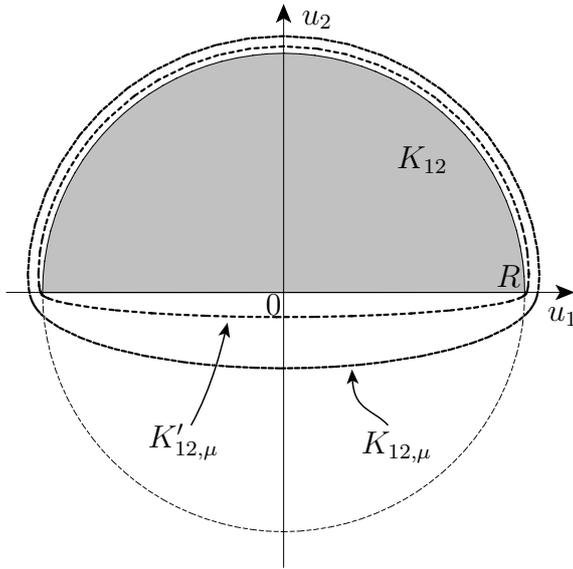


Рис. 13.

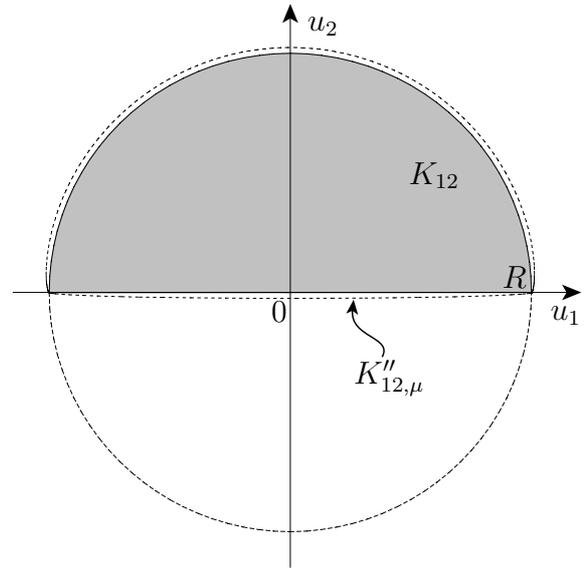


Рис. 14.

Непосредственно проверяется, что опорная функция полукруга допускает представление в виде суперпозиции опорной функции единичного круга и опорных функций отрезков $R \cdot J_1, R \cdot J_2$:

$$c(K_{12}, \psi) = c(S_1(0), \psi) \begin{cases} \psi_1 \mapsto R s_1(\psi) \\ \psi_2 \mapsto R s_2(\psi) \end{cases} = R \sqrt{[s_1(\psi)]^2 + [s_2(\psi)]^2}.$$

Сглаживание полукруга K_{12} на основе последней формулы достигается следующим конструктивным образом:

$$\begin{aligned} K_{12,\mu} &\approx K_{12}, \quad h(K_{12}, K_{12,\mu}) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow +0, \\ c(K_{12,\mu}, \psi) &= R \sqrt{[s_{1,\mu}(\psi)]^2 + [s_{2,\mu}(\psi)]^2}, \\ s_{1,\mu}(\psi) &= \sqrt{\mu \|\psi\|^2 + \psi_1^2}, \quad s_{2,\mu}(\psi) = \frac{1}{2} \psi_2 + \frac{1}{2} \sqrt{\mu \|\psi\|^2 + \psi_2^2}, \end{aligned}$$

$\mu > 0$ — параметр сглаживания, $K_{12,\mu}$ — гладкий выпуклый компакт, аппроксимирующий полукруг K_{12} .

На рис. 13 изображён полукруг K_{12} и сглаженный полукруг $K_{12,\mu}$ — кривая, построенная на основе предложенных формул сглаживания при выборе параметра сглаживания $\mu = 0.1$.

Параметры сглаживания в функциях s_1 и s_2 могут быть выбраны разными. На рис. 13 кривая $K'_{12,\mu}$ построена при параметрах сглаживания $\mu = 0.01$ в функции s_1 и $\mu = 0.1$ в функции s_2 . На рис. 14 показан результат сглаживания при выборе $\mu = 0$ в функции s_1 и $\mu = 0.1$ в функции s_2 .

При построении кривых, ограничивающих плоские гладкие выпуклые множества с опорной функцией $c(\psi)$, использовано следующее векторное параметрическое уравнение:

$$x = c_0(\alpha) q(\alpha) + c'_0(\alpha) q'(\alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \quad (19)$$

В координатной форме последнее уравнение принимает вид

$$\begin{cases} x_1 = c_0(\alpha) \cos \alpha - c'_0(\alpha) \sin \alpha, \\ x_2 = c_0(\alpha) \sin \alpha + c'_0(\alpha) \cos \alpha, \\ \alpha \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

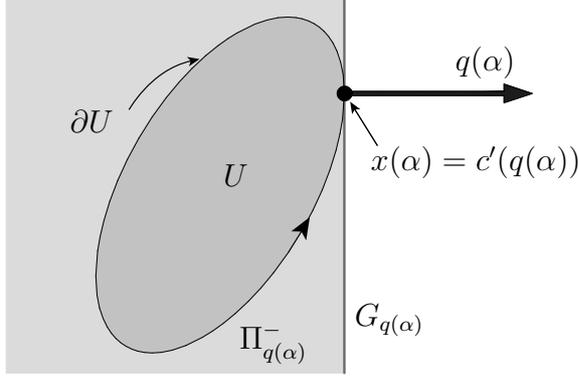


Рис. 15.

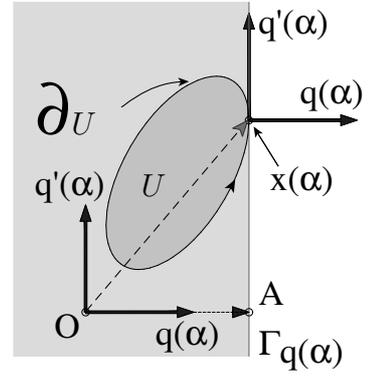


Рис. 16.

где $c_0(\alpha) \equiv c(\psi)|_{\psi=q(\alpha)}$ — сужение опорной функции на единичную окружность,

$$q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad q'(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad c'_0(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} c_0(\alpha).$$

Геометрический смысл уравнения (19) иллюстрируют рис. 15, 16.

5 Геометрическая разность круга и прямоугольника. Сглаживание

5.1 Опорная функция. Сглаживание

Рассмотрим *круг*

$$S_R(0) = \{\|u\| \leq R\},$$

прямоугольник

$$\Pi = \{|u_1| \leq h_1, |u_2| \leq h_2\},$$

см. рис. 17, и их *геометрическую разность*

$$D = S_R(0) \ast \Pi, \quad D \neq \emptyset,$$

предполагая, что

$$h_1 \geq 0, h_2 \geq 0, \quad 0 < h_1^2 + h_2^2 < R^2.$$

Если $h_2 = 0$, то множество Π превращается в горизонтальный отрезок $\Pi = h_1 \cdot I_1$, а множество D имеет форму вертикальной лунки $L(R, h_1, 0) \equiv S_R(-h_1, 0) \cap S_R(h_1, 0)$, которая при $R = \sqrt{2}$, $h_1 = 1$ рассмотрена в разделе 2.

Опорные функции множеств $S_R(0)$ и Π имеют вид:

$$c(S_R(0), \psi) = R\|\psi\|, \tag{20}$$

$$c(\Pi, \psi) = h_1|\psi_1| + h_2|\psi_2|. \tag{21}$$

Образуем разность опорных функций (20) и (21):

$$\sigma(\psi) = R\|\psi\| - h_1|\psi_1| - h_2|\psi_2|, \quad \psi = (\psi_1, \psi_2). \tag{22}$$

Функция (22) не является *выпуклой*, и, следовательно, не является *опорной* функцией. Но она служит основой для конструирования опорной функции геометрической разности D методом подходящей суперпозиции.

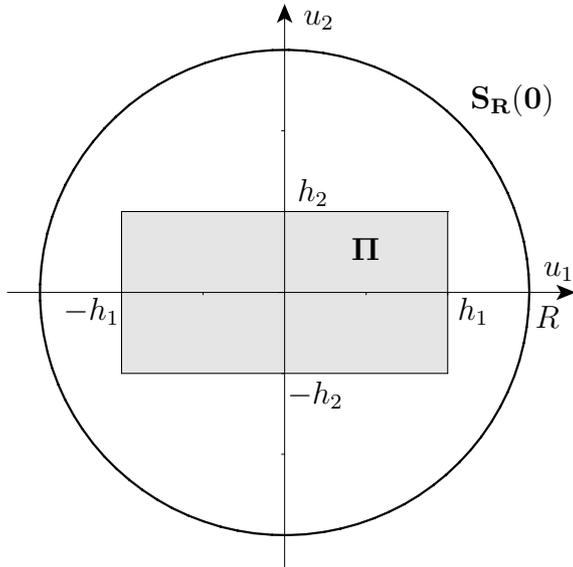


Рис. 17.

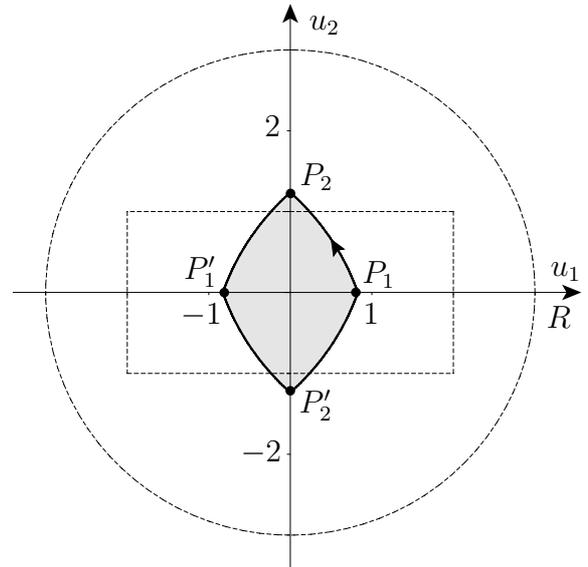


Рис. 18.

Множество D центрально-симметрично, симметрично относительно осей u_1 и u_2 , и ограничено кривой $P_2P_1P_2'P_1'P_2$. Дуга P_1P_2 — кусок окружности радиуса R с центром в точке $(-h_1, -h_2)$, причём

$$P_1 = \left(\sqrt{R^2 - h_2^2} - h_1, 0 \right), \quad P_2 = \left(0, \sqrt{R^2 - h_1^2} - h_2 \right),$$

см. рис. 18, который построен для набора параметров $R = 3$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$.

Введём углы t_1, t_2 из первой четверти, полагая:

$$\sin(t_1) = \frac{\sqrt{R^2 - h_1^2}}{R}, \quad \cos(t_1) = \frac{h_1}{R}, \quad \sin(t_2) = \frac{h_2}{R}, \quad \cos(t_2) = \frac{\sqrt{R^2 - h_2^2}}{R}.$$

При этом

$$\operatorname{ctg}(t_1) = \frac{h_1}{\sqrt{R^2 - h_1^2}}, \quad \operatorname{tg}(t_2) = \frac{h_2}{\sqrt{R^2 - h_2^2}}.$$

Дуга P_1P_2 описывается параметрическими уравнениями

$$u_1 = -h_1 + R \cos(t), \quad u_2 = -h_2 + R \sin(t), \quad t_2 \leq t \leq t_1.$$

Геометрический смысл параметров t_1, t_2 разъясняет рис. 19, стрелка на дуге окружности P_1P_2 показывает направление движения точки (u_1, u_2) при возрастании параметра t от t_2 до t_1 . Заметим, что $\cos(t_1 + t_2) = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 \sqrt{R^2 - h_2^2} + h_2 \sqrt{R^2 - h_1^2}}$, поэтому

$$\begin{aligned} h_1 = h_2 &\iff t_1 + t_2 = \pi/2, \\ h_1 < h_2 &\iff t_1 + t_2 > \pi/2, \\ h_1 > h_2 &\iff t_1 + t_2 < \pi/2. \end{aligned}$$

Параметры t_1 и t_2 при $h_1, h_2 > 0$ связаны неравенством

$$t_2 < t_1,$$

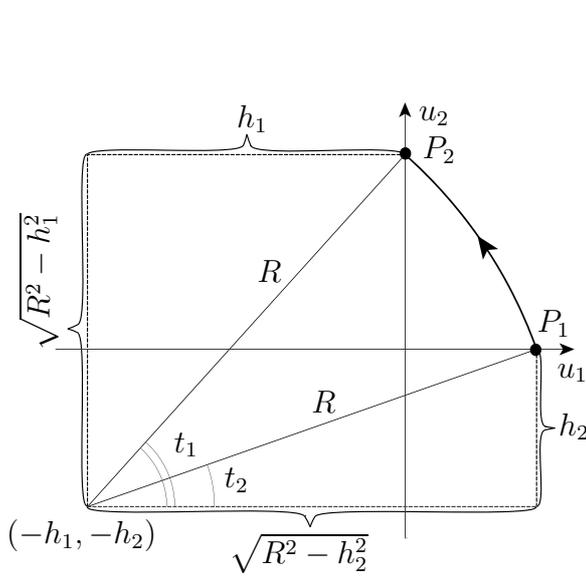


Рис. 19.

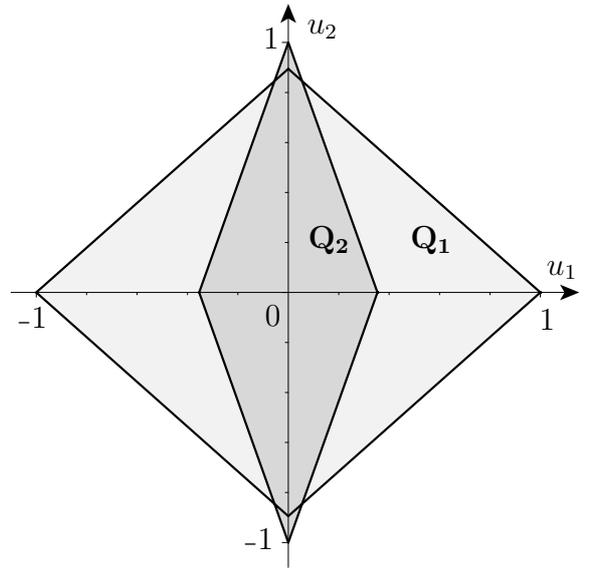


Рис. 20.

так как при $t_1, t_2 \in (0, \pi/2)$ имеем:

$$t_2 < t_1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(t_2) < \operatorname{tg}(t_1) \Leftrightarrow \frac{h_2}{\sqrt{R^2 - h_2^2}} < \frac{\sqrt{R^2 - h_1^2}}{h_1} \Leftrightarrow R^2 - h_1^2 - h_2^2 > 0.$$

Привлекая параметры t_1 и t_2 , введём выпуклые множества Q_1 и Q_2 (ромбы), задавая их опорными функциями:

$$c_1(\psi) \equiv c(Q_1, \psi) = \frac{1}{2}(|\psi_1 + \psi_2 \operatorname{ctg}(t_1)| + |\psi_1 - \psi_2 \operatorname{ctg}(t_1)|),$$

$$c_2(\psi) \equiv c(Q_2, \psi) = \frac{1}{2}(|\psi_1 \operatorname{tg}(t_2) + \psi_2| + |\psi_1 \operatorname{tg}(t_2) - \psi_2|),$$

см. рис. 20, на котором эти множества построены для набора параметров $R = 3$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$.

Определим функцию $H(\psi)$, полагая

$$H(\psi) = \sigma(\psi_1, \psi_2) \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 \mapsto c_1(\psi) \\ \psi_2 \mapsto c_2(\psi) \end{array} \right. \equiv \quad (23)$$

$$\equiv R\sqrt{[c_1(\psi_1)]^2 + [c_2(\psi)]^2} - h_1 c_1(\psi) - h_2 c_2(\psi).$$

Опорная функция геометрической разности D имеет вид:

$$c(D, \psi) = \begin{cases} R\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - h_1|\psi_1| - h_2|\psi_2|, & |\psi_1| \operatorname{tg}(t_2) \leq |\psi_2| \leq |\psi_1| \operatorname{tg}(t_1), \\ (\sqrt{R^2 - h_2^2} - h_1)|\psi_1|, & |\psi_2| \leq |\psi_1| \operatorname{tg}(t_2), \\ (\sqrt{R^2 - h_1^2} - h_2)|\psi_2|, & |\psi_2| \geq |\psi_1| \operatorname{tg}(t_1), \end{cases} \quad (24)$$

В частном случае $R = 2$, $h_1 = h_2 = 1$ имеем:

$$t_1 = \pi/3, t_2 = \pi/6, \quad \operatorname{ctg}(t_1) = \operatorname{tg}(t_2) = 1/\sqrt{3}, \operatorname{tg}(t_1) = \sqrt{3},$$

$$c(D, \psi) = \begin{cases} 2\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - |\psi_1| - |\psi_2|, & |\psi_1|/\sqrt{3} \leq |\psi_2| \leq |\psi_1|\sqrt{3}, \\ (\sqrt{3} - 1)|\psi_1|, & |\psi_2| \leq |\psi_1|/\sqrt{3}, \\ (\sqrt{3} - 1)|\psi_2|, & |\psi_2| \geq |\psi_1|\sqrt{3}. \end{cases}$$

Утверждение 1. *Имеет место равенство функций (23) и (24):*

$$c(D, \psi) = H(\psi). \quad (25)$$

Равенство (25) проверяется прямыми подсчётами.

Сглаживание множества D осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} D_\mu &\approx D, \quad h(D, D_\mu) \rightarrow 0, \mu \rightarrow +0, \\ c(D_\mu, \psi) &= H_\mu(\psi), \\ H_\mu(\psi) &= \sigma(\psi_1, \psi_2) \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 \mapsto c_{1,\mu}(\psi) \\ \psi_2 \mapsto c_{2,\mu}(\psi) \end{array} \right. = \\ &= R\sqrt{[c_{1,\mu}(\psi)]^2 + [c_{2,\mu}(\psi)]^2 - h_1 c_{1,\mu}(\psi) - h_2 c_{2,\mu}(\psi)}, \\ c_{1,\mu}(\psi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 + \psi_2 \operatorname{ctg}(t_1))^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 - \psi_2 \operatorname{ctg}(t_1))^2}, \\ c_{2,\mu}(\psi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 \operatorname{tg}(t_2) + \psi_2)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 \operatorname{tg}(t_2) - \psi_2)^2}, \end{aligned}$$

$\mu > 0$ — малый параметр сглаживания, D_μ — гладкий выпуклый аппроксимирующий множество D компакт.

5.2 Два частных случая

Рассмотрим два частных случая множества D , когда прямоугольник Π вырождается в отрезок.

Случай 1. Пусть сначала $h_2 = 0, 0 < h_1 < R$. Тогда множество D является вертикальной лункой

$$D = L(R, h_1, 0) \equiv S_R((-h_1, 0)) \cap S_R((h_1, 0)), \quad t_2 = 0, \quad 0 < t_1 < \pi/2.$$

В этом случае формула (24) принимает более простой вид:

$$c(D, \psi) = \begin{cases} R\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - h_1|\psi_1|, & |\psi_2| \leq |\psi_1| \operatorname{tg}(t_1), \\ \sqrt{R^2 - h_1^2} |\psi_2|, & |\psi_2| \geq |\psi_1| \operatorname{tg}(t_1). \end{cases} \quad (26)$$

Функцию (26) можно записать в виде, подготовленном для последующего сглаживания

$$c(D, \psi) = (R\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - h_1|\psi_1|)|_{\psi_1 \mapsto c_1(\psi)} = R\sqrt{[c_1(\psi)]^2 + \psi_2^2} - h_1 c_1(\psi), \quad (27)$$

где

$$c_1(\psi) \equiv c(Q_1, \psi) = \frac{1}{2}(|\psi_1 + \psi_2 \operatorname{ctg}(t_1)| + |\psi_1 - \psi_2 \operatorname{ctg}(t_1)|)$$

— опорная функция рассмотренного выше ромба Q_1 . Для выполнения сглаживания множества D (сейчас это вертикальная лунка) следует в формуле (27) заменить функцию $c_1(\psi)$ её гладкой аппроксимацией

$$c_{1,\mu}(\psi) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 + \psi_2 \operatorname{ctg}(t_1))^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 - \psi_2 \operatorname{ctg}(t_1))^2}.$$

Таким образом, сглаженное аппроксимирующее множество

$$D_\mu \approx D, \quad h(D, D_\mu) \rightarrow 0, \mu \rightarrow +0,$$

описывается опорной функцией

$$c(D_\mu, \psi) = R\sqrt{[c_{1,\mu}(\psi)]^2 + \psi_2^2} - h_1 c_{1,\mu}(\psi).$$

Случай 2. Пусть теперь $h_1 = 0, 0 < h_2 < R$. Тогда множество D является горизонтальной лункой

$$D = L(R, 0, h_2) \equiv S_R((0, -h_2)) \cap S_R((0, h_2)), \quad t_1 = \pi/2, \quad 0 < t_2 < \pi/2.$$

В этом случае формула (24) принимает более простой вид:

$$c(D, \psi) = \begin{cases} R\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - h_2|\psi_2|, & |\psi_2| \geq |\psi_1| \operatorname{tg}(t_2), \\ \sqrt{R^2 - h_2^2} |\psi_1|, & |\psi_2| \leq |\psi_1| \operatorname{tg}(t_2). \end{cases} \quad (28)$$

Функцию (28) можно записать в виде, подготовленном для последующего сглаживания

$$c(D, \psi) = (R\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - h_2|\psi_2|)|_{\psi_2 \rightarrow c_2(\psi)} = R\sqrt{\psi_1^2 + [c_2(\psi)]^2} - h_2 c_2(\psi), \quad (29)$$

где

$$c_2(\psi) \equiv c(Q_2, \psi) = \frac{1}{2}(|\psi_1 \operatorname{tg}(t_2) + \psi_2| + |\psi_2 \operatorname{tg}(t_2) - \psi_2|)$$

— опорная функция рассмотренного выше ромба Q_2 . Для выполнения сглаживания множества D (сейчас это горизонтальная лунка) следует в формуле (29) заменить функцию $c_2(\psi)$ её гладкой аппроксимацией

$$c_{2,\mu}(\psi) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 \operatorname{tg}(t_2) + \psi_2)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 \operatorname{tg}(t_2) - \psi_2)^2}.$$

Таким образом, сглаженное аппроксимирующее множество

$$D_\mu \approx D, \quad h(D, D_\mu) \rightarrow 0, \mu \rightarrow +0,$$

описывается опорной функцией

$$c(D_\mu, \psi) = R\sqrt{\psi_1^2 + [c_{2,\mu}(\psi)]^2} - h_2 c_{2,\mu}(\psi).$$

6 Полулунка. Сглаживание

6.1 Полулунка типа “утюг”

Пусть L — лунка, см. подраздел 2.1, а полулунка

$$L_{1/2h} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \in L, x_2 \geq 0\}$$

— часть лунки L , расположенная в верхней полуплоскости, см. рис. 3. Опорная функция лунки L

$$c(L, \psi) = \sqrt{2}\sqrt{[s(\psi)]^2 + \psi_2^2} - s(\psi), \quad s(p) = \frac{1}{2}(|p_1 + p_2| + |p_1 - p_2|),$$

позволяет получить опорную функцию полулунки $L_{1/2h}$ методом суперпозиции:

$$c(L_{1/2h}, p) = c(L, \psi)|_{\psi_1=p_1, \psi_2=(p_2+|p_2|)/2}.$$

Сглаживание полулунки $L_{1/2h}$ можно выполнить с привлечением материала раздела 8.

6.2 Полулунка типа “круговой сегмент”

Пусть L — лунка, см. подраздел 2.1, а полулунка

$$L_{1/2v} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \in L, x_1 \geq 0\}$$

— часть лунки L , расположенная в правой полуплоскости. Опорная функция лунки L

$$c(L, \psi) = \sqrt{2} \sqrt{[s(\psi)]^2 + \psi_2^2} - s(\psi), \quad s(p) = \frac{1}{2}(|p_1 + p_2| + |p_1 - p_2|),$$

позволяет получить опорную функцию полулунки $L_{1/2v}$ методом суперпозиции:

$$c(L_{1/2v}, p) = c(L, \psi) \Big|_{\psi_1=(p_1+|p_1|)/2, \psi_2=p_2}.$$

Сглаживание полулунки $L_{1/2v}$ можно выполнить с привлечением материала раздела 8.

6.3 Замечание об опорных функциях тел вращения

Рассмотрим плоское выпуклое множество M_2 с опорной функцией $c(M_2, \psi_1, \psi_2)$, симметричное относительно оси x_2 :

$$c(M_2, \psi_1, \psi_2) = c(M_2, -\psi_1, \psi_2).$$

Пусть M_3 — тело вращения, полученное из M_2 вращением вокруг оси x_2 . Опорная функция $c(M_3, p)$, $p \in \mathbb{R}^3$, тела вращения M_3 строится по формуле

$$c(M_3, p) = c(M_2, \psi_1, \psi_2) \Big|_{\substack{\psi_1 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \\ \psi_2 = p_3}}.$$

Пусть $M_2 = L$ — вертикальная лунка с опорной функцией

$$c(M_2, \psi) = \sqrt{\psi_1^2 + 3\psi_2^2 + |\psi_1^2 - \psi_2^2|} - \frac{|\psi_1 + \psi_2| + |\psi_1 - \psi_2|}{2},$$

см. рис. 1. Запишем опорную функцию тела вращения M_3 вокруг вертикальной оси, см. рис. 4,

$$\begin{aligned} c(M_3, p) &= c(M_2, \psi_1, \psi_2) \Big|_{\substack{\psi_1 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \\ \psi_2 = p_3}} = \\ &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 3p_3^2 + |p_1^2 + p_2^2 - p_3^2|} - \frac{1}{2} \left| \sqrt{p_1^2 + p_2^2} + p_3 \right| - \frac{1}{2} \left| \sqrt{p_1^2 + p_2^2} - p_3 \right|. \end{aligned}$$

Аналогично записываются опорные функции тел вращения, изображённых на рис. 5, 6.

Запишем опорную функцию тела вращения D_{12} , см. рис. 5, полученного вращением полулунки $L_{1/2}$, см. рис. 3. Имеем:

$$\begin{aligned} c(L_{1/2}, \psi) &= c(L, \psi) \Big|_{\substack{\psi_1 \rightarrow \psi_1 \\ \psi_2 \rightarrow \frac{\psi_2 + |\psi_2|}{2}}} = \\ &= \left(\sqrt{\psi_1^2 + 3\psi_2^2 + |\psi_1^2 - \psi_2^2|} - \frac{|\psi_1 + \psi_2| + |\psi_1 - \psi_2|}{2} \right) \Big|_{\substack{\psi_1 \rightarrow \psi_1 \\ \psi_2 \rightarrow \frac{\psi_2 + |\psi_2|}{2}}}. \end{aligned}$$

Выишем опорную функцию тела вращения T (“тарелка”), см. рис. 6, полученного вращением вертикальной лунки L , см. рис. 1, вокруг горизонтальной оси. Имеем:

$$c(T, p) = c(L, \psi) \Big|_{\substack{\psi_1 = p_2 \\ \psi_2 = \sqrt{p_1^2 + p_3^2}}}.$$

Для сглаживания трёхмерных тел вращения достаточно сгладить соответствующие плоские фигуры, а затем выполнить вращение.

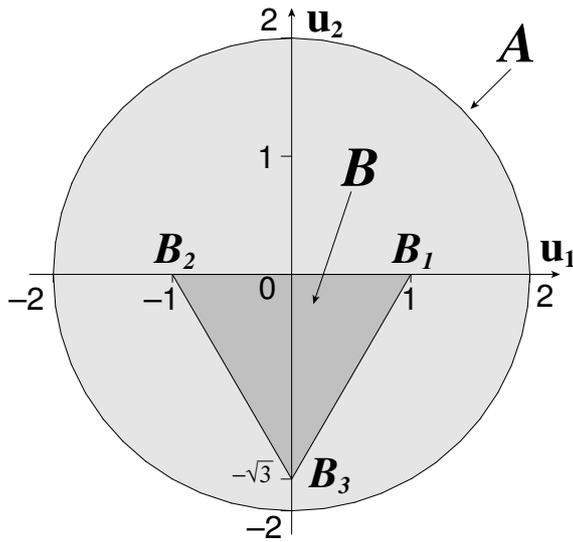


Рис. 21.

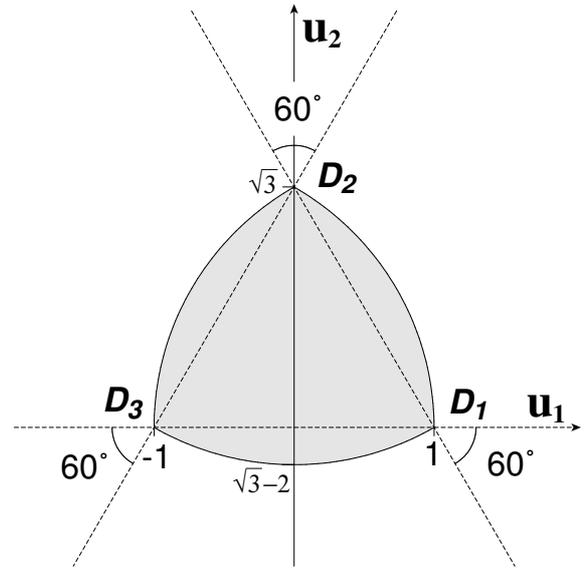


Рис. 22.

7 Геометрическая разность круга и треугольника. Сглаживание

7.1 Множество D : геометрическая разность круга и треугольника

Рассмотрим два множества A и B : *круг* радиуса 2 с центром в нуле

$$A = S_2(0)$$

и *треугольник* с вершинами B_1, B_2, B_3

$$B = \text{conv}\{B_1, B_2, B_3\}, \quad B_1 = (1, 0), B_2 = (-1, 0), B_3 = (0, -\sqrt{3}),$$

см. рис. 21, и их *геометрическую разность*

$$D = A \star B.$$

Множество D представляет собой *криволинейный треугольник* $D_1D_2D_3$, см. рис. 22, где

D_1D_2 – дуга окружности радиуса 2 с центром в точке D_3 ,

D_2D_3 – дуга окружности радиуса 2 с центром в точке D_1 ,

D_3D_1 – дуга окружности радиуса 2 с центром в точке D_2 ,

причём

$$D_1 = (1, 0), D_2 = (0, \sqrt{3}), D_3 = (-1, 0).$$

Таким образом, множество D является пересечением трёх кругов⁵ радиуса 2 с центрами в точках D_1, D_2, D_3 . Опорная функция множества D определяется следующим

⁵Интересно отметить, что множество D имеет постоянную ширину, равную 2, по любому направлению.

образом:

$$c(D, \psi) = \begin{cases} 2\|\psi\| - \psi_1, & 0 \leq \psi_2 \leq \sqrt{3}|\psi_1| & \Leftrightarrow t \in [0, \pi/3], \\ \sqrt{3}\psi_2, & \psi_2 \geq \sqrt{3}|\psi_1| & \Leftrightarrow t \in [\pi/3, 2\pi/3], \\ 2\|\psi\| + \psi_1, & 0 \leq \psi_2 \leq \sqrt{3}|\psi_1| & \Leftrightarrow t \in [2\pi/3, \pi], \\ -\psi_1, & 0 \geq \psi_2 \geq -\sqrt{3}|\psi_1| & \Leftrightarrow t \in [\pi, 4\pi/3], \\ 2\|\psi\| - \sqrt{3}\psi_2, & \psi_2 \leq -\sqrt{3}|\psi_1| & \Leftrightarrow t \in [4\pi/3, 5\pi/3], \\ \psi_1, & 0 \geq \psi_2 \geq -\sqrt{3}|\psi_1| & \Leftrightarrow t \in [5\pi/3, 2\pi]. \end{cases}$$

Здесь угловой параметр t связан с аргументом ψ соотношением

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Опорные функции круга A и треугольника B имеют вид

$$c(A, \psi) = 2\|\psi\|, \quad (30)$$

$$c(B, \psi) = \max\{|\psi_1|, -\sqrt{3}\psi_2\} = \begin{cases} \psi_1, & t \in [-\pi/6, \pi/2], \\ -\psi_1, & t \in [\pi/2, 7\pi/6], \\ -\sqrt{3}\psi_2, & t \in [7\pi/6, 11\pi/6]. \end{cases} \quad (31)$$

Функцию (31) можно представить в виде

$$c(B, \psi) = \frac{|\psi_1| - \sqrt{3}\psi_2}{2} + \left| \frac{|\psi_1| + \sqrt{3}\psi_2}{2} \right|.$$

7.2 Невыпуклость разности опорных функций круга и треугольника и её геометрическая интерпретация в терминах градиентной кривой. Ласточкины хвосты

Известно, что граница плоского гладкого выпуклого компакта с опорной функцией $H(\psi)$ допускает (на основании теоремы о градиенте опорной функции, см. [3], [4]) описание следующим векторным параметрическим уравнением

$$u = H'(\psi) \Big|_{\psi = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (32)$$

где

$$H'(\psi) = \begin{pmatrix} H'_{\psi_1}(\psi) \\ H'_{\psi_2}(\psi) \end{pmatrix}$$

— градиент опорной функции $H(\psi)$. Геометрический смысл векторного уравнения (32) поясняет рис. 15.

Разность опорных функций (30) и (31)

$$h(\psi) \equiv c(A, \psi) - c(B, \psi)$$

не является выпуклой функцией, и, следовательно, не является опорной функцией. Хорошо известно, что невыпуклость функции $h(\psi)$ можно обнаружить по невыпуклости её множества уровня

$$\mathcal{L} = \{\psi : h(\psi) \leq 1\}.$$

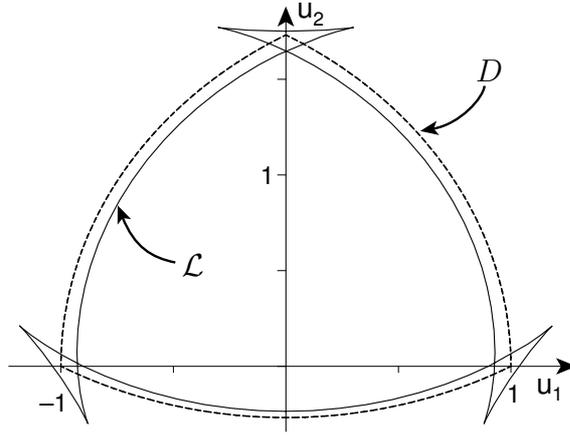


Рис. 23.

Обратим внимание на ещё один признак невыпуклости гладкой положительно однородной, измерения 1, функции, который очень нагляден, допускает простую экспериментальную проверку и играет важную роль при построении сглаженных аппроксимаций выпуклых компактов. Поясним это соображение на конкретном примере. Попытка формально применить теорему о градиенте опорной функции к сглаженной аппроксимации

$$h_\mu(\psi) = c(A, \psi) - c(B_\mu, \psi)$$

функции $h(\psi)$, где $A = S_2(0)$ — круг, B_μ — сглаженный выпуклым образом треугольник B (см. подраздел 7.1), приводит к рассмотрению кривой, определяемой векторным параметрическим уравнением

$$u = h'_\mu(\psi) \Big|_{\psi = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (33)$$

которая не является выпуклой, см. рис. 23, $\mu = 0.05$. Построенная кривая даёт приближённое представление кривой $D_1 D_2 D_3$, ограничивающей геометрическую разность D , однако, кривая (33) содержит также три петли типа *ласточкин хвост*, отходящих от точек D_1, D_2, D_3 . Это типичный эффект невыпуклости функции $h_\mu(\psi)$. Таким образом, задача сглаживания является нетривиальной, и наши дальнейшие рассуждения следует направить на устранение, в сходных ситуациях, “хвостов”, больших и малых, см. соответствующие формулировки в подразделе 7.4.

7.3 Представление множества D в форме геометрической разности двух выпуклых компактов с условием полного выметания. Опорная функция множества D как разность опорных функций

Для геометрической разности $D = A \star B$ условие полного выметания не выполняется: $D + B \neq A$. Алгебраическая сумма $D + B$ получается из круга A удалением трёх его малых сегментов, опирающихся на хорды

$$\begin{aligned} A'_2 A''_2, & \quad A'_2 = (1, \sqrt{3}), \quad A''_2 = (-1, \sqrt{3}) \in \partial A, \\ A'_1 A''_1, & \quad A'_1 = (1, -\sqrt{3}), \quad A''_1 = (2, 0) \in \partial A, \\ A'_3 A''_3, & \quad A'_3 = (-2, 0), \quad A''_3 = (-1, -\sqrt{3}) \in \partial A \end{aligned}$$

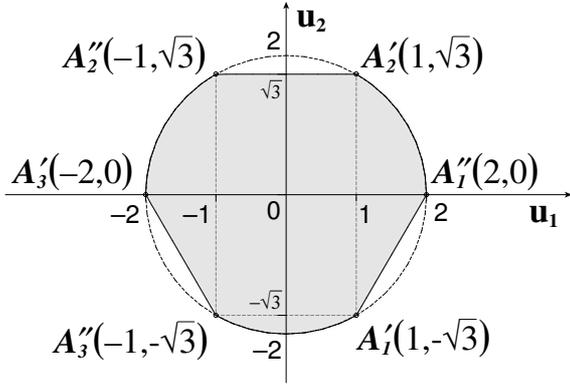


Рис. 24.

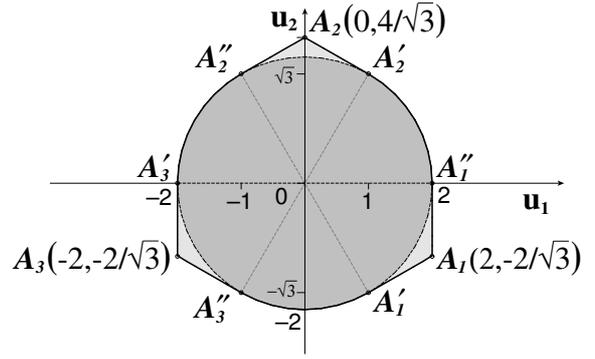


Рис. 25.

см. рис. 24.

Представим сейчас геометрическую разность

$$D = A \star B, \quad D + B \neq A,$$

без условия полного выметания, в форме геометрической разности с условием полного выметания

$$D = \hat{A} \star \hat{B}, \quad D + \hat{B} = \hat{A},$$

некоторых новых множеств \hat{A} и \hat{B} . Для описания этих новых множеств введём точки

$$A_1 = \left(2, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad A_2 = \left(0, \frac{4}{\sqrt{3}}\right), \quad A_3 = \left(-2, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \notin A$$

и положим

$$\hat{A} = \text{conv}\{A \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3\}, \quad (34)$$

см. рис. 25, а в качестве множества \hat{B} возьмём шестиугольник

$$\hat{B} = \text{conv} \bigcup_{i=1}^6 \{\hat{B}_i\}, \quad (35)$$

вершинами которого служат точки

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 &= (1, 0), \quad \hat{B}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \hat{B}_3 = (-1, 0), \\ \hat{B}_4 &= \left(-1, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \hat{B}_5 = \left(0, -\frac{3}{\sqrt{3}}\right), \quad \hat{B}_6 = \left(1, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \end{aligned}$$

см. рис. 26. Прямая проверка показывает, что для введённых множеств выполняются равенства

$$D = \hat{A} \star \hat{B}, \quad D + \hat{B} = \hat{A}.$$

Следовательно, опорная функция геометрической разности D записывается в виде разности опорных функций множеств \hat{A} и \hat{B} :

$$c(D, \psi) = c(\hat{A}, \psi) - c(\hat{B}, \psi). \quad (36)$$

Последняя формула открывает возможности для *конструктивного решения задачи сглаживания* множества D . На этом пути следует пройти определённые этапы.

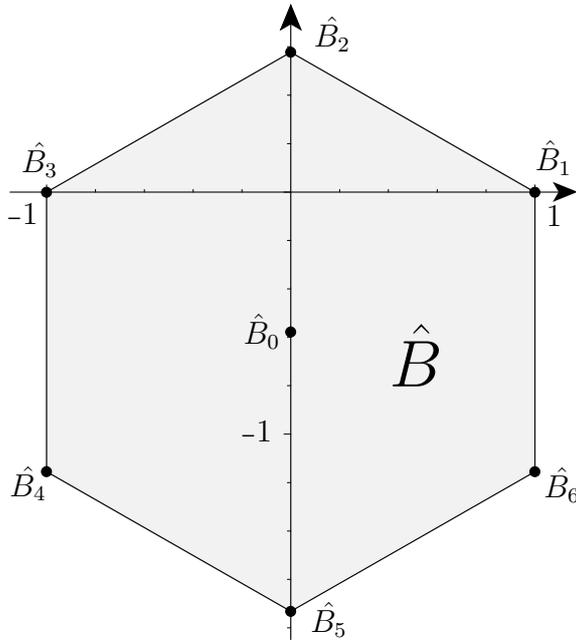


Рис. 26.

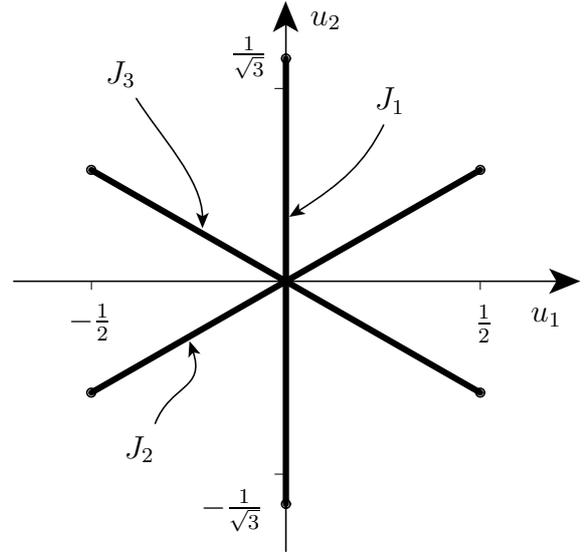


Рис. 27.

Окончательные расчётные формулы для сглаживания приводятся в следующем подразделе.

Выполним некоторые подготовительные операции. Представим множество \hat{B} в виде алгебраической суммы точки

$$B_0 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(центр треугольника B) и трех симметричных относительно нуля отрезков одинаковой длины, равной $\frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{conv} \left\{ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}, \\ J_2 &= \text{conv} \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \right\}, \\ J_3 &= \text{conv} \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \right\}, \\ \hat{B} &= B_0 + J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

см. рис. 27. Наклонные отрезки J_2, J_3 могут быть получены из вертикального отрезка J_1 поворотом на углы $\pm\pi/3$. Итак, имеем:

$$\begin{aligned} c(\hat{B}, \psi) &= c(B_0, \psi) + c(J_1, \psi) + c(J_2, \psi) + c(J_3, \psi) = \\ &= \left(-\frac{\psi_2}{\sqrt{3}} + \frac{|\psi_2|}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} \left|\psi_1 + \frac{\psi_2}{\sqrt{3}}\right| + \frac{1}{2} \left|\psi_1 - \frac{\psi_2}{\sqrt{3}}\right|. \end{aligned}$$

Опорная функция множества \hat{B} подготовлена к сглаживанию.

Сглаживание множества \hat{A} можно выполнить на основе формулы (34).

Обсудим сейчас другой способ сглаживания множества \hat{A} . Это множество можно рассматривать как выпуклую оболочку круга A и девятиугольника

$$M_9 = \operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^3 \{A'_i, A_i, A''_i\}$$

с вершинами $A'_i, A_i, A''_i, i = 1, 2, 3$:

$$\hat{A} = \operatorname{conv}\{A \cup M_9\}.$$

Многоугольник M_9 допускает разложение в алгебраическую сумму точки B_0 , трёх отрезков J_1, J_2, J_3 и треугольника $(-1) \cdot B$. Следовательно,

$$M_9 = \hat{B} + (-1) \cdot B, \quad c(M_9, \psi) = c(\hat{B}, \psi) + c(B, -\psi).$$

Опорная функция множества \hat{A} записывается в виде

$$c(\hat{A}, \psi) = \frac{c(A, \psi) + c(M_9, \psi)}{2} + \left| \frac{c(A, \psi) - c(M_9, \psi)}{2} \right|.$$

Теперь опорная функция множества \hat{A} также подготовлена к сглаживанию.

Таким образом, естественно сделать **попытку** сглаженное аппроксимирующее множество

$$D_\mu \approx D, \quad h(D, D_\mu) \rightarrow 0, \mu \rightarrow +0,$$

описывать “опорной” функцией

$$c(D_\mu, \psi) = c(\hat{A}_\mu, \psi) - c(\hat{B}_\mu, \psi), \quad (37)$$

где \hat{A}_μ, \hat{B}_μ — гладкие аппроксимации выпуклых компактов \hat{A}, \hat{B} , $\mu > 0$ — малый параметр сглаживания,

$$c(\hat{A}_\mu, \psi) = \frac{c(A, \psi) + c(M_{9,\mu}, \psi)}{2} + \sqrt{\mu \|\psi\|^2 + \left(\frac{c(A, \psi) - c(M_{9,\mu}, \psi)}{2} \right)^2},$$

$$c(\hat{B}_\mu, \psi) = c(B_0, \psi) + c(J_{1,\mu}, \psi) + c(J_{2,\mu}, \psi) + c(J_{3,\mu}, \psi),$$

$M_{9,\mu}, J_{i,\mu}, i = 1, 2, 3$ — гладкие аппроксимации множеств $M_9, J_i, i = 1, 2, 3$. Сглаживание отрезков и треугольника выполняется стандартным образом.

Замечание 3 (критика формулы (37)). Функция (37) выпукла (и является опорной функцией выпуклого компакта D) при $\mu = 0$. Для $\mu > 0$, при построении кривой (33) с привлечением функции (37), получаются невыпуклые кривые с “хвостами”, что говорит о невыпуклости функции (37) по аргументу ψ при $\mu > 0$, см. рис. 28 (мы не описываем детально применяемых формул сглаживания, заметим только, что параметр сглаживания $\mu = 0.05$). Таким образом, сглаживание множеств \hat{A} и \hat{B} должно происходить определённым согласованным образом, обеспечивающим выпуклость аппроксимирующих множеств при $\mu > 0$. Ниже описывается другой способ сглаживания множества D , основанный на подборе подходящей суперпозиции опорных функций. Обоснование выпуклости сглаженных аппроксимаций представляет отдельную проблему, требующую специального обсуждения, см. раздел 8.

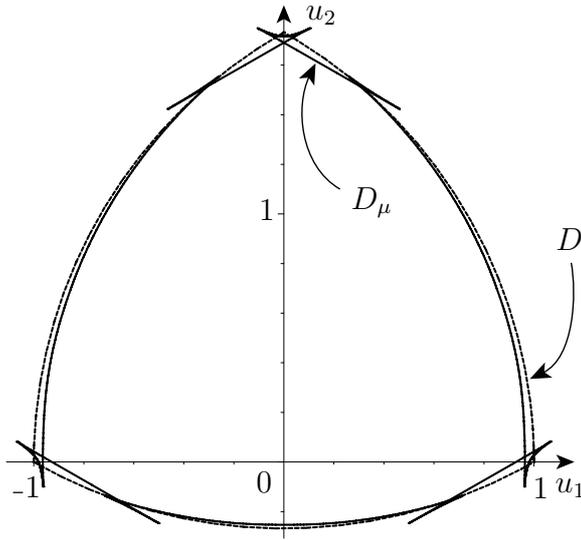


Рис. 28.

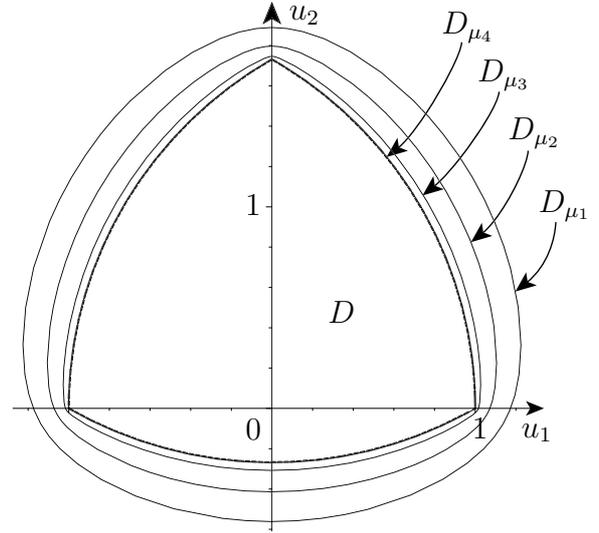


Рис. 29.

7.4 Представление опорной функции множества D в форме суперпозиции опорных функций. Сглаживание множества D

Геометрическая разность круга и треугольника записана выше в виде геометрической разности с условием полного выметания

$$D = \hat{A} \ast \hat{B}, \quad D + \hat{B} = \hat{A}, \quad (38)$$

при этом

$$c(D, \psi) = c(\hat{A}, \psi) - c(\hat{B}, \psi). \quad (39)$$

Запишем опорные функции множеств \hat{A} и \hat{B} в некотором специальном виде, удобном для сглаживания геометрической разности.

Начнём с множества \hat{A} . Рассмотрим три выходящих из нуля отрезка одинаковой длины, равной $\frac{4}{\sqrt{3}}$:

$$[0, A_1], [0, A_2], [0, A_3], \quad A_1 = \left(2, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad A_2 = \left(0, \frac{4}{\sqrt{3}}\right), \quad A_3 = \left(-2, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Каждый из этих отрезков образует с двумя другими угол $2\pi/3$. Напомним, что точки A_1, A_2, A_3 привлекались выше. Для опорных функций этих отрезков введём обозначения:

$$s_1(\psi) \equiv c([0, A_1], \psi) = \left(\psi_1 - \frac{\psi_2}{\sqrt{3}}\right) + \left|\psi_1 - \frac{\psi_2}{\sqrt{3}}\right|, \quad (40)$$

$$s_2(\psi) \equiv c([0, A_2], \psi) = \frac{2\psi_2}{\sqrt{3}} + \frac{2|\psi_2|}{\sqrt{3}}, \quad (41)$$

$$s_3(\psi) \equiv c([0, A_3], \psi) = \left(-\psi_1 - \frac{\psi_2}{\sqrt{3}}\right) + \left|-\psi_1 - \frac{\psi_2}{\sqrt{3}}\right|. \quad (42)$$

Рассмотрим следующую функцию трёх переменных

$$\sigma_{\hat{A}}(p) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1}. \quad (43)$$

Привлекая функции (40)-(43), определим новую функцию $H_{\hat{A}}(\psi)$, полагая

$$H_{\hat{A}}(\psi) = \sigma_{\hat{A}}(p) \Big|_{\substack{p_1=s_1(\psi) \\ p_2=s_2(\psi) \\ p_3=s_3(\psi)}} . \quad (44)$$

Имеет место

Утверждение 2. *Функция (44) совпадает с опорной функцией множества \hat{A} :*

$$H_{\hat{A}}(\psi) = c(\hat{A}, \psi). \quad (45)$$

Равенство (45) проверяется непосредственно.

Займёмся теперь множеством \hat{B} . Это множество выше было представлено в виде алгебраической суммы точки B_0 и центрально-симметричного шестиугольника $J\hat{B} \equiv J_1 + J_2 + J_3$ (алгебраической суммы трёх отрезков):

$$\hat{B} = B_0 + J\hat{B}.$$

Введем ещё одну функцию трёх переменных

$$\sigma_{J\hat{B}}(p) \equiv |p_1 + p_2 + p_3| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2p_1p_2 + 2p_2p_3 + 2p_3p_1}. \quad (46)$$

Замечание 4. Функции (43) и (46) являются опорными функциями эллипсоида и отрезка в \mathbb{R}^3 , соответственно.

С помощью функций (46) и (40)-(42) составим их специальную суперпозицию

$$H_{J\hat{B}}(\psi) = \sigma_{J\hat{B}}(p) \Big|_{\substack{p_1=\frac{1}{2}s_1(\psi) \\ p_2=\frac{1}{2}s_2(\psi) \\ p_3=\frac{1}{2}s_3(\psi)}} . \quad (47)$$

Положим

$$H_{\hat{B}}(\psi) = c(B_0, \psi) + H_{J\hat{B}}(\psi). \quad (48)$$

Имеет место

Утверждение 3. *Функция (48) совпадает с опорной функцией множества \hat{B} :*

$$H_{\hat{B}}(\psi) = c(\hat{B}, \psi). \quad (49)$$

Равенство (49) проверяется непосредственно.

Таким образом, опорная функция множества D представлена, в силу (39), (45), (49), в виде

$$c(D, \psi) = H_{\hat{A}}(\psi) - H_{\hat{B}}(\psi). \quad (50)$$

Формула (50) приводит к окончательным расчётным формулам сглаживания множества D .

Таким образом, сглаженное выпуклое аппроксимирующее множество

$$D_\mu \approx D, \quad h(D, D_\mu) \rightarrow 0, \mu \rightarrow +0,$$

описывается опорной функцией

$$c(D_\mu, \psi) = H_{\hat{A}_\mu}(\psi) - H_{\hat{B}_\mu}(\psi), \quad (51)$$

где \hat{A}_μ, \hat{B}_μ — специальные гладкие выпуклые аппроксимации выпуклых компактов \hat{A}, \hat{B} , а $\mu > 0$ — малый параметр сглаживания, причём

$$c(\hat{A}_\mu, \psi) = H_{\hat{A}_\mu}(\psi) \equiv \sigma_{\hat{A}}(p) \Big|_{\substack{p_1=s_{1,\mu}(\psi) \\ p_2=s_{2,\mu}(\psi) \\ p_3=s_{3,\mu}(\psi)}} , \quad (52)$$

$$c(\hat{B}_\mu, \psi) = H_{\hat{B}_\mu}(\psi) \equiv c(B_0, \psi) + \sigma_{J\hat{B}}(p) \Big|_{\substack{p_1=\frac{1}{2}s_{1,\mu}(\psi) \\ p_2=\frac{1}{2}s_{2,\mu}(\psi) \\ p_3=\frac{1}{2}s_{3,\mu}(\psi)}} . \quad (53)$$

Сглаживание отрезков $[0, A_1], [0, A_2], [0, A_3]$ и построение опорных функций $s_{j,\mu}(\psi)$, $j = 1, 2, 3$, (участвующих в формулах (52), (53)) этих сглаженных отрезков выполняется стандартным образом.

Экспериментальный материал показан на рис. 29, где изображены выпуклые сглаженные множества для параметров сглаживания

$$\mu_1 = 0.75, \quad \mu_2 = 0.50, \quad \mu_3 = 0.25, \quad \mu_4 = 0.05.$$

Сглаживающие кривые на рис. 29 не содержат “хвостов”, в отличие от рис. 28.

8 Исследование свойств выпуклости суперпозиций опорных функций гладких выпуклых компактов

Предыдущий материал статьи служит естественной мотивацией для постановки задачи, рассмотренной в данном разделе. Для нас эта задача интересна с позиций сглаживания. В принципиальном плане представленная здесь схема даёт конструктивные способы построения по некоторому заданному набору выпуклых компактов нового выпуклого компакта на основе привлечения суперпозиции опорных функций.

8.1 Постановка задачи. Общая схема. Результат

Рассмотрим гладкий выпуклый компакт $M \subset \mathbb{R}^m$ с опорной функцией $c(\cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$:

$$c(\psi), \quad \psi \in \mathbb{R}^m.$$

Кроме того, рассматриваются m гладких выпуклых компактов $M_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, с опорными функциями $s_i(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$:

$$s_i(p), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Введём в рассмотрение сложную функцию

$$H(p) = c(\psi)|_{\psi=s(p)} \equiv c(s_1(p), \dots, s_m(p)),$$

где

$$s(p) = \begin{pmatrix} s_1(p) \\ \dots \\ s_m(p) \end{pmatrix}$$

есть m -мерная векторная функция от n -мерного аргумента p . Числа m и n могут быть различными.

Представляет интерес следующий вопрос: **является ли функция $H(p)$ опорной функцией** некоторого выпуклого компакта в пространстве \mathbb{R}^n ? Ответ на этот вопрос может быть как положительным, так и отрицательным. Соответствующие примеры можно предъявить. Положительный ответ на поставленный вопрос определяется свойством выпуклости функции $H(p)$. В свою очередь, выпуклость функции $H(p)$ характеризуется свойством неотрицательной определённости её гессиана:

$$H''(p) \geq 0, p \neq 0 \Leftrightarrow q^* H''(p) q \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

Далее считаются выполненными следующие предположения.

Предположение А0. $0 \in \text{int } M_i, i = 1, \dots, m$.

Предположение А1. $c'_{\psi_i}(s(p)) \geq 0, i = 1, \dots, m; p \neq 0$.

Сформулированное в геометрических терминах предположение **А0** равносильно аналитическому условию

$$s_i(p) > 0 \quad \forall p \neq 0, i = 1, \dots, m.$$

Теорема 1. Гессиан $H''(p)$ сложной функции $H(p)$ при $p \neq 0$ допускает представление

$$H''(p) = \left[s'^*(p) \quad c''(\psi) \quad s'(p) + \sum_{i=1}^m c'_{\psi_i}(\psi) s''_i(p) \right] \Big|_{\psi=s(p)},$$

где $(m \times n)$ -матрица

$$s'(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1(p)}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial s_1(p)}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial s_m(p)}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial s_m(p)}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

— функциональная матрица m -мерной векторной функции $s(p)$,

$(n \times n)$ -матрица $s''_i(p)$ — гессиан опорной функции $s_i(p), i = 1, \dots, m$,

$c'_{\psi_i}(\psi)$ — частная производная опорной функции $c(\psi)$ по аргументу $\psi_i, i = 1, \dots, m$,

$(n \times n)$ -матрица $H''(p)$ — гессиан функции $H(p)$.

Известно, что гессианы $c''(\psi), s''_i(p)$ опорных функций являются неотрицательно определёнными матрицами.

Квадратичная форма с матрицей $H''(p)$ на основании теоремы 1 может быть записана в форме

$$q^* H''(p) q = q^* s'(p)^* c''(s(p)) s'(p) q + \sum_{i=1}^m c'_{\psi_i}(s(p)) q^* s''_i(p) q, \quad q \in \mathbb{R}^n.$$

Её первое слагаемое неотрицательно, так как оно имеет вид

$$z^* c''(s(p)) z, \quad z \equiv s'(p) q \in \mathbb{R}^m.$$

Второе слагаемое (сумма) также неотрицательно, так как неотрицательно каждое слагаемое суммы в силу предположений **А0, А1**. Поэтому справедлива

Теорема 2. В предположениях **А0, А1** функция $H(p)$ является опорной функцией некоторого выпуклого компакта в \mathbb{R}^n .

Замечание 5. Теорема 2 содержит достаточные условия для того, чтобы функция $H(p)$ была опорной функцией. В теореме 2 можно отказаться от требования гладкости опорных функций. Это следует из возможности аппроксимации любого выпуклого компакта гладким выпуклым компактом.

8.2 Частный случай. Независимый анализ

Рассмотрим частный случай

$$m = n = 2, \quad c(\psi) = \|\psi\| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}, \quad M = S_1(0),$$

$$s(p) = \begin{pmatrix} s_1(p) \\ s_2(p) \end{pmatrix}, \quad 0 \in \text{int } M_i, \quad i = 1, 2.$$

При этом

$$H(p) = \sqrt{[s_1(p)]^2 + [s_2(p)]^2} = \|s(p)\| > 0, \quad p \neq 0.$$

Приведём другое доказательство утверждения теоремы 2 для рассматриваемого частного случая. Непосредственный подсчёт даёт:

$$H^2(p) = [s_1(p)]^2 + [s_2(p)]^2,$$

$$HH' = s_1 s_1' + s_2 s_2', \quad H' = \frac{s_1 s_1' + s_2 s_2'}{H},$$

$$HH'' + H'H'^* = [s_1 s_1'' + s_2 s_2''] + [s_1' s_1'^* + s_2' s_2'^*],$$

откуда находим

$$HH'' = [s_1 s_1'' + s_2 s_2''] + G,$$

где первая группа слагаемых $[s_1 s_1'' + s_2 s_2''] \geq 0$, а матрица G имеет вид

$$G = s_1' s_1'^* + s_2' s_2'^* - H'H'^*,$$

или, в развёрнутом виде,

$$G = s_1' s_1'^* + s_2' s_2'^* - \frac{[s_1 s_1'' + s_2 s_2'']}{H} \cdot \frac{[s_1 s_1'^* + s_2 s_2'^*]^*}{H}.$$

Покажем, что матрица G является неотрицательно определённой. Составим квадратичную форму с этой матрицей и преобразуем её к нужному виду. Имеем:

$$q^* G q = (q, s_1')^2 + (q, s_2')^2 - \frac{[s_1(q, s_1') + s_2(q, s_2')]^2}{s_1^2 + s_2^2} =$$

$$= \frac{[s_2(q, s_1') - s_1(q, s_2')]^2}{\|s\|^2} \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, в данном частном случае результат теоремы 2 установлен другими рассуждениями с привлечением минимальных средств.

9 УПВ-форма геометрической разности. Примеры. Проблема нахождения УПВ-формы геометрической разности

Напомним, что геометрическая разность $D = A \star B$ двух выпуклых множеств A и B определяется соотношением

$$D = \{c \in \mathbb{R}^n : c + B \subset A\}. \quad (54)$$

Будем предполагать, что $D \neq \emptyset$. Ясно, что всегда

$$D + B \subset A. \quad (55)$$

Если

$$D + B = A, \quad (56)$$

то говорят, что выполняется *условие полного выметания* (УПВ). На рассмотренных примерах мы видели, что условие (56) часто не выполняется.

Определение 2. *Представление геометрической разности D , см. (54), в виде*

$$D = \hat{A} \star \hat{B}, \quad D + \hat{B} = \hat{A}, \quad (57)$$

с условием полного выметания будем называть **УПВ-формой** геометрической разности D .

Замечание 6. Тривиальную УПВ-форму геометрической разности

$$D = \hat{A} \star \hat{B}, \quad \hat{A} = D, \hat{B} = \{0\},$$

далее рассматривать не будем.

Выше для некоторых примеров была решена задача построения УПВ-формы геометрической разности. Важность УПВ-формы (57) геометрической разности объясняется тем, что опорная функция геометрической разности D является разностью опорных функций множеств \hat{A} и \hat{B} :

$$c(D, \psi) = c(\hat{A}, \psi) - c(\hat{B}, \psi). \quad (58)$$

Описание опорной функции множества D в форме (58) (для множеств, зависящих от времени) представляет интерес с точки зрения алгоритмов решения дифференциальных игр, см. книгу [2].

В заключение приведём обзор рассмотренных в статье примеров с краткими комментариями.

Пример 1 (*геометрическая разность круга и отрезка, см. рис. 1*). При

$$A = S_{\sqrt{2}}(0), \quad B = \{|u_1| \leq 1, u_2 = 0\}$$

геометрическая разность $D = A \star B$ является лункой $L = S_{\sqrt{2}}(-1, 0) \cap S_{\sqrt{2}}(1, 0)$, см. рис. 1. Условие полного выметания не выполняется, см. рис. 8, где множество $D + B$, отмеченное заливкой, не совпадает с кругом A . Построенная УПВ-форма геометрической разности

$$D = \hat{A} \star \hat{B} \quad (59)$$

определяется выпуклыми множествами $\hat{A} = U_1$, $\hat{B} = U_2$, см. рис. 9, 10. Опорная функция геометрической разности D описывается формулой (12).

Обсудим вопрос о единственности УПВ-формы геометрической разности D . Покажем, что свойство единственности не имеет места. Действительно, рассмотрим, наряду с вертикальной лункой L , горизонтальную лунку

$$L^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot L,$$

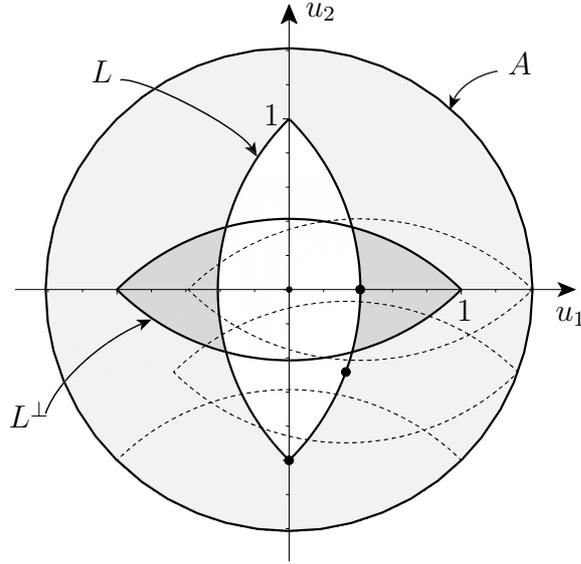


Рис. 30.

полученную из лунки L поворотом на угол $\pi/2$. При этом опорные функции этих двух лунок имеют вид

$$c(L, \psi) = \sqrt{\psi_1^2 + 3\psi_2^2 + |\psi_1^2 - \psi_2^2|} - \frac{|\psi_1 + \psi_2| + |\psi_1 - \psi_2|}{2},$$

$$c(L^\perp, \psi) = \sqrt{3\psi_1^2 + \psi_2^2 + |\psi_1^2 - \psi_2^2|} - \frac{|\psi_1 + \psi_2| + |\psi_1 - \psi_2|}{2}.$$

Можно показать, что

$$c(L, \psi) + c(L^\perp, \psi) = \sqrt{2} \|\psi\|,$$

откуда следует, что

$$L + L^\perp = A \equiv S_{\sqrt{2}}(0). \quad (60)$$

Геометрическая разность D , записанная в виде

$$D \equiv L = A \overset{*}{\ast} L^\perp, \quad (61)$$

допускает другую УПВ-форму (61), где $\hat{A} = A$, $\hat{B} = L^\perp$, и условие полного выметания (60) выполняется: $D + \hat{B} = A$. Таким образом, наряду с УПВ-формой (59) геометрической разности указана другая УПВ-форма (61), в которой первое множество A оставлено без изменения, причём

$$c(D, \psi) = \sqrt{2} \|\psi\| - c(L^\perp, \psi).$$

Геометрическая интерпретация условия полного выметания (60) представлено на рис. 30: при скольжении центра горизонтальной лунки по границе вертикальной лунки замечается весь круг A .

Пример 2 (геометрическая разность круга и треугольника, см. раздел 7). При

$$A = S_2(0), \quad B = \text{conv}\{B_1, B_2, B_3\},$$

см. рис. 21, геометрическая разность $D = A \overset{*}{\ast} B$ представляет собой криволинейный треугольник $D_1D_2D_3$, ограниченный тремя дугами окружностей, см. рис. 22. Условие полного выметания не выполняется: $D + B \neq A$, см. рис. 24. В построенной

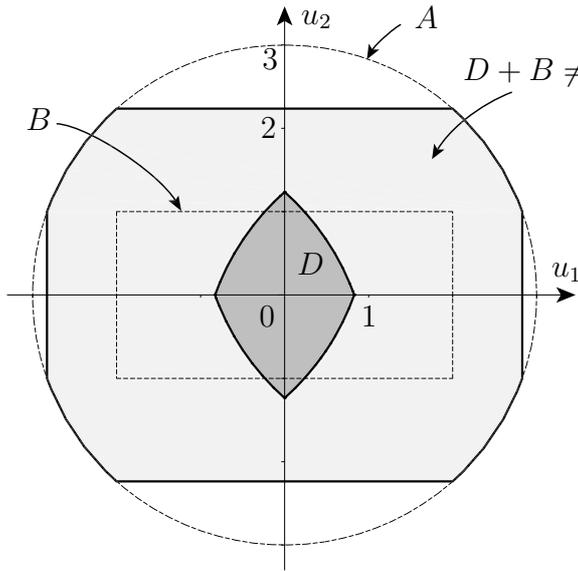


Рис. 31.

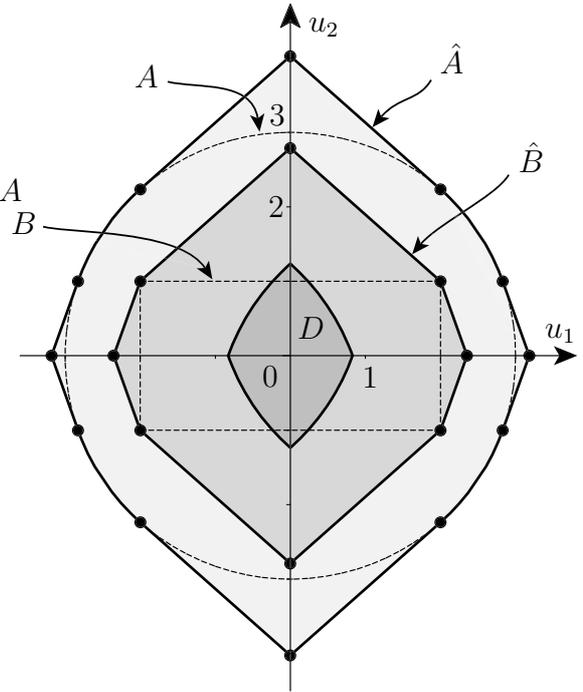


Рис. 32.

УПВ-форме геометрической разности $D = \hat{A} \star \hat{B}$ новые множества \hat{A} и \hat{B} определяются формулами (34) и (35). Опорная функция множества D представлена в форме разности опорных функций множеств \hat{A} и \hat{B} , см. формулу (36)).

Пример 3 (геометрическая разность круга и прямоугольника, см. раздел 5). При

$$A = S_R(0), \quad B = \Pi \equiv \{|u_i| \leq h_i, \quad i = 1, 2, \quad 0 < h_1^2 + h_2^2 < R^2\},$$

геометрическая разность $D = A \star B$ является криволинейным четырёхугольником, ограниченным дугами окружностей, см. рис. 17, 18. Условие полного выметания не выполняется: $D + B \neq A$, см. рис. 31, где множество $D + B$, отмеченное светлой заливкой, получается из круга A отсечением четырёх сегментов. В силу формул (23) для опорной функции геометрической разности

$$\begin{aligned} c(D, \psi) &= R\sqrt{[c_1(\psi)]^2 + [c_2(\psi)]^2} - [h_1c_1(\psi) + h_2c_2(\psi)] \equiv \\ &\equiv c(\hat{A}, \psi) - c(\hat{B}, \psi), \end{aligned}$$

с функциями $c_1(\psi)$, $c_2(\psi)$, определёнными на стр. 18: $c_i(\psi) = c(Q_i, \psi)$, $i = 1, 2$, Q_1, Q_2 — ромбы, показанные на рис. 20, можно утверждать, что имеет место УПВ-форма

$$D = \hat{A} \star \hat{B} \tag{62}$$

геометрической разности D . Вид выпуклых множеств \hat{A} и \hat{B} в (62) показан на рис. 32 при наборе параметров $R = 3$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$. Множество \hat{A} ограничено 8 отрезками и 4 дугами окружности ∂D ; множество \hat{B} является выпуклым восьмиугольником.

10 Метод поляр для геометрической разности

10.1 Формулировка общей схемы

Пусть множества A и B — выпуклые компакты, а множество $D = A \star B$ — их геометрическая разность, $0 \in \text{int } D$.

Предполагая, что множества A и B заданы своими опорными функциями $c(A, \psi)$ и $c(B, \psi)$, изучим задачу нахождения множества D . При этом будем рассматривать две отдельные, хотя и тесно связанные между собой, задачи:

- а) найти опорную функцию $c(D, \psi)$ множества D ;
- б) найти дистанционную функцию $d(D, x)$ множества D .

Опишем метод поляр для решения поставленной задачи, который состоит из следующих четырёх шагов.

1 шаг (составление разности опорных функций множеств A и B , построение “квазиполяры” \mathcal{L}). Рассмотрим разность опорных функций множеств A и B :

$$H(\psi) = c(A, \psi) - c(B, \psi). \quad (63)$$

Если функция $H(\psi)$ выпукла, то она служит опорной функцией множества D и её множество уровня

$$\mathcal{L} = \{\psi : H(\psi) \leq 1\} \quad (64)$$

является выпуклым компактом, который называется *полярной* множества D . В этом простом случае, когда функция (63) выпукла, поставленную задачу можно считать решённой, причём опорная функция множества D определяется равенством

$$c(D, \psi) = H(\psi),$$

а дистанционная функция множества D может быть найдена как опорная функция поляры \mathcal{L} , т.е.

$$d(D, x) = c(\mathcal{L}, x).$$

Если же функция (63) не является выпуклой, то она не является опорной функцией, и множество \mathcal{L} невыпукло; в этом случае будем называть его *квазиполярной*. Заметим, что при сделанных предположениях всегда $0 \in \text{int } \mathcal{L}$, а дистанционные функции рассматриваются относительно нулевой точки.

2 шаг (овыпукление квазиполяры). Построим множество

$$\check{\mathcal{L}} = \text{conv } \mathcal{L} \quad (65)$$

— выпуклую оболочку множества \mathcal{L} (полярю множества D).

3 шаг (нахождение дистанционной и опорной функций множества $\check{\mathcal{L}}$). Для решения варианта а) рассматриваемой задачи находим дистанционную функцию $d(\check{\mathcal{L}}, \psi)$ множества $\check{\mathcal{L}}$, полагая

$$d(\check{\mathcal{L}}, \psi) = \frac{\|\psi\|}{r\left(\frac{\psi}{\|\psi\|}\right)}, \quad (66)$$

где $r\left(\frac{\psi}{\|\psi\|}\right) > 0$ — положительно однородная функция измерения 0, определяющая расстояние от 0 до границы множества $\check{\mathcal{L}}$ в направлении луча $l(\psi) = \left\{ \lambda \cdot \frac{\psi}{\|\psi\|}, \lambda > 0 \right\}$,

$\psi \neq 0$. Для решения рассматриваемой задачи в варианте б) находим опорную функцию

$$c(\check{\mathcal{L}}, x) = c(\mathcal{L}, x) \quad (67)$$

множества $\check{\mathcal{L}}$.

4 шаг (формулировка окончательного результата).

а) Опорная функция геометрической разности D совпадает с дистанционной функцией (53) множества $\check{\mathcal{L}}$ (овыпукленной квазиполяры):

$$c(D, \psi) = d(\check{\mathcal{L}}, \psi); \quad (68)$$

б) дистанционная функция геометрической разности D совпадает с опорной функцией (67) квазиполяры:

$$d(D, x) = c(\check{\mathcal{L}}, x) = c(\mathcal{L}, x). \quad (69)$$

Замечание 7. Методы восстановления множества D по его опорной функции хорошо известны.

Замечание 8 (о построении множества D по его дистанционной функции). Множество D описывается с помощью своей дистанционной функции соотношением

$$D = \{x : d(D, x) \leq 1\}.$$

Граница множества D , в терминах его дистанционной функции $d(D, x)$, допускает следующее описание:

$$\partial D = \bigcup_{\|x\|=1} \left\{ \frac{x}{d(D, x)} \right\}.$$

В плоском случае эта граница описывается векторным параметрическим уравнением

$$u = \frac{x}{d(D, x)} \Big|_{x = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

или, в подробной записи, параметрическими уравнениями

$$u_1 = \frac{x_1}{d(D, x_1, x_2)} \Big|_{\substack{x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t)}}, \quad u_2 = \frac{x_2}{d(D, x_1, x_2)} \Big|_{\substack{x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t)}}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Замечание 9. При решении задачи в варианте б) второй шаг описанной выше схемы можно опустить, так как опорные функции множества и его выпуклой оболочки совпадают.

Замечание 10. Описанная общая схема позволяет решать конкретные примеры, а для специальных классов множеств она может быть доведена до вычислительных алгоритмов и компьютерных программ.

10.2 Пример применения общей схемы для построения геометрической разности круга и отрезка

Поясним порядок применения изложенной выше общей схемы для примера, в котором множество $A = S_{\sqrt{2}}(0)$ — круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в нуле, $B = \{|u_1| \leq$

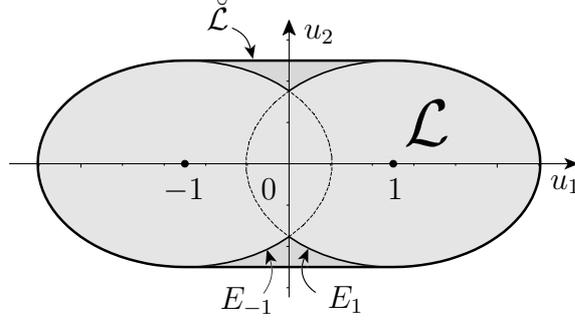


Рис. 33.

$1, u_2 = 0\}$ — горизонтальный отрезок, а их геометрическая разность $D = L \equiv S_{\sqrt{2}}(-1, 0) \cap S_{\sqrt{2}}(1, 0)$ — лунка (пересечение двух кругов). Имеем:

$$c(A, \psi) = \sqrt{2}\|\psi\|, \quad c(B, \psi) = |\psi_1|.$$

1 шаг Составляем функцию (63):

$$H(\psi) = \sqrt{2}\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - |\psi_1|.$$

Эта функция невыпукла, см. рис. 12, и квазиполяра (64)

$$\mathcal{L} = \{\psi = (\psi_1, \psi_2) : \sqrt{2}\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - |\psi_1| \leq 1\}$$

представляет собой невыпуклое множество, см. рис. 33, где множество \mathcal{L} отмечено светлой заливкой. Это множество является объединением двух выпуклых фигур, ограниченных эллипсами

$$\frac{(\psi_1 \pm 1)^2}{2} + \psi_2^2 = 1.$$

Действительно, при $\psi_1 \geq 0$ неравенство $\sqrt{2}\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - |\psi_1| \leq 1$ равносильно следующим

$$\psi_1 \geq 0, \quad \frac{(\psi_1 - 1)^2}{2} + \psi_2^2 \leq 1, \quad (70)$$

которые описывают правый усечённый “полуэллипс”, см. рис. 33. Аналогично, при $\psi_1 \leq 0$ неравенство $\sqrt{2}\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - |\psi_1| \leq 1$ равносильно следующим

$$\psi_1 \leq 0, \quad \frac{(\psi_1 + 1)^2}{2} + \psi_2^2 \leq 1, \quad (71)$$

которые описывают левый усечённый “полуэллипс”, см. рис. 33. Множество \mathcal{L} (квазиполяра) является объединением усечённых эллипсов (70) и (71).

2 шаг Овыпукление квазиполяры \mathcal{L} позволяет построить множество $\check{\mathcal{L}} = \text{conv } \mathcal{L}$, см. рис. 33, которое является объединением квадрата

$$K = \{|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}$$

и двух “полуэллипсов” E_1, E_{-1} со сдвинутыми от нуля центрами $(\pm 1, 0)$:

$$E_1 = \{\psi_1 \geq 1, \frac{(\psi_1 - 1)^2}{2} + \psi_2^2 \leq 1\}, \quad E_{-1} = \{\psi_1 \leq -1, \frac{(\psi_1 + 1)^2}{2} + \psi_2^2 \leq 1\}.$$

3 шаг Выполнив вычисление дистанционной функции (66) множества $\check{\mathcal{L}}$, получаем

$$d(\check{\mathcal{L}}, \psi) = \begin{cases} \sqrt{2}\|\psi\| - |\psi_1|, & |\psi_2| \leq |\psi_1|, \\ |\psi_2|, & |\psi_2| \geq |\psi_1|. \end{cases} \quad (72)$$

Для получения формулы (72) следует рассмотреть четыре угловых области I, II, III, IV (см. рис. 2) изменения для аргумента ψ и в каждой из них вычислить расстояние от нуля до границы множества $\check{\mathcal{L}}$, а затем применить формулу (66). Представив множество $\check{\mathcal{L}}$ в виде алгебраической суммы горизонтального отрезка

$$I_1 = \{|\psi_1| \leq 1, \psi_2 = 0\}$$

и “эллипса”

$$E_0 = \left\{ \psi : \frac{\psi_1^2}{2} + \psi_2^2 \leq 1 \right\},$$

находим опорную функцию (67) множества $\check{\mathcal{L}}$:

$$c(\check{\mathcal{L}}, x) = c(I_1 + E_0, x) = c(I_1, x) + c(E_0, x) = |x_1| + \sqrt{2x_1^2 + x_2^2}. \quad (73)$$

4 шаг Формулируем окончательный вывод: *опорная функция $c(D, \psi)$ геометрической разности $D = L$ совпадает с функцией (72); дистанционная функция $d(D, x)$ этого же множества совпадает с функцией (73).*

Таким образом, дистанционная функция множества D найдена в форме

$$d(D, x) = |x_1| + \sqrt{2x_1^2 + x_2^2},$$

параметрические уравнения границы множества D , которое совпадает с лункой L , на основе найденной дистанционной функции принимают вид (см. подраздел 2.3):

$$u_1 = \frac{\cos t}{|\cos t| + \sqrt{1 + \cos^2 t}}, \quad u_2 = \frac{\sin t}{|\cos t| + \sqrt{1 + \cos^2 t}}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Замечание 11. На рис. 12 изображена невыпуклая поверхность $z = H(\psi)$, см. **шаг 1.** Построенная на **шаге 3** функция (72) является опорной функцией $c(L, \psi)$ лунки L . На рис. 34 построена выпуклая поверхность $z = c(L, \psi)$. Опорная функция $c(L, \psi)$ лунки L может быть получена из функции $H(\psi)$ операцией овыпукления (надграфик функции $c(L, \psi)$ получается овыпуклением надграфика функции $H(\psi)$). На рис. 35 изображены обе эти поверхности. В областях I и III, см. рис. 2, эти поверхности совпадают.

11 Алгоритм вычисления геометрической разности круга и многоугольника на основе дистанционной функции

11.1 Постановка задачи. Формулировка алгоритма

Пусть

$$D = A \star B \quad (74)$$

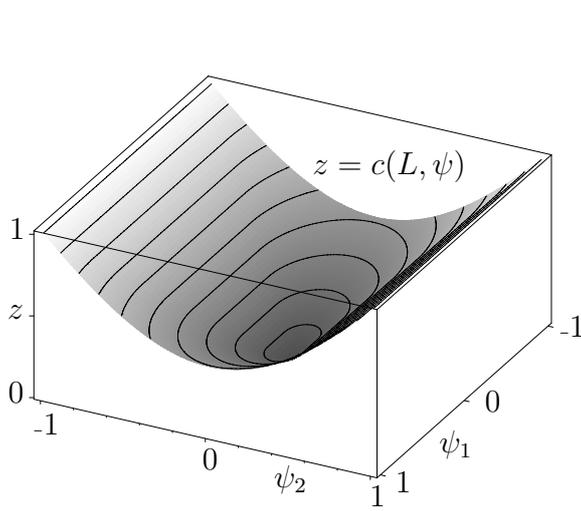


Рис. 34.

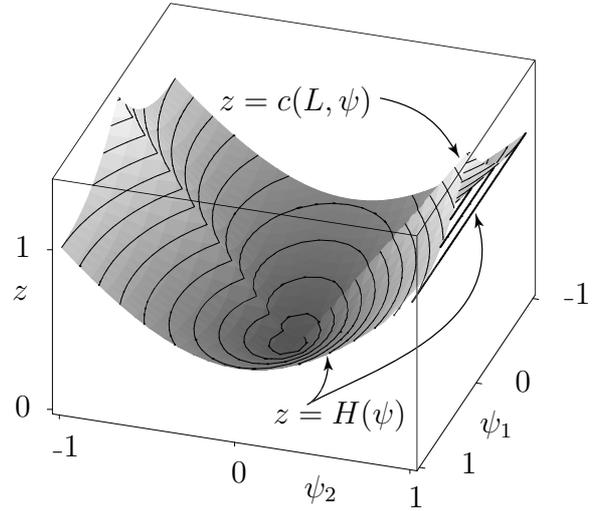


Рис. 35.

— геометрическая разность круга $A = S_R(0)$ радиуса $R > 0$ и выпуклого многоугольника

$$B = \text{conv}\{B_1, \dots, B_N\}. \quad (75)$$

Предполагается, что точки $B_1, \dots, B_N \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяют условию $\|B_\nu\| < R$. Опишем алгоритм вычисления множества (74), который основан на применении дистанционной функции $d(D, x)$ множества D . Граница ∂D множества D описывается векторным параметрическим уравнением

$$u = \frac{x}{d(D, x)} \Big|_{x=q(t)}, \quad q(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (76)$$

Для вычисления дистанционной функции множества

$$D = S_R(0) \stackrel{*}{-} \text{conv}\{B_1, \dots, B_N\}$$

представим его в виде

$$D = \bigcap_{\nu=1}^N D_\nu, \quad D_\nu = S_R(0) - B_\nu = S_R(-B_\nu). \quad (77)$$

Множество (77) записано в виде пересечения конечного числа кругов $S_R(-B_\nu)$ со сдвинутыми центрами. Дистанционная функция множества (77) определяется формулой

$$d(D, x) = d\left(\bigcap_{\nu=1}^N D_\nu, x\right) = \max_{\nu=1, \dots, N} d(D_\nu, x), \quad (78)$$

где дистанционная функция $d(D_\nu, x)$ круга D_ν вычисляется в явном виде:

$$d(D_\nu, x) = \frac{(B_\nu, x) + \sqrt{(B_\nu, x)^2 + [R^2 - \|B_\nu\|^2]\|x\|^2}}{R^2 - \|B_\nu\|^2}, \quad \nu = 1, \dots, N. \quad (79)$$

Вывод формулы (79) содержится в следующем подразделе.

Таким образом, **алгоритм построения множества D** основан на формулах (76), (78), (79). Граница ∂D геометрической разности D определяется векторным параметрическим уравнением (76), в котором дистанционная функция определена формулами (78) и (79). На основе этого алгоритма разработана программа, позволяющая вычислять геометрическую разность (74) в среде Maple.

11.2 Вычисление дистанционной функции круга со сдвинутым центром

Рассмотрим круг $S_R(-b)$ радиуса $R > 0$ с центром в точке $-b$, $\|b\| < R$, расположенной строго внутри этого круга. Дистанционная функция множества $S_R(-b)$ определяется формулой

$$d(S_R(0), x) = \frac{\|x\|}{r(x)}, \quad (80)$$

где $r(x)$ есть расстояние от 0 до границы круга $S_R(-b)$ в направлении луча $l(x) = \left\{ \lambda \cdot \frac{x}{\|x\|}, \lambda > 0 \right\}$, выходящего из точки 0 и проходящего через точку $x \neq 0$. Для вычисления этого расстояния можно найти искомое расстояние r из условия

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = r \frac{x}{\|x\|} \in \partial S_R(0). \quad (81)$$

Граница круга $S_R(-b)$ определяется уравнением

$$(u_1 + b_1)^2 + (u_2 + b_2)^2 = R^2, \quad (82)$$

где b_1, b_2 — координаты точки b . В силу (81) подстановка

$$u_1 = r \frac{x}{\|x\|}, \quad u_2 = r \frac{x}{\|x\|},$$

в уравнение (82) приводит к следующему квадратному уравнению относительно r :

$$r^2 + 2r \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2}{\|x\|} + (b_1^2 + b_2^2) = R^2.$$

Последнее уравнение переписывается в виде

$$r^2 + 2 \frac{(b, x)}{\|x\|} r - (R^2 - \|b\|^2) = 0.$$

Находим положительный корень этого уравнения:

$$\begin{aligned} r = r(x) &= -\frac{(b, x)}{\|x\|} + \sqrt{\frac{(b, x)^2}{\|x\|^2} + (R^2 - \|b\|^2)} = \\ &= \frac{-(b, x) + \sqrt{(b, x)^2 + (R^2 - \|b\|^2)\|x\|^2}}{\|x\|} = \\ &= \|x\| \frac{R^2 - \|b\|^2}{(b, x) + \sqrt{(b, x)^2 + (R^2 - \|b\|^2)\|x\|^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\|x\|}{r(x)} = \frac{(b, x) + \sqrt{(b, x)^2 + (R^2 - \|b\|^2)\|x\|^2}}{R^2 - \|b\|^2}. \quad (83)$$

Формулы (80) и (83) приводят к следующему окончательному выражению для дистанционной функции круга $S_R(-b)$:

$$d(S_R(-b), x) = \frac{(b, x) + \sqrt{(b, x)^2 + (R^2 - \|b\|^2)\|x\|^2}}{R^2 - \|b\|^2}. \quad (84)$$

Полагая в (84) $b = B_\nu, \nu = 1, \dots, N$, получаем упомянутые выше формулы (79), включённые в алгоритм вычисления геометрической разности круга и многоугольника.

Замечание 12. Аналогичным образом конструктивно решается задача о геометрической разности эллипса и многоугольника.

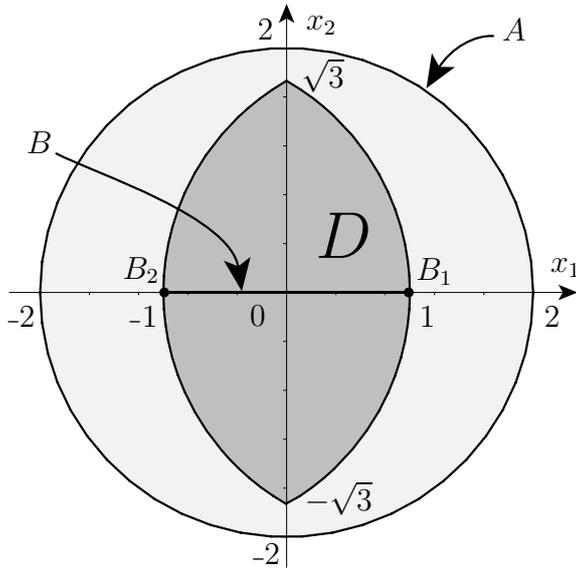


Рис. 36.

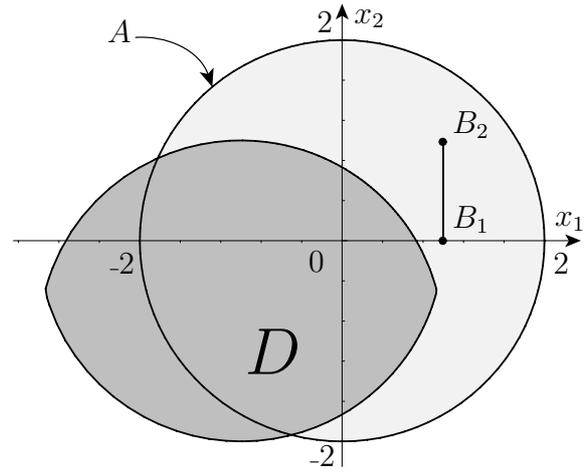


Рис. 37.

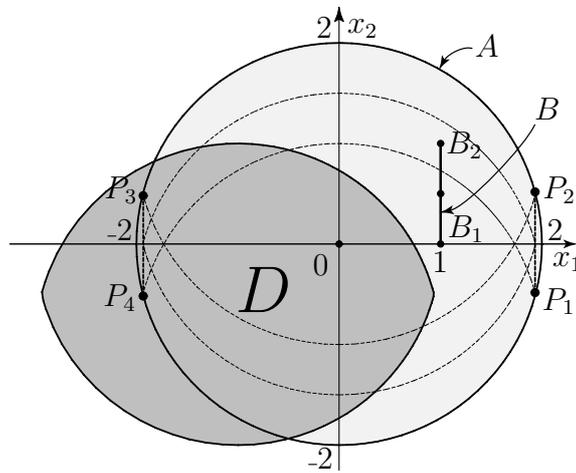


Рис. 38.

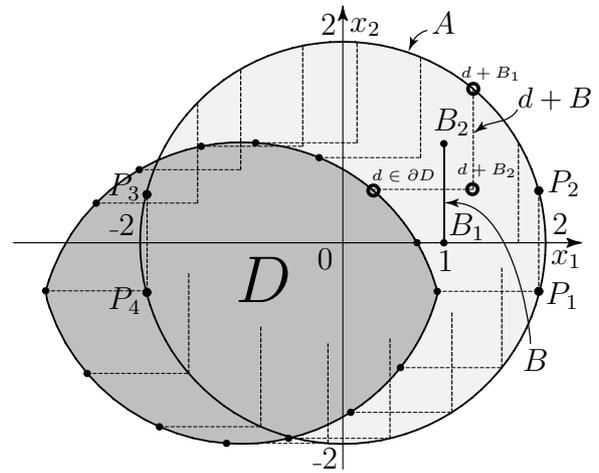


Рис. 39.

11.3 Программа для вычисления геометрической разности (74) круга и многоугольника. Примеры расчётов

Написана Maple-программа для вычисления геометрической разности (74). Приведём некоторые примеры расчётов.

Пример 4. $R = 2$, $N = 2$, $B_1 = (1, 0)$, $B_2 = (-1, 0)$. Множество D есть лунка L , см. рис. 36; $A = S_2(0)$ — круг, $B = [B_1, B_2]$ — отрезок, геометрическая разность D показаны тёмной заливкой.

Пример 5. $R = 2$, $N = 2$, $B_1 = (1, 0)$, $B_2 = (1, 1)$. Множество D есть лунка, см. рис. 37; $A = S_2(0)$ — круг, $B = [B_1, B_2]$ — отрезок, геометрическая разность D показаны тёмной заливкой.

Пример 6. $R = 2$, $N = 3$, $B_1 = (1, 0)$, $B_2 = (-1, 0)$, $B_3 = (0, -\sqrt{3})$. Множество D показано на рис. 40 тёмной заливкой, $A = S_2(0)$, B — треугольник $B_1B_2B_3$.

Пример 7. $R = 2$, $N = 4$, $B_1 = (-1, 1)$, $B_2 = (0, 1)$, $B_3 = (1, -1)$, $B_4 = (-1, -1)$. Множество D показано на рис. 41 тёмной заливкой, $A = S_2(0)$, B — четырёхугольник $B_1B_2B_3B_4$, отмеченный светлой заливкой.

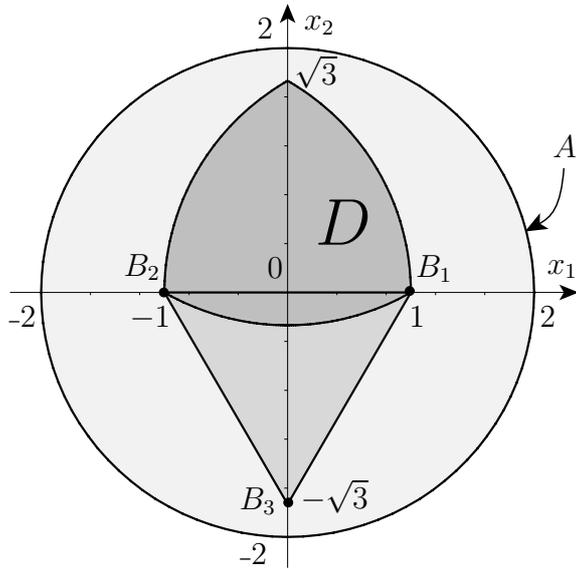


Рис. 40.

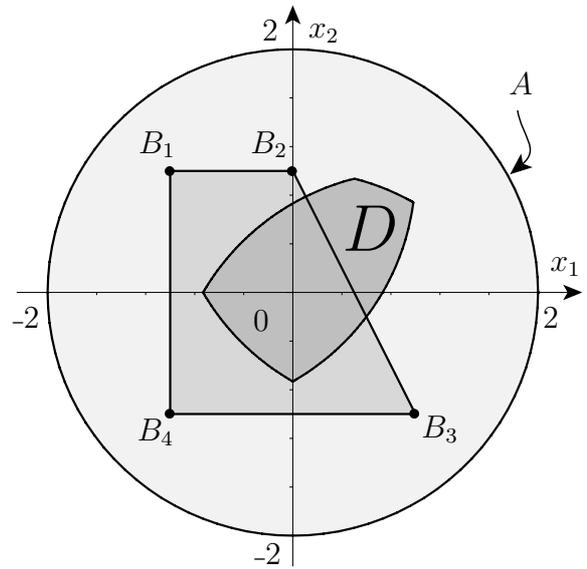


Рис. 41.

Пример 8. $R = 2$, $N = 5$, $B_1 = (-1, 1)$, $B_2 = (0, 1)$, $B_3 = (1, -1)$, $B_4 = (-1, -1)$, $B_5 = (-1/2, 0)$. Множество D в этом примере совпадает с множеством D из примера 7, см. рис. 42. “Лишняя” точка $B_5 \in \text{conv}\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ не мешает работе программы.

Пример 9. $R = 2$, $N = 6$, $B_1 = (-1, 1)$, $B_2 = (-1/2, 3/2)$, $B_3 = (1/2, 1)$, $B_4 = (1, 0)$, $B_5 = (1/2, -1/2)$, $B_6 = (-1, -1)$. Множество D показано на рис. 43 тёмной заливкой, $A = S_2(0)$, множество B — выпуклый шестиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$.

Замечание 13. Изложенные выше соображения применимы, с очевидными изменениями, в многомерном аналоге рассматриваемой задачи. В случае $n = 3$ речь идёт о геометрической разности шара и выпуклого многогранника, заданного своими вершинами и расположенного внутри этого шара. Аналогично рассматривается задача о вычислении геометрической разности эллипсоида и многогранника.

Замечание 14. Для визуальной проверки правильности построения геометрической разности нужно произвести сложение множества B с граничными точками множества D , смотри, например, рис. 30 (полное выметание) и рис. 39, 46, 57 (неполное выметание), либо произвести сложение множества D с граничными точками множества B , см. рис. 38 (неполное выметание). На рис. 38, 39 множество $B + D$ получается из круга A удалением двух его сегментов, ограниченных хордами P_1P_2 и P_3P_4 , длина каждой из этих хорд равна единице.

12 Алгоритм вычисления геометрической разности круга и гладкого выпуклого компакта

12.1 Постановка задачи. Формулировка алгоритма

Рассмотрим задачу вычисления геометрической разности

$$D = A \star B \tag{85}$$

двух множеств A и B , где $A = S_R(0)$ — круг радиуса $R > 0$ с центром 0 , B — гладкий выпуклый компакт, лежащий внутри этого круга, с опорной функцией $c(B, \psi)$.

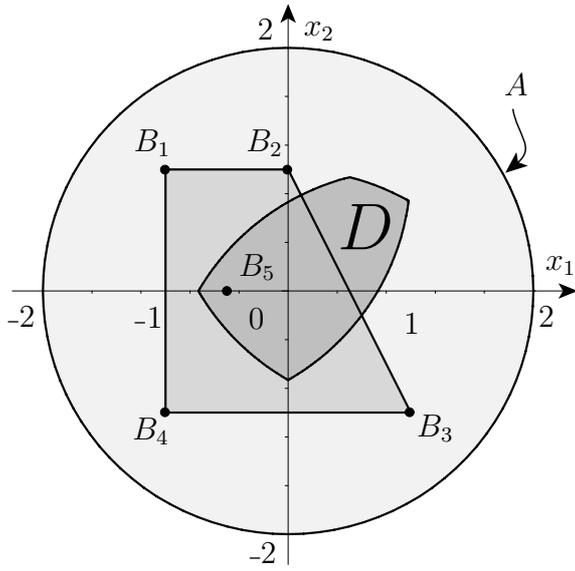


Рис. 42.

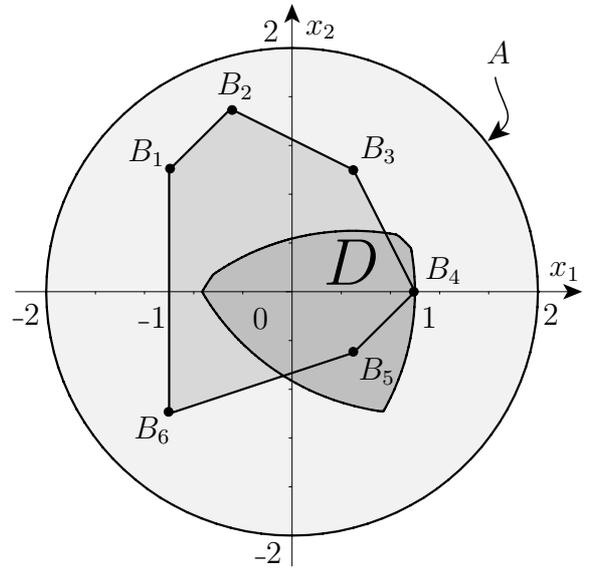


Рис. 43.

Описанный ниже алгоритм решения рассматриваемой задачи можно получить предельным переходом из алгоритма предыдущего раздела 11 при аппроксимации выпуклого компакта B выпуклым многоугольником.

Запишем сначала аналог формулы (74) предыдущего подраздела в виде

$$D = A \star \text{conv}\{\partial B\}$$

и представим множество D в форме пересечения

$$D = \bigcap_{\|\psi\|=1} D_\psi, \quad D_\psi \equiv A - c'(B, \psi) = S_R(-c'(B, \psi))$$

семейства кругов радиуса R с центрами $-c'(B, \psi)$, зависящими от единичного вектора ψ . Здесь $c'(B, \psi)$ — градиент опорной функции множества B . Записывая единичный вектор ψ в виде

$$\psi = q(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

имеем:

$$D = \bigcap_{t \in [0, 2\pi]} D_{q(t)}, \quad D_{q(t)} \equiv S_R(-c'(B, q(t))).$$

Отсюда находим дистанционную функцию множества D в виде

$$d(D, x) = \max_{t \in [0, 2\pi]} d(D_{q(t)}, x), \quad (86)$$

где

$$d(D_{q(t)}, x) = \frac{(b, x) + \sqrt{(b, x)^2 + (R^2 - \|b\|^2)\|x\|^2}}{R^2 - \|b\|^2} \Big|_{b=c'(B, q(t))}. \quad (87)$$

Для вычисления границы ∂D геометрической разности (85) применяется векторное параметрическое уравнение

$$u = \frac{x}{d(D, x)} \Big|_{x=q(\tau)}, \quad q(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi. \quad (88)$$

Таким образом, алгоритм вычисления геометрической разности (85) состоит в применении формул (86), (87), (88). Максимум по $t \in [0, 2\pi]$ в правой части формулы (86) находится приближённо табулированием максимизируемой функции на сетке $\{t_j = (j-1)2\pi/N, j = 1, \dots, N\}$, где N — заданное число узлов.

Замечание 15. Описанный алгоритм не зависит от размерности задачи и применим в многомерном аналоге рассматриваемой задачи. В случае $n = 3$ речь идёт о геометрической разности шара и гладкого выпуклого компакта (например, эллипсоида), заданного своей опорной функцией и расположенного внутри этого шара.

Замечание 16 (о геометрической разности двух кругов). В частном случае, когда $A = S_R(0)$, $B = S_\rho(x_0)$, а D — геометрическая разность этих двух кругов, параметры которых удовлетворяют условиям

$$R > 0, \quad \rho > 0, \quad R - \rho - \|x_0\| > 0,$$

максимум в (86) можно вычислить в явном виде. Опуская пока кропотливые промежуточные выкладки, приведём окончательное выражение для дистанционной функции множества D :

$$d(D, x) = \frac{(x_0, x) + \sqrt{((R - \rho)^2 - \|x_0\|^2)\|x\|^2 + (x_0, x)^2}}{(R - \rho)^2 - \|x_0\|^2}. \quad (89)$$

12.2 Вспомогательные выкладки

Покажем сейчас, что эта дистанционная функция определяет круг $S_{R-\rho}(-x_0) = D$. Граница ∂D круга D определяется уравнением

$$d(D, x) = 1.$$

Последнее уравнение может быть приведено к виду

$$\|x - x_0\| = R - \rho.$$

Действительно, уравнение $d(D, x) = 1$ в результате последовательных преобразований принимает вид:

$$(x_0, x) + \sqrt{((R - \rho)^2 - \|x_0\|^2)\|x\|^2 + (x_0, x)^2} = (R - \rho)^2 - \|x_0\|^2,$$

или

$$((R - \rho)^2 - \|x_0\|^2)\|x\|^2 + (x_0, x)^2 = [(R - \rho)^2 - \|x_0\|^2 - (x_0, x)]^2,$$

или

$$\|x\|^2 + 2(x_0, x) + \|x_0\|^2 = (R - \rho)^2,$$

или, наконец,

$$\|x + x_0\| = R - \rho.$$

Таким образом,

$$D = S_{R-\rho}(-x_0).$$

В случае $\rho = 0$, когда множество $B = \{x_0\}$ — одноточечное множество, имеем:

$$d(D, x) = \frac{(x_0, x) + \sqrt{(x_0, x)^2 - (R^2 - \|x_0\|^2)\|x\|^2}}{R^2 - \|x_0\|^2}.$$

Эта формула соответствует формуле (84) при $b = x_0$.

Обратимся теперь к выводу формулы (89). Имеем:

$$\begin{aligned}
d(D, x) &= \max_{b \in B} d(A - b, x) = \max_{b \in S_\rho(x_0)} d(S_R(-b), x) = \\
&= \max_{b \in S_\rho(x_0)} \frac{(b, x) + \sqrt{(b, x)^2 + (R^2 - \|b\|^2)\|x\|^2}}{R^2 - \|b\|^2} = \\
&= \max_{b \in S_\rho(-b)} \frac{\|x\|}{-(b, \frac{x}{\|x\|}) + \sqrt{(b, \frac{x}{\|x\|})^2 + R^2 - \|b\|^2}} = \\
&= \frac{\|x\|}{\min_{b \in S_\rho(x_0)} \Phi(b)}, \tag{90}
\end{aligned}$$

где

$$\Phi(b) = -\left(b, \frac{x}{\|x\|}\right) + \sqrt{\left(b, \frac{x}{\|x\|}\right)^2 + R^2 - \|b\|^2}, \tag{91}$$

$\frac{x}{\|x\|}$ — фиксированный единичный вектор. Таким образом, проблема сведена к вычислению минимального значения функции (91) на круге $S_\rho(x_0)$. Покажем, что

$$\min_{b \in S_\rho(x_0)} \Phi(b) = \|x\| \frac{(R - \rho)^2 - \|x_0\|^2}{(x, x_0) + \sqrt{(x, x_0)^2 + \|x\|^2[(R - \rho)^2 - \|x_0\|^2]}}. \tag{92}$$

Из (90) и (92) следует (89). Минимум (92) нетрудно вычислить, изучив линии уровня функции (91). Рассмотрим два ортогональных единичных вектора

$$e_1(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad e_2(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\|x\|},$$

тогда формулу (91) можно записать в виде

$$\Phi(b) = -(b, e_1(x)) + \sqrt{R^2 - (b, e_2(x))^2}. \tag{93}$$

Функция $\Phi(b)$ определена в полосе $\Pi = \{b : |(b, e_2(x))| \leq R\}$, которая ограничена парой прямых $(b, e_2(x)) = \pm R$, касающихся круга $S_R(0)$ и параллельных вектору $e_1(x)$. Круг $S_\rho(x_0)$, на котором следует решать задачу минимизации, лежит внутри открытой полосы Π и внутри открытого круга $S_R(0)$, поэтому $\Phi(b) > 0$, $b \in S_\rho(0)$.

Функцию $\Phi(b)$ запишем в виде

$$\Phi(b) = \sigma - [(b, e_1(x)) + \sigma] + \sqrt{R^2 - (b, e_2(x))^2}.$$

Из последней записи можно увидеть, что линиями уровня

$$\Phi(b) = \sigma$$

минимизируемой функции Φ служат полуокружности Σ_σ радиуса R с центром в точке $-\sigma e_1(x)$ и ограничивающим диаметром, параллельным вектору $e_2(x)$:

$$\Sigma_\sigma = \{b : \|b + \sigma e_1(x)\| = R, (b, e_1(x)) \geq 0\},$$

см. рис. 44. Минимизация функции $\Phi(b)$ при $b \in S_\rho(x_0)$ с геометрической точки зрения сводится к нахождению минимального $\sigma > 0$, при котором круг $S_\rho(x_0)$ вписывается внутренним образом в полуокружность Σ_σ , см. рис. 44. Минимизатор

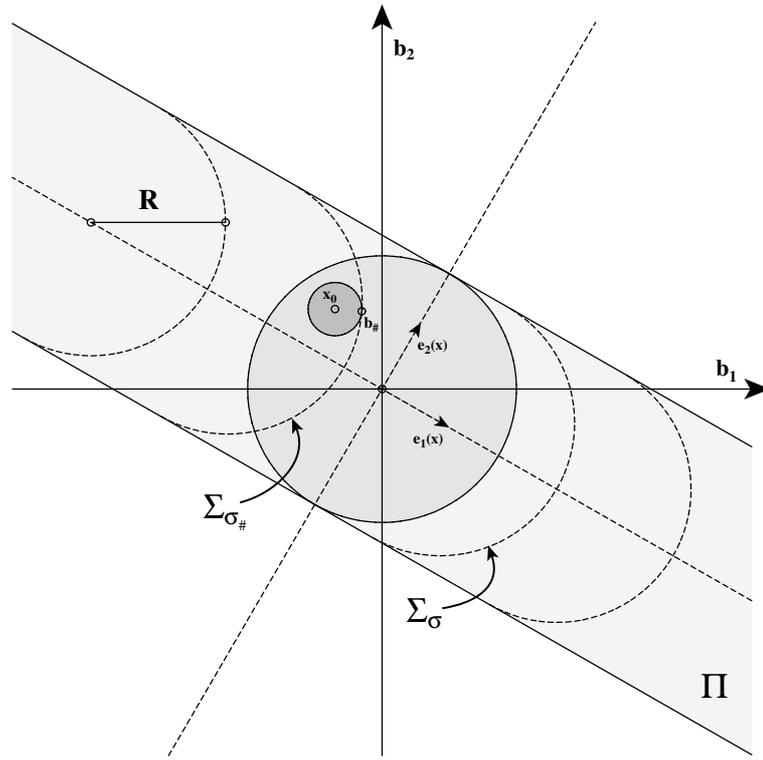


Рис. 44.

$$b_{\#} = \arg \min_{b \in S_{\rho}(x_0)} \Phi(b) \quad (94)$$

может быть записан в следующих двух формах

$$\begin{aligned} b_{\#} &= x_0 + \rho \frac{\psi}{\|\psi\|}, \\ b_{\#} &= -\sigma e_1(x) + R \frac{\psi}{\|\psi\|}, \end{aligned} \quad (95)$$

где $\psi \neq 0$ — неизвестный опорный вектор, определяющий минимизатор (94). Из (95) следует:

$$\begin{aligned} (R - \rho) \frac{\psi}{\|\psi\|} &= \sigma e_1(x) + x_0, \\ R - \rho &= \left\| \sigma \frac{x}{\|x\|} + x_0 \right\|, \end{aligned}$$

и возведением в квадрат получаем следующее квадратное уравнение относительно неизвестного σ :

$$\sigma^2 + 2\sigma \left(\frac{x}{\|x\|}, x_0 \right) - [(R - \rho)^2 - \|x_0\|^2] = 0.$$

Находим положительный корень этого уравнения:

$$\sigma_{\#} = \sigma_{\#}(x) = - \left(\frac{x}{\|x\|}, x_0 \right) + \sqrt{\left(\frac{x}{\|x\|}, x_0 \right)^2 + (R - \rho)^2 - \|x_0\|^2}.$$

Этот параметр определяет минимум (92):

$$\min_{b \in S_{\rho}(x_0)} \Phi(b) = \sigma_{\#} = \|x\| \frac{(R - \rho)^2 - \|x_0\|^2}{(x, x_0) + \sqrt{(x, x_0)^2 + \|x\|^2 [(R - \rho)^2 - \|x_0\|^2]}}. \quad (96)$$

Подстановка (96) в (90) приводит к окончательной формуле (89).

Обратим внимание на то, что опорный вектор ψ в (95) нам не понадобился, хотя и его можно определить, привлекая (95):

$$\frac{\psi}{\|\psi\|} = \frac{1}{R - \rho} (\sigma_{\#} e_1(x) + x_0).$$

Эти соображения здесь подробно изложены потому, что аналогичным образом можно исследовать задачи геометрической разности с другими вычитаемыми множествами B . Другой подход к решению рассмотренной здесь задачи описан в разделе 13.

13 Алгоритм вычисления геометрической разности двух гладких выпуклых компактов на основе дистанционной функции с привлечением метода потенциалов

13.1 Постановка задачи

Пусть

$$D = A \ast B, \quad D \neq \emptyset, \quad (97)$$

— геометрическая разность двух гладких выпуклых компактов, заданных своими опорными функциями $c(A, \psi)$ и $c(B, \psi)$. Предполагаем, что $0 \in \text{int } A$; этого можно добиться предварительным параллельным переносом тела A , более того, можно считать, что точка 0 является центром Штейнера (хотя этого и не обязательно). Будем считать также, что $B \subset A$ (можно, например, за счёт параллельного переноса совместить центр Штейнера множества B с точкой 0 , хотя это тоже не обязательно). Напомним, что центр Штейнера выпуклого компакта A определяется интегралом

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_S c'(A, \psi) dS,$$

где σ_n — площадь единичной сферы $S \subset \mathbb{R}^n$. Другое выражение для центра Штейнера имеет вид поверхностного интеграла

$$\frac{1}{v_n} \int_S c(A, \psi) \psi dS,$$

где v_n — объём единичного шара $S_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

Геометрическая разность (97) представима в виде пересечения множеств

$$D = \bigcap_{b \in \partial B} \Delta(b), \quad \Delta(b) \equiv A - b. \quad (98)$$

Каждое из множеств $\Delta(b)$ получается из множества A параллельным переносом.

Основное предположение:

$$0 \in \text{int } \Delta(b) \text{ для } \forall b \in \partial B. \quad (99)$$

Требуется разработать алгоритм построения геометрической разности (98) на основе вычисления её дистанционной функции $d(D, x)$, рассматриваемой относительно точки 0. Для решения этой задачи привлекается идея метода потенциалов [9], см. также [5]. Предлагаемый подход применим в случае любой размерности. Ниже мы сосредоточим внимание на плоском случае, в котором алгоритм имеет более простой вид. Конечный результат состоит в составлении параметрических уравнений границы ∂D геометрической разности D . Приводятся результаты численных экспериментов, выполненных на основе предлагаемой методики.

13.2 Формулировка алгоритма

Опишем сначала идею алгоритма. Опорная функция множества $\Delta(b)$ определяется формулой

$$c(\Delta(b), \psi) = c(A, \psi) - (b, \psi). \quad (100)$$

Для нахождения дистанционной функции множества $\Delta(b)$ следует найти расстояние $r_b\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ от точки $0 \in \text{int } \Delta(b)$ до точки пересечения луча $\mathcal{L} = \{\lambda x, \lambda \geq 0, x \neq 0\}$ с границей множества $\Delta(b)$. После этого можно записать дистанционную функцию множества $\Delta(b)$ в виде

$$d(\Delta(b), x) = \frac{\|x\|}{r_b\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}. \quad (101)$$

Полагая

$$r_*\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \min_{b \in \partial B} r_b\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad (102)$$

записываем дистанционную функцию геометрической разности в виде

$$d(D, x) = \frac{\|x\|}{r_*\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}, \quad (103)$$

а границу ∂D геометрической разности D представим в форме

$$\partial D = \bigcup_{\|x\|=1} \left\{ \frac{x}{d(D, x)} \right\}. \quad (104)$$

Далее ограничиваемся случаем размерности $n = 2$. Представление (104) позволяет записать параметрическое уравнение кривой ∂D в виде

$$x = r_*(q(\alpha)) q(\alpha), \quad q(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = [0, 2\pi], \quad (105)$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = r_*(q(\alpha)) \cos \alpha, \\ x_2 = r_*(q(\alpha)) \sin \alpha, \\ \alpha \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (106)$$

Обратимся сейчас к описанию деталей алгоритма. Центральным вопросом является вычисление расстояния $r_b(q(\alpha))$ при заданном параметре α и фиксированном параметре b . В специальном случае $A = S_R(0)$, как мы видели в разделе 11, это расстояние допускает аналитическое описание.

Обратимся сейчас к описанию численного алгоритма. Рассмотрим ортонормированную пару векторов

$$q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad q'(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (107)$$

Введём в рассмотрение вспомогательный вектор

$$\hat{p}(\alpha, \eta) = q(\alpha) + \eta q'(\alpha), \quad \eta \in \mathbb{R}^1, \quad (108)$$

и функцию

$$F(\alpha, \eta, b) = c(\Delta(b), \psi) \Big|_{\psi=\hat{p}(\alpha, \eta)}. \quad (109)$$

Функция (109) в развёрнутой форме имеет вид

$$\begin{aligned} F(\alpha, \eta, b) &= c(A, \hat{p}(\alpha, \eta)) - (b, \hat{p}(\alpha, \eta)) = \\ &= c(A, q(\alpha) + \eta q'(\alpha)) - (b, q(\alpha)) - \eta (b, q'(\alpha)). \end{aligned} \quad (110)$$

Функция (110) является выпуклой функцией аргумента η , причём

$$F \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |\eta| \longrightarrow +\infty.$$

Действительно,

$$F'_\eta = (c'(A, \hat{p}(\alpha, \eta)), q'(\alpha)) - (b, q'(\alpha)), \quad (111)$$

$$F''_{\eta\eta} = q'(\alpha)^* c''(A, \hat{p}(\alpha, \eta)) q'(\alpha) > 0. \quad (112)$$

Находим определяемый единственным образом минимизатор функции (110):

$$\eta_*(\alpha, b) \equiv \operatorname{argmin}_{\eta \in \mathbb{R}^1} F(\alpha, \eta, b). \quad (113)$$

Точка $z(\alpha, b)$ пересечения луча $\mathcal{L}(q(\alpha))$ с границей множества $\Delta(b)$ допускает следующее представление

$$z(\alpha, b) = c'(\Delta(b), \psi) \Big|_{\psi=\hat{p}(\alpha, \eta_*(\alpha, b))}, \quad (114)$$

$$z(\alpha, b) = q(\alpha) \cdot r_b(q(\alpha)) + q'(\alpha) \cdot 0. \quad (115)$$

Отсюда следует, что

$$r_b(q(\alpha)) = \left\| c'(\Delta(b), \psi) \Big|_{\psi=\hat{p}(\alpha, \eta_*(\alpha, b))} \right\|, \quad (116)$$

$$r_b(q(\alpha)) = (q(\alpha), c'(\Delta(b), \psi) \Big|_{\psi=\hat{p}(\alpha, \eta_*(\alpha, b))}). \quad (117)$$

Каждая из формул (116), (117) даёт конструктивный способ вычисления расстояния $r_b(q(\alpha))$ при заданных α и b .

Остановимся теперь на вычислениях основной характеристики (102). Считая

$$\frac{x}{\|x\|} = q(\alpha), \quad b = b(\beta) \equiv c'(B, q(\beta)) \in \partial B, \quad \alpha, \beta \in [0, 2\pi],$$

перепишем формулу (102) в виде

$$r_*(q(\alpha)) = \min_{\beta \in [0, 2\pi]} r_{b(\beta)}(q(\alpha)). \quad (118)$$

В практическом плане минимизация в правой части формулы (118) выполняется, например, табулированием по мелкой сетке для параметра $\beta \in [0, 2\pi]$:

$$r_*(q(\alpha)) = \min_{i=1, \dots, N} r_{b(i \cdot \frac{2\pi}{N})}(q(\alpha)), \quad (119)$$

где N — заданное число узлов.

Окончательный результат: граница ∂D геометрической разности D описывается параметрическими уравнениями (106) с функцией $r_(q(\alpha))$, определяемой формулой (118), или приближённой формулой (119).*

Замечание 17. Если множество B является выпуклым M -многоугольником с вершинами B_1, \dots, B_M , то формулу (119) следует заменить формулой

$$r_*(q(\alpha)) = \min_{m=1, \dots, M} r_{B_m}(q(\alpha)) \quad (120)$$

с перебором вершин выпуклого многоугольника.

13.3 Примеры расчётов

Пример 10 (Геометрическая разность двух выпуклых множеств, ограниченных эллипсами). Пусть

$$D = P \star Q$$

— геометрическая разность множеств P и Q , где

$$P = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{B^2} \leq 1 \right\},$$

$$Q = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

$A, B, a, b > 0$ — полуоси эллипсов, $k_1 \equiv \frac{A}{a} > 1$, $k_2 \equiv \frac{B}{b} > 1$, $Q \subset P$, $D \neq \emptyset$. Далее предполагается, что параметр $b > 0$ “достаточно мал”. Сформулируем сначала окончательный аналитический результат для множества D . Множество D — криволинейный четырёхугольник $D_1 D_2 D_3 D_4$ — является центрально-симметричным, симметричным относительно осей координат, см. рис. 45. Кривая $D_1 D_2$ (часть границы ∂D , лежащая в первой четверти) описывается параметрическими уравнениями

$$x_1 = R_1(\beta), \quad x_2 = R_2(\beta), \quad 0 \leq \beta \leq \beta_2, \quad (121)$$

где

$$R_1(\beta) = A \cos \varphi(\beta) - a \cos \beta,$$

$$R_2(\beta) = B \sin \varphi(\beta) - b \sin \beta,$$

$$\varphi(\beta) = \arctg \left(\frac{Ba}{Ab} \operatorname{tg} \beta \right).$$

Точка D_1 соответствует значению параметра $\beta = 0$, точка D_2 — значению $\beta = \beta_2$, где $\beta_2 \in (0, \pi/2)$ — корень уравнения $R_1(\beta) = 0$. При

$$A = 2, \quad B = 5, \quad a = 1, \quad b = 1/2, \quad (122)$$

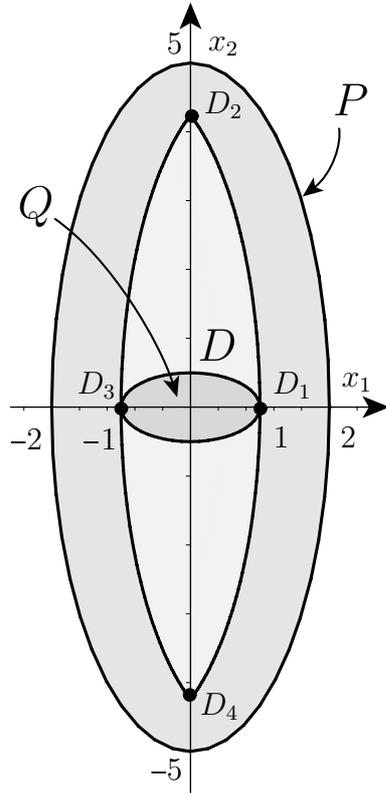


Рис. 45.

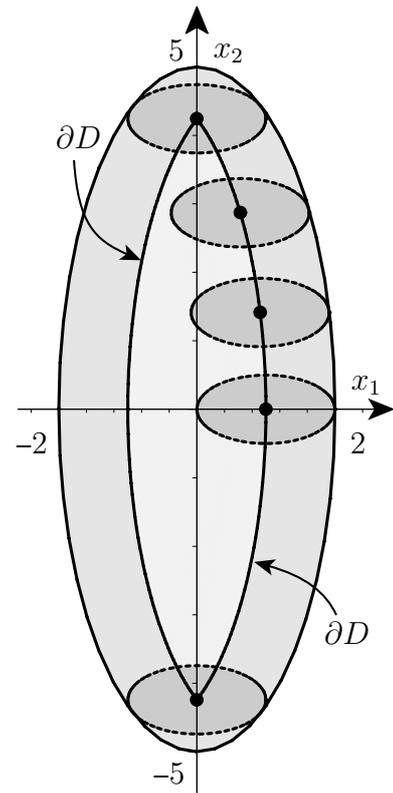


Рис. 46.

имеем:

$$k_1 = 2, k_2 = 10, \frac{Ba}{Ab} = \frac{k_2}{k_1} = 5, k_2 - k_1^2 = 10 - 4 > 0,$$

$$D_1 = (1, 0), D_2 = (0, 4.24264\dots), D_3 = -D_1, D_4 = -D_2.$$

Кривая ∂D имеет изломы в точках D_2 и D_4 . Рис. 45 построен для набора параметров (122). Пример 10 допускает полный анализ для различных значений $k_1, k_2 > 1$, однако на этом анализе мы здесь останавливаться не будем. Описанный выше в подразделе 13.2 численный алгоритм при наборе параметров (122) даёт аналогичный результат; число узлов $N = 100$.

В этом примере полного выметания нет. Множество $D + Q$ получается из множества P вырезанием двух эллиптических линз, примыкающих к концам вертикального диаметра эллипса P , см. рис. 46.

Пример 10 служит хорошим тестом для проверки правильности работы программ построения геометрической разности. Рис. 46 содержит геометрическую интерпретацию полученного результата. Эти геометрические соображения приводят к параметрическим уравнениям (121). Заметим, что кривая $D_4 D_1 D_2$ описывается параметрическими уравнениями (121) при параметре $\beta \in [-\beta_2, \beta_2]$.

Замечание 18 (о другой параметризации границы ∂D и роли градиентной кривой разности опорных функций). Составим разность опорных функций множеств P и Q

$$s(\psi) \equiv c(P, \psi) - c(Q, \psi) = \sqrt{4\psi_1^2 + 25\psi_2^2} - \sqrt{\psi_1^2 + 1/4\psi_2^2}.$$

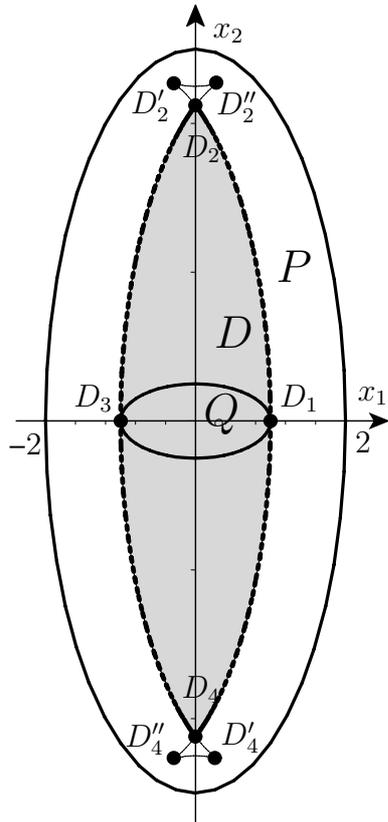


Рис. 47.

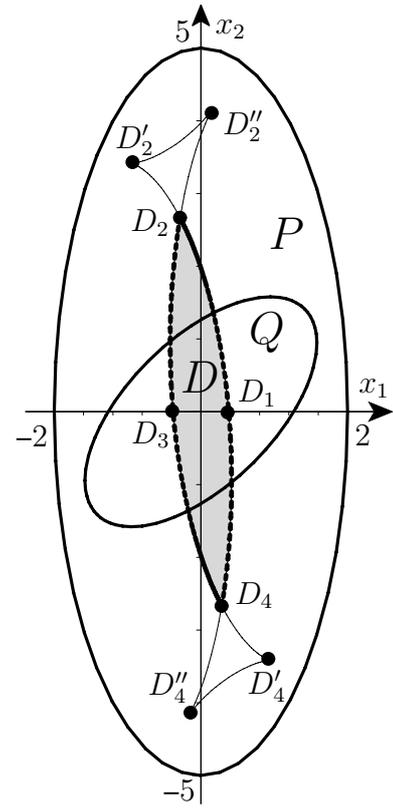


Рис. 48.

Эта функция не является выпуклой. Определим функцию $s_0(\alpha)$, полагая

$$s_0(\alpha) = s(\psi)|_{\psi=q(\alpha)}, \quad q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix};$$

$s_0(\cdot)$ есть сужение функции $s(\cdot)$ на единичную окружность. Рассмотрим кривую, определяемую векторным параметрическим уравнением

$$x = s_0(\alpha)q(\alpha) + s'_0(\alpha)q'(\alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \quad (123)$$

Эта кривая (градиентная кривая) имеет характер “лунки с хвостами” (в данном случае с двумя). Граница ∂D геометрической разности D — линия $D_1D_2D_3D_4$ — является частью построенной кривой, см. рис. 47. Отрезая хвосты $D_2D'_2D''_2$ и $D_4D'_4D''_4$, примыкающие к точкам D_2 и D_4 , получаем границу $\partial D = D_1D_2D_3D_4$ геометрической разности D . Правая часть $D_4D_1D_2$ границы ∂D определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = s_0(\alpha) \cos(\alpha) - s'_0(\alpha) \sin \alpha, \\ x_2 = s_0(\alpha) \sin(\alpha) + s'_0(\alpha) \cos \alpha, \\ |\alpha| \leq \alpha_*, \quad \alpha_* = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right) \approx 0.6472848480, \end{cases}$$

где

$$s_0(\alpha) = \sqrt{4 \cos^2(\alpha) - 25 \sin^2(\alpha)} - \sqrt{\cos^2(\alpha) + 1/4 \sin^2(\alpha)}.$$

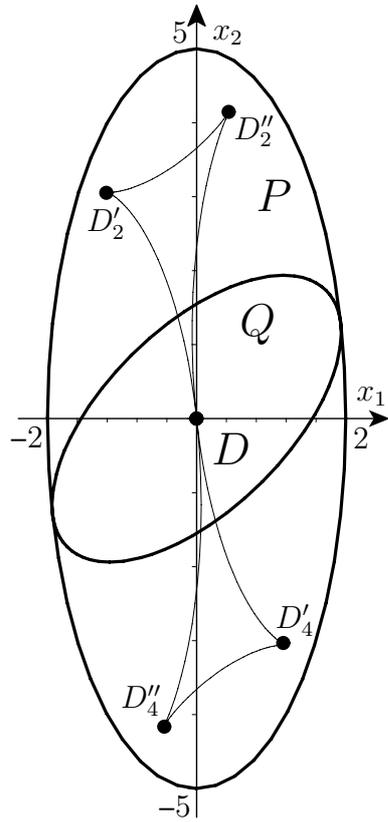


Рис. 49.

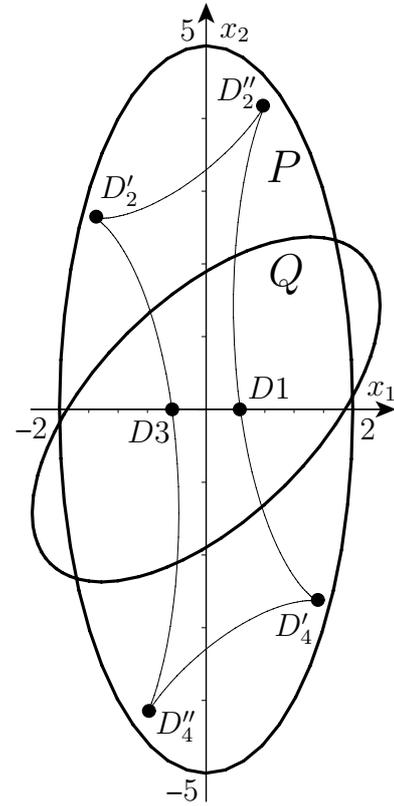


Рис. 50.

Пример 11. Найти геометрическую разность $D = P \setminus Q$ двух областей, ограниченных эллипсами, если

$$c(P, \psi) = \sqrt{4\psi_1^2 + 25\psi_2^2}, \quad c(Q, \psi) = \sqrt{\frac{5}{2}\psi_1^2 + 3\psi_1\psi_2 + \frac{5}{2}\psi_2^2}.$$

Применение уравнения (123) приводит к картине, изображённой на рис. 48. Геометрическая разность D — область $D_1D_2D_3D_4$ — показана тёмной заливкой. Два хвоста $D_2D'_2D''_2$ и $D_4D'_4D''_4$ следует отрезать. Численный алгоритм, описанный в подразделе 13.2, при числе узлов $N = 100$ приводит к правильному результату (без хвостов).

Таким образом, градиентный подход даёт некоторый исходный материал для следующего анализа и получения окончательного результата.

Обратим внимание на то, что при использовании градиентного подхода не требуется выполнять предварительный параллельный перенос множеств P и Q .

Замечание 19. Если в примере 11 множество Q заменить множеством $r \cdot Q$, где число $r \geq 1$, то с ростом параметра r область $D_1D_2D_3D_4$ сужается и при некотором значении $r = r_* > 1$ превратится в точку; при $r > r_*$ геометрическая разность $D = \emptyset$; при этом дуги $D'_2D'_4$ и $D''_2D''_4$ не пересекаются, см. рис. 48, 49, 50. Для двух центрально-симметричных выпуклых множеств P и Q параметр r_* может быть найден по формуле

$$r_* = \min_{\alpha \in [0, 2\pi]} \frac{c(P, \psi)}{c(Q, \psi)} \Big|_{\psi=q(\alpha)}; \quad r_* \approx 1.22643 \dots$$

14 Алгебраическая сумма и геометрическая разность двух многогранных множеств

14.1 Многогранные множества: основные определения, геометрия многогранных множеств

Пусть M — $(N \times n)$ -матрица, a, b — векторы из \mathbb{R}^n . Предполагаем, что $N \geq 2$, $n \geq 2$, оставляя в стороне простые случаи $N = 1$ и $n = 1$. Рассмотрим следующие четыре множества

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : Mx \leq a \quad \}, \quad (124)$$

$$B = \{y \in \mathbb{R}^n : My \leq b \quad \}, \quad (125)$$

$$W = \{w \in \mathbb{R}^n : Mw \leq a + b\}, \quad (126)$$

$$Z = \{z \in \mathbb{R}^n : Mz \leq a - b\}, \quad (127)$$

заданные системами линейных неравенств и определяемые параметрами M, a, b . Эти множества можно представить в форме

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : (m_i, x) \leq a_i, \quad i \in \mathcal{N}\},$$

$$B = \{y \in \mathbb{R}^n : (m_i, y) \leq b_i, \quad i \in \mathcal{N}\},$$

$$W = \{w \in \mathbb{R}^n : (m_i, w) \leq a_i + b_i, \quad i \in \mathcal{N}\},$$

$$Z = \{z \in \mathbb{R}^n : (m_i, z) \leq a_i - b_i, \quad i \in \mathcal{N}\},$$

где $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ — множество индексов; m_i — i -тая строка матрицы M , содержащая n элементов, a_i, b_i — i -тые элементы векторов a, b , соответственно, $i \in \mathcal{N}$; (\cdot, \cdot) — скалярное произведение двух векторов \mathbb{R}^n . Без ограничения общности можно предполагать, что строки матрицы M образуют систему разнонаправленных векторов, т.е. $(m_i, m_j) < \|m_i\| \cdot \|m_j\|$ при $i \neq j, i, j \in \mathcal{N}$ (отсюда следует, что все векторы m_i ненулевые). При наличии нескольких неравенств с одинаково направленными векторами m_i можно оставить только одно из них с наименьшим параметром $a_i/\|m_i\|$.

Таким образом, каждое из множеств A, B, W, Z является пересечением полупространств, заданных линейными неравенствами. Непустота этих множеств равносильна разрешимости соответствующих систем линейных неравенств. Каждое такое непустое множество, естественно, является выпуклым.

Обратим внимание на то, что для всех множеств (124)-(127) матрица M , участвующая в соответствующих неравенствах, одна и та же. Использование одной и той же матрицы M при описании различных множеств естественно и целесообразно в численных расчётах, когда в пространстве \mathbb{R}^n задана фиксированная сетка ненулевых векторов, которые образуют строки матрицы M , причём эти строки могут быть пронормированы.

Далее в этом подразделе ограничимся рассмотрением одного из множеств (124)-(127) — множества A . Сказанное ниже, естественно, относится и к остальным трём множествам B, W, Z .

Определение 3. Неравенство $(m_j, x) \leq a_j$ будем называть *существенным* для множества $A = \{x \in \mathbb{R}^n : (m_i, x) \leq a_i, \quad i \in \mathcal{N}\}$, если найдется точка $x_* \in A$, для которой справедливо равенство $(m_j, x_*) = a_j$.

Определение 4. Неравенство $(m_k, x) \leq a_k$ будем называть *строго несущественным* для множества $A = \{x \in \mathbb{R}^n : (m_i, x) \leq a_i, \quad i \in \mathcal{N}\}$, если для любой точки $x \in A$ выполняется строгое неравенство $(m_k, x) < a_k$.

Множество индексов $\mathcal{N} \equiv \{1, \dots, N\}$ разбивается на два непересекающихся множества индексов \mathcal{J}_A и \mathcal{K}_A :

$$\mathcal{J}_A \cup \mathcal{K}_A = \mathcal{N}, \quad \mathcal{J}_A \cap \mathcal{K}_A = \emptyset;$$

множество \mathcal{J}_A состоит из номеров существенных, а множество \mathcal{K}_A — из номеров строго несущественных неравенств для множества A . Отметим, что

$$A \neq \emptyset \iff \mathcal{J}_A \neq \emptyset.$$

Ясно, что множество A может быть описано с привлечением только существенных неравенств:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : (m_i, x) \leq a_i, i \in \mathcal{J}_A\},$$

т.е. в описании множества A строго несущественные неравенства с номерами $i \in \mathcal{K}_A$ можно отбросить, см. [10]. Вопрос о конструктивном нахождении множеств индексов \mathcal{J}_A и \mathcal{K}_A здесь не обсуждается. Отметим, что при отбрасывании и некоторых существенных неравенств множество может остаться неизменным.

Многогранное множество A , как отмечалось выше, является пересечением конечного числа полупространств

$$\Pi_A^-(m_i) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : (x, m_i) \leq a_i\}, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (128)$$

каждое из которых задаётся линейным неравенством, т.е.

$$A = \bigcap_{i \in \mathcal{N}} \Pi_A^-(m_i). \quad (129)$$

Существенность неравенства $(x, m_i) \leq a_i$ в описании множества A (см. определение 3) равносильно геометрическому условию

$$H_A(m_i) \equiv A \cap \partial \Pi_A^-(m_i) \neq \emptyset, \quad (130)$$

где $\partial \Pi_A^-(m_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, m_i) = a_i\} \equiv \Gamma_A(m_i)$ — гиперплоскость (граница множества (128)). При условии (130) множество $H_A(m_i)$ является опорным множеством для выпуклого множества A в направлении вектора m_i , а гиперплоскость $\Gamma_A(m_i)$ является опорной гиперплоскостью к выпуклому множеству A с опорным вектором m_i .

Для *строго несущественного* неравенства $(x, m_j) \leq a_j$ (см. определение 4) имеем:

$$A \subset \text{int } \Pi_A^-(m_j), \quad H_A(m_j) = \emptyset.$$

Условие $A \neq \emptyset$ равносильно разрешимости системы линейных неравенств в описании множества A . Непустое множество A может быть неограниченным (см. ниже пример 12, рис. 51, 52, 53). Ограниченность непустого множества A равносильна геометрическому условию

$$0 \in \text{int conv } \{m_1, \dots, m_N\}.$$

Непустое множество A расположено в отрицательном полупространстве $\Pi_A^-(m_i)$ (можно говорить об ограниченности множества A в направлении вектора m_i ; предполагается, естественно, конечность чисел a_i). Положим

$$\sigma(A, m_i) = \max_{x \in A} (x, m_i), \quad i \in \mathcal{N}.$$

Из определения множества A следует, что всегда

$$\sigma(A, m_i) \leq a_i.$$

Для *существенного* неравенства $(x, m_i) \leq a_i$ в описании множества A имеет место равенство

$$\sigma(A, m_i) = a_i, \quad i \in \mathcal{J}_A;$$

для *строго несущественного* неравенства $(x, m_j) \leq a_j$ выполняется *строгое неравенство*

$$\sigma(A, m_i) < a_i, \quad i \in \mathcal{K}_A.$$

Граница ∂A множества A является объединением множеств $H_A(m_i)$:

$$\partial A = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} H_A(m_i).$$

В последней формуле можно оставить лишь индексы $i \in \mathcal{J}_A$, отвечающие существенным неравенствам в описании множества A , т.е.

$$\partial A = \bigcup_{i \in \mathcal{J}_A} H_A(m_i).$$

В заключение отметим важное соотношение

$$A = \text{conv } \partial A.$$

При $N = 1$ последнее соотношение неверно: в этом случае A — полупространство, ∂A — гиперплоскость, ограничивающее это полупространство.

14.2 Алгебраическая сумма двух многогранных множеств

Изучим вопрос об алгебраической сумме двух многогранных множеств, заданных в форме (124) и (125).

Утверждение 4 (об алгебраической сумме двух многогранных множеств).
Рассмотрим три множества

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : Mx \leq a \quad \}, \quad (131)$$

$$B = \{y \in \mathbb{R}^n : My \leq b \quad \}, \quad (132)$$

$$W = \{w \in \mathbb{R}^n : Mw \leq a + b\}, \quad (133)$$

предполагая, что все неравенства, определяющие множества A и B , являются существенными, т.е. $\mathcal{N} = \mathcal{J}_A = \mathcal{J}_B$ (эти предположения влекут непустоту множеств A и B , откуда следует непустота третьего множества W). Тогда алгебраическая сумма $A + B$ множеств A и B совпадает с множеством W :

$$A + B = W. \quad (134)$$

Множество W обладает свойством существенности всех описывающих его неравенств: $\mathcal{N} = \mathcal{J}_W$.

Доказательство.

I часть. Докажем сначала включение

$$\Sigma \equiv A + B \subset W, \quad (135)$$

где $\Sigma = \bigcup_{x \in A, y \in B} \{x + y\}$ — алгебраическая сумма множеств A и B .

Для любых элементов $x \in A$ и $y \in B$ имеем $Mx \leq a$, $My \leq b$, и сложение двух последних неравенств даёт $Mx + My \leq a + b$, или $M(x + y) \leq a + b$. Это в силу (133) означает, что

$$x + y \in W \quad \forall x \in A, y \in B,$$

и, следовательно, включение (135) доказано. В этом рассуждении предполагается лишь непустота множеств A и B , но не используется существенность неравенств в описании этих множеств.

Замечание 20. Из доказанного в **I части** следует, что для непустых множеств (131) и (132) (даже без условий $\mathcal{N} = \mathcal{J}_A = \mathcal{J}_B$) множество W , построенное по формуле (133), даёт оценку сверху для алгебраической суммы $A + B$.

II часть. Докажем теперь включение

$$W \subset \Sigma. \quad (136)$$

Так как множества A и B непустые, то и их алгебраическая сумма $\Sigma \neq \emptyset$, тогда, в силу установленного выше включения (135), множество W непусто. Кроме того, множество Σ , как алгебраическая сумма двух выпуклых замкнутых множеств, само является выпуклым и замкнутым.

В силу существенности всех неравенств в описании множеств A и B имеем при всех $i \in \mathcal{N}$:

$$\sigma(A, m_i) \equiv \max_{x \in A}(x, m_i) = a_i, \quad (137)$$

$$\sigma(B, m_i) \equiv \max_{y \in B}(y, m_i) = b_i, \quad (138)$$

$$\text{Argmax}_{x \in A}(x, m_i) = H_A(m_i) \neq \emptyset, \quad (139)$$

$$\text{Argmax}_{y \in B}(y, m_i) = H_B(m_i) \neq \emptyset. \quad (140)$$

Для всех $x \in H_A(m_i)$, $y \in H_B(m_i)$ получаем

$$(x + y, m_i) = a_i + b_i, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (141)$$

Из определения (133) множества W имеем:

$$\sigma(W, m_i) \equiv \max_{w \in W}(w, m_i) \leq a_i + b_i, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (142)$$

Из (141) можно прийти к выводу о том, что знак неравенства в (142) можно заменить знаком равенства

$$\sigma(W, m_i) \equiv \max_{w \in W}(w, m_i) = a_i + b_i, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (143)$$

Таким образом, все неравенства в описании множества W являются существенными

$$\text{Argmax}_{w \in W} = H_W(m_i) \neq \emptyset, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (144)$$

Кроме того, можно записать равенства

$$H_A(m_i) + H_B(m_i) = H_W(m_i), \quad i \in \mathcal{N}. \quad (145)$$

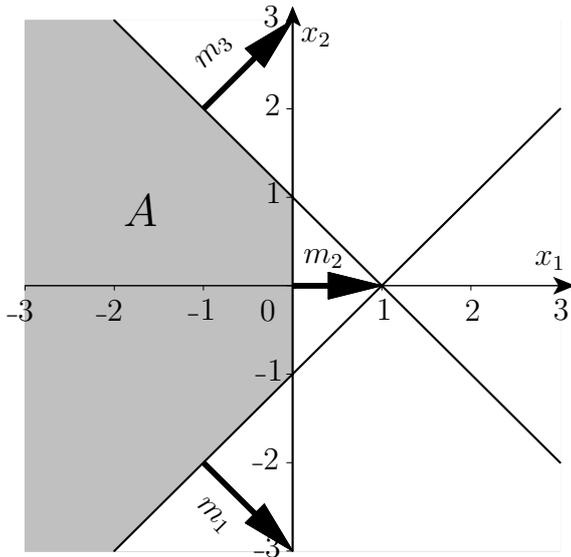


Рис. 51.

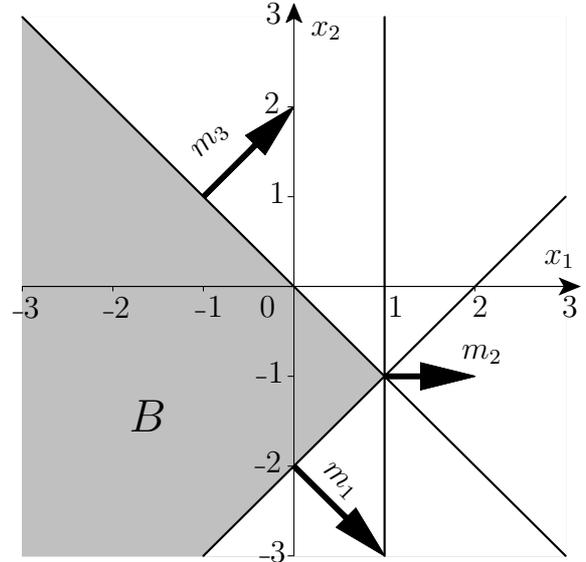


Рис. 52.

Но граница ∂W множества W допускает представление

$$\partial W = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} H_W(m_i). \quad (146)$$

В силу (145) имеем:

$$H_W(m_i) \subset \Sigma \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (147)$$

Соотношения (146), (147) позволяют записать включение

$$\partial W \subset \Sigma. \quad (148)$$

Теперь, опираясь на (148) и свойство выпуклости множества Σ , запишем цепочку соотношений

$$W = \text{conv } \partial W \subset \text{conv } \Sigma = \Sigma,$$

откуда следует, что $W \subset \Sigma$, т.е. искомое включение (136) обосновано.

Сопоставление установленных включений (135) и (136) приводит к доказательству равенства $\Sigma = W$ утверждения 4; существенность всех ограничений в описании множества W отмечено выше, см. (144). Утверждение 4 доказано.

Замечание 21. Отметим важный качественный результат, выражаемый формулой (145): *опорные множества алгебраической суммы равны алгебраической сумме соответствующих опорных множеств слагаемых.* Этот результат можно рассматривать как дискретный аналог правила сложения опорных точек при алгебраическом сложении строго выпуклых множеств, которое выражается формулой

$$c'(A + B, \psi) = c'(A, \psi) + c'(B, \psi).$$

Замечание 22. Утверждение 4 является некоторым дискретным аналогом свойства аддитивности опорной функции по первому аргументу (множеству):

$$c(A + B, \psi) = c(A, \psi) + c(B, \psi).$$

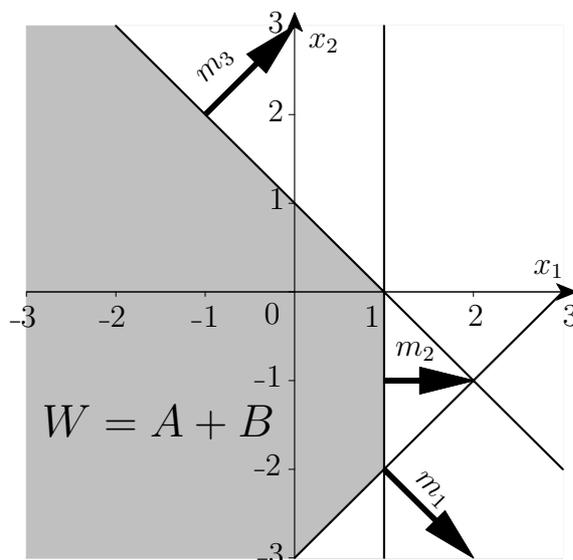


Рис. 53.

Пример 12. Для иллюстрации утверждения 4 рассмотрим множества

$$A = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

и

$$B = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \end{array} \right\}.$$

В рассматриваемом примере имеем: $N = 3$, $n = 2$,

$$\begin{array}{llll} m_1 = (1, -1), & a_1 = 1, & b_1 = 2, & a_1 + b_1 = 3, \\ m_2 = (1, 0), & a_2 = 0, & b_2 = 1, & a_2 + b_2 = 1, \\ m_3 = (1, 1), & a_3 = 1, & b_3 = 0, & a_3 + b_3 = 1, \end{array}$$

$$W = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Множества A , B , W показаны заливкой на рис. 51, 52, 53. В описании множеств A , B , W все неравенства являются существенными. В описании множества B второе неравенство можно было бы отбросить без изменения множества B , см. рис. 52, но утверждение 4 предусматривает сохранение всех N существенных неравенств. Все множества ограничены кусками прямых с векторами нормалей m_1 , m_2 , m_3 . Соответствующий кусок прямой с вектором нормали m_2 для множества B (прямая $x_1 = 1$) вырождается в одну точку. Алгебраическая сумма $A + B = W$ показана на рис. 53 и имеет форму бесконечного усечённого прямого угла (пересечение трёх полуплоскостей). Отметим, что в утверждении 4 ограниченность множеств A , B , W не предполагается.

Опорные множества $H_A(m_i)$, $H_B(m_i)$, $H_W(m_i)$ связаны зависимостью, см. (145),

$$H_A(m_i) + H_B(m_i) = H_W(m_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (149)$$

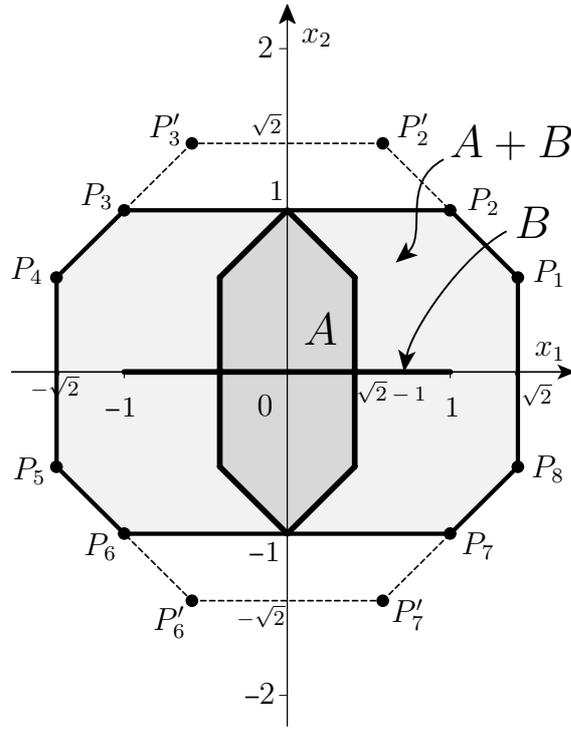


Рис. 54.

Здесь

$$H_A(m_1) = \{x_2 = x_1 - 1, x_1 \leq 0\} \quad \text{— полупрямая,}$$

$$H_A(m_2) = \{x_1 = 0, |x_2| \leq 1\} \quad \text{— отрезок,}$$

$$H_A(m_3) = \{x_2 = -x_1 + 1, x_1 \leq 0\} \quad \text{— полупрямая,}$$

$$H_B(m_1) = \{x_2 = x_1 - 2, x_1 \leq 1\} \quad \text{— полупрямая,}$$

$$H_B(m_2) = \{x_1 = 1, x_2 = -1\} \quad \text{— точка,}$$

$$H_B(m_3) = \{x_2 = -x_1, x_1 \leq 1\} \quad \text{— полупрямая,}$$

$$H_W(m_1) = \{x_2 = x_1 - 3, x_1 \leq 1\} \quad \text{— полупрямая,}$$

$$H_W(m_2) = \{x_1 = 1, -2 \leq x_2 \leq 0\} \quad \text{— отрезок,}$$

$$H_W(m_3) = \{x_2 = -x_1 + 1, x_1 \leq 1\} \quad \text{— полупрямая,}$$

см. рис. 51, 52, 53. Проверка равенств (149) производится непосредственно.

Замечание 23. Утверждение 4 без предположения о существенности всех неравенств в каждом из множеств A и B может быть неверным. Это и замечание 20 об оценке сверху для алгебраической суммы иллюстрируется следующим примером.

Пример 13. Рассмотрим два множества: $A = \{|x_1| \leq \sqrt{2} - 1, |x_1 \pm x_2| \leq 1\}$ — шестиугольник, $B = \{|x_1| \leq 1, x_2 = 0\}$ — отрезок. Их алгебраическая сумма $A + B$ является восьмиугольником $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8$, см. рис. 54.

Представим множество A системой неравенств

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : (m_i, x) \leq a_i, i = 1, \dots, N\},$$

$$m_i = q(\alpha_i) \equiv (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i), \alpha_i = \frac{\pi}{4}(i - 1), i = 1, \dots, N; N = 8,$$

$$(q(\alpha_i), x) = \cos \alpha_i \cdot x_1 + \sin \alpha_i \cdot x_2,$$

$$a_i = \begin{cases} \sqrt{2} - 1, & i = 1, 5; \\ \sqrt{2}, & i = 3, 7; \\ 1/\sqrt{2}, & i = 2, 4, 6, 8. \end{cases}$$

Здесь неравенства с номерами $i = 3, i = 7$ являются строго несущественными.

Аналогичное представление запишем для множества B :

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 : (m_i, x) \leq b_i, i = 1, \dots, N\},$$

$$N = 8, \quad b_i = \begin{cases} 1, & i = 1, 5; \\ 0, & i = 3, 7; \\ 1/\sqrt{2}, & i = 2, 4, 6, 8. \end{cases}$$

Все неравенства в описании множества B являются существенными. Построенное по формулам (126) множество

$$W = \{x \in \mathbb{R}^2 : (m_i, x) \leq a_i + b_i, i = 1, \dots, N\},$$

где $a_i + b_i = \sqrt{2}, i = 1, \dots, N, N = 8$, представляет собой восьмиугольник $P_1 P'_2 P'_3 P_4 P_5 P'_6 P'_7 P_8$, который не совпадает с алгебраической суммой $A + B$ — восьмиугольником $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8$, см. рис. 54.

Если в описании множества A превратить третье и седьмое строго несущественные неравенства заменой $a_3 = \sqrt{2} \rightarrow a'_3 = 1, a_7 = \sqrt{2} \rightarrow a'_7 = 1$ в существенные неравенства, то построенное по формулам (126) множество W' (с параметрами $a'_3 + b_3 = 1, a'_7 + b_7 = 1, a_i + b_i = \sqrt{2}$ при остальных индексах i) совпадёт с алгебраической суммой $A + B$. В рассматриваемом примере 13 с подправленными описаниями множеств A и W , когда все неравенства существенны, непосредственно проверяется справедливость соотношений (145).

14.3 Геометрическая разность двух многогранных множеств

Обратимся сейчас к изучению геометрической разности двух многогранных множеств.

Утверждение 5 (о геометрической разности двух многогранных множеств). *Рассмотрим три множества*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : Mx \leq a \quad \}, \quad (150)$$

$$B = \{y \in \mathbb{R}^n : My \leq b \quad \}, \quad (151)$$

$$Z = \{z \in \mathbb{R}^n : Mz \leq a - b\}, \quad (152)$$

предполагая, что $A \neq \emptyset$, и, что все неравенства, определяющие множество B , являются существенными, т.е. $\mathcal{N} = \mathcal{J}_B$ (это предположение влечёт непустоту множества B). Тогда геометрическая разность $D \equiv A \star B$ множеств A и B совпадает с множеством Z :

$$A \star B = Z. \quad (153)$$

Доказательство.

I часть. Докажем сначала включение

$$Z \subset D, \quad (154)$$

где $D \equiv \{d \in \mathbb{R}^n : d + B \subset A\}$.

Пусть $Z \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольный вектор $z \in Z$ и произвольный вектор $y \in B$. Для них имеют место неравенства

$$Mz \leq a - b, \quad My \leq b.$$

Для суммы $z + y$ получаем, используя два последних неравенства,

$$M(z + y) = Mz + My \leq (a - b) + b = a \implies M(z + y) \leq a,$$

т.е.

$$z + y \in A \quad \forall z \in Z, \forall y \in B,$$

или

$$z + B \subset A \quad \forall z \in Z \implies z \in D \quad \forall z \in Z,$$

что влечёт включение (154).

Отметим, что в **I части** доказательства показано, что

$$Z \neq \emptyset \implies D \neq \emptyset, \quad (155)$$

следовательно,

$$D = \emptyset \implies Z = \emptyset. \quad (156)$$

Замечание 24. Из доказанного в **I части** следует, что для непустых множеств (150) и (151) (даже без условия $\mathcal{N} = \mathcal{J}_B$) множество Z , построенное по формуле (152), даёт оценку снизу для геометрической разности D .

II часть. Докажем теперь включение

$$D \subset Z. \quad (157)$$

Пусть $D \neq \emptyset$. По определению геометрической разности D для любых векторов $d \in D$ и $y \in B$ имеет место включение $d + y \in A$, которое влечёт неравенства

$$M(d + y) \leq a \iff Md + My \leq a. \quad (158)$$

Для доказательства включения (157) следует проверить, что для любого $d \in D$ имеет место включение $d \in Z$, которое равносильно неравенству

$$Md \leq a - b. \quad (159)$$

Докажем неравенство (159) от противного. Предположим, что существует элемент $d_* \in D$, не принадлежащий множеству Z . Тогда найдётся индекс $i = i(d_*) \in \mathcal{N}$ такой, что для индекса $i(d_*)$ выполняется строгое неравенство

$$(m_{i(d_*)}, d_*) > a_{i(d_*)} - b_{i(d_*)}. \quad (160)$$

В силу существенности *всех* неравенств в определении множества B найдётся точка $y_* \in B$ такая, что для индекса $i(d_*)$ выполняется равенство

$$(m_{i(d_*)}, y_*) = b_{i(d_*)}. \quad (161)$$

Из (160), (161) получаем

$$(m_{i(d_*)}, d_*) > a_{i(d_*)} - b_{i(d_*)} = a_{i(d_*)} - (m_{i(d_*)}, y_*),$$

откуда

$$(m_{i(d_*)}, d_* + y_*) > a_{i(d_*)} \implies d_* + y_* \notin A,$$

т.к. это противоречит системе неравенств (158). Таким образом, получено противоречие. Неравенство (159) доказано, что влечёт включение (157).

Отметим, что во **II части** доказательства показано, что

$$D \neq \emptyset \implies Z \neq \emptyset, \quad (162)$$

следовательно,

$$Z = \emptyset \implies D = \emptyset, \quad (163)$$

Сопоставление включений (154) и (157) приводит к равенству $D = Z$. Сравнение установленных соотношений (155), (156), (162), (163) показывает, что множества Z и D пусты или непусты одновременно. Утверждение 5 доказано полностью.

Утверждение 5 может быть положено в основу алгоритма построения геометрической разности $A \stackrel{*}{\approx} B$, если известны опорные функции $c(A, \psi)$ и $c(B, \psi)$ двух выпуклых компактов A и B . При выборе достаточно представительной сетки из единичных векторов ψ_1, \dots, ψ_N имеем

$$\begin{aligned} A \approx A_N &\equiv \{x \in \mathbb{R}^n : (\psi_i, x) \leq c(A, \psi_i), i = 1, \dots, N\}, \\ B \approx B_N &\equiv \{x \in \mathbb{R}^n : (\psi_i, x) \leq c(B, \psi_i), i = 1, \dots, N\}, \end{aligned}$$

и, таким образом, множества A_N и B_N описаны в форме (124), (125), причём в описании этих множеств все неравенства существенны.

Пример 14. Пусть $A = \{|x_1| \leq \sqrt{2}, |x_2| \leq \sqrt{2}, |x_1 \pm x_2| \leq 2\}$ — восьмиугольник (пересечение двух квадратов $\{|x_1| \leq \sqrt{2}, |x_2| \leq \sqrt{2}\}$ и $\{|x_1 \pm x_2| \leq 2\}$), $B = \{x_1 = 0, |x_2| \leq 1\}$ — отрезок. Их геометрическая разность $D = A \stackrel{*}{\approx} B$ — шестиугольник, см. рис. 55. Множество A является правильным восьмиугольником, описанным вокруг круга $S_{\sqrt{2}}(0)$. Представим эти множества в форме

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}^2 : (m_i, x) \leq a_i, i = 1, \dots, N\}, \\ m_i = q(\alpha_i) &\equiv (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i), \alpha_i = \frac{\pi}{4}(i-1), i = 1, \dots, N; N = 8, \\ a_i &= \sqrt{2}, i = 1, \dots, N; \\ B &= \{x \in \mathbb{R}^2 : (m_i, x) \leq b_i, i = 1, \dots, N\}, \\ N = 8, \quad b_i &= \begin{cases} 1, & i = 1, 5; \\ 0, & i = 3, 7; \\ 1/\sqrt{2}, & i = 2, 4, 6, 8, \end{cases} \end{aligned}$$

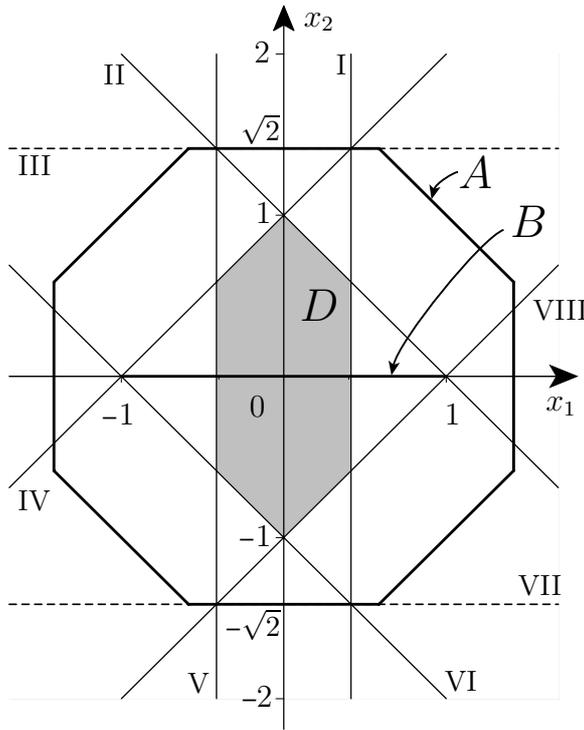


Рис. 55.

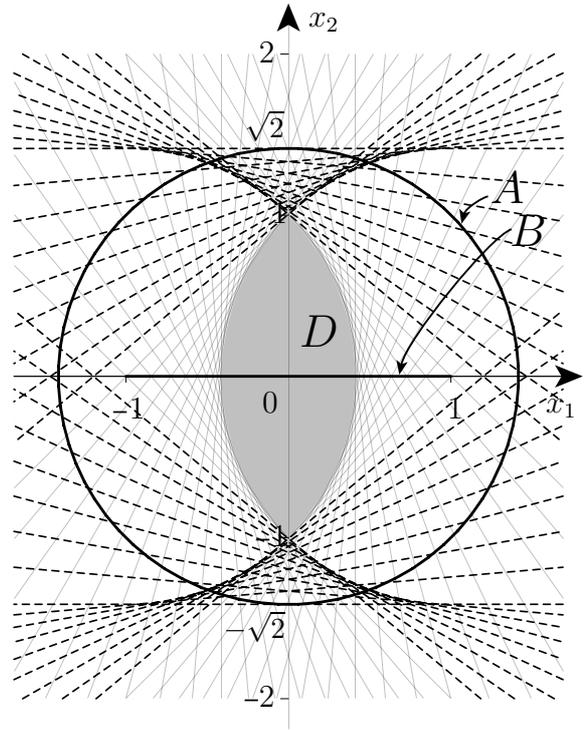


Рис. 56.

где все неравенства в этом описании множеств A и B являются существенными. По формулам (127) построим множество

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^2 : (m_i, x) \leq a_i - b_i, i = 1, \dots, N\},$$

$$N = 8, \quad a_i - b_i = \begin{cases} \sqrt{2} - 1, & i = 1, 5; \\ \sqrt{2}, & i = 3, 7; \\ 1/\sqrt{2}, & i = 2, 4, 6, 8. \end{cases}$$

Это множество Z является геометрической разностью $D = A * B$, см. рис. 55. Неравенства с номерами $i = 3$ и $i = 7$ в описании множества Z являются строго несущественными, см. рис. 55, где прямые III и VII не имеют общих точек с множеством Z , в отличие от остальных прямых $I - VIII$. Моделью для данного примера служит пример 1, где, напомним, $A = S_{\sqrt{2}}(0)$, $B = \{x_1 = 0, |x_2| \leq 1\}$, $D = L \equiv \{S_{\sqrt{2}}(-1, 0) \cap S_{\sqrt{2}}((1, 0))\}$ — лунка, причём параметр $N = 8$. При выборе параметра $N = 72$ получаем картину, показанную на рис. 56.

Для изображения множеств, заданных системами линейных неравенств на плоскости, можно воспользоваться стандартными средствами программы Maple. В данном разделе геометрическая разность определяется именно таким образом.

Если множества A и B заданы своими опорными функциями, то задача построения геометрической разности на основе утверждения 5 требует решения задач линейного программирования. В плоском случае единичные вектора (строки матрицы M) имеют вид $q(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Упомянутая задача линейного программирования

$$(q(\alpha), x) \rightarrow \max_x$$

при ограничениях

$$(q(\alpha_i), x) \leq c(A, q(\alpha_i)) - c(B, q(\alpha_i)), \quad i = 1, \dots, N,$$

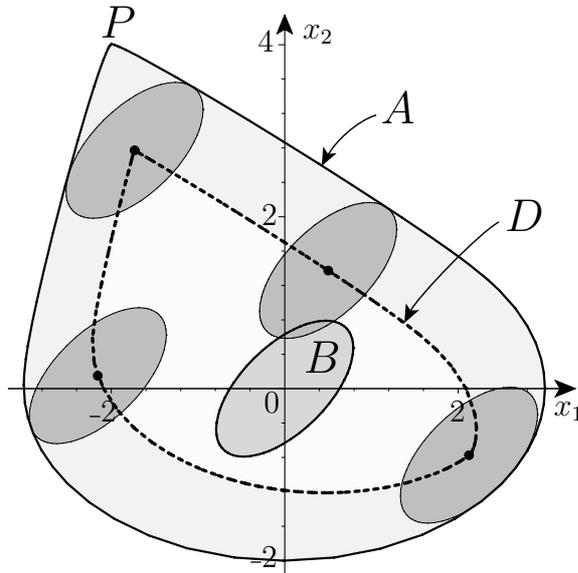


Рис. 57.

позволяет найти максимизатор $x(\alpha)$ этой задачи и определить функцию $s_0(\alpha)$ — сужение опорной функции $c(Z, \psi)$ на единичную окружность. Производная $s'_0(\alpha)$ находится приближённо методом численного дифференцирования. Построение ∂Z выполняется с привлечением параметрических уравнений (123).

Замечание 25. При нахождении геометрической разности на основании утверждения 5, среди линейных неравенств, определяющих множество Z , могут встретиться строго несущественные неравенства. Эти неравенства можно превратить в существенные, например, решая соответствующую задачу линейного программирования.

Пример 15. Рассмотрим точку $P = (-2, 4)$ и эллипс $E = \{x_1^2/9 + x_2^2/4 = 1\}$. Пусть $A = \text{conv}\{P \cup E\}$ — выпуклая оболочка объединения точки P и эллипса E , а B — выпуклое множество, ограниченное эллипсом и определяемое опорной функцией

$$c(B, \psi) = \sqrt{\frac{1}{4}(\psi_1 - \psi_2)^2 + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)^2}.$$

Множества A , B и их геометрическая разность $D = A \star B$ показаны на рис. 57. Алгоритм расчёта основан на утверждении 5.

Замечание 26. Если множества

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}^n : M_A x \leq a_A\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R}^n : M_B x \leq b_B\}, \end{aligned}$$

заданы неравенствами с разными матрицами, то можно перейти к заданию этих множеств в форме (124), (125) с одной и той же матрицей M . Строки матриц M_A и M_B можно считать пронормированными. В новую матрицу M включаются 1) одинаковые строки матриц M_A и M_B (если таковые существуют), 2) оставшиеся строки этих матриц. Вычисление *неизвестных* правых частей новых неравенств можно выполнить, решая соответствующие задачи линейного программирования. При этом нельзя исключить обращения в плюс бесконечность некоторых правых частей новых неравенств. Данное замечание показывает естественность задания множеств (124), (125) с одной и той же матрицей M . Полученные в разделе 14 результаты показывают, что

граница алгебраической суммы и геометрической разности множеств A и B состоит из кусков гиперплоскостей, нормали к которым являются строками матрицы M , то есть нормальными опорных гиперплоскостей множеств A и B .

15 Пример задачи быстродействия с областью управления, имеющей форму лунки

Рассмотрим пример решения линейной задачи быстродействия с областью управления, имеющей форму лунки [6].

В статьях [6], [7] описаны алгоритмы решения нелинейных краевых задач для ОДУ с гладкими правыми частями, реализующая их **Программа**, написанная для среды Maple, и некоторые примеры расчетов. Основанные на идее вариации параметров, алгоритмы ориентированы на возможности проведения аналитических вычислений в среде Maple. Например, формирование **Программой** системы уравнений в вариациях и выполнение ряда других операций производятся в аналитической форме средствами среды. Прямое применение этих результатов в краевых задачах принципа максимума Понтрягина при управлениях разрывного типа может оказаться невозможным без определенной подготовки (“регуляризации” сглаживания) решаемой задачи управления. Сглаживание негладкой области управления U , т.е. построение ее гладкой выпуклой аппроксимации U_μ , предполагает конструктивное описание опорной функции сглаженного множества U_μ . Для множеств U , представимых в виде алгебраической суммы, выпуклой оболочки объединения множеств с известной гладкой выпуклой аппроксимацией, последняя задача решается легко. Труднее работать с множествами U , заданными в форме пересечения нескольких множеств или в виде геометрической разности. Пример сглаживания лунки дан ниже.

Пример 16. Задача быстродействия с областью управления U в форме лунки:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, & x_1(0) = a_1, \quad x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 - \alpha x_2 + u_2, & x_2(0) = a_2, \quad x_2(T) = 0, \\ u = (u_1, u_2) \in U = S_{\sqrt{2}}((+1, 0)) \cap S_{\sqrt{2}}((-1, 0)), \\ \alpha = 0.25, \quad \beta = 1.5, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 1. \end{cases}$$

Сглаженная выпуклая лунка U_μ описывается опорной функцией

$$c(U_\mu, \psi) = \left(\sqrt{2(q_1^2 + q_2^2)} - \sqrt{q_1^2} \right) \Big|_{q_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 + \psi_2)^2} + \sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 - \psi_2)^2}), \quad q_2 = \psi_2},$$

где $\mu > 0$ — малый параметр сглаживания. Поиск решения сведен к нелинейной краевой задаче принципа максимума Понтрягина сглаженной задачи, в безразмерном времени, из пяти уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = T(x_2 + c'_{\psi_1}(U_\mu, \psi)), & x_1(0) = a_1, & x_1(1) = 0, \\ \dot{x}_2 = T(-\beta x_1 - \alpha x_2 + c'_{\psi_2}(U_\mu, \psi)), & x_2(0) = a_2, & x_2(1) = 0, \\ \dot{\psi} = -TA^*\psi, & \psi_1(1)^2 + \psi_2(1)^2 = 1, \\ \dot{T} = 0, \\ 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

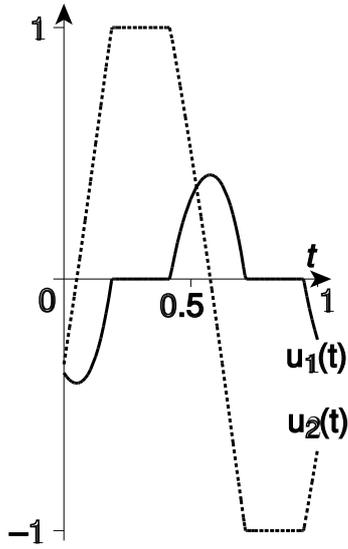


Рис. 58.

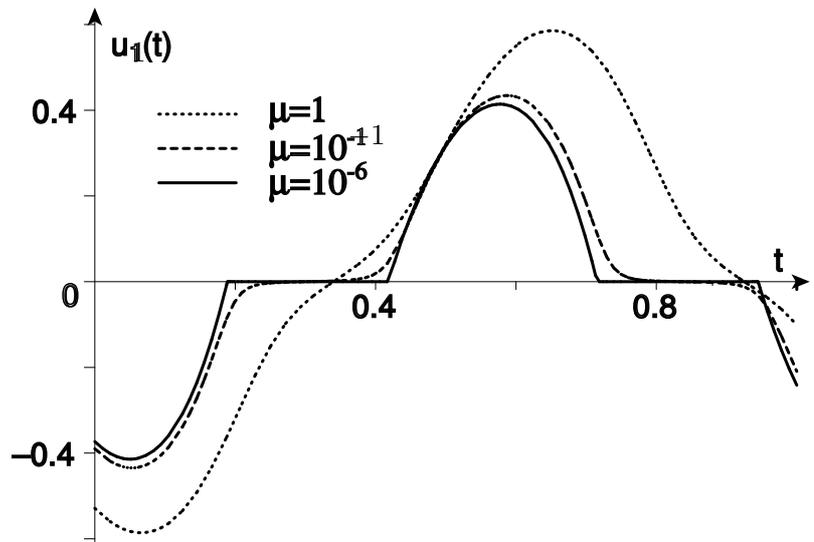


Рис. 59.

Решение краевой задачи при малых μ дает приближения к оптимальному процессу. На рис. 58 показаны графики управлений $u_1(t), u_2(t), \mu = 10^{-6}$, на рис. 59 — графики $u_1(t)$ для трех значений $\mu = 1, 10^{-1}, 10^{-6}$. Вычисления выполнены с помощью упомянутой выше **Программы**.

Пример 17. Задача быстрогодействия:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = u, & x \in R^m, u \in U \subset R^m, \alpha, \beta \in R^{m \times m}, \\ x(0) = a_0, \dot{x}(0) = b_0, & x(T) = a_1, \dot{x}(T) = b_1, \\ T \rightarrow \min. \end{cases}$$

При $m = 2$ область управления U — лунка, при $m = 3$ — тело, полученное вращением лунки вокруг её вертикальной оси. Применяется описанная выше схема. Краевая задача принципа максимума содержит $4m + 1$ уравнений. Область управления конструктивно сглаживается до телесного выпуклого компакта в пространстве R^{2m} .

Внимание авторов к изучению этих примеров привлек А.А.Чикрий. Такие задачи возникают при решении некоторых дифференциальных игр.

16 Примеры построения множеств достижимости (управляемости) в плоских линейных управляемых системах

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u; & x \in \mathbb{R}^2; u \in U \subset \mathbb{R}^2, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (164)$$

где область управления U — выпуклый компакт, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — известная матрица, $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ — заданное начальное состояние. Множество достижимости $X(T)$ системы (164) в момент времени T является выпуклым компактом. Множество

$X(T)$ описывается опорной функцией

$$c(X(T), p) = (x_0, e^{TA^*} p) + \int_0^T c(U, e^{tA^*} p) dt, \quad p \in \mathbb{R}^2. \quad (165)$$

При

$$e^{tA^*} = \begin{pmatrix} e_{11}(t) & e_{12}(t) \\ e_{21}(t) & e_{22}(t) \end{pmatrix}$$

имеем:

$$e^{TA^*} p = \begin{pmatrix} e_{11}(T) p_1 + e_{12}(T) p_2 \\ e_{21}(T) p_1 + e_{22}(T) p_2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

$$(x_0, e^{TA^*} p) = x_{01}(e_{11}(T) p_1 + e_{12}(T) p_2) + x_{02}(e_{21}(T) p_1 + e_{22}(T) p_2).$$

Приведём правило построения экспоненциала для любой квадратной матрицы второго порядка.

Утверждение 6 (об экспоненциале квадратной матрицы второго порядка). *Имеет место следующие формулы:*

$$e^{tA} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}) I + (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) A \right], \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1,$$

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left[(1 - \lambda t) I + tA \right], \quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}^1,$$

$$e^{tA} = \frac{e^{\rho t}}{\nu} \left[(\nu \cos(\nu t) - \rho \sin(\nu t)) I + \sin(\nu t) A \right], \quad \lambda_{1,2} = \rho \pm i\nu,$$

здесь $\lambda_{1,2}$ — собственные значения матрицы A , I — единичная матрица, i — мнимая единица.

Обсудим вопрос о практической реализации процесса построения множества достижимости $X(T)$ по его опорной функции (165). Интеграл в правой части (165) представим приближённо суммой

$$\sigma(p, N) = \sum_{n=1}^N \frac{T}{N} c(U, e^{n \frac{T}{N} A^*} p),$$

где N — число узлов. Функцию (165) приближённо представляет функция

$$s(p, N) = (x_0, e^{TA^*} p) + \sigma(p, N).$$

Полагаем

$$\begin{cases} s_0(\alpha) = s(p, N)|_{p=q(\alpha)}, & q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \\ ds_0(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} s_0(\alpha). \end{cases} \quad (166)$$

Разумеется, функции (166) зависят от не только от углового параметра α , но и от времени T , от числа узлов N . Граница $\partial X(T)$ множества достижимости описывается приближённо параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = s_0(\alpha) \cos(\alpha) - ds_0(\alpha) \sin(\alpha), \\ x_2 = s_0(\alpha) \sin(\alpha) + ds_0(\alpha) \cos(\alpha), \\ \alpha \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (167)$$

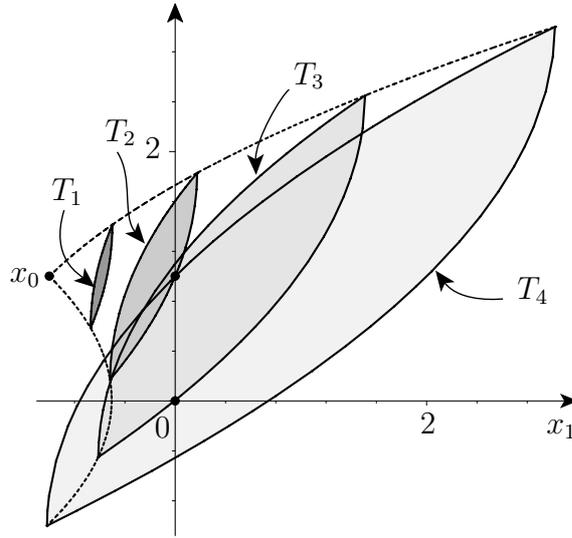


Рис. 60.

При необходимости опорная функция области управления U может быть взята в сглаженной форме с малым параметром сглаживания.

Приведём некоторые примеры расчётов, выполненных в среде Maple на основе уравнений (167).

Пример 18. Для управляемого объекта (164), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \{u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(тележка) построить множество достижимости для моментов времени

$$T_1 = \sqrt{2} - 1, \quad T_2 = 2(\sqrt{2} - 1), \quad T_3 = \sqrt{6} - 1, \quad T_4 = 2. \quad (168)$$

Результаты расчётов показаны на рис. 60. Число узлов $N = 100$.

Пример 19. Для управляемого объекта из предыдущего примера построить множества достижимости в случае $x_0 = 0$. Результаты расчётов представлены на рис. 61. При изменении знаков параметров (168) получим изохроны, см. рис. 62.

Пример 20. В случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = L \equiv S_{\sqrt{2}}(-1, 0) \cap S_{\sqrt{2}}(1, 0), \quad x_0 = 0, \quad T = 2$$

построить множество достижимости $X(T)$. Результат расчёта показан на рис. 63. Вторая кривая на этом рисунке представляет границу $\partial X(2)$ множества достижимости $X(2)$ из примера 16.2 с областью управления, имеющей форму отрезка

$$U = \{u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}.$$

Последняя область показана на рис. 63 светлой заливкой. Расширение области управления влечёт расширение множества достижимости (при $x_0 = 0$).

Пример 21. В случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c(U, \psi) = 2\psi_1 \arcsin\left(\frac{\psi_1}{\|\psi\|}\right) + 2|\psi_2|, \quad x_0 = 0$$

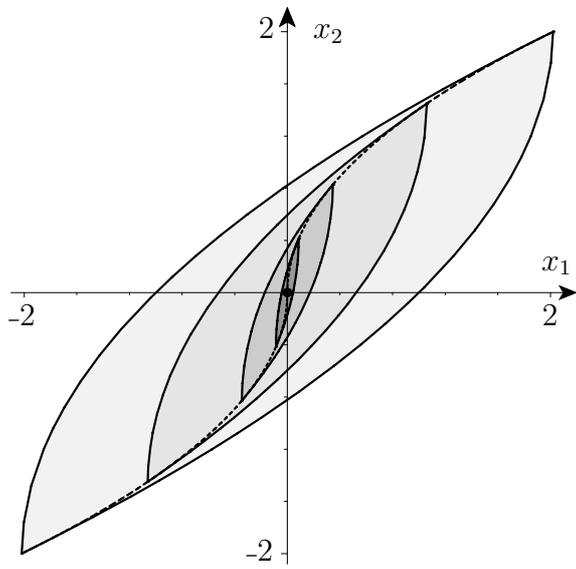


Рис. 61.

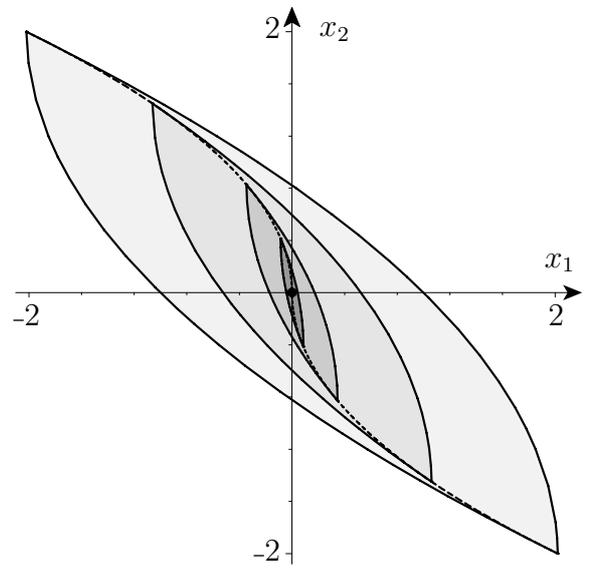


Рис. 62.

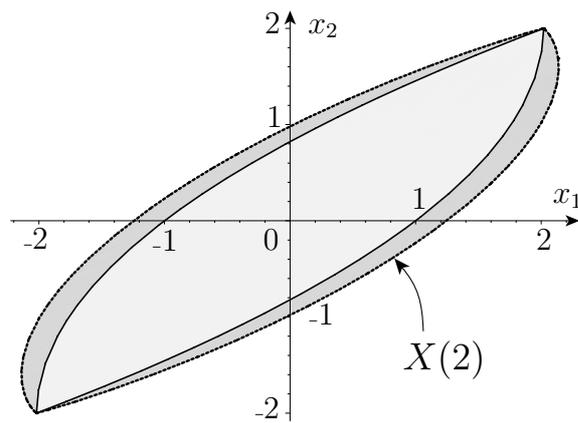


Рис. 63.

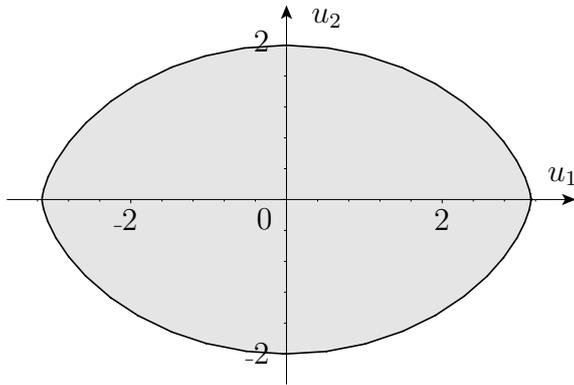


Рис. 64.

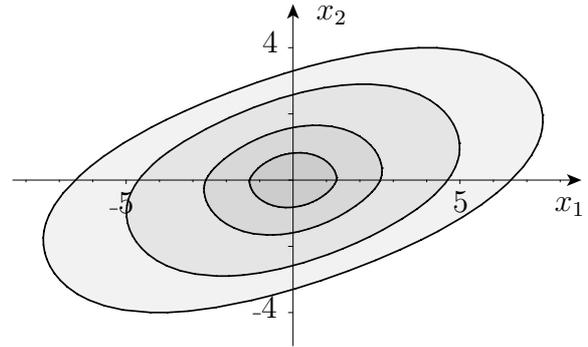


Рис. 65.

построить множества достижимости $X(T)$ для моментов времени (168). Область управления U является центрально-симметричным множеством, ограниченным двумя арками циклоиды, см. рис. 64. Верхняя половина границы ∂U описывается параметрическими уравнениями

$$u_1 = t - \sin t - \pi, \quad u_2 = 1 - \cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Множества достижимости $X(T)$ для моментов времени (168) показаны на рис. 65.

Замечание 27 (о характере аппроксимации выпуклого компакта на основе отрезка ряда Фурье). Обсудим этот вопрос на примере множества, имеющего форму треугольника. Рассмотрим множество $U = \{u_1 + u_2 \leq 1, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$ — треугольник с опорной функцией

$$c(\psi) = \max\{0, \psi_1, \psi_2\}.$$

Рассмотрим функцию

$$c_0(\alpha) = c(\psi) \Big|_{\psi_1=\cos(\alpha), \psi_2=\sin(\alpha)}$$

— сужение опорной функции $c(\cdot)$ на единичную окружность. Множество U однозначно определяется функцией $c_0(\cdot)$. Построим отрезок ряда Фурье для функции $c_0(\cdot)$:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_0(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_0(t) \sin(nt) dt.$$

Прямые вычисления дают

$$a_0 = \frac{2 + \sqrt{2}}{\pi}, \quad a_1 = b_1 = \frac{3}{8},$$

$$a_k = -\frac{\cos(\frac{\pi}{2}k) + \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4}k) + (-1)^k}{\pi(k^2 - 1)}, \quad b_k = -\frac{-\sin(\frac{\pi}{2}k) + \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4}k)}{\pi(k^2 - 1)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Параметры $a_1 = b_1 = 3/8$ определяют координаты центра Штейнера множества U .

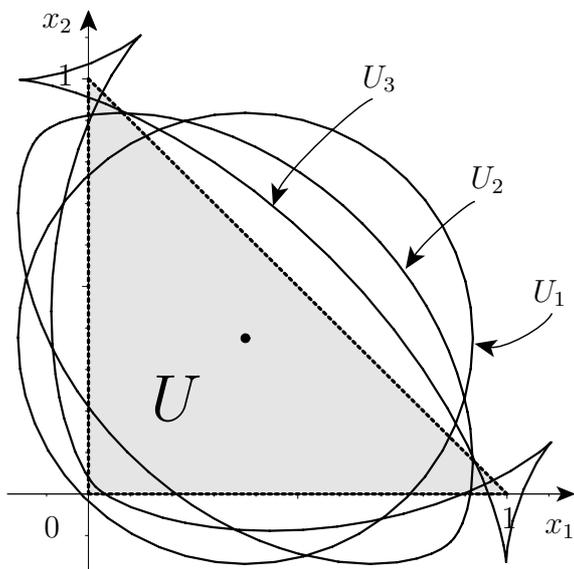


Рис. 66.

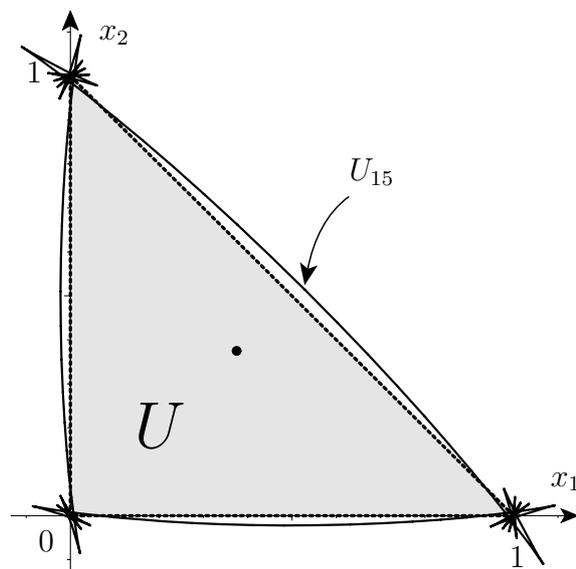


Рис. 67.

Запишем по образцу формул (167) параметрические уравнения

$$\begin{cases} x_1 = S_N(t) \cos(t) - \dot{S}_N(t) \sin(t), \\ x_2 = S_N(t) \sin(t) + \dot{S}_N(t) \cos(t), \\ t \in [0, 2\pi], \quad N \geq 1. \end{cases} \quad (169)$$

На рис. 66 показаны кривые U_1, U_2, U_3 , определяемые параметрическими уравнениями (169), при $N = 1, 2, 3$ соответственно. Треугольник U показан заливкой. Кривая U_1 является окружностью радиуса $a_0/2 \approx 1.087$ с центром $(3/8, 3/8)$.

На рис. 67 построена аналогичная кривая U_{15} при $N = 15$.

Получаемые аппроксимации границы могут иметь невыпуклый характер (при $N > 2$), с “хвостами”.

Изложенные в замечании 27 анализ примера и представленный экспериментальный материал не позволяют сделать вывод о перспективности рассмотренного в этом замечании подхода для аппроксимации границы плоского выпуклого компакта (в том числе и множества достижимости). Основную причину этого вывода можно усмотреть в отсутствии выпуклости получаемых аппроксимаций, в отличие от изложенного в начале данного раздела. При достаточно большом коэффициенте $a_0/2$, обеспечивающего выполнение неравенства $\ddot{S}_N(t) + S_N(t) \geq 0$, изложенный подход вполне работоспособен. Увеличение коэффициента $a_0/2$ происходит при алгебраическом сложении множества с кругом $S_R(0)$.

Список литературы

- [1] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М. Высшая школа. 2001.
- [2] Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. М. МГУ. 1984.
- [3] Киселёв Ю.Н. Оптимальное управление. М. МГУ. 1988.

- [4] Киселёв Ю.Н. Линейная теория быстрогодействия с возмущениями. М. МГУ. 1986.
- [5] Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. Методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина. // Труды МИ РАН им. В.А.Стеклова. 1995. т. 211. С. 3-31.
- [6] Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Примеры решения краевых задач принципа максимума. // Конференция “Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках”. Воронеж, 20-27 января 2000 г. Тезисы докладов. Воронеж. 2000. С. 7.
- [7] S. Avvakumov, Yu. Kiselev. Boundary value problem for ODE with applications to optimal control. // Report at the Conference SSI-2004. USA. Orlando. Florida. 5 p.
- [8] Аввакумов С.Н. Гладкая аппроксимация выпуклых компактов. // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. Екатеринбург. 1996. Т.4. С. 184-200.
- [9] Киселёв Ю.Н. Быстросходящиеся алгоритмы решения линейной задачи быстрогодействия. // Кибернетика. Киев. 1990, №12, С. 47-57, 62.
- [10] Черников С.Н. Линейные неравенства. М. Наука. 1968.
- [11] Bruce W. Char, Keith O. Geddes, Gaston H. Gonnet, Benton L. Leong, Michael V. Monagan, Stephen M. Watt. First Leaves: A Tutorial Introduction to MAPLE. Manual. Springer-Verlag, New York, 1992.