Линейные дифференциальные игры преследования

§1. Введение

Здесь рассматриваются линейные дифференциальные игры, основной моделью для которых служит процесс преследования одного управляемого объекта другим управляемым объектом.

Линейные дифференциальные игры, конечно, составляют весьма частный случай общих, однако и для них результаты не тривиальны, кроме того, эти результаты более эффективны, чем соответствующие обобщения на нелинейный случай.

Постановка задачи будет формулирована здесь для нелинейного случая, а результаты только для линейного.

Постановка задачи. Теория дифференциальных игр возникла в результате математической идеализации технических задач. Идеализации возможны различные. При выборе идеализации следует стремиться к тому, чтобы, отражая наиболее существенные черты технической проблемы, она в то же время была доступна для математической обработки. Таким образом, постановка задачи не должна даваться в полном отрыве от технических проблем.

Для того чтобы иметь конкретный пример, вообразим, что один самолет преследует другой. Цель первого самолета догнать второй, цель второго — уйти от преследования. Каждый пилот управляет своим самолетом, имея в виду свою цель и пользуясь информацией о ситуации. Информация состоит из двух частей, первая — это полное знание технических возможностей обоих самолетов, вторая — это сведения о поведении собственного самолета и самолета противника. Сведения о поведении самолетов могут включать в себя различные данные об их состоянии за период, предшествующий данному моменту, но ничего нельзя считать известным о будущем поведении самолетов, так как они управляемы и в любой момент времени летчик может изменить положение рулей, изменив тем самым поведение самолета. В действительности каждый из пилотов может получать сведения о противнике лишь с некоторым запозданием, однако нет надобности включать это обстоятельство в идеализацию, более того, можно даже предполагать известным поведение противника с некоторым опережением и строить математическую идеализацию на этой основе, а затем

Л. С. Понтрягин, Мат. сб. Новая сер.— 1980.— Т. 112, вып. 3.— С. 307–330.

уже показать, что полученная теория может быть использована для приближенного решения реальной задачи.

Перейдем к математическому описанию процесса преследования. В этом процессе участвуют два управляемых объекта: преследующий объект и убегающий объект. Состояние каждого из объектов в любой момент времени определяется его фазовым вектором. Фазовый вектор преследователя обозначим через x, а фазовый вектор убегающего — через y, уравнения управляемых объектов запишем в обычной форме:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{y} = g(y, v), \tag{1}$$

где точка означает производную по времени, а u и v суть управления, т. е. параметры, входящие в правую часть уравнений. Каждый из параметров принадлежит своему ограничивающему множеству

$$u \in P, \quad v \in Q,$$

где P и Q — множества произвольной природы. Если управление u становится заданной функцией времени t, т. е. $u = u(t)$, то первое из уравнений (1) становится обычным дифференциальным уравнением, которое можно решать при заданном начальном значении $x(0) = x_0$. То же относится и ко второму из уравнений (1). Так как x и y являются фазовыми векторами, то каждый из них распадается на две части

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$

где x_1 и y_1 определяют геометрические положения объектов, а x_2 и y_2 их скорости. Считается, что процесс преследования заканчивается в тот момент времени, когда наступает равенство

$$x_1 = y_1, \tag{2}$$

т. е. тогда, когда объекты геометрически совпадают.

Упомянутая ранее первая часть информации состоит из уравнений (1). Эти уравнения дают не сами движения объектов, а описывают лишь их возможности, так как при различных управлениях $u = u(t)$ и $v = v(t)$ мы получаем различные движения. Таким образом, в примере с самолетами уравнения (1) описывают технические возможности самолетов.

Сам процесс преследования мы можем рассматривать с двух различных точек зрения.

1. Мы можем отождествить себя с преследующим объектом. В этом случае наша цель заключается в завершении процесса преследования и управление u находится в нашем распоряжении для

достижения этой цели. Таким образом, в каждый момент времени t мы должны конструировать значение $u(t)$ управления u, зная уравнения (1), т. е. первую часть информации, и используя вторую ее часть в виде знания функций $x(s), y(s), v(s)$ на отрезке $t-\theta \leqslant s \leqslant t$, где θ — подходящим образом выбранное положительное число.

2. Мы можем отождествить себя с убегающим объектом. В этом случае наша цель состоит в предотвращении конца преследования и управление v находится в нашем распоряжении для достижения этой цели. Таким образом, в каждый момент времени t мы должны конструировать значение $v(t)$ управления v, зная уравнения (1), т. е. первую часть информации, и используя вторую ее часть в виде знания функций $x(s), y(s), u(s)$ на отрезке $t-\theta \leqslant s \leqslant t$.

Такова та математическая идеализация процесса преследования, которую мы рассматриваем и которая неизбежно расщепляет задачу на две различные задачи: задачу преследования и задачу убегания. Расщепление происходит из-за того, что при двух различных подходах мы используем различные информации. Существует и другая идеализация, принадлежащая Айзексу, при которой как в задаче преследования, так и в задаче убегания используется одна и та же информация, именно знание значений $x(t)$ и $y(t)$. При этой идеализации предполагается, что существует оптимальное управление $u=u(x,y)$ преследования, определяющееся как функция x и y состояний объектов, и существует оптимальное управление $v=v(x,y)$ убегания, определяющееся как функция x и y состояний объектов. При такой идеализации задача математически становится весьма определенной, она заключается в нахождении функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, называемых оптимальными стратегиями, но именно эта определенность чрезвычайно затрудняет ее решение. В частности, предполагая существование оптимальных стратегий, мы резко сужаем класс рассматриваемых задач.

Дифференциальная игра. Дифференциальная игра из процесса преследования возникает в результате естественного стремления упростить обозначения, а именно, вместо двух фазовых векторов x и y мы вводим один вектор: $z=(x,y)$, образуя фазовое пространство R игры как прямую сумму фазовых пространств обоих объектов. Тогда пара уравнений (1) записывается в виде одного уравнения

$$\dot{z} = F(z,u,v), \tag{3}$$

а соотношение (2) определяет в векторном пространстве R некоторое подмножество M. Теперь мы можем дать определение дифференциальной игры независимо от исходного процесса преследования. Дифференциальная игра задана, если задано ее фазовое векторное пространство R, уравнение (3), где $z \in R$, а F — некоторая функция трех переменных, причем u — управление преследования, а v — управление убегания, и сверх того в пространстве R задано некоторое множество M, на котором игра заканчивается.

Как и в случае процесса преследования, мы связываем с дифференциальной игрой две различные задачи:

1. Нашей целью является завершение игры, т. е. приведение точки z на множество M, при этом для осуществления этой цели в нашем распоряжении находится управление преследования u, так что в каждый момент времени t мы выбираем значение $u(t)$ этого управления, имея в виду нашу цель, и используя функции $z(s)$ и $v(s)$ на отрезке $t-\theta \leqslant s \leqslant t$. Таковы правила игры преследования.

2. Нашей целью является предотвращение конца игры, т. е. предотвращение прихода точки z на множество M, при этом для осуществления этой цели в нашем распоряжении находится управление v убегания, так что в каждый момент времени t мы выбираем значение $v(t)$ этого управления, имея в виду нашу цель и используя функции $z(s)$ и $u(s)$ на отрезке $t-\theta \leqslant s \leqslant t$. Таковы правила игры убегания.

Линейная дифференциальная игра. Фазовое пространство R линейной игры мы будем считать евклидовым векторным пространством размерности n. Уравнение игры имеет вид:

$$\dot{z} = Cz - u + v,$$

здесь $z \in R$, C есть линейное отображение пространства R в себя, а управления u и v являются векторами пространства R, эти векторы, однако, не произвольны, а удовлетворяют условиям

$$u \in P, \quad v \in Q,$$

где P и Q суть выпуклые компактные подмножества пространства R (размерности множеств P и Q произвольны). Как функции времени управления $u = u(t)$ и $v = v(t)$ являются измеримыми функциями t. Множество M, на котором игра заканчивается, мы будем считать выпуклым замкнутым подмножеством пространства R, в частном случае векторным подпространством пространства R.

В настоящей работе рассматривается лишь дифференциальная игра преследования. Ее решение основано на ряде конструкций, связанных с выпуклыми множествами. Именно этому посвящены следующие три параграфа. Эта работа является полным изложением результатов, данных в заметках [1] и [2].

§2. Выпуклые множества и их геометрическая разность

Здесь будут рассматриваться замкнутые выпуклые подмножества евклидового векторного пространства R, причем замкнутость и выпуклость не всегда будут оговариваться.

A. Пусть A и B — два замкнутых выпуклых подмножества пространства R, множество

$$E = \alpha A + \beta B, \tag{1}$$

где α и β — фиксированные действительные числа, определяется как совокупность всех $z = \alpha x + \beta y$, где $x \in A$, $y \in B$. Ясно, что множество E выпукло. Очевидно, что если одно из множеств A и B компактно, то множество E замкнуто. Далее, если оба множества A и B компактны, то множество E также компактно. В частном случае, когда $\alpha, \beta = 1$, мы получаем алгебраическую сумму $A + B$ двух замкнутых подмножеств пространства R.

B. Если A есть замкнутое выпуклое подмножество пространства R, то определяется его *опорная функция*, как функция произвольного вектора $u \in R$, которая обозначается через $c(A, u)$. Она определяется формулой

$$c(A, u) = \sup_{x \in A}(x, u).$$

Если α и β — два неотрицательных числа, то мы имеем следующее легко проверяемое равенство (см. (1)):

$$c(E, u) = \alpha c(A, u) + \beta c(B, u). \tag{2}$$

Оказывается, что следующие два соотношения эквивалентны между собой:

$$A \subset B, \tag{3}$$

$$c(A, u) \leqslant c(B, u) \tag{4}$$

C. *Геометрическая разность.* Если A и B — два замкнутых выпуклых подмножества пространства R, причем B компактно, то определяется их *геометрическая разность*

$$D = A \overset{*}{-} B$$

как совокупность всех таких точек $z \in R$, для которых $z + B \subset A$. Ясно, что множество D выпукло и замкнуто. Очевидно, что $D + B \subset A$, причем D есть максимальное множество, удовлетворяющее этому условию, т. е. из соотношения

$$\hat{D} + B \subset A$$

следует соотношение

$$\hat{D} \subset D. \tag{5}$$

Оказывается, что

$$c(D, u) \leqslant c(A, u) - c(B, u). \tag{6}$$

Пусть X — замкнутое выпуклое множество, а Y — компактное выпуклое множество. Положим, далее,

$$F = (X + Y) \overset{*}{-} Y.$$

Тогда оказывается, что

$$F = X. \tag{7}$$

Докажем соотношение (6). Мы имеем $A + B \subset A$. Отсюда в силу формул (2)—(4) имеем

$$c(D, u) + c(B, u) \leqslant c(A, u)$$

и, следовательно,

$$c(D, u) \leqslant c(A, u) - c(B, u),$$

т. е. формула (6) доказана.

Докажем теперь формулу (7). Так как $X + Y \subset X + Y$, то в силу формулы (5) мы имеем

$$X \subset F. \tag{8}$$

Далее, в силу формул (6) и (2) мы имеем

$$c(F, u) \leqslant c(X + Y, u) - c(Y, u) = c(X, u).$$

Таким образом, в силу эквивалентности соотношений (3) и (4) мы имеем

$$F \subset X. \tag{9}$$

Из соотношений (8) и (9) следует соотношение (7).

Итак, пункт C полностью доказан.

D. Пусть A — замкнутое выпуклое множество, а U и V — компактные выпуклые множества. Докажем, что

$$(A \overset{*}{-} V) + U \subset (A + U) \overset{*}{-} V. \tag{10}$$

Допустим, что точка z принадлежит левой части этого соотношения. Тогда

$$z = x + y,$$

где

$$x \in A \overset{*}{-} V, \tag{11}$$

$$y \in U. \tag{12}$$

Из (11) в силу пункта C следует

$$x + V \subset A. \tag{13}$$

Складывая (12) и (13), получаем

$$z + V \subset A + U.$$

Таким образом, в силу самого определения разности имеем

$$z \in (A + U) \overset{*}{-} V,$$

и включение (10) доказано.

E. Через H_r обозначим шар радиуса r с центром в начале координат в пространстве R. Расстояние между двумя компактными выпуклыми подмножествами X и Y пространства R определим как минимальное число r, для которого имеют место включения

$$x \subset Y + H_r, \quad Y \subset X + H_r.$$

Так определенное расстояние между X и Y обозначается, как обычно, через $h(X, Y)$. Легко доказывается, что для так введенного расстояния выполняются все аксиомы метрики. Таким образом, совокупность $\Omega(R)$ всех непустых компактных выпуклых подмножеств пространства R есть метрическое пространство. Известно, что если R' есть непустое компактное подмножество пространства R, то совокупность $\Omega(R')$ всех элементов пространства $\Omega(R)$, входящих в R', есть компактное подмножество пространства $\Omega(R)$.

F. Очевидно, что $H_r \overset{*}{-} H_s = H_{r-s}$, если $r > s$.

G. Если $X(t)$ есть непрерывная функция действительного числового параметра t со значениями в метрическом пространстве $\Omega(R)$, то можно определить и н т е г р а л

$$Y(p, q) = \int_p^q X(t)\,dt, \tag{14}$$

где предполагается, что $p \leqslant q$. При этом оказывается, что $Y(p, q) \in \Omega(R)$ есть непрерывная функция пределов интегрирования p и q.

Далее, если r есть число, промежуточное между p и q, т. е. $p \leqslant r \leqslant q$, то имеем

$$\int\limits_p^r X(t)\,dt + \int\limits_r^q X(t)\,dt = \int\limits_p^q X(t)\,dt.$$

Интеграл (14) определяется как обычный риманов интеграл. Пусть

$$S = \{t_0 = p,\ t_1, \ldots, t_k = q\}$$

— последовательность точек, подразделяющая отрезок pq так, что выполнены условия

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_k.$$

Тогда определим сумму

$$\sum(S) = \sum_{i=1}^{k} X(\tau_i)(t_i - t_{i-1}),$$

где τ_i лежит на отрезке $t_{i-1},\ t_i$, т.е $t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i$. Так построенная сумма $\sum(S)$ есть выпуклое компактное множество в силу пункта А. Сумма $\sum(S)$ зависит от подразделения S отрезка pq. Обозначим через $\delta(S)$ максимальную из длин отрезков подразделения S, т. е. максимальное из чисел $t_i - t_{i-1},\ i = 1, \ldots, k$. Оказывается, что существует компактное выпуклое множество $Y(p,q)$ такое, что расстояние $h(Y(p,q), \sum(S))$ стремится к нулю вместе с $\delta(S)$. Это предельное множество $Y(p,q)$ и называется интегралом

$$\int\limits_p^q X(t)\,dt = Y(p,q).$$

Н. Легко доказывается, что выпуклое множество $Y(p,q)$ совпадает с множеством всех точек y вида

$$y = \int\limits_p^q x(t)\,dt,$$

где $x(t)$ есть такая измеримая функция переменного t со значениями в пространстве R, что $x(t) \in X(t)$. Далее, если $y \in Y'(p,q)$, где

$Y'(p,q)$ есть граница множества $Y(p,q)$, то функция $x(t)$, соответствующая этому значению y, почти для всех значений t удовлетворяет условию $x(t) \in X'(t)$, где $X'(t)$ есть граница множества $X(t)$.

I. Очевидно, что $\int\limits_p^q H_{r(t)}\,dt = H_{\int\limits_p^q r(t)\,dt}$.

§3. Оценка геометрической разности

Здесь мы будем рассматривать компактные выпуклые подмножества евклидового векторного пространства R. Через H_r здесь, как и в § 2, будем обозначать шар с центром в начале координат радиуса r в пространстве R.

A. Пусть A — компактное выпуклое подмножество пространства R. Положим

$$A_r = A \overset{*}{-} H_r.$$

Очевидно, что множество A_r может быть не пустым при некоторых положительных значениях r тогда, и только тогда, когда размерность множества A совпадает с размерностью пространств R. Обозначим через α максимальное значение r, при котором множество A_r непусто. Здесь мы будем считать, что α — число положительное и что $r \leqslant \alpha$. Так как α зависит от множества A, то положим $\alpha = \alpha(A)$. Через δ обозначим диаметр множества A и положим $\delta = \delta(A)$. Далее, положим

$$k = k(A) = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Дадим теперь оценку расстояния $h(A_r, A)$ между множествами A_r и A, обозначив это расстояние через $\sigma(r) = h(A_r, A)$. Оказывается, что

$$\sigma(r) \leqslant kr. \tag{1}$$

Докажем неравенство (1). Так как множество A_α непусто, то существует в A такая точка c, что $c + H_\alpha \subset A$. Так как множество A_r лежит в множестве A, то в множестве A найдется такая точка a, расстояние от которой до множества A_r равно расстоянию между множествами A_r и A, так что мы имеем

$$\sigma(r) = \rho(a, A_r).$$

На отрезке ac выберем такую точку b, чтобы имело место равенство

$$\frac{\rho(a,b)}{\rho(a,c)} = \frac{r}{\alpha}.$$

Так как $c + H_\alpha \subset A$, то из соображений подобия следует, что $b + H_r \subset A$. Таким образом, $b \in A_r$ и мы имеем

$$\sigma(r) \leqslant \rho(a, b) = \frac{\rho(a, b)}{\rho(a, c)}\rho(a, c) = \frac{r}{\alpha}\rho(a, c) \leqslant \frac{r}{\alpha}\delta = kr.$$

Таким образом, оценка (1) доказана.

B. Пусть A и B — два таких компактных выпуклых подмножества пространства R, что их разность $D = A \overset{*}{-} B$ имеет ту же размерность, что и все пространство R. Тогда существуют такие два положительных числа γ и l, зависящих только от чисел $k(D), \alpha(D)$ и $\delta(A)$, что при $r \leqslant \gamma$ два произвольных компактных выпуклых подмножества A' и B' пространства R обладают тем свойством, что если

$$h(A, A') \leqslant r, \quad h(B, B') \leqslant r, \tag{2}$$

то их разность $D' = A' \overset{*}{-} B'$ удовлетворяет условию

$$h(D, D') < lr. \tag{3}$$

Докажем это предложение. Из условия (2) следует

$$A' + H_r \supset A, \tag{4}$$

$$B' \subset B + H_r. \tag{5}$$

Вычитая из обеих частей соотношения (4) множество H_r, мы в силу пункта C § 2 получаем

$$A' \supset A \overset{*}{-} H_r. \tag{6}$$

Вычитая из включения (6) включение (5), мы получаем

$$D' = A' \overset{*}{-} B' \supset A \overset{*}{-} B \overset{*}{-} H_{2r} = D \overset{*}{-} H_{2r}. \tag{7}$$

Так как множество D имеет полную размерность, то при $2r \leqslant \alpha(D)$ из пункта A следует

$$D \overset{*}{-} H_{2r} + H_{2kr} \supset D,$$

Таким образом,

$$D' + H_{2kr} \supset D,$$

где $k = k(D)$.

Аналогично доказывается, что

$$D + H_{2k'r} \supset D',$$

где число $k' = k(D')$ может быть оценено через числа $\delta(A)$ и $\alpha(D)$ при $\gamma = \alpha(D)/3$. Так как множество D содержит шар радиуса $\alpha(D)$, то из (7) следует, что

$$\alpha' = \alpha(D') \leqslant \alpha(D) - 2r.$$

Далее, мы имеем

$$D' + B' \subset A' \subset A + H_r,$$

откуда следует, что

$$\delta' = \delta(D') \leqslant \delta(A) + 2r.$$

Из этих оценок для α' и δ' мы видим, что при $r \leqslant \gamma = \alpha(D)/3$ число k' оценено, а именно

$$k' = \frac{\delta'}{\alpha'} \leqslant \frac{\delta(A) + \dfrac{2}{3}\alpha(D)}{\dfrac{1}{3}\alpha(D)}.$$

Эта оценка зависит лишь от чисел $\delta(A)$ и $\alpha(D)$.

Принимая за l наибольшее из чисел $2k$ и $2k'$, мы видим, что формула (3) верна. Из построения числа l видно, что оно зависит только от множеств A и B в предположении, что их геометрическая разность D имеет полную размерность.

C. Пусть A, A' и B, B' — компактные выпуклые подмножества пространства R. Очевидно, что если $h(A, A') \leqslant r$, $h(B, B') \leqslant r$, то

$$h(A + B, A' + B') \leqslant 2r.$$

§4. Альтернированный интеграл

A. Пусть A — замкнутое выпуклое подмножество пространства R, а

$$U_1, \ldots, U_n, \; V_1, \ldots, V_n \tag{1}$$

— две последовательности компактных выпуклых подмножеств пространства R. Положим

$$A_0 = A, \quad A_i = (A_{i-1} + U_i) \overset{*}{-} V_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Множество A_n будем называть альтернированной суммой последовательностей (1) с начальным значением A. В развернутом виде A_n запишется формулой

$$A_n = (\ldots((((A + U_1) \overset{*}{-} V_1) + U_2) \overset{*}{-} V_2) + \ldots + U_n) \overset{*}{-} V_n.$$

Положим

$$U = U_1 + \ldots + U_n, \quad V = V_1 + \ldots + V_n.$$

Тогда в силу формулы (10) из § 2 мы имеем включение

$$(A \overset{*}{-} V) + U \subset A_n \subset (A + U) \overset{*}{-} V. \tag{3}$$

B. Допустим, что множество A компактно и существует такое положительное число β, что

$$\alpha(A_i) > \beta, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Тогда альтернированная сумма A_n является непрерывной функцией переменных $A, U_1, \ldots, U_n$, $V_1, \ldots, V_n$ в пространстве $\Omega(R)$ для тех значений переменных, для которых имеет место неравенство (4). Это следует из пунктов B и C предыдущего параграфа.

C. Пусть A — замкнутое выпуклое подмножество пространства R, $U(\tau)$ и $V(\tau)$ — два компактных выпуклых множества в пространстве R, непрерывно зависящих от параметра τ на отрезке $p \leqslant \tau \leqslant q$, и

$$P = (r_0,\ r_1, \ldots,\ r_n)$$

— некоторое подразделение отрезка pq, т. е. такая последовательность чисел, что

$$r_0 = p < r_1 < \ldots < r_n = q.$$

Положим

$$U_i = \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} U(\tau)\, d\tau, \quad V_i = \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} V(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Исходя из множества A и последовательностей (5), так же как в пункте A, составим последовательность множеств $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Далее, введем обозначение

$$Y(A, P, r_i) = A_i,$$

подчеркивая тем самым зависимость множества A_i от исходного множества A, подразделения P и номера i. Мы можем написать также $Y(A, P, r_i) = Y(A, P, r)$, где $r = r_i$. Таким образом, множество $Y(A, P, r)$ определено для всякого значения r, принадлежащего последовательности P. В случае если множество A компактно, мы будем считать, что функции $U(\tau)$ и $V(\tau)$ удовлетворяют следующему требованию. Существует такая непрерывная, заданная на отрезке pq функция $\beta(r)$, положительная при всех значениях $r > p$, что для любого подразделения P отрезка pq имеет место неравенство

$$\alpha(Y(A,P,r)) \geqslant \beta(r). \tag{6}$$

Таким образом, не исключается возможность, что $\alpha(A) = 0$. При выполнении этого условия множество A_n является непрерывной функцией чисел $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$. Это непосредственно вытекает из пункта B. Если выпуклое замкнутое множество A не компактно, то положим

$$H_\mu \bigcap A = A^\mu, \quad H_\mu \bigcap Y = Y^\mu,$$

и вместо условия (6) выдвинем другое. Именно: существует настолько большое число μ, что

$$\alpha(Y(A^\mu,P,r)) \geqslant \beta(r). \tag{7}$$

Оказывается, что при этом предположении $Y^\mu(A,P,r)$ является непрерывной функцией переменных $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$.

Докажем это. Легко проверить, что для заданного μ можно подобрать настолько большое ν, что имеет место равенство

$$Y^\mu(A,P,r) = Y^\mu(A^\nu,P,r). \tag{8}$$

Так как правая часть этого равенства непрерывна относительно переменных r_1, r_2, $\ldots$, r_{n-1}, то и левая часть его также непрерывна относительно этих переменных.

D. Пусть $\hat{P} = (P_1, \ldots, P_m, \ldots)$ — такая последовательность неограниченно измельчающихся подразделений отрезка pq, что имеет место включение

$$P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_m \subset \ldots$$

Тогда в силу формулы (10) из § 2 мы имеем

$$Y(A,P_1,q) \supset Y(A,P_2,q) \supset \ldots \supset Y(A,P_m,q) \supset \ldots$$

Таким образом, эта последовательность есть убывающая последовательность замкнутых выпуклых множеств в пространстве R. Ее пересечение мы обозначим через $Y(A,\hat{P})$. Возникает вопрос, при каких условиях это множество не зависит от последовательности $\hat{P}$ подразделений отрезка pq. Оказывается, что для этого достаточно, чтобы было выполнено условие (7).

Докажем это. Для доказательства этого в силу равенства (8) достаточно доказать утверждение для случая, когда A — компактное множество и для него вместо условия (7) выполнено условие (6). Пусть $\hat{Q} = (Q_1, \ldots, Q_m, \ldots)$ — другая последовательность подразделений отрезка pq, аналогичная последовательности $\hat{P}$. Допустим, что компактные множества $Y(A, \hat{P})$, $Y(A, \hat{Q})$ не совпадают. Тогда расстояние между ними положительно. Мы обозначим его через 3ε. Существует теперь настолько большое положительное число m, что при $j \geqslant m$

$$h(Y(A, P_j, q),\ Y(A, \hat{P})) \leqslant \varepsilon, \quad h(Y(A, Q_j, q),\ Y(A, \hat{Q})) \leqslant \varepsilon.$$

В силу условия (6) множество $Y(A, P_m, q)$ является непрерывной функцией членов подразделения P_m за исключением точек p и q, которые фиксированы. Таким образом, существует настолько малое число δ, что, смещая члены подразделения P_m на величину, меньшую δ, мы получим новое подразделение P', удовлетворяющее условию

$$h(Y(A, P_m, q),\ Y(A, P', q)) \leqslant \varepsilon.$$

Выберем теперь такой номер $j > m$, чтобы каждый интервал подразделения Q_j был по длине меньше δ. Тогда, смещая элементы подразделения P_m на величину, меньшую δ, мы можем перевести подразделение P_m в такое подразделение P', каждый элемент которого принадлежит подразделению Q_j. Так что мы имеем $P' \subset Q_j$. Из этого следует включение $Y(A, P', q) \supset Y(A, Q_j, q)$. Так как

$$h(Y(A, P_m, q),\ Y(A, \hat{P})) \leqslant \varepsilon,$$

то мы имеем

$$Y(A, \hat{P}) + H_{2\varepsilon} \supset Y(A, P', q) \supset Y(A, Q_j, q) \supset Y(A, \hat{Q}).$$

Но так как последовательности $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ равноправны, то мы имеем и другое включение

$$Y(A, \hat{Q}) + H_{2\varepsilon} \supset Y(A, \hat{P}).$$

Таким образом, оказывается, что

$$h(Y(A, \hat{P}),\ Y(A, \hat{Q})) \leqslant 2\varepsilon,$$

а по предположению это расстояние равно 3ε. Мы пришли к противоречию.

E. При выполнении условия (7) множество $Y(A,\hat{P})$ не зависит от последовательности подразделений $\hat{P}$. Это множество называется альтернированным интегралом функций $U(\tau)$ и $V(\tau)$ на отрезке pq с начальным множеством A и обозначается так:

$$Y(A,\hat{P}) = \int\limits_{A,p}^{q} (U(\tau)\,d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\,d\tau).$$

Из формулы (8) следует

$$H_\mu \bigcap \int\limits_{A,p}^{q}(U(\tau)\,d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\,d\tau) = H_\mu \bigcap \int\limits_{A^\nu,p}^{q}(U(\tau)\,d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\,d\tau). \quad (9)$$

F. Пусть x — произвольная точка отрезка pq, т. е. $p \leqslant x \leqslant q$. Положим

$$W(x) = W(A,x) = \int\limits_{A,p}^{x} (U(\tau)\,d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\,d\tau).$$

Правая часть определена, так как условие (7), выполненное на отрезке pq, тем самым выполнено и на отрезке px. Пусть теперь $x \leqslant y$ — две точки на отрезке pq. Оказывается, что тогда

$$W(y) = \int\limits_{W(x),x}^{y} (U(\tau)\,d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\,d\tau). \quad (10)$$

Далее, оказывается, что если $x \geqslant p+\varepsilon$, где ε — положительное число, и множество A компактно, то существует такое положительное число λ, что

$$h(W(y), W(x)) \leqslant \lambda(y-x). \quad (11)$$

Последнее неравенство показывает, что при компактном A функция $W(x)$ имеет равномерно ограниченный рост на каждом отрезке $p+\varepsilon \leqslant x \leqslant q$. Отсюда легко следует в силу формулы (9), что $H_\mu \cap W(x)$ также имеет равномерно ограниченный рост на отрезке $p+\varepsilon \leqslant x \leqslant q$.

Докажем предложение F. Пусть $P = (r_0, r_1, \ldots, r_n)$ — некоторое подразделение отрезка pq, содержащее в качестве точек деления числа x и y, так что $x = r_k$, $y = r_l$. Положим

$$U_i^* = \int\limits_{r_{k+i-1}}^{r_{k+i}} U(\tau)\,d\tau, \quad V_i^* = \int\limits_{r_{k+i-1}}^{r_{k+i}} V(\tau)\,d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, l-k. \quad (12)$$

Пусть, далее, B — некоторое замкнутое выпуклое подмножество пространства R. Построим альтернированную сумму (см. п. А) последовательностей (12) с начальным множеством B и обозначим ее через $Y(B, P, x, y)$. Тогда мы имеем, очевидно,

$$Y(A, P, y) = Y(Y(A, P, x), P, x, y). \tag{13}$$

Пусть теперь $\hat{P} = (P_1, \ldots, P_j, \ldots)$ — последовательность подразделений отрезка pq, неограниченно измельчающаяся и такая, что каждое подразделение P_j этой последовательности содержит в качестве точек деления числа x и y. Пусть теперь $j \geqslant m$ — два натуральных числа. Обозначим через P такое подразделение отрезка pq, которое совпадает с подразделением P_j на отрезке px и с P_m на отрезке xy. Тогда мы имеем включение

$$Y(A, P_j, y) \subset Y(A, P, y) \subset Y(A, P_m, y).$$

Перейдем теперь к пределу в этих включениях при $j \to \infty$. Тогда мы получим, воспользовавшись формулой (13),

$$W(y) \subset Y(W(x), P_m, x, y) \subset Y(A, P_m, y).$$

Предельный переход для среднего члена включения верен при компактном A в силу пункта В. В случае некомпактного A для доказательства правильности предельного перехода следует использовать процедуру (H_μ, H_ν). Переходя к пределу в этих включениях при $m \to \infty$, получаем

$$W(y) \subset \int\limits_{W(x),x}^{y} (U(\tau)\, d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\, d\tau) \subset W(y).$$

Из этого следует равенство (10). Таким образом, первая часть предложения F доказана.

Докажем теперь вторую часть предложения F, т. е. неравенство (11).

Из неравенства (6) следует $\alpha(W(x)) \geqslant \beta(x)$, где функция $\beta(x)$ непрерывна и положительна для всех $x > p$. Таким образом, на отрезке $p + \varepsilon \leqslant x \leqslant q$ мы имеем $\alpha(W(x)) \geqslant \beta$, где β — положительное число. В то же время имеет место $\delta(W(x)) \leqslant \delta$, где δ — некоторое положительное число, и, следовательно, $k(W(x)) \leqslant k$, где k — некоторое положительное число (см. пункт А § 3).

В силу непрерывности функций $U(\tau)$ и $V(\tau)$ существует такое число r, что $U(\tau) \subset H_r$, $V(\tau) \subset H_r$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{x}^{y} U(\tau)\, d\tau \subset H_{r(y-x)}, \quad \int\limits_{x}^{y} V(\tau)\, d\tau \subset H_{r(y-x)}. \tag{14}$$

Далее, из равенства (10) и включений (3) следует

$$\left(W(x) \overset{*}{-} \int_x^y V(\tau)\,d\tau\right) + \int_x^y U(\tau)\,d\tau \subset W(y) \subset \\ \subset \left(W(x) + \int_x^y U(\tau)\,d\tau\right) \overset{*}{-} \int_x^y V(\tau)\,d\tau. \quad (15)$$

Усиливая эти включения, получаем

$$W(x) \overset{*}{-} \int_x^y V(\tau)\,d\tau \subset W(y) + H_{r(y-x)} \subset \\ \subset \left[\left(W(x) + \int_x^y U(\tau)\,d\tau\right) \overset{*}{-} \int_x^y V(\tau)\,d\tau\right] + H_{r(y-x)}.$$

Усиливая эти включения, на основании включений (14) получаем

$$W(x) \overset{*}{-} H_{r(y-x)} \subset W(y) + H_{r(y-x)} \subset W(x) + H_{3r(y-x)}.$$

Вычитая из этих включений $H_{r(y-x)}$, получаем

$$W(x) \overset{*}{-} H_{2r(y-x)} \subset W(y) \subset W(x) + H_{2r(y-x)}. \quad (16)$$

В силу пункта А § 3 первое из этих включений при $2r(y-x) \leqslant \beta$ дает

$$W(x) \subset W(y) + H_{2kr(y-x)}.$$

Так как $k > 1$, то это включение вместе со вторым включением (16) дает неравенство (11), где $\lambda = 2kr$, однако при условии, что $2r(y-x) \leqslant \beta$. Но отсюда следует неравенство (11) и для произвольных x, y.

Итак, предложение F полностью доказано.

Допустим, что множество A и обе последовательности (1) суть шары с центром в нуле, так что $A = H_l$, $U_i = H_{r_i}$, $V_i = H_{s_i}$. Допустим, что для каждого i имеет место неравенство

$$\gamma_i = l + (r_1 + r_2 + \ldots + r_i) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_i) \geqslant 0.$$

Тогда в силу формулы (2) мы имеем $A_i = H_{\gamma_i}$, так что альтернированная сумма A_n определяется формулой $A_n = H_{\gamma_n}$.

Если $A = H_l$, $U(t) = H_{r(t)}$, $V(t) = H_{s(t)}$, то, предполагая, что

$$\gamma(t) = l + \int_p^t r(\tau)\,d\tau - \int_p^t s(\tau)\,d\tau \geqslant 0,$$

при $p < t \leqslant q$, получаем

$$\int\limits_{H_{l,p}}^{q} (H_{r(\tau)}\, d\tau \overset{*}{-} H_{s(\tau)}\, d\tau) = A_{\gamma(q)}.$$

§5. Линейная дифференциальная игра преследования

Рассмотрим линейную дифференциальную игру, задаваемую уравнением

$$\dot{z} = Cz - u + v, \tag{1}$$

где $z \in R$ — фазовый вектор игры, R — фазовое векторное пространство нашей игры, u — управление преследования, v — управление убегания. Причем имеет место условие

$$u \in P, \quad v \in Q,$$

где P и Q — компактные выпуклые подмножества пространства R. Игра считается законченной, когда точка z приходит на множество M, где M есть замкнутое выпуклое подмножество пространства R.

Заметим, что если $u(t)$, $v(t)$ — две заданные функции, то решение уравнения (1) при $u = u(t)$, $v = v(t)$ с начальным условием $z(0) = z_0$ может быть записано в форме

$$z(t) = e^{tC} z_0 + \int\limits_0^t e^{sC} [v(t-s) - u(t-s)]\, ds. \tag{2}$$

Составим альтернированный интеграл

$$W(t) = \int\limits_{M,0}^{t} (e^{\tau C} P\, d\tau \overset{*}{-} e^{\tau C} Q\, d\tau).$$

Пусть z_0 — произвольная точка пространства R. Рассмотрим гипотетическое включение

$$e^{tC} z_0 \in W(t). \tag{3}$$

Если существует такое неотрицательное t, что это включение имеет место, то обозначим через $t_0 = T(z_0)$ минимальное значение t, для которого включение (3) имеет место.

Оказывается, что имеет место следующий результат.

A. Пусть ε — малое положительное число и $v(t)$ — управление убегания, заданное на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$. Возьмем теперь произвольное управление преследования $u(t)$ на том же самом отрезке $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, и рассмотрим решение уравнения (1) на этом отрезке, причем за v и u взяты заданные уже теперь функции $v(t)$ и $u(t)$. В силу формулы (2) решение уравнения (1) с начальным значением $z(0) = z_0$ при $t = \varepsilon$ записывается в виде

$$z_1 = z(\varepsilon) = e^{\varepsilon C} z_0 + \int\limits_0^{\varepsilon} e^{sC}(v(\varepsilon - s) - u(\varepsilon - s))\, ds. \qquad (4)$$

Положим

$$t_1 = T(z_1).$$

Мы предполагаем, что управление $v(t)$ задано на отрезке 0ε, а управление $u(t)$ на этом же отрезке выбрано пока произвольно. Тогда число t_1 является функционалом от функции $u(t)$, заданной на отрезке 0ε. Выберем теперь такое управление $u(t)$ на отрезке 0ε, чтобы число t_1 достигало своего минимума, и сохраним за ним обозначение t_1. Оказывается, что

$$t_1 \leqslant t_0 - \varepsilon.$$

Докажем высказанное утверждение. Пусть пока t_1 — произвольное число. Рассмотрим гипотетическое включение

$$e^{(t_1+\varepsilon)C} z_0 \in W(t_1 + \varepsilon). \qquad (5)$$

Ясно, что при $t_1 = t_0 - \varepsilon$ это включение имеет место. Вместо включения (5) рассмотрим более слабое включение (см. формулу (15) из § 4)

$$e^{(t_1+\varepsilon)C} z_0 \in \left(W(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} e^{\tau C} P\, d\tau \right) \overset{*}{-} \int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} e^{\tau C} Q\, d\tau.$$

Это включение также имеет место при $t_1 = t_0 - \varepsilon$. Оно эквивалентно включению

$$e^{(t_1+\varepsilon)C} z_0 + \int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} e^{\tau C} Q\, d\tau \subset W(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} e^{\tau C} P\, d\tau. \qquad (6)$$

Заменим теперь множество, являющееся вторым членом левой части этого включения, одним определенным элементом этого множества, который запишем в виде

$$e^{t_1 C} \int_0^{\varepsilon} e^{sC} v(\varepsilon - s)\, ds,$$

где $v(t)$, входящее в этот интеграл, есть заданное управление $v(t)$ убегания. Из включения (6) следует включение

$$e^{(t_1+\varepsilon)C} z_0 + e^{t_1 C} \int_0^{\varepsilon} e^{sC} v(\varepsilon - s)\, ds \in W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} e^{\tau C} P\, d\tau.$$

Это включение имеет место при $t_1 = t_0 - \varepsilon$. Выберем теперь за t_1 минимальное значение t_1, при котором это включение имеет место. Тогда существует такой конкретный элемент второго члена правой части этого включения, для которого включение сохраняется. Запишем этот конкретный элемент в виде

$$e^{t_1 C} \int_0^{\varepsilon} e^{sC} u(\varepsilon - s)\, ds,$$

где $u(t)$, стоящее под знаком интеграла, есть некоторое управление $u(t)$, определенное на отрезке 0ε. Производя эту замену и перенося второй член включения в левую часть, мы получим включение

$$e^{t_1 C} \left[e^{\varepsilon C} z_0 + \int_0^{\varepsilon} e^{sC} (v(\varepsilon - s) - u(\varepsilon - s))\, ds \right] \in W(t_1).$$

Левая часть этого включения в силу формулы (4), очевидно, записывается в виде $e^{t_1 C} z_1 \in W(t_1)$. Таким образом, наше утверждение доказано.

Предложение А позволяет нам построить по заданному на отрезке 0ε управлению $v(t)$ управление $u(t)$, минимизирующее величину $T(z_1) = t_1$, причем оказывается, что $t_1 \leqslant t_0 - \varepsilon$. Если теперь управление $v(t)$ становится известным нам на отрезке $\varepsilon\, 2\varepsilon$, то, исходя из полученного уже начального значения z_1, мы изложенным способом можем получить управление $u(t)$ на отрезке $\varepsilon\, 2\varepsilon$, минимизирующее величину $T(z_2) = t_2$, причем $t_2 \leqslant t_1 - \varepsilon$. Повторяя этот процесс дальше, мы можем шаг за шагом построить управление $u(t)$, исходя из становящегося известным управления $v(t)$, таким образом, что в некоторый момент времени $t^* \leqslant T(z_0)$ точка $z(t)$ попадает на множество M. Но при этом управление $u(t)$ в момент времени t строится в предположении, что управление $v(s)$ задано на отрезке $0\ t+\varepsilon$, т. е. мы используем знание управления $v(t)$ с опережением. Исправим этот дефект следующим образом. Пусть $\hat{v}(t)$ — некоторое управление, становящееся известным с течением времени. Положим

$$v(t) = \hat{v}(t-\varepsilon).$$

Таким образом, для того чтобы знать управление $v(s)$ на отрезке $0 \leqslant s \leqslant t+\varepsilon$, достаточно знать управление $\hat{v}(s)$ на отрезке $-\varepsilon \leqslant s \leqslant t$, т. е. без опережения. Но на отрезке $-\varepsilon 0$ управление $\hat{v}(s)$ вообще не задано, и поэтому мы его зададим произвольно. Решение уравнения дифференциальной игры (1) с начальным значением z_0 при $u = u(t)$, $v = v(t)$ обозначим через $z(t)$, а решение того же уравнения при $u = u(t)$, $v = \hat{v}(t)$ обозначим через $\hat{z}(t)$. Мы знаем, что $\hat{z}(t^*) \in M$. Выясним теперь, каково $\hat{z}(t^*)$. Для этого оценим разность $\hat{z}(t) - z(t)$. Мы имеем

$$\hat{z}(t) - z(t) = \int_0^t e^{sC}\hat{v}(t-s)\,ds - \int_0^t e^{sC}v(t-s)\,ds =$$
$$= \int_0^t e^{sC}\hat{v}(t-s)\,ds - \int_0^t e^{sC}\hat{v}(t-s-\varepsilon)\,ds. \quad (7)$$

Заменяя $s+\varepsilon$ через τ, второй из интегралов в формуле (7) перепишем в виде

$$\int_0^t e^{sC}\hat{v}(t-s-\varepsilon)\,ds = \int_\varepsilon^{t+\varepsilon} e^{(\tau-\varepsilon)C}\hat{v}(t-\tau)\,d\tau.$$

Далее, это выражение можно переписать в виде

$$\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} e^{(\tau-\varepsilon)C}\hat{v}(t-\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_0^t e^{(\tau-\varepsilon)C}\hat{v}(t-\tau)\,d\tau - \int_0^\varepsilon e^{(\tau-\varepsilon)C}\hat{v}(t-\tau)\,d\tau + \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau-\varepsilon)C}\hat{v}(t-\tau)\,d\tau.$$

Заменяя в выражении (7) переменное s интегрирования в первом интеграле через τ, мы получим

$$\hat{z}(t) - z(t) = \int\limits_0^t (e^{\tau C} - e^{(\tau-\varepsilon)C})\hat{v}(t-\tau)\,d\tau + \\ + \int\limits_0^{\varepsilon} e^{(\tau-\varepsilon)C}\hat{v}(t-\tau)\,d\tau - \int\limits_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau-\varepsilon)C}\hat{v}(t-\tau)\,d\tau.$$

Из этой формулы видно, что

$$|\hat{z}(t) - z(t)| \leqslant \varepsilon c,$$

где c зависит от отрезка $0t$ и игры. Так как для нас важно значение $t = t^* \leqslant T(z_0)$, то эта константа c для $t = t^*$ оценивается через величину $T(z_0)$ и величины, зависящие от игры. Таким образом, выбирая ε заранее достаточно малым, мы можем осуществить преследование так, что точка $\hat{z}(t^*)$ окажется от множества M на расстоянии, не превосходящим εc, где c зависит от z_0 и игры, но не зависит от ε.

Резюмируя полученный результат, мы приходим к выводу, что дифференциальная игра преследования, начинающаяся в точке z_0 может быть закончена за время, не превосходящее числа $T(z_0)$. Правда, при этом мы попадаем не на само множество M, но приближаемся к нему на величину, не превосходящую числа εc. Однако, в силу того что ε заранее может быть взято произвольно малым, мы здесь просто говорим, что игра преследования заканчивается за время, не превосходящее $T(z_0)$.

Освободиться от неточности εc до сих пор не удалось, хотя так как эта величина произвольно мала, то кажется естественным ожидать точного результата. Но получение его видимо связано с преодолением каких-то существенных трудностей.

То, что игру преследования можно закончить точно за время $T(z_0)$, легко доказать, не производя описанных здесь конструкций с шагом ε. Но эта конструкция позволяет нам улучшить результат, т. е. сократить время преследования, если процесс убегания $v(t)$ выбран неудачно, т. е. убегание осуществляется не наилучшим образом.

§6. Упрощенное рассмотрение линейной дифференциальной игры

Здесь мы рассмотрим дифференциальную игру с уравнением (1) из § 5, но с множеством M, представляющим собою векторное подпространство пространства R. Через L обозначим ортогональное дополнение подпространства M в пространстве R, а через π — операцию ортогонального проектирования пространства R на подпространство L. Положим

$$P(t) = \pi e^{tC} P, \quad Q(t) = \pi e^{tC} Q,$$

и предположим, что множество $S(t) = P(t) \overset{*}{-} Q(t)$ имеет размерность, равную размерности подпространства L при всех положительных $t < T$, где T может, в частности, быть равно ∞. Только для значений $0 \leqslant t < T$ мы и будем рассматривать множество $S(t)$. Положим, далее,

$$\overline{W}(t) = \int_0^t S(\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь гипотетическое включение $\pi e^{tC} z_0 \in \overline{W}(t)$. Если при каком-нибудь значении t это включение имеет место, то обозначим через $t_0 = T(z_0)$ минимальное значение t, при котором это включение имеет место.

A. Пусть $v(t)$ — управление, заданное на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$. Возьмем теперь произвольное управление $u(t)$, заданное на таком же отрезке, и пусть $z(t)$ — решение дифференциального уравнения игры при этих управлениях с начальным значением z_0. Положим $z_1 = z(\varepsilon)$. Рассмотрим величину $T(z_1)$. Она является функционалом от управления $u(t)$ на отрезке 0ε, которое мы еще не выбрали. Выберем теперь такое управление $u(t)$ на этом отрезке, чтобы $t_1 = T(z_1)$ достигало своего минимума. Оказывается, что $t_1 \leqslant t_0 - \varepsilon$.

Докажем это утверждение. Пусть t_1 — пока произвольное число. Рассмотрим гипотетическое включение

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon)C} z_0 \in \overline{W}(t_1 + \varepsilon). \tag{2}$$

Это включение имеет место при $t_1 = t_0 - \varepsilon$. Вместо включения (2) рассмотрим другое эквивалентное ему включение

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon)C} z_0 \in \overline{W}(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} S(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Мы имеем

$$S(\tau) + Q(\tau) \subset P(\tau).$$

Это включение можно интегрировать. Проинтегрируем его в пределах от t_1 до $t_1+\varepsilon$. Мы получаем тогда

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} S(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} Q(\tau)\,d\tau \subset \int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} P(\tau)\,d\tau.$$

Из этого и из включения (3) следует

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon)C} z_0 + \int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} Q(\tau)\,d\tau \subset \overline{W}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} P(\tau)\,d\tau.$$

Подставим теперь в этом включении вместо второго члена в левой части один из его элементов, а именно следующий:

$$\pi e^{t_1 C} \int\limits_0^{\varepsilon} e^{sC} v(\varepsilon - s)\,ds,$$

где $v(t)$ есть заданное управление на отрезке 0ε. Мы получим

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon)C} z_0 + \pi e^{t_1 C} \int\limits_0^{\varepsilon} e^{sC} v(\varepsilon - s)\,ds \in \overline{W}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} P(\tau)\,d\tau. \quad (4)$$

Выберем теперь минимальное значение для $t_1 \leqslant t_0 - \varepsilon$, для которого включение (4) имеет место. Тогда существует определенный элемент второго члена правой части последнего включения, для которого включение сохраняется. Этот элемент запишем в виде

$$\pi e^{t_1 C} \int\limits_0^{\varepsilon} e^{sC} u(\varepsilon - s)\,ds,$$

где $u(t)$ есть элемент из P. Тогда включение (4) переписывается в виде

$$\pi e^{t_1 C} \left[e^{\varepsilon C} z_0 + \int\limits_0^{\varepsilon} e^{sC} (v(\varepsilon - s) - u(\varepsilon - s))\,ds \right] \in \overline{W}(t_1).$$

Левая часть может быть переписана иначе. Мы получаем

$$\pi e^{t_1 C} z_1 \in \overline{W}(t_1).$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

Резюмировать полученные здесь результаты можно точно так же, как и в предыдущем параграфе.

§7. Применение полученных результатов для конкретных процессов преследования

1. Пусть E — евклидово пространство размерности $\nu \geqslant 2$, x и y — геометрические положения преследующего и убегающего объектов. Движение их описывается уравнениями

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = a, \quad |a| \leqslant \rho, \tag{1}$$

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} = b, \quad |b| \leqslant \sigma. \tag{2}$$

Здесь $\alpha, \beta, \rho, \sigma$ — положительные числа, a и b — управляющие векторы, принадлежащие пространству E и удовлетворяющие указанным неравенствам, а в остальном произвольные. Будем считать, что преследование заканчивается, когда $x = y$.

Дифференциальную игру, соответствующую описанному процессу преследования, построим следующим образом. Положим

$$z^1 = x - y, \quad z^2 = \dot{x}, \quad z^3 = \dot{y}.$$

Здесь z^1, z^2, z^3 суть векторы пространства E. Фазовый вектор z задается формулой $z = (z^1, z^2, z^3)$, так что вектор z задается тремя векторными компонентами.

Совокупность двух уравнений (1) и (2) теперь перепишем в виде

$$\dot{z}^1 = z^2 - z^3, \quad \dot{z}^2 = -\alpha z^2 + a, \quad \dot{z}^3 = -\beta z^3 + b. \tag{3}$$

Управления u и v задаются формулами

$$u = (0,\, -a,\, 0), \quad v = (0,\, 0,\, b).$$

Следовательно,

$$P = \{(0,\, -a,\, 0) : |a| \leqslant \rho\}, \tag{4}$$

$$Q = \{(0,\, 0,\, b) : |b| \leqslant \sigma\}, \tag{5}$$

$$M = \{z : z^1 = 0\}, \quad L = \{(z^1,\, 0,\, 0) : z^1 \in E\}.$$

Таким образом, мы можем отождествить пространство L с пространством E, положив $(z^1,\, 0,\, 0) \overset{\Delta}{=} z^1$.

Оператор π имеет вид $\pi(z^1, z^2, z^3) = (z^1,\, 0,\, 0) = z^1$. Матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Матрицу e^{tC} мы получим, решая однородное уравнение, соответствующее системе (3). В результате получаем

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} & -\dfrac{1-e^{-\beta t}}{\beta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строка этой матрицы не выписаны, так как нас интересует лишь оператор πe^{tC}, который в силу сказанного записывается в виде

$$\pi e^{tC}(z_0^1, z_0^2, z_0^3) = z_0^1 + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} z_0^2 - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} z_0^3. \tag{6}$$

Формула (6) позволяет нам вычислить множество $P(t) = \pi e^{tC} P$, $Q(t) = \pi e^{tC} Q$. В силу формул (4), (5), (6) мы имеем

$$P(t) = \left\{ \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}(-a) : |a| \leqslant \rho \right\}, \quad Q = \left\{ -\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} b : |b| \leqslant \sigma \right\}.$$

Таким образом, множество $P(t)$ есть шар радиуса $r(t) = \dfrac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\rho$, а множество $Q(t)$ есть шар радиуса $s(t) = \dfrac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\sigma$, а геометрическая разность этих множеств $S(t)$ есть шар радиуса

$$\omega(t) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\rho - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\sigma.$$

Множество $\overline{W}(t)$, определяемое формулой (1) из § 6, есть шар радиуса

$$\gamma(t) = \int\limits_0^t \left(\frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha}\rho - \frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta}\sigma \right) d\tau;$$

Легко доказывается, что для того, чтобы величины $\omega(t)$, $\gamma(t)$ были положительны при всех $t > 0$, достаточно, чтобы выполнялись два неравенства

$$\rho > \sigma, \quad \rho/\alpha > \sigma/\beta. \tag{7}$$

При этих условиях величина $\gamma(t)$ неограниченно возрастает при t неограниченно возрастающем. Если одно из неравенств в (7) заменить на противоположное, то функция $\gamma(t)$ будет непременно принимать отрицательные значения.

Для того чтобы определить величину $T(z_0)$ ($z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3)$), мы должны найти минимальное значение t, при котором точка

$$\pi e^{tC} z_0 = z_0^1 + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} z_0^2 - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} z_0^3$$

принадлежит шару радиуса $\gamma(t)$. Таким образом, величина $T(z_0)$ есть наименьший положительный корень трансцендентного уравнения

$$\gamma(t)^2 = (\pi e^{tC} z_0, \pi e^{tC} z_0).$$

2. Пусть в евклидовом пространстве E размерности $\nu \geqslant 2$ имеется две точки: x — преследующая и y — убегающая. Дифференциальные уравнения движения этих точек следующие:

$$\ddot{x} = a, \quad |a| \leqslant \rho, \qquad \dot{y} = b, \quad |b| \leqslant \sigma,$$

где a и b — управляющие векторы, принадлежащие пространству E и связанные лишь указанными неравенствами. Игра преследования заканчивается, когда $|x-y| \leqslant l$, где $l > 0$ (l — поимка).

Соответствующую этому процессу преследования дифференциальную игру зададим следующим образом:

$$z^1 = x - y, \quad z^2 = \dot{x}.$$

Таким образом, фазовый вектор игры z задается формулой $z = (z^1, z^2)$, так что вектор z задается двумя векторными компонентами. Дифференциальное уравнение игры имеет вид

$$\dot{z}^1 = z^2 - b, \quad \dot{z}^2 = a.$$

Управления u и v задаются формулами

$$u = (0, -a), \quad v = (-b, 0).$$

Следовательно,

$$P = \{(0, -a) : |a| \leqslant \rho\}, \quad Q = \{(-b, 0) : |b| \leqslant \sigma\},$$

$$M = \{z = (z^1, z^2) : |z^1| < l\}.$$

Через L обозначим множество $L = \{(z^1, 0) : z^1 \in E\}$. Таким образом, мы можем отождествить пространство L с пространством E, положив

$$(z^1, 0) \overset{\Delta}{=} z^1.$$

Матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрица e^{tC} задается формулой

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как в этой задаче множество M не является векторным подпространством пространства R, то мы должны решать ее, пользуясь методом параграфа 5, но при этом мы можем спроектировать все построение альтернированного интеграла ортогонально на подпространство L пространства R. Оператор проектирования задается формулой

$$\pi(z^1, z^2) = (z^1, 0) \overset{\Delta}{=} z^1.$$

При этом множество M переходит в шар H_l в пространстве $E = L$, а проекции π множеств $e^{tC}P$ и $e^{tC}Q$ будут шарами радиусов ρt и σ соответственно, т. е. шарами $H_{\rho t}$ и H_σ. Мы должны сосчитать альтернированный интеграл

$$\overline{W}(t) = \int\limits_{H_{l,0}}^{t} (H_{\rho\tau}\, d\tau \overset{*}{-} H_\sigma\, d\tau) \overset{\Delta}{=} H_{\gamma(t)},$$

где $\gamma(t) = l + \dfrac{1}{2}\rho t^2 - \sigma t$. Условие $\gamma(t) > 0$ при $t > 0$ выполняется, если $l > \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma^2}{\rho}$. Если это условие выполнено, то радиус шара $\overline{W}(t)$ всегда положителен при $t > 0$ и неограниченно возрастает при t неограниченно возрастающем.

Величина $T(z_0)$ определяется теперь как минимальное значение t, при котором шар $H_{\gamma(t)}$ содержит точку

$$\pi e^{tC}(z_2^1, z_0^2) = z_0^1 + tz_0^2.$$

Таким образом, для нахождения $T(z_0)$ нужно найти минимальный положительный корень уравнения

$$\left(l + \frac{1}{2}\rho t^2 - \sigma t\right)^2 = |z_0^1|^2 + 2(z_0^1, z_0^2)t + |z_0^2|^2 t^2.$$

Литература

1. Л. С. Понтрягин, Линейные дифференциальные игры, I, ДАН СССР, **174**, № 6 (1967), 1278-1280.
2. Л. С. Понтрягин, Линейные дифференциальные игры, II, ДАН СССР, **175**, № 4 (1967), 764-766.