УДК 517.977

О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования

Никольский М. С.

В работе [1] Л. С. Понтрягин ввел понятие альтернированного интеграла (полное изложение результатов [1] содержится в [2]), которое используется для решения задачи качества в линейных дифференциальных играх преследования при определенной информационной дискриминации убегающего по сравнению с преследователем. В [3] было введено понятие нижнего альтернированного интеграла (как отмечено в [3], альтернированный интеграл в связи с этим новым понятием естественно называть верхним альтернированным интегралом), которое оказывается полезным при решении задачи качества при определенной информационной дискриминации преследователя по сравнению с убегающим. Это обстоятельство представляет теоретический и прикладной интерес. В настоящей статье вводится несколько иное определение нижнего альтернированного интеграла (которое оказывается полезным для исследования линейных нестационарных дифференциальных игр преследования) и изучаются его свойства, представляющие интерес для теории дифференциальных игр и ее приложений.

§ 1. Нижний альтернированный интеграл Понтрягина и его свойства

Пусть A, B — произвольные множества из евклидова пространства R^n. Их алгебраической суммой $A+B$ называется множество $C=\{c\in R^n: c=a+b, a\in A, b\in B\}$. Отметим, что $A+\varnothing=\varnothing$ для любого A.

Пусть $A\subset R^n$ — произвольное множество, а λ — произвольное действительное число. Произведением λA называется множество

$$C=\{c\in R^n: c=\lambda a, a\in A\}.$$

Пусть A, $B\subset R^n$ — произвольные множества. Геометрической разностью $A\overset{*}{-}B$ называется множество

$$C=\{c\in R^n: c+B\subset A\}.$$

Отметим, что $\varnothing\overset{*}{-}B=\varnothing$ для любого $B\neq\varnothing$. Говорят, что множество B полностью выметает множество A, если $(A\overset{*}{-}B)+B=A$.

Нетрудно доказать следующие свойства введенных операций. Пусть A, U, V — множества из R^n, тогда (см. [1], [2])

$$(A\overset{*}{-}U)\overset{*}{-}V=A\overset{*}{-}(U+V), \tag{1}$$

$$(A+U)\overset{*}{-}V\supset(A\overset{*}{-}V)+U. \tag{2}$$

Пусть $U(\tau)$, $V(\tau)$ — непустые компакты из R^n, зависящие измеримым образом от $\tau\in[p, q]$, где $p<q$ (см., например, [4]), причем существуют такие неотрицательные функции $a(\tau)$, $b(\tau)$, суммируемые по Лебегу на $[p, q]$, что $\forall u\in U(\tau)$ и $\forall v\in V(\tau)$ выполнены неравенства: $|u|\leqslant a(\tau)$, $|v|\leqslant V(\tau)$. Пусть $\omega=\{r_i\}_0^N$ — некоторое разбиение отрезка $[p, q]$: $p=$

$=r_0<r_1<\ldots<r_N=q$, где $N\geqslant 1$. Положим $U_i=\int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} U(\tau)\,d\tau$, $V_i=$ $=\int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} V(\tau)\,d\tau$, $i=1,\ldots,N$, где интегралы понимаются в обычном для теории многозначных отображений смысле (см., например, [4]). Отметим, что U_i, V_i — непустые выпуклые компакты.

Пусть M — непустое множество из R^n. Образуем последовательности множеств A_i, B_i следующим образом:

$$A_N=M,\ A_i=(A_{i+1}+U_{i+1})\overset{*}{-}V_{i+1},\quad i=0,\ldots,N-1,$$
$$B_N=M,\ B_i=(B_{i+1}\overset{*}{-}V_{i+1})+U_{i+1},\quad i=0,\ldots,N-1. \tag{3}$$

В дальнейшем нас будут интересовать множества A_0, B_0, которые мы обозначим соответственно $A(\omega)$, $B(\omega)$.

Определение 1. Множество

$$W^{p,q}(M)=\bigcap_{\omega} A(\omega),$$

где пересечение берется по всевозможным разбиениям ω отрезка $[p, q]$, называется альтернированным интегралом Понтрягина.

Замечание 1. В приведенном определении альтернированного интеграла альтернированная сумма $A(\omega)$ строится несколько иначе, нежели в [1], [2]. Это связано с тем, что в настоящей статье мы в дальнейшем будем рассматривать линейные нестационарные дифференциальные игры, а в [1], [2] рассматривались линейные стационарные дифференциальные игры. Далее, в [1], [2] альтернированный интеграл определялся с помощью предельного перехода, а здесь мы предельный переход заменили на пересечение. Эта замена несколько облегчает работу с альтернированным интегралом и использовалась в различных работах, посвященных альтернированному интегралу (см., например, [3], [5]—[8]). Естественно положить $W^{q,q}(M)=M$.

Определение 2. Множество

$$W_{p,q}(M)=\bigcup_{\omega} B(\omega),$$

где объединение берется по всевозможным разбиениям ω отрезка $[p, q]$, называется нижним альтернированным интегралом Понтрягина.

Замечание 2. Наше определение нижнего интеграла Понтрягина отличается от определения 1_* из [3]. Первое отличие состоит в том, что в [3], как и в [1], [2], рассматриваются стационарные дифференциальные игры. И этим обстоятельством объясняется несколько иной способ образования нижней альтернированной суммы $B(\omega)$. Другое отличие состоит в том, что в [3] для образования нижнего интеграла Понтрягина используются только равномерные разбиения отрезка, мы же предлагаем использовать и неравномерные разбиения. Покажем на примере, что такое расширение множества разбиений иногда дает увеличение объединения $\bigcup\limits_{\omega} B(\omega)$.

Пример 1. Пусть $n=1$, $p=0$, $q=2$, $U(\tau)=\{0\}$ при $0\leqslant\tau<\sqrt{2}$ и $U(\tau)=$ $=\left[-\frac{1}{2-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2-\sqrt{2}}\right]$ при $\sqrt{2}\leqslant\tau\leqslant 2$, $V(\tau)=\left[-\frac{1}{2-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2-\sqrt{2}}\right]$

при $0 \leqslant \tau < \sqrt{2}$ и $V(\tau) = \{0\}$ при $\sqrt{2} \leqslant \tau \leqslant 2$, $M = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Рассмотрим произвольное разбиение $\omega = \{r_i\}_0^N$, у которого одна из точек r_i совпадает с $\sqrt{2}$. Нетрудно видеть, что для такого разбиения $B(\omega) = R^1$ и, следовательно, $W_{0,2}(M) = R^1$.

Теперь рассмотрим произвольное разбиение ω, у которого для некоторого $k \geqslant 1$ выполнено неравенство: $r_k < \sqrt{2} < r_{k+1}$. В этом случае с помощью элементарных вычислений получаем:

$$B(\omega) = X = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}, +\infty\right),$$

т. е. $B(\omega) \neq R^1$. Из-за иррациональности числа $\sqrt{2}$ при произвольном равномерном разбиении ω $\left(\text{т. е. когда } r_i = i\frac{q-p}{N}\right)$ получаем, что $B(\omega) = X$ и, следовательно, объединение множеств $B(\omega)$ по всем равномерным разбиениям совпадает со множеством X, которое не равно $W_{0,2}(M) = R^1$.

Определение 3. Условимся говорить, что разбиение ω_1 тоньше разбиения ω_2 и будем писать $\omega_1 \preccurlyeq \omega_2$, если любая точка разбиения ω_2 принадлежит разбиению ω_1.

Используя формулы (1), (2), нетрудно доказать следующие леммы.

Лемма 1. *Для любого разбиения ω отрезка $[p, q]$ выполняются включения:*

$$B(\omega) \subset A(\omega) \subset \left(M + \int_p^q U(\tau)\, d\tau\right) \overset{*}{-} \int_p^q V(\tau)\, d\tau.$$

Лемма 2. *Если $\omega_1 \preccurlyeq \omega_2$, то $A(\omega_1) \subset A(\omega_2)$, $B(\omega_2) \subset B(\omega_1)$.*

Справедлива также следующая

Лемма 3. *Пусть ω_1, ω_2 — произвольные разбиения отрезка $[p, q]$. Тогда имеет место включение*

$$B(\omega_1) \subset A(\omega_2). \tag{4}$$

Доказательство. Объединяя точки разбиений ω_1, ω_2, мы получим новое разбиение ω_3, причем будут выполнены соотношения: $\omega_3 \preccurlyeq \omega_1$, $\omega_3 \preccurlyeq \omega_2$. Отсюда с помощью лемм 1, 2 получаются включения: $B(\omega_1) \subset \subset B(\omega_3) \subset A(\omega_3) \subset A(\omega_2)$ и тем самым (4) доказано.

Из леммы 3 легко следуют

Лемма 4. *Пусть ω_1, ω_2 — некоторые разбиения отрезка $[p, q]$ и $A(\omega_1) = B(\omega_2)$, тогда*

$$W^{p,q}(M) = W_{p,q}(M) = A(\omega_1) = B(\omega_2).$$

Теорема 1. *Имеет место включение*

$$W_{p,q}(M) \subset W^{p,q}(M).$$

Практическое вычисление альтернированных сумм $A(\omega)$, $B(\omega)$ наталкивается на значительные трудности. Определенную помощь тут оказывает выпуклый анализ (см. [2], [6], [9], [10], [11]). Существенные трудности, в частности, возникают при вычислении геометрической разности. В связи с этим отметим ряд фактов (см. [2], [6], [9], [10]), облегчающих вычисление альтернированных сумм при наличии выпуклости M. Для произвольного непустого множества $X \subset R^n$ условимся через $H_X(\psi)$ обозначать его опорную функцию, т. е. $H_X(\psi) = \sup\limits_{x \in X} (x, \psi)$, где ψ — произвольный вектор из R^n.

Лемма 5. *Пусть* $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ — *непустые замкнутые множества, причем A выпукло, тогда* $A \overset{*}{-} B = C$ — *выпуклое замкнутое множество. Опорная функция множества* $C \neq \varnothing$ *может быть вычислена по формуле*:

$$H_C(\psi) = \inf_{(\psi_1, \ldots, \psi_{n+1})} \sum_{i=1}^{n+1} (H_A(\psi_i) - H_B(\psi_i)),$$

где $\sum_{i=1}^{n+1} \psi_i = \psi$. *В случае полного выметания, т. е. когда* $C + B = A$, *справедлива и такая формула*:

$$H_C(\psi) = H_A(\psi) - H_B(\psi).$$

Лемма 6. *Пусть* A, B, D — *непустые выпуклые замкнутые множества из* R^n, *причем* B — *ограниченное множество и* $A = B + D$. *Тогда* $A \overset{*}{-} B = D$.

С помощью леммы 6 доказывается

Лемма 7. *Пусть* X, Y, Z — *непустые выпуклые замкнутые множества из* R^n, *причем* Y, Z — *ограниченные множества и* $(X \overset{*}{-} Y) + Y = X$, *т. е. множество* Y *полностью выметает множество* X. *Тогда*

$$(X + Z) \overset{*}{-} Y = (X \overset{*}{-} Y) + Z \tag{5}$$

и множество Y *полностью выметает множество* $X + Z$.

Лемма 7 полезна, например, при установлении равенства $A(\omega) = B(\omega)$ для некоторого разбиения ω, что в свою очередь (см. лемму 4) влечет равенство

$$W^{p,q}(M) = W_{p,q}(M). \tag{6}$$

Как объект математического исследования множество $W^{p,q}(M)$ появилось раньше, чем множество $W_{p,q}(M)$. Чтобы иметь возможность использовать факты, накопленные относительно $W^{p,q}(M)$, для вычисления $W_{p,q}(M)$, полезно в связи со сказанным изучить равенство (5).

Пусть X, Y, Z — непустые выпуклые замкнутые множества из R^n, причем Y, Z — ограниченные и $X \overset{*}{-} Y \neq \varnothing$. Если для них имеет место равенство (5), то с помощью леммы 5 получаем $\forall \psi \in R^n$:

$$H_{(X+Z) \overset{*}{-} Y}(\psi) = H_{X \overset{*}{-} Y}(\psi) + H_Z(\psi), \tag{7}$$

$$H_{(X+Z) \overset{*}{-} Y}(\psi) = \inf_{(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})} \sum_{i=1}^{n+1} (H_X(\xi_i) + H_Z(\xi_i) - H_Y(\xi_i)), \tag{8}$$

$$H_{X \overset{*}{-} Y}(\psi) = \inf_{(\eta_1, \ldots, \eta_{n+1})} \sum_{i=1}^{n+1} (H_X(\eta_i) - H_Y(\eta_i)), \tag{9}$$

$$H_Z(\psi) = \inf_{(\rho_1, \ldots, \rho_{n+1})} \sum_{i=1}^{n+1} H_Z(\rho_i), \tag{10}$$

где $\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i = \psi$. Положим $a = (\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$, $b = (\eta_1, \ldots, \eta_{n+1})$, $c = (\rho_1, \ldots, \rho_{n+1})$. Из (7)—(10) получаем, что при данном $\psi \in R^n$ любая минимизирующая последовательность a^j, $j = 1, 2, \ldots$, в (8) является минимизирующей последовательностью и в (9), (10). С другой стороны, пусть $b^j = c^j$, $j = 1, 2, \ldots$, — некоторая общая минимизирующая последовательность в (9), (10) при данном $\psi \in R^n$, тогда из неравенства (см. (2))

$$H_{(X+Z) \overset{*}{-} Y}(\psi) \geqslant H_{X \overset{*}{-} Y}(\psi) + H_Z(\psi)$$

и из (8)—(10) вытекает равенство (7) для данного $\psi \in R^n$.

Из сказанного с помощью выпуклого анализа (см. [11]) вытекает

Лемма 8. *Пусть X, Y, Z — непустые выпуклые замкнутые множества из R^n, причем Y, Z — ограниченные множества и $X \overset{*}{-} Y \neq \varnothing$, тогда для выполнения равенства* (5) *необходимо и достаточно, чтобы для любого $\psi \in R^n$, $|\psi| = 1$, выполнялось любое из следующих условий:*

1) *существует общая минимизирующая последовательность $b^j = c^j$, $j = 1, 2, \ldots$, для* (9) *и* (10);

2) *любая минимизирующая последовательность a^j, $j = 1, 2, \ldots$, для* (8) *является минимизирующей последовательностью для* (9) *и* (10).

Замечание 3. В условиях леммы 7 общей минимизирующей последовательностью $b^j = c^j$, $j = 1, 2, \ldots$, для (9) и (10) является последовательность $b^j = c^j = d$, где $d = (\psi, 0, \ldots, 0)$, для любого $\psi \in R^n$, $|\psi| = 1$.

Замечание 4. Пусть X, Y, Z — непустые выпуклые замкнутые множества из R^n, причем Y, Z — ограниченные множества и Y полностью выметает $X + Z$. Тогда из выполнения равенства (5) с помощью леммы 8 следует, что Y полностью выметает X. ■

Следующий пример показывает, что даже в выпуклом случае из выполнения равенства (5), вообще говоря, не следует полное выметание множеством Y множеств $X + Z$ и X.

Пример 2. Пусть X — непустое выпуклое множество, $Z = \{0\}$, Y — непустое выпуклое множество такое, что $Y + (X \overset{*}{-} Y) \neq X$ (примеры таких X, $Y \subset R^n$ легко построить при любом $n \geqslant 1$). Нетрудно видеть, что здесь выполняется равенство (5), но Y не выметает полностью множества $X + Z$ и X. ■

В некоторых случаях для произвольного разбиения ω отрезка $[p, q]$ выполняется равенство

$$A(\omega) = \left(M + \int_p^q U(\tau)\, d\tau \right) \overset{*}{-} \int_p^q V(\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

и тогда $W^{p,q}(M) = \mathfrak{M}(p)$, где

$$\mathfrak{M}(t) = \left(M + \int_t^q U(\tau)\, d\tau \right) \overset{*}{-} \int_t^q V(\tau)\, d\tau.$$

Достаточные условия для выполнения (11) дает следующая лемма, которая доказывается с помощью леммы 7 и равенства (1) с использованием аддитивности интеграла от многозначных отображений.

Лемма 9. *Пусть M — непустое выпуклое замкнутое множество и*

$$\mathfrak{M}(t) + \int_t^q V(\tau)\, d\tau = M + \int_t^q U(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [p, q]. \tag{12}$$

Тогда выполняется равенство (11) *для произвольного* ω *и*

$$\mathfrak{M}(s) = \left(\mathfrak{M}(t) + \int_s^t U(\tau)\, d\tau \right) \overset{*}{-} \int_s^t V(\tau)\, d\tau \quad \text{при } p \leqslant s \leqslant t \leqslant q. \tag{13}$$

Следующий пример показывает, что в общем случае даже при наличии выпуклости M из (13) не следует (12).

Пример 3. Рассмотрим один просто устроенный класс многозначных отображений $U(\tau)$, $V(\tau)$: $U(\tau) \equiv P$, $V(\tau) \equiv Q$, где P, Q — непустые компакты из R^n. Пусть M — непустое выпуклое замкнутое множество. Можно показать, что

$$\mathfrak{M}(t) = (M + (q - t)\operatorname{co} P) \overset{*}{-} (q - t)\operatorname{co} Q, \tag{14}$$

где со означает операцию овыпуклення. Справедлива (см. [12, с. 48])

Лемма 10. *Пусть A, B, C — непустые выпуклые множества из R^n и $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Тогда*

$$[((A+\alpha B) \overset{*}{-} \alpha C)+\beta B] \overset{*}{-} \beta C=[A+(\alpha+\beta) B] \overset{*}{-}(\alpha+\beta) C.$$

С помощью (14) и леммы 10 нетрудно показать, что для рассматриваемых $U(\tau)$, $V(\tau)$ и M выполняется (13). Однако легко подобрать такие M, P, Q, что для них условие полного выметания (12) не выполняется.

В связи с леммой 9 представляет интерес

Теорема 2. *Пусть M — непустое замкнутое множество. Для того чтобы*

$$W^{r,q}(M) \equiv \mathfrak{M}(r) \quad \forall r \in [p, q], \tag{15}$$

необходимо и достаточно выполнение равенства (13).

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено (15). Из теории альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина (см. [1]—[3], [5]—[7]) следует, что при $p \leqslant s \leqslant t \leqslant q$

$$W^{s,q}(M) \subset\left(W^{t,q}(M)+\int_s^t U(\tau) d\tau\right) \overset{*}{-} \int_s^t V(\tau) d\tau,$$

и следовательно:

$$\mathfrak{M}(s) \subset\left(\mathfrak{M}(t)+\int_s^t U(\tau) d\tau\right) \overset{*}{-} \int_s^t V(\tau) d\tau.$$

Из определения $\mathfrak{M}(s)$ и свойств (1), (2) вытекает, что

$$\left(\mathfrak{M}(t)+\int_s^t U(\tau) d\tau\right) \overset{*}{-} \int_s^t V(\tau) d\tau \subset \mathfrak{M}(s)$$

при $p \leqslant s \leqslant t \leqslant q$ и, следовательно, равенство (13) получено.

Достаточность. С помощью равенства (13) нетрудно доказать, что для произвольного разбиения ω отрезка $[r, q]$, где $r \in [p, q)$, выполняется равенство: $A(\omega)=\mathfrak{M}(r)$ (здесь альтернированная сумма $A(\omega)$ вычисляется для отрезка $[r, q]$), откуда следует (15). ■

Следующий пример показывает, что из непустоты множества $W^{p,q}(M)$ в общем случае не следует непустота $W_{p,q}(M)$.

Пример 4. Пусть $n=1$, $p=0$, $q=1$, $U(\tau) \equiv [-1, 1]$, $V(\tau) \equiv [-1, 1]$, $M=\{0\}$. Простые вычисления показывают, что $W^{0,1}(M)=\{0\}$, $W_{0,1}(M)=\varnothing$. ■

Отметим, что в примере 4 выполнены условия леммы 9. Таким образом, условий леммы 9 недостаточно для выполнения равенства (6).

Теорема 3. *Пусть M — непустое выпуклое замкнутое множество и существует такое $\varepsilon>0$, $\varepsilon \leqslant q-p$, что при $t \in [p, q]$, $s \in [\max(p, t-\varepsilon), t]$*

$$\left(\mathfrak{M}(t) \overset{*}{-} \int_s^t V(\tau) d\tau\right)+\int_s^t V(\tau) d\tau=\mathfrak{M}(t). \tag{16}$$

Тогда

$$W^{p,q}(M)=W_{p,q}(M)=\mathfrak{M}(p), \tag{17}$$

выполнены равенства (12), (13) *и при $t \in [p, q]$, $s \in [\max(p, t-\varepsilon), t]$ имеет место равенство*

$$\mathfrak{M}(s)=\left(\mathfrak{M}(t) \overset{*}{-} \int_s^t V(\tau) d\tau\right)+\int_s^t U(\tau) d\tau. \tag{18}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное разбиение ω_1 отрезка $[p, q]$, расстояние между двумя соседними точками которого $\leqslant\varepsilon$. Используя условия теоремы, нетрудно показать, что $B(\omega_1)=\mathfrak{M}(p)$. Откуда в силу леммы 1 вытекает равенство (17). Доопределим $U(\tau)$, $V(\tau)$ при $\tau<p$ нулевым вектором. Тогда $\mathfrak{M}(t)=\mathfrak{M}(p)$ при $t<p$. Очевидно, теперь равенство (16) выполняется при всех $t\leqslant q$, $s\in[t-\varepsilon, t]$. Используя равенство

$$\left(M \overset{*}{-} \int_s^q V(\tau)\,d\tau\right) + \int_s^q V(\tau)\,d\tau = M \quad \forall\, s\in[q-\varepsilon, q],$$

которое вытекает из (16), и лемму 7, получим равенство (12) при $t\in[q-\varepsilon, q]$. Для доказательства равенства (12) при $t\leqslant q-\varepsilon$ можно применить индукцию и следующую лемму.

Лемма 11. *Пусть M, A_1, A_2, B_1, B_2 — непустые множества из R^n, причем B_1 полностью выметает $M+A_1$, а B_2 полностью выметает $(M+A_1)\overset{*}{-}B_1$. Тогда множество B_1+B_2 полностью выметает $M+A_1+A_2$.*

Доказательство леммы. Положим $C=(M+A_1)\overset{*}{-}B_1$, $D=C\overset{*}{-}B_2$. В силу условий леммы $D+B_2=C$, $C+B_1=D+B_1+B_2=M+A_1$. Откуда вытекает: $(D+A_2)+(B_1+B_2)=M+A_1+A_2$. Отсюда следует утверждение леммы.

Индукция, упомянутая выше, проводится так. Предполагается, что равенство (12) доказано при $t\in[q-k\varepsilon, q]$, где k — целое число, большее или равное 1, а затем с помощью леммы 11 оно обосновывается при $t\in[q-(k+1)\varepsilon, q]$. Итак, в условиях теоремы 3 выполнены условия леммы 9, откуда следует выполнение равенства (13). Равенство (18) при $t\in[p, q]$, $s\in[\max(p, t-\varepsilon), t]$ доказывается с помощью равенств (13), (16) и леммы 7.

В связи с теоремой 3 представляет интерес

Теорема 4. *Пусть M — непустое замкнутое множество. Для того чтобы*

$$W_{p,q}(M)=\mathfrak{M}(p),$$

достаточно выполнения соотношения (18) *при* $t\in[p, q]$, $s\in[\max(p, t-\varepsilon), t]$ *для некоторого* $\varepsilon>0$, $\varepsilon\leqslant q-p$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из леммы 1 и того факта, что для любого разбиения ω, для которого расстояние между двумя соседними точками $\leqslant\varepsilon$, выполняется равенство $B(\omega)=\mathfrak{M}(p)$. ■

Следующий пример показывает, что в общем случае даже при наличии выпуклости M из выполнения равенства (18) при $t\in[p, q]$, $s\in[\max(p, t-\varepsilon), t]$ для некоторого $\varepsilon>0$, $\varepsilon\leqslant q-p$, не следует выполнение равенства (16) при тех же s, t.

Пример 5. Положим $U(\tau)\equiv\{0\}$, $V(\tau)\equiv Q$, где Q — непустой компакт из R^n. Пусть M — непустое выпуклое замкнутое множество. Можно показать, что

$$\mathfrak{M}(t) = M \overset{*}{-} (q-t)\,\mathrm{co}\,Q.$$

Используя свойство (1) геометрической разности и аддитивность интеграла от многозначного отображения, нетрудно доказать, что равенство (18) для рассматриваемого случая выполняется даже при $\varepsilon=q-p$. Однако легко подобрать такие M, Q, что для них равенство (16) не выполняется, например, при $t=q$, $s\in[p, q]$. ■

Нетрудно видеть, что из замкнутости множества M вытекает замкнутость $W^{p,q}(M)$.

Следующий пример показывает, что из замкнутости множества M не следует замкнутость $W_{p,q}(M)$.

Пример 6. Пусть $n=2$, $p=0$, $q=1$,

$$U(\tau)\equiv\{u\in R^2\colon |u_1|\leqslant 1,\ u_2=-1\},\quad V(\tau)\equiv\{v\in R^2\colon |v_1|\leqslant 1,\ v_2=0\},$$

M — замкнутый треугольник с вершинами (1; 2), (—1; 2), (0; 1). Рассмотрим равномерное разбиение ω_j ($j=2, 3, \ldots$) отрезка [0, 1] с шагом $1/j$. Альтернированная сумма $B_{j-1}(\omega_j)$ (см. (3)) является, как нетрудно видеть, замкнутой трапецией с вершинами

$$\left(1; 2-\frac{1}{j}\right),\ \left(-1; 2-\frac{1}{j}\right),\ \left(-\frac{1}{j}; 1\right),\ \left(\frac{1}{j}; 1\right).$$

Альтернированная сумма $B_{j-2}(\omega_j)$ (см. (3)) является, как нетрудно видеть, замкнутой трапецией с вершинами

$$\left(1; 2-\frac{2}{j}\right),\left(-1; 2-\frac{2}{j}\right),\ \left(-\frac{1}{j}; 1-\frac{1}{j}\right),\left(\frac{1}{j}; 1-\frac{1}{j}\right).$$

Продолжая последовательно вычисления, мы получим, что альтернированная сумма $B(\omega_j)$ является замкнутой трапецией с вершинами

$$(1; 1),\ (-1; 1),\ \left(-\frac{1}{j}; \frac{1}{j}\right),\left(\frac{1}{j}; \frac{1}{j}\right).$$

Нетрудно видеть, что $\bigcup\limits_{j\geqslant 1} B(\omega_j)=\Delta\setminus\{0\}$, где Δ — замкнутый треугольник с вершинами (1; 1), (—1; 1), (0; 0). Простые вычисления показывают, что $W^{0,1}(M)=\mathfrak{M}(0)=\Delta$. Отсюда и из теоремы 1 следует, что $W_{0,1}(M)$ может отличаться от $W^{0,1}(M)$ самое большее лишь на точку (0; 0). Нетрудно однако убедиться прямыми вычислениями, что $(0;0)\notin B(\omega)$ при произвольном разбиении ω отрезка [0, 1]. Таким образом, множество $W_{0,1}(M)$ не замкнуто. ■

Анализируя пример 6, легко убедиться, что в общем случае нельзя гарантировать равенство

$$B(\omega)=W_{p,q}(M) \tag{19}$$

хотя бы для одного разбиения ω. Однако при дополнительных предположениях (например, при условиях леммы 4 или теорем 3, 4) такой факт имеет место. Если равенство (19) имеет место хотя бы для одного разбиения ω, то естественно поставить вопрос о нахождении таких разбиений $\omega=\{r_i\}_0^N$, для которых выполнено (19), а число $N\geqslant 1$ минимально.

Теорема 5. *Пусть M — непустое выпуклое замкнутое множество и $\mathfrak{M}(t)\neq\varnothing$ при $t\in[p, q]$. Предположим, что для каждого $t\in(p, q]$ определено такое число $\theta(t)\in[p, t)$, что при $s\in[\theta(t), t]$*

$$\mathfrak{M}(s)=\left(\mathfrak{M}(t)\overset{*}{-}\int\limits_s^t V(\tau)\,d\tau\right)+\int\limits_s^t V(\tau)\,d\tau,$$

а при $p\leqslant s<\theta(t)$

$$\mathfrak{M}(t)\overset{*}{-}\int\limits_s^t V(\tau)\,d\tau=\varnothing,$$

причем для некоторого малого $\varepsilon>0$ выполняются соотношения:

$$t-\theta(t)\geqslant\varepsilon \text{ при } t\in[p+\varepsilon, q];\ \theta(t)=p \text{ при } t\in(p, p+\varepsilon].$$

Положим $\theta(p)=p$ и рассмотрим рекуррентную последовательность чи-

сел $\alpha_i=\theta(\alpha_{i-1})$, $i=1, 2, \ldots$, *где* $\alpha_0=q$. *Обозначим через* m *наименьшее из чисел* i, *для которых выполняется равенство* $\alpha_i=p$. *Тогда для разбиения* $\tilde{\omega}=\{\tilde{r}_i\}_0^m$, *где* $\tilde{r}_i=\alpha_{m-i}$, $i=0, \ldots, m$, *имеет место равенство* (19), *причем* $W_{p,q}(M)=\mathfrak{M}(p)$ *и число* $N(\tilde{\omega})=m$ *минимально для всех разбиений* ω, *для которых выполняется равенство* (19).

Доказательство. Тот факт, что уравнение $\alpha_i=p$ имеет решение при некотором $i\geqslant 1$, вытекает из свойств функции $\theta(t)$. Таким образом, число m определено корректно (для него справедлива оценка: $m\leqslant \leqslant \left[\frac{q-p}{\varepsilon}\right]+1)$. Используя условия теоремы, нетрудно далее показать, что

$$B(\tilde{\omega})=\mathfrak{M}(p)=W_{p,q}(M).$$

Далее нам понадобится следующая

Лемма 12. *Если* $t_1, t_2\in[p, q]$ *и* $t_1\leqslant t_2$, *то*

$$\theta(t_1)\leqslant\theta(t_2). \tag{20}$$

Доказательство леммы. Если $t_1\leqslant\theta(t_2)$, то неравенство (20) очевидно. Рассмотрим случай $t_1\in(\theta(t_2), t_2]$. Используя определение $\mathfrak{M}(t)$, аддитивность интеграла от многозначных отображений и свойства (1), (2), получаем:

$$\mathfrak{M}(t_1)\overset{*}{-}\int\limits_{\theta(t_2)}^{t_1} V(\tau)\,d\tau\supset\left(\mathfrak{M}(t_2)\overset{*}{-}\int\limits_{\theta(t_2)}^{t_2} V(\tau)\,d\tau\right)+\int\limits_{t_1}^{t_2} U(\tau)\,d\tau.$$

Откуда следует, что $\mathfrak{M}(t_1)\overset{*}{-}\int\limits_{\theta(t_2)}^{t_1} V(\tau)d\tau\neq\varnothing$ и что верно неравенство (20). ■

Фиксируем некоторое разбиение $\omega=\omega_0=\{r_i^0\}_0^{N_0}$, для которого выполняется (19), а число $N(\omega_0)=N_0$ минимально. Очевидно, $N_0\leqslant m$. Покажем, что на самом деле

$$N_0=m. \tag{21}$$

Положим $\beta_i=r^0_{N_0-i}$ при $i=0, 1, \ldots, N_0$ и $\beta_i=p$ при $i>N_0$. Нетрудно видеть, что

$$\beta_{i+1}\in[\theta(\beta_i), \beta_i],\ i=0, 1, \ldots, \tag{22}$$

$$\alpha_1\leqslant\beta_1. \tag{23}$$

Используя соотношения (22), (23) и лемму 12, с помощью индукции доказываем неравенство

$$\alpha_i\leqslant\beta_i,\ i=0, 1, \ldots,$$

из которого вытекает равенство (21).

§ 2. Применение нижнего альтернированного интеграла Понтрягина в дифференциальных играх

Пусть движение вектора $z\in R^n$ описывается следующим линейным уравнением (см. [1]—[3], [5]—[7]):

$$\dot{z}=A(t)z-u(t)+v(t),\ z(t_0)=z_0, \tag{24}$$

где $A(t)$, $t\in R^1$,— квадратная матрица порядка n с локально суммируемыми по Лебегу элементами, $t_0\in R^1$, $u(t)\in P(t)\subset R^n$, $t\geqslant t_0$, $v(t)\in Q(t)\subset R^n$, $t\geqslant t_0$, $P(t)$, $Q(t)$ — непустые компакты, зависящие от $t\in R^1$ измеримым образом (см. [4]), для которых выполнены условия: $\forall u\in P(t)$ и $\forall v\in Q(t)$

справедливы неравенства: $|u| \leqslant c(t)$, $|v| \leqslant d(t)$, причем функции $c(t)$, $d(t)$ локально суммируемы по Лебегу на R^1. Управления $u(t)$, $v(t)$ рассматриваются в классе измеримых функций. В R^n фиксировано непустое замкнутое терминальное множество M. Догоняющий игрок распоряжается выбором вектора $u(t) \in P(t)$ и стремится к тому, чтобы побыстрее вывести точку $z(t)$ на M. Убегающий игрок распоряжается выбором $v(t) \in Q(t)$. Игровой процесс рассматривается с точки зрения догоняющего. Считается, что догоняющему известны: a) динамика игры — уравнение (24) и терминальное множество M; b) начальное состояние игры (t_0, z_0); c) вектор $z(t)$ при каждом $t \geqslant t_0$. В качестве допустимых стратегий догоняющего фиксируем класс кусочно-программных стратегий $\mathcal{U} = (\{t_i\}_0^N, \{\varphi_i(z)\}_0^N)$ (см. [13]), где $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$, $\varphi_i(z)\colon z \to \mathscr{P}[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \ldots, N$, $\mathscr{P}[t_i, t_{i+1})$ означает множество измеримых функций $u(t) \in P(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$, причем $t_{N+1} = +\infty$. Стратегия догоняющего определяется числом $N \geqslant 1$, числами t_i и отображениями $\varphi_i\colon R^n \to \mathscr{P}[t_i, t_{i+1})$. В качестве управлений убегающего допускаются произвольные измеримые функции $v(t) \in Q(t), t \geqslant t_0$. Движение вектора $z(t)$ при данных $\mathcal{U}$ и измеримой $v(t) \in Q(t,)$ $t \geqslant t_0$, происходит так. При $t \in [t_0, t_1)$ $u(t) \in P(t)$ определяется отображением $\varphi_0(z_0)$. Подставим это $u(t)$ и измеримое $v(t)$ в (24) и решим уравнение (24) при $t \in [t_0, t_1]$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$. В результате мы получим вектор $z_1 = z(t_1)$. При $t \in [t_1, t_2)$ $u(t) \in P(t)$ определяется отображением $\varphi_1(z_1)$. Подставим это $u(t)$ и измеримое $v(t)$ в (24) и решим уравнение (24) при $t \in [t_1, t_2]$ с начальным условием $z(t_1) = z_1$ и т. д. В результате этого процесса получается однозначно определенное абсолютно непрерывное решение уравнения (24) при $t \geqslant t_0$. Начальному состоянию (t_0, z_0), данной стратегии догоняющего $\mathcal{U}$ и измеримой функции $v(t) \in Q(t)$, $t \geqslant t_0$, однозначно сопоставляется момент первого выхода соответствующего решения $z(t)$ на M при $t \geqslant t_0$, который мы обозначим через $T(t_0, z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$, причем, если при всех $t \geqslant t_0$, $z(t) \notin M$, то полагаем $T(t_0, z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) = +\infty$.

Определение 4. Будем говорить, что из точки (t_0, z_0) можно завершить преследование за конечное время, если для нее существует такая стратегия $\mathcal{U}$, что

$$\sup_{v(\cdot)} T(t_0, z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) < +\infty,$$

где супремум берется по всевозможным измеримым $v(t) \in Q(t)$, $t \geqslant t_0$.

Для эффективного нахождения точек (t_0, z_0), $z_0 \notin M$, из которых можно завершить преследование за конечное время, можно использовать нижний альтернированный интеграл Понтрягина (см. [3] и § 1 настоящей работы). В основе этого факта лежит формула Коши для решения уравнения (24) с начальным условием $z(t_0) = z_0$ при данных измеримых $u(t) \in P(t)$, $v(t) \in Q(t)$, $t \geqslant t_0$:

$$z(t) = \Phi(t, t_0) z_0 - \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)(u(s) - v(s))\, ds, \tag{25}$$

где $\Phi(t, s)$ — фундаментальная матрица решений для однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$ с условием $\Phi(s, s) = E$ — единичной матрице $\forall s \in R^1$. Положим при $\tau \in [t_0, t]$, где $t > t_0$, $U_t(\tau) = \Phi(t, \tau) P(\tau)$, $V_t(\tau) = \Phi(t, \tau) Q(\tau)$ и с помощью этих многозначных отображений и множества M построим нижний альтернированный интеграл Понтрягина (см. § 1) $W_{t_0,t}(M)$.

Теорема 6. *Пусть для точки* (t_0, z_0), *где* $z_0 \notin M$, *при некотором* $\theta > t_0$ *выполняется включение*

$$\Phi(\theta, t_0) z_0 \in W_{t_0, \theta}(M). \tag{26}$$

Тогда из точки (t_0, z_0) *можно завершить преследование за конечное время, причем существует такая стратегия* $\mathcal{U}$, *что*

$$\sup_{v(\cdot)} T(t_0, z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) \leqslant \theta,$$

где супремум берется по всевозможным измеримым $v(t) \in Q(t)$, $t \geqslant t_0$.

Доказательство. Из (26) в силу определения $W_{t_0, \theta}(M)$ следует, что существует такое разбиение $\omega = \{r_i\}_0^N$ отрезка $[t_0, \theta]$, что

$$\Phi(\theta, t_0) z_0 \in B(\omega), \tag{27}$$

где множество $B(\omega)$ строится с помощью множеств B_i, $i = 0, \ldots, N$, известным образом (см. § 1):

$$B_i = \left(B_{i+1} \stackrel{*}{-} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Phi(\theta, s) Q(s)\, ds\right) + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Phi(\theta, s) P(s)\, ds, \tag{28}$$

$i = 0, \ldots, N-1$, $B(\omega) = B_0$, $B_N = M$. Каждому $i = 0, \ldots, N-1$ сопоставим отображение ψ_i: $R^n \to \mathcal{P}[r_i, r_{i+1})$, которое определяется следующим образом. Если $\xi \notin B_i$, то в качестве $\psi_i(\xi)$ фиксируется произвольная измеримая функция $u(t) P(t)$, $t \in [r_i, r_{i+1})$. Если $\xi \in B_i$, то в качестве $\psi_i(\xi)$ фиксируется такая измеримая функция $u_\xi(t) \in P(t)$, $t \in [r_i, r_{i+1})$, что выполняется включение

$$\xi \in \left(B_{i+1} \stackrel{*}{-} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Phi(\theta, s) Q(s)\, ds\right) + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Phi(\theta, s) u_\xi(s)\, ds \tag{29}$$

(в силу (28) такая функция $u_\xi(t)$ всегда найдется). $\psi_N(\xi)$ при произвольном $\xi \in R^n$ определим как произвольную фиксированную измеримую функцию $u(t) \in P(t)$, $t \in [\theta, +\infty)$.

Положим далее

$$\varphi_i(z) = \psi_i(\Phi(\theta, r_i) z), \quad i = 0, \ldots, N. \tag{30}$$

Отметим, что при $i = 0, \ldots, N-1$ из включения $\Phi(\theta, r_i)\eta \in B_i$ $(\eta \in R^n)$ и определения геометрической разности вытекает (см. (28), (29)) для произвольной измеримой функции $v(s) \in Q(s)$, $s \in [r_i, r_{i+1}]$, следующее включение

$$\Phi(\theta, r_i)\eta - \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Phi(\theta, s) u_\xi(s)\, ds + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Phi(\theta, s) v(s)\, ds \in B_{i+1}, \tag{31}$$

где $\xi = \Phi(\theta, r_i)\eta$. Используя равенство $\Phi(\theta, s) = \Phi(\theta, r_{i+1}) \Phi(r_{i+1}, s)$, где $s \in [r_i, r_{i+1}]$, включение (31) можно записать в виде

$$\Phi(\theta, r_{i+1}) z(r_{i+1}) \in B_{i+1}, \tag{32}$$

где $i = 0, \ldots, N-1$, через $z(t)$, $t \in [r_i, r_{i+1}]$, обозначено решение уравнения (24) при управлениях $u_\xi(t)$, $v(t)$ $(\xi = \Phi(\theta, r_i)\eta)$ с начальным условием $z(r_i) = \eta$. Фиксируем стратегию догоняющего $\mathcal{U} = (\{t_i\}_0^N, \{\varphi_i(z)\}_0^N)$, для которой $t_i = r_i$, $i = 0, \ldots, N$, а отображения $\varphi_i(z)$ определяются формулой (30). С помощью формул (25), (27), (30), (32) и равенства $B_N = M$ нетрудно показать, что при произвольной измеримой $v(t) \in Q(t)$, $t \geqslant t_0$, и выбранной стратегии $\mathcal{U}$ для соответствующего решения уравнения (24) с начальным условием $z(t_0)=z_0$ будет выполнено включение $z(\theta)\in M$ и, следовательно, теорема доказана. ■

В конкретных дифференциальных играх терминальное множество M весьма часто имеет цилиндрический вид (см., например, [2]), т. е.

$$M=M_1+L, \tag{33}$$

где L — некоторое линейное подпространство ненулевой размерности из R^n, а M_1 множество из некоторого прямого дополнения N к L в R^n.

Покажем, как можно использовать цилиндричность множества M для упрощения вычисления $W^{p,q}(M)$, $W_{p,q}(M)$. Обозначим через π оператор проектирования из R^n на N параллельно L. Вместо $U(\tau)$, $V(\tau)$, где $\tau\in[p, q]$, и M рассмотрим соответственно $\pi U(\tau)$, $\pi V(\tau)$, где $\tau\in[p, q]$, и M_1. По этим многозначным отображениям и множеству M_1 построим альтернированный и нижний альтернированный интегралы Понтрягина, которые мы обозначим соответственно $\hat{W}^{p,q}(M_1)$, $\hat{W}_{p,q}(M_1)$. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае справедливы формулы

$$W^{p,q}(M)=\hat{W}^{p,q}(M_1)+L,\quad W_{p,q}(M)=\hat{W}_{p,q}(M_1)+L.$$

Эти формулы оказываются полезными, в частности, потому, что вычисление $\hat{W}^{p,q}(M_1)$, $\hat{W}_{p,q}(M_1)$ можно проводить в подпространстве N, которое имеет меньшую размерность, нежели исходное R^n.

В качестве примера использования $W_{p,q}(M)$ рассмотрим известную дифференциальную игру «крокодил и мальчик» (см., например, [2]):

$$\dot{z}_1=z_2+\tilde{v},\ \dot{z}_2=-\tilde{u},\ z(0)=z_0,$$

где z_1, z_2, $\tilde{u}$, $\tilde{v}\in R^\nu$ $(\nu\geqslant 1)$, $\tilde{u}\in\rho S_1$, $\tilde{v}\in\sigma S_1$, S_1 — шар единичного радиуса из R^ν с центром в 0, $M=\{z\in R^{2\nu}\colon |z_1|\leqslant l\}$, ρ, σ, l — положительные константы. Вектор $\tilde{v}$ находится в распоряжении убегающего, вектор $\tilde{u}$ — догоняющего. В этом примере M имеет вид (33) и можно положить

$$L=\{z\in R^{2\nu}\colon z_1=0\},\ N=\{z\in R^{2\nu}\colon z_2=0\},\ M_1=\{z\in R^{2\nu}\colon |z_1|\leqslant l,\ z_2=0\}.$$

Обозначим через e_i вектор из $R^{2\nu}$, у которого i-я компонента равна 1, а остальные равны нулю. В базисе $e_1,\ldots,e_\nu$ при $t>0$

$$\left(M_1+\int_0^t \pi\Phi(t,s)P(s)\,ds\right)\overset{*}{-}\int_0^t \pi\Phi(t,s)Q(s)\,ds=$$
$$=\begin{cases}\left(l+\dfrac{t^2}{2}\rho-t\sigma\right)S_1, & \text{если } l+\dfrac{t^2}{2}\rho-t\sigma\geqslant 0,\\ \varnothing & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Применяя результаты § 1, можно показать, что в базисе $e_1,\ldots,e_\nu$ при $t>0$

$$\hat{W}^{0,t}(M_1)=\begin{cases}\left(l+\dfrac{t^2}{2}\rho-t\sigma\right)S_1, & \text{если } l+\dfrac{r^2}{2}\rho-r\sigma\geqslant 0\ \forall r\in[0,t],\\ \varnothing & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Применяя результаты § 1, далее можно показать, что в базисе $e_1,\ldots,e_\nu$ при $t>0$

$$\hat{W}_{0,t}(M_1)=\begin{cases}\left(l+\dfrac{t^2}{2}\rho-t\sigma\right)S_1, & \text{если } l+\dfrac{r^2}{2}\rho-r\sigma>0\ \forall r\in[0,t],\\ \varnothing & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Итак, в этом примере при непустоте множества $W_{0,t}(M)$ имеет место равенство: $W_{0,t}(M)=W^{0,t}(M)$. При непустоте $W_{0,t}(M)$ для вычисления минимального разбиения ω, порождающего $W_{0,t}(M)$, применима теорема 5. В соответствии с ней рассмотрим последовательность чисел $\alpha_i=\theta(\alpha_{i-1})$, $i=1, 2, \ldots$, где $\alpha_0=t$, а функция $\theta(s)$, $s\in[0, t]$, определяется так: $\theta(s)=0$, если функция $f(\tau)=l+\frac{(t-s)^2}{2}\rho-t\sigma+\tau\sigma>0$ при $\tau\in[0, s]$; $\theta(s)=$ корню функции $f(\tau)$ на $[0, s]$ в противном случае. Обозначим через m наименьшее из чисел i, для которых выполняется равенство $\alpha_i=0$. В соответствии с теоремой 5 минимальным разбиением, порождающим непустое $W_{0,t}(M)$, будет разбиение $r_i=\alpha_{m-i}$, $i=0, \ldots, m$. Вообще говоря, минимальное разбиение определено неоднозначно (однозначно лишь количество точек в нем).

В монографии [14] уделено большое внимание линейным дифференциальным играм сближения с дискретными наблюдениями с терминальной платой (см. там главы IV, VI). Полученные в [14] в этом направлении результаты можно переформулировать в терминах нижнего альтернированного интеграла Понтрягина $W_{0,t}(M)$ при соответствующем выборе множества M.

В заключение этого параграфа отметим, что альтернированные интегралы Понтрягина $W^{0,t}(M)$, $W_{0,t}(M)$ строятся с помощью итерационных программных конструкций.

Интересные результаты по итерационным программным конструкциям содержатся в монографии [15].

3. Линейные дифференциальные игры со счетным числом наблюдений

В предыдущем параграфе для ведения преследования догоняющему разрешалось использовать конечное число измерений вектора $z(t)$ (см. (24)) в фиксированные моменты $t_i\geqslant t_0$. Исследования, проведенные в [14], показывают, что переход к счетному числу измерений вектора $z(t)$ (см. (24)) в фиксированные моменты $t_i\geqslant t_0$ может расширить возможности догоняющего игрока. Нижеследующая теорема 7 дает новые достаточные условия (сравните с [14], [16], [17]) для возможности завершения преследования из точки (t_0, z_0) с использованием счетного числа измерений вектора $z(t)$ (см. (24)) в фиксированные моменты $t_i\geqslant t_0$.

Игровой процесс (24) с терминальным множеством M рассматривается с точки зрения догоняющего. Считается, что догоняющему известны: *a*) динамика игры — уравнение (24) и терминальное множество M; *b*) начальное состояние игры (t_0, z_0); *c*) вектор $z(t)$ при каждом $t\geqslant t_0$. В качестве допустимых стратегий догоняющего фиксируем класс кусочно-программных стратегий

$$\mathfrak{U}=(\gamma, \{t_i\}_0^{+\infty}, \{\varphi_i(z)\}_0^{+\infty}), \text{ где } t_0<\gamma,\ t_0<t_1<\cdots,$$

причем $\lim\limits_{i\to+\infty} t_i=\gamma$, $\varphi_i(z)\colon z\to\mathscr{P}[t_i, t_{i+1})$, $i=0, 1, \ldots$, $z\in R^n$. Стратегия догоняющего определяется в этом параграфе числом γ, последовательностью чисел t_i и последовательностью отображений φ_i. В качестве управлений убегающего допускаются произвольные измеримые функции $v(t)\in Q(t)$, $t\geqslant t_0$. Аналогично § 2 можно определить решение $z(t)$ уравнения (24) на отрезке $[t_0, \gamma]$ с начальным состоянием (t_0, z_0) при данных $\mathfrak{U}$ и измеримой $v(t)\in Q(t)$, $t\geqslant t_0$. Начальной точке (t_0, z_0), данной стратегии догоняющего $\mathfrak{U}$ и измеримой функции $v(t)\in Q(t)$, $t\geqslant t_0$, однозначно сопоставляется момент первого выхода $T(t_0, z_0, \mathfrak{U}, v(\cdot))$ соответствующего решения $z(t)$ на M при $t\in[t_0, \gamma]$, если включение $z(t)\in M$ выполняется хотя бы при одном $t \in [t_0, \gamma]$, а если $z(t) \notin M$ при $t \in [t_0, \gamma]$, то положим $T(t_0, z_0, \mathfrak{U}, v(\cdot)) = +\infty$.

Определение 5. Будем говорить, что из точки (t_0, z_0) можно завершить преследование за конечное время, если для нее существует такая стратегия $\mathfrak{U}$, что

$$\sup_{v(\cdot)} T(t_0, z_0, \mathfrak{U}, v(\cdot)) < +\infty,$$

где супремум берется по всевозможным измеримым $v(t) \in Q(t)$, $t \geqslant t_0$.

Положим

$$\mathfrak{M}(\theta, t) = \left(M + \int_t^\theta \Phi(\theta, s) P(s)\, ds\right) \overset{*}{-} \int_t^\theta \Phi(\theta, s) Q(s)\, ds.$$

Теорема 7. *Пусть M — непустое выпуклое замкнутое множество и для некоторого $\theta > t_0$ $\mathfrak{M}(\theta, t) \neq \varnothing$ $\forall t \in [t_0, \theta]$ и для любого $r \in (t_0, \theta)$ определено такое число $\varepsilon(r) > 0$, $\varepsilon(r) \leqslant r - t_0$, что при $t \in [t_0, r]$, $s \in [\max(t_0, t - \varepsilon(r)), t]$*

$$\left(\mathfrak{M}(\theta, t) \overset{*}{-} \int_s^t \Phi(\theta, s) Q(s)\, ds\right) + \int_s^t \Phi(\theta, s) Q(s)\, ds = \mathfrak{M}(\theta, t).$$

Пусть для точки (t_0, z_0) выполнено включение $\Phi(\theta, t_0) z_0 \in \mathfrak{M}(\theta, t_0)$. Тогда из точки (t_0, z_0) можно завершить преследование за конечное время, причем существует такая стратегия $\mathfrak{U}$, что $\sup_{v(\cdot)} T(t_0, z_0, \mathfrak{U}, v(\cdot)) \leqslant \theta$, где супремум берется по всевозможным измеримым $v(t) \in Q(t)$, $t \geqslant t_0$.

Доказательство. Положим $U_\theta(s) = \Phi(\theta, s) P(s)$, $V_\theta(s) = \Phi(\theta, s) Q(s)$. Фиксируем некоторую последовательность $\{\tau_k\}_0^{+\infty}$, где $\tau_0 = t_0$, $\tau_0 < \tau_1 < \ldots$ и $\lim_{k \to +\infty} \tau_k = \theta$. На отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots$, фиксируем произвольное разбиение ω_k с $N_k = N(\omega_k)$, расстояние между соседними точками которого $\leqslant \varepsilon(\tau_{k+1})$. По этому разбиению, многозначным отображениям $U_\theta(\tau)$, $V_\theta(\tau)$, $\tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, и множеству $M_k = \mathfrak{M}(\theta, \tau_{k+1})$ построим нижнюю альтернированную сумму (см. (3)) $B(\omega_k, \mathfrak{M}(\theta, \tau_{k+1}))$.

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 3, получим следующее равенство:

$$\mathfrak{M}(\theta, \tau_k) = B(\omega_k, \mathfrak{M}(\theta, \tau_{k+1})),$$

где $k = 0, 1, \ldots$. Далее по рецепту доказательства теоремы 6 построим с помощью элементов альтернированной суммы $B(\omega_k, \mathfrak{M}(\theta, \tau_{k+1}))$ отображения ψ_{kl}: $R^n \to \mathscr{P}[r_{k,l}, r_{k,l+1})$, где $k = 0, 1, \ldots$, $l = 0, \ldots, N_k - 1$, r_{kl} — точка разбиения ω_k отрезка $[\tau_k, \tau_{k+1}]$. Положим $\varphi_{kl}(z) = \psi_{kl}(\Phi(\theta, r_{kl}) z)$, где $k = 0, 1, \ldots$, $l = 0, \ldots, N_k - 1$. Далее положим $\gamma = \theta$, последовательности $\{t_i\}_0^{+\infty}$, $\{\varphi_i(z)\}_0^{+\infty}$ образуем из чисел r_{kl} и отображений $\varphi_{kl}(z)$, перенумеровав их в естественном порядке возрастания чисел r_{kl}. Тем самым мы определили стратегию $\mathfrak{U}$. Можно показать, что при этой стратегии $\mathfrak{U}$, произвольной измеримой $v(t) \in Q(t)$, $t \geqslant t_0$, и начальном условии $z(t_0) = z_0$ для соответствующего решения $z(t)$, где $t \in [t_0, \theta]$, будет выполнено включение

$$\Phi(\theta, \tau_k) z(\tau_k) \in \mathfrak{M}(\theta, \tau_k)$$

при $k = 0, 1, \ldots$. Отсюда, из определения $\mathfrak{M}(\theta, t)$ и из непрерывности функций $\Phi(\theta, t)$, $z(t)$ нетрудно вывести с помощью предельного перехода по $k \to +\infty$, что $z(\theta) \in \mathfrak{M}(\theta, \theta) = M$. ■

В качестве примера использования теоремы 7 рассмотрим известную дифференциальную игру «контрольный пример Понтрягина» (см., например, [2]):

$$\dot{z}_1 = z_2 - z_3, \quad \dot{z}_2 = -\alpha z_2 - \tilde{u}, \quad \dot{z}_3 = -\beta z_3 + \tilde{v}, \ z(0) = z_0,$$

где z_i, $\tilde{u}$, $\tilde{v} \in R^\nu$ $(\nu \geqslant 1)$, $\tilde{u} \in \rho S_1$, $\tilde{v} \in \sigma S_1$, S_1 — шар единичного радиуса из R^ν с центром в 0, $M = \{z \in R^{3\nu}: z_1 = 0\}$, ρ, σ, α, β — положительные константы. Вектор $\tilde{u}$ находится в распоряжении догоняющего, вектор $\tilde{v}$ находится в распоряжении убегающего. В этом примере M имеет вид (33) и можно положить

$$L = \{z \in R^{3\nu}: z_1 = 0\}, \ N = \{z \in R^{3\nu}: z_2 = 0, \ z_3 = 0\}, \ M_1 = \{0\}.$$

Обозначим через e_i вектор из $R^{3\nu}$, у которого i-я компонента равна 1, а остальные равны нулю. В базисе $e_1, \ldots, e_\nu$ (см. [2]) при данном $\theta > 0$, $t \in [0, \theta]$

$$\pi \mathfrak{M}(\theta, t) = \begin{cases} f(\theta, t) S_1, & \text{если } f(\theta, t) \geqslant 0, \\ \varnothing, & \text{если } f(\theta, t) < 0, \end{cases}$$

где

$$f(\theta, t) = \rho \int_t^\theta \frac{1 - e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} ds - \sigma \int_t^\theta \frac{1 - e^{-\beta(t-s)}}{\beta} ds.$$

С помощью результатов § 6 из [18] при выполнении неравенств $\rho \geqslant \sigma$, $\frac{\rho}{\alpha} \geqslant \frac{\sigma}{\beta}$, где одновременное выполнение равенств исключается, получаем, что $f(\theta, t) > 0$ $\forall t \in [0, \theta)$ и что условия теоремы 7, касающиеся $\mathfrak{M}(\theta, t)$, при $t \in [0, \theta]$ будут выполнены.

Литература

1. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры. 2.— ДАН СССР, 1967, т. 175, № 4, с. 764—766.
2. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования.— Матем. сб., 1980, т. 112(154), с. 307—330.
3. *Азамов А.* О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования.— Матем. сб., 1982, т. 118(160), с. 422—430.
4. *Castaing Ch.* Sur les multi-applications mesurables.— Rev. franc. inform. et rech. opérat., 1967, № 1, p. 91—126.
5. *Никольский М. С.* Нестационарные линейные дифференциальные игры.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механика, 1969, № 3, с. 65—73.
6. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 54—63.
7. *Половинкин Е. С.* Неавтономные дифференциальные игры.— Дифференц. уравнения, 1979, т. XV, № 6, с. 1007—1017.
8. *Никольский М. С.* Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина.— Матем. сб., 1981, т. 116(158), с. 136—144.
9. *Поспелов И. Г.* О численных методах решения многошаговых игр.— ЖВМ и МФ, 1975, т. 15, № 3, с. 615—626.
10. *Rechtschaffen E. E. M.* Unique winning policies for linear differential pursuit games.— Journal of Optim. Theory and Applic., 1979, v. 29, № 4, p. 629—658.
11. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
12. *Ермолов А. Н.* Оптимизационные задачи децентрализованного управления динамическими системами: Дис. ... канд. физ.-матем. наук/М.: МГУ, 1984.
13. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
14. *Черноусько Ф. Л., Меликян А. А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
15. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
16. *Гусятников П. Б.* К вопросу об информированности игроков в дифференциальной игре.— ПММ, 1972, т. 36, № 5, с. 917—924.
17. *Ледяев Ю. С.* Задачи преследования и убегания в дифференциальных играх с неполной информацией: Дис.... канд. физ.-матем. наук/М.: МФТИ, 1980.
18. *Понтрягин Л. С.* К теории дифференциальных игр.— УМН, 1966, т. XXI, вып. 4, с. 219—274.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
19.IX.1984