Целевое множество $M \subset \mathbb{R}^3$ является единичным шаром с центром в нуле. Матрица Π является единичной размера 3×3. Симметричная сетка на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ определена параметром $L = 32$. Мелкость δ равномерного разбиения отрезка $[0, T]$ равна 0.01. Число отрезков разбиения $K = T/\delta = 562$.

Результат вычислений множеств $\mathscr{C}M_k$ (см. (28)) для всех $k = \overline{0, K}$ приведен на рис. 1, где изображены проекции каждого 15-го из этих множеств на координатные плоскости Ox_1x_2, Ox_1x_3 и Ox_2x_3. Для начального фазового состояния $x(0) = (-8.35;\ -0.60;\ 3.46)$ вычислена траектория вектора $z(t)$ (см. (4)), $t \in [0, T]$, также изображенная на рис. 1.

Список литературы

1. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. Т. 112. №3. С. 307–330.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
4. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений. М.: Изд-во МФТИ, 1982.
5. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.
6. Управление с гарантированным результатом. Сборник научных трудов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987.
7. Позиционное управление с гарантированным результатом. Сборник научных трудов. Свердловск: УрО АН СССР, 1988.
8. *Иванов Г. Е., Половинкин Е. С.* О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №9. С. 1641–1648.
9. *Kurzhanski A. B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
10. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
11. *Половинкин Е. С.* Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187. №2. С. 103–130.
12. *Силин Д. Б., Тринько Н. Г.* Модификация алгоритма Грехема для овыпукления положительно-однородной функции // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. №4. С. 631–636.
13. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.
14. *Балашов М. В.* О максимизации выпуклой функции на компакте // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М.: МФТИ, 1997. С. 17–25.
15. *Орлова Г. Б., Силин Д. Б.,* Приближенное вычисление выпуклой оболочки положительно-однородной функции // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1997. №2. С. 32–35.
16. *Дудов С. И.* Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. №5. С. 153–159.
17. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
18. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию 19.01.2001

2001 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Том 192, №10

УДК 517.977.8

Е. С. Половинкин, Г. Е. Иванов, М. В. Балашов, Р. В. Константинов, А. В. Хорев

Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр

На основе общей теории предлагается численный алгоритм построения стабильных мостов Красовского, альтернированных множеств Понтрягина, а также кусочно-программных стратегий, решающих линейные дифференциальные игры двух лиц (преследования или убегания) на фиксированном отрезке времени. При этом целью первого игрока (преследователя) является попадание фазового вектора управляемой системы в заданный момент времени на заданное целевое (терминальное) множество. Цель второго игрока (убегающего) противоположная. В работе дано описание численных алгоритмов, используемых при решении рассматриваемых дифференциальных игр, и приведены оценки погрешностей, связанных с аппроксимациями игровых множеств многогранниками.

Библиография: 18 названий.

§1. Постановка задачи

Задана линейная управляемая система:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Cv(t), \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$ – время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$ – управляющие параметры. Множества $P \subset \mathbb{R}^p$ и $Q \subset \mathbb{R}^q$ являются выпуклыми компактами, а матрицы A, B, C имеют соответствующие размеры. Заданы начальное фазовое состояние $x_0 = x(0)$ управляемой системы, целевое (терминальное) выпуклое компактное множество $M \subset \mathbb{R}^m$ и матрица $\Pi \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leqslant n$.

На траекторию системы (1) оказывают воздействие два игрока: преследователь и убегающий. Преследователь распоряжается выбором управляющего параметра u, убегающий – параметра v. Целью преследователя является приведение проекции траектории управляемой системы (1) в конечный момент времени T на терминальное множество, т.е. выполнение включения

$$\Pi x(T) \in M. \tag{2}$$

Цель убегающего противоположная.

Задачу разделяют на две: игру преследования и игру убегания (см. [1]–[3]).

Игра преследования решается с позиции преследователя указанием алгоритма, называемого “стратегией преследователя”, состоящего в построении в процессе

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00743) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (грант № 97-0-1.9-26).

игры соответствующего управления $u(t,x)$. Более того, полагаем, что преследователь выбирает свое управление в классе кусочно-программных стратегий. Это значит, что преследователю известны параметры игровой задачи (т.е. матрицы A, B, C, Π, множества P, Q, M, момент окончания игры T). Перед началом игры преследователь выбирает некоторое равномерное разбиение $\omega = \{t_k\}_{k=0}^{K}$ отрезка $[0,T]$. Далее в каждый момент времени $t_k \in \omega$, $k = \overline{0, K-1}$, преследователь получает информацию о текущем значении фазового вектора $x(t_k)$ (решения системы (1)), на основании чего строит свое управление $u(t, x(t_k)) = U_k \in P$, постоянное по t на интервале $[t_k, t_{k+1})$. При выборе своего управления преследователь не имеет информации об управлении убегающего. При этом предполагается, что убегающий может иметь любую информацию о параметрах игровой задачи и текущем управлении преследователя. Единственным ограничением является то, что на каждом интервале $[t_k, t_{k+1})$ из разбиения ω он, так же как и преследователь, выбирает свое управление $v(t) = V_k \in Q$ постоянным.

Игра убегания решается с позиции убегающего построением в процессе игры соответствующего управления $v(t,x)$, обеспечивающего уклонение проекции траектории управляемой системы (1) от попадания в конечный момент времени T на терминальное множество, т.е.

$$\Pi x(T) \notin M. \tag{3}$$

Полагаем, что для решения данной игры убегающий выбирает свое управление в классе кусочно-программных стратегий. Это значит, что убегающему известны параметры игровой задачи. Перед началом игры убегающий выбирает некоторое равномерное разбиение $\omega = \{t_k\}_{k=0}^{K}$ отрезка $[0,T]$. Далее в каждый момент времени $t_k \in \omega$, где $k = \overline{0, K-1}$, убегающий получает информацию о текущем значении фазового вектора (1) $x(t_k)$, на основании чего строит свое управление $v(t, x(t_k)) = V_k \in Q$, постоянное на интервале $[t_k, t_{k+1})$. При выборе своего управления убегающий не имеет информации об управлении преследователя. При этом предполагается, что преследователь может иметь любую информацию о параметрах игровой задачи и текущем управлении убегающего. Единственным ограничением является то, что на каждом интервале $[t_k, t_{k+1})$ из разбиения ω он, так же как и убегающий, выбирает свое управление $u(t) = U_k \in P$ постоянным.

Заменой фазовой переменной

$$z(t) = \Pi e^{(T-t)A} x(t) \tag{4}$$

сводим исходную систему (1) к управляемой системе с простой динамикой вида

$$\frac{dz}{dt} = \widetilde{B}(t)u + \widetilde{C}(t)v, \tag{5}$$

где матрицы $\widetilde{B}(t) = \Pi e^{(T-t)A} B$, $\widetilde{C}(t) = \Pi e^{(T-t)A} C$.

В результате замены (4) включение (2) принимает вид:

$$z(T) \in M. \tag{6}$$

Аналогично, условие (3) принимает вид:

$$z(T) \notin M. \tag{7}$$

§2. Основные конструкции решения игровых задач

Для последующей численной реализации решения дифференциальной игры по натуральному числу K выбираем равномерное разбиение $\omega = \{t_k\}_{k=0}^{K}$ отрезка $[0,T]$ такое, что мелкость разбиения $\delta = T/K$, а точки $t_k = k\delta$, $k = \overline{0, K}$. Введем следующие обозначения для получаемых матриц

$$A_k = \Pi e^{(T-t_k)A} \int_0^{\delta} e^{-\tau A}\, d\tau, \quad B_k = A_k B, \quad C_k = A_k C \tag{8}$$

и для множеств

$$P_k = -B_k P, \quad Q_k = C_k Q, \tag{9}$$

где $k = \overline{0, K-1}$. Напомним [1], [4], что *суммой и разностью* Минковского–Понтрягина двух множеств $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^m$ называют соответственно множества

$$X_1 + X_2 = \{z_1 + z_2 : z_i \in X_i,\ i = 1,2\},$$
$$X_1 \overset{*}{-} X_2 = \{z \in \mathbb{R}^m : z + X_2 \subset X_1\}.$$

Используя эти операции с множествами и опираясь на результаты общей теории дифференциальных игр [1]–[3], в игре преследования определим *внутренние альтернированные множества*

$$M_K = M, \quad M_k = M'_k + P_k, \quad M'_k = M_{k+1} \overset{*}{-} Q_k, \quad k = \overline{0, K-1}, \tag{10}$$

а в игре убегания определим *внешние альтернированные множества*

$$N_K = M, \quad N_k = N'_k \overset{*}{-} Q_k, \quad N'_k = N_{k+1} + P_k, \quad k = \overline{0, K-1}. \tag{11}$$

В итоге реализации попятной итерационной конструкции (10) (или (11)) по конечному множеству M_K (или N_K) вычисляется начальное множество $M_0 = M_0(\omega)$ (или $N_0 = N_0(\omega)$), которое назовем *альтернированной суммой Понтрягина* для игры преследования (или игры убегания).

Как известно [1], [2], достаточное условие успешной поимки в игре преследования обеспечивается принадлежностью начальной позиции $z(0)$ альтернированной сумме, т.е. включением

$$z(0) = z_0 \in M_0(\omega). \tag{12}$$

Аналогично, достаточное условие успешного уклонения в игре убегания обеспечивается соотношением

$$z(0) = z_0 \notin N_0(\omega). \tag{13}$$

Замечание. Если в решаемой конкретной игре преследования некоторые из множеств (10) оказались пустыми или включение (12) для заданной начальной позиции не выполняется, следует увеличить число K точек равномерного разбиения отрезка $[0,T]$. Если это не помогает, то можно исследовать вопрос о возможности приближенной r-поимки, увеличив целевое множество M, прибавив к нему шар радиуса $r > 0$.

Предполагая, что множества (10) непусты и имеет место начальное включение (12), укажем кусочно-программную стратегию преследователя, обеспечивающую поимку (6) в игре преследования. Заметим, что при любом $k = \overline{0, K-1}$ включение $z_k = z(t_k) \in M_k$ (см. (10)) означает, что множество вида

$$P_k^{\mathrm{opt}} = (-P_k) \cap (M_k' - z_k) \tag{14}$$

непусто. Выбрав произвольный вектор $u_k \in P_k^{\mathrm{opt}}$, вычисляем управление преследователя на интервале $[t_k, t_{k+1})$ по формуле

$$U_k = \arg\min_{u \in P} |B_k u - u_k|. \tag{15}$$

В итоге, из включения $z_k \in M_k$ в силу соотношений (10) следует, что при любом допустимом управлении убегающего V_k выбор управления U_k из (15) гарантирует включение $z_{k+1} \in M_{k+1}$. Следовательно, включение (12) гарантирует, что через K шагов траектория системы (5) придет в точку $z(t_K) = z_K \in M_K$, т.е. $z(T) \in M$ – произойдет поимка.

Аналогично, укажем кусочно-программную стратегию убегающего, которая при условии (13) обеспечивает уклонение (7). Определим множества

$$Q_k^{\mathrm{opt}} = Q_k \cap (N_k' - z_k). \tag{16}$$

При любом $k = \overline{0, K-1}$ соотношение $z_k \notin N_k$ означает, что $Q_k \setminus Q_k^{\mathrm{opt}} \neq \varnothing$. Выбрав произвольный вектор $v_k \in Q_k \setminus Q_k^{\mathrm{opt}}$, вычисляем управление убегающего на интервале $[t_k, t_{k+1})$ по формуле

$$V_k = \arg\min_{v \in Q} |C_k v - v_k|. \tag{17}$$

В итоге, из соотношения $z_k \notin N_k$ в силу (11) следует, что при любом допустимом управлении преследователя U_k выбор управления V_k гарантирует соотношение $z_{k+1} \notin N_{k+1}$. Следовательно, условие (13) гарантирует, что через K шагов траектория системы (5) придет в точку $z_K = z(t_K) \notin N_K$, т.е. $z(T) \notin M$ – уклонение.

Далее будет дано описание численных алгоритмов, используемых при решении рассматриваемой дифференциальной игры. Будут получены оценки погрешности алгоритмов, связанных с аппроксимациями игровых множеств многогранниками.

§3. Численная реализация

Для численной реализации приведенных выше альтернированных сумм и кусочно-программных стратегий в линейных задачах преследования и убегания нами разработана компьютерная программа для Windows® 95 с богатым интерфейсом. Эта программа позволяет: осуществлять удобный ввод, редактирование и сохранение параметров игровой задачи; до начала игры проводить вычисление выпуклых многогранных аппроксимаций альтернированных множеств (10) или (11), производить предварительный анализ возможности поимки (12) или убегания (13) из заданной начальной позиции, а при необходимости производить анализ возможности r-поимки; проводить аналитическое и визуальное изучение особенностей получаемых стабильных мостов; затем при положительном исходе предварительного анализа программа по реализуемой ситуации указывает в режиме реального времени

кусочно-программную стратегию преследователя (15) в игре преследования или кусочно-программную стратегию убегающего (17) в игре убегания. Наша работа примыкает к исследованиям [5]–[8]. Необходимо также отметить другой численный метод построения стабильных мостов, основанный на эллипсоидальных аппроксимациях, принадлежащий А. Б. Куржанскому (см., например, [9]). При всей элегантности и экономичности указанный метод не всегда позволяет получить высокую точность приближения стабильного моста, как это удается сделать методом, изложенным в статье.

Перейдем к конкретному изложению численной реализации описанных выше алгоритмов.

Ввод и обработка данных. Для конкретной дифференциальной игры (убегания или преследования) необходимо задать следующие игровые параметры: время окончания игры T; мелкость $\delta = T/K$ равномерного разбиения ω отрезка времени $[0, T]$; n – размерность фазового пространства, m – размерность пространства, в котором выбирается целевое множество; p, q – размерности пространств, из которых выбираются множества управляющих параметров игроков; матрицы A, B, C, Π, начальное фазовое состояние x_0. При этом $0 < \delta \leqslant T$ и $2 \leqslant m \leqslant n$. В программе каждое из выпуклых множеств P, Q, M может быть задано двумя способами: в виде многогранника или в виде эллипсоида.

В первом случае всякий многогранник из d-мерного пространства должен быть задан $(N \times d)$-матрицей $\mathscr{A} = (a_{ij})$ и N-мерным столбцом $b = (b_i)$, которые определяют этот многогранник через систему линейных неравенств

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \right\},$$

или то же самое можно записать в матричной форме

$$\{ x \in \mathbb{R}^d : \mathscr{A} x \leqslant b \}. \tag{18}$$

После задания матрицы $\mathscr{A}$ и столбца b программа осуществляет автоматическую проверку того, что неравенства (18) определяют ограниченное непустое множество.

Рассмотрим второй случай задания множества в виде эллипсоида. Всякий эллипсоид из d-мерного пространства $\mathbb{R}^d$ задается симметрической положительно определенной $(d \times d)$-матрицей $\mathscr{E} = (\varepsilon_{ij})$ и d-мерным вектор-столбцом $c = (c_i) \in \mathbb{R}^d$ (центр эллипсоида) следующим образом:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i,j=1}^{d} \varepsilon_{ij} (x_i - c_i)(x_j - c_j) \leqslant 1 \right\},$$

или то же самое можно записать в матричной форме

$$\{ x \in \mathbb{R}^d : \langle (x - c), \mathscr{E}(x - c) \rangle \leqslant 1 \}. \tag{19}$$

Замечание. В компьютерной программе при вводе произвольного элемента ε_{ij} матрицы $\mathscr{E}$ автоматически вводится симметричный ему элемент $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$ (так как матрица $\mathscr{E}$ является симметрической). После завершения ввода матрицы в программе предусмотрена автоматическая проверка положительной определенности матрицы $\mathscr{E}$.

Терминальное множество M и определенные в (9) выпуклые компактные множества P_k и Q_k (для всех $k = \overline{0, K-1}$) будем описывать с помощью их опорных функций (см. [1], [4], [10]).

Напомним, что *опорной функцией* множества $M \subset \mathbb{R}^m$ в направлении $p \in \mathbb{R}^m$ называется функция вида $s(p, M) = \sup\{\langle p, z\rangle : z \in M\}$.

Если множество M (или P, или Q) задано в виде выпуклого многогранника с вершинами $z_M(\tau)$, где $\tau = \overline{1, S_M}$ (или $z_P(\tau)$, где $\tau = \overline{1, S_P}$, или $z_Q(\tau)$, где $\tau = \overline{1, S_Q}$), то для любого $p \in \mathbb{R}^m$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} s(p, M) &= \max\{\langle p, z_M(s)\rangle : s = \overline{1, S_M}\},\\ s(p, P_k) &= \max\{\langle -B_k^* p, z_P(\tau)\rangle : \tau = \overline{1, S_P}\},\\ s(p, Q_k) &= \max\{\langle C_k^* p, z_Q(\tau)\rangle : \tau = \overline{1, S_Q}\}, \end{aligned}$$

где $k = \overline{0, K-1}$, а B_k^* (C_k^*) означает транспонированную матрицу к матрице B_k (C_k).

Если же множество M (или P, или Q) задано в виде эллипсоида с матрицей $\mathscr{E}_M$ (или $\mathscr{E}_P$, или $\mathscr{E}_Q$) и центром c_M (или c_P, или c_Q), то для любого $p \in \mathbb{R}^m$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} s(p, M) &= \langle p, c_M\rangle + \sqrt{\langle p, \mathscr{E}_M^{-1} p\rangle},\\ s(p, P_k) &= \langle -B_k^* p, c_P\rangle + \sqrt{\langle B_k^* p, \mathscr{E}_P^{-1} B_k^* p\rangle},\\ s(p, Q_k) &= \langle C_k^* p, c_Q\rangle + \sqrt{\langle C_k^* p, \mathscr{E}_Q^{-1} C_k^* p\rangle}, \end{aligned}$$

где $k = \overline{0, K-1}$.

Выпишем опорные функции внутренних и внешних альтернированных множеств (10) и (11). Используя свойства опорных функций для сумм и разностей Минковского–Понтрягина (см., например, [4]), из формул (10), (11) для любых $p \in \mathbb{R}^m$ и $k = \overline{0, K-1}$ получаем формулы

$$s(p, M_k') = \operatorname{co}(s(p, M_{k+1}) - s(p, Q_k)), \tag{20}$$
$$s(p, M_k) = s(p, M_k') + s(p, P_k), \tag{21}$$
$$s(p, N_k') = s(p, N_{k+1}) + s(p, P_k), \tag{22}$$
$$s(p, N_k) = \operatorname{co}(s(p, N_k') - s(p, Q_k)), \tag{23}$$

где через co f обозначена выпуклая оболочка функции f.

Вычисление приближений альтернированных множеств. Основную трудность аналитической и численной реализации алгоритма (20)–(23) составляет необходимость многократного вычисления выпуклых оболочек функций, входящих в формулы (20)–(23).

При этом в силу необходимости приближенного вычисления описанных выше опорных функций альтернированных множеств прежде всего нужно ограничить

число точек, в которых эти функции будут вычисляться, а затем указать способы их приближенного вычисления в других точках и оценки погрешности вычислений.

В силу положительной однородности опорных функций конечное множество точек задания опорных функций можно выбирать на единичной сфере. При этом такое множество точек (обозначим его буквой $\mathscr{C}$) должно достаточно плотно располагаться на единичной сфере, чтобы по заданной опорной функции $s(p, X)$ произвольного выпуклого компакта X получаемый в результате вычислений многогранник

$$\widetilde{X} = \bigcap_{p \in \mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant s(p, X)\}$$

аппроксимировал выпуклое множество X с наперед заданной погрешностью в метрике Хаусдорфа.

Напомним [1], [4], что *расстояние по Хаусдорфу* между множествами $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^m$ определяется формулой

$$h(X_1, X_2) = \inf\{r > 0 : X_1 \subset X_2 + r\mathbb{B}^m, \quad X_2 \subset X_1 + r\mathbb{B}^m\},$$

где $\mathbb{B}^m$ – единичный шар в $\mathbb{R}^m$ с центром в нуле, причем для выпуклых компактов $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^m$ справедлива формула вычисления этого расстояния через опорные функции

$$h(X_1, X_2) = \max\{|s(p, X_1) - s(p, X_2)| : p \in \mathbb{R}^m, \ |p| = 1\}. \tag{24}$$

Всякая сетка $\mathscr{C}$ характеризуется мелкостью $\Delta = \Delta(\mathscr{C})$ разбиения единичной сферы из $\mathbb{R}^m$ данной сеткой $\mathscr{C}$, т.е. для любого $p \in \mathbb{R}^m$, $|p| = 1$, существует $\widetilde{p} \in \mathscr{C}$ такой, что $|p - \widetilde{p}| \leqslant \Delta$.

В списке игровых параметров каждой выбранной игры (преследования или убегания) присутствует также натуральный параметр $L \geqslant 16$, по которому программа автоматически строит конечную близкую к равномерной симметричную сетку $\mathscr{C} = \{p_i\}_{i=1}^N$, расположенную на единичной сфере из $\mathbb{R}^m$, мелкости $\Delta \leqslant 2\pi/L$. В случае $m = 2$ сетка $\mathscr{C}$ состоит из L точек и является равномерной.

Вычисление множеств (10) и (11) через их опорные функции, область определения которых сужена до фиксированной сетки $\mathscr{C}$, приводит к тому, что формулы (20)–(23) требуют существенной корректировки. Проделаем это.

На выбранной сетке $\mathscr{C}$ определим функции $\mu_K(p) = \nu_K(p) = s(p, M)$ для любого $p \in \mathscr{C}$ и множества

$$\mathscr{C}N_K = \mathscr{C}M_K = \bigcap_{p \in \mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant s(p, M)\}.$$

Отсюда для всех $p \in \mathscr{C}$ очевидны равенства:

$$\mu_K(p) = s(p, \mathscr{C}M_K), \qquad \nu_K(p) = s(p, \mathscr{C}N_K).$$

Рассуждая по индукции, предположим, что для некоторого $k = \overline{0, K-1}$ уже определены функции $\mu_{k+1}(p)$ и $\nu_{k+1}(p)$ на сетке $\mathscr{C}$. Тогда определим функции $\mu_k(p)$ и $\nu_k(p)$ на сетке $\mathscr{C}$ по формулам

$$\mu_k'(p) = \max\{\langle p, z\rangle : \langle q, z\rangle \leqslant \mu_{k+1}(q) - s(q, Q_k) \quad \forall\, q \in \mathscr{C}\}, \tag{25}$$
$$\mu_k(p) = \mu_k'(p) + s(p, P_k),$$
$$\nu_k'(p) = \nu_{k+1}(p) + s(p, P_k),$$
$$\nu_k(p) = \max\{\langle p, z\rangle : \langle q, z\rangle \leqslant \nu_k'(q) - s(q, Q_k) \quad \forall\, q \in \mathscr{C}\}. \tag{26}$$

С помощью функций $\mu'_k(p)$, $\mu_k(p)$, $\nu'_k(p)$, $\nu_k(p)$ при $k = \overline{0, K-1}$, заданных на сетке $\mathscr{C}$, определим многогранники вида

$$\mathscr{C}M'_k = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \mu'_k(p)\}, \tag{27}$$

$$\mathscr{C}M_k = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \mu_k(p)\}, \tag{28}$$

$$\mathscr{C}N'_k = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \nu'_k(p)\}, \tag{29}$$

$$\mathscr{C}N_k = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \nu_k(p)\}. \tag{30}$$

Для каждого номера $k = \overline{0, K-1}$ также определим внешние многогранные аппроксимации множеств P_k и Q_k из (9) по формулам

$$\mathscr{C}P_k = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant s(p, P_k)\}, \tag{31}$$

$$\mathscr{C}Q_k = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant s(p, Q_k)\}. \tag{32}$$

Лемма 1. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^m$ задана сетка $\mathscr{C}$ на единичной сфере. Пусть заданы многогранники вида*

$$X_1 = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} \{x \in \mathbb{R}^m : \langle p, x\rangle \leqslant a(p)\}, \quad X_2 = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} \{x \in \mathbb{R}^m : \langle p, x\rangle \leqslant b(p)\}, \tag{33}$$

причем справедливы равенства $s(p, X_1) = a(p)$ и $s(p, X_2) = b(p)$ для всех $p \in \mathscr{C}$. Тогда многогранник вида

$$X = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} \{x \in \mathbb{R}^m : \langle p, x\rangle \leqslant a(p) + b(p)\} \tag{34}$$

удовлетворяет в общем случае включению $X_1 + X_2 \subset X$. В случае, когда размерность пространства $m = 2$, справедливо равенство $X = X_1 + X_2$.

Доказательство. Включение $X_1 + X_2 \subset X$ очевидно следует из определений множеств (33) и (34). Также в силу условий леммы очевидно равенство $s(p, X_1) + s(p, X_2) = s(p, X)$ для каждого вектора $p \in \mathscr{C}$.

Рассмотрим случай $m = 2$. Произвольные два вектора p и q из сетки $\mathscr{C}$ назовем *соседними*, если множество $\{\lambda_1 p + \lambda_2 q : \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0\}$ не содержит ни одного вектора сетки $\mathscr{C}$. Обозначим через Z, Z_1 и Z_2 множества вершин многоугольников X, X_1 и X_2 соответственно. Рассмотрим произвольную вершину $z \in Z$ многоугольника X. Так как $s(p, X) = a(p) + b(p)$ для любого $p \in \mathscr{C}$, то найдутся два соседних вектора p_z и q_z из сетки $\mathscr{C}$ такие, что

$$s(p_z, X) = \langle p_z, z\rangle = a(p_z) + b(p_z), \quad s(q_z, X) = \langle q_z, z\rangle = a(q_z) + b(q_z). \tag{35}$$

Определим вершины $z_1 \in Z_1$ и $z_2 \in Z_2$ многоугольников X_1 и X_2 как единственные решения соответствующих систем из двух линейных уравнений

$$\langle p_z, z_1\rangle = a(p_z), \quad \langle q_z, z_1\rangle = a(q_z)$$

и

$$\langle p_z, z_2\rangle = b(p_z), \quad \langle q_z, z_2\rangle = b(q_z).$$

В силу (35) получаем равенство $z = z_1 + z_2$. Следовательно, справедливо включение

$$Z \subset Z_1 + Z_2. \tag{36}$$

По теореме Крейна–Мильмана (см. [10]) справедливы равенства

$$\operatorname{co} Z = X, \quad \operatorname{co} Z_1 = X_1, \quad \operatorname{co} Z_2 = X_2,$$

откуда в силу (36) получаем включение $X \subset X_1 + X_2$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для приведенных выше многогранников (27)–(32) справедливы соотношения:*

$$\mathscr{C}M'_k = \mathscr{C}M_{k+1} \mathbin{\overset{*}{-}} \mathscr{C}Q_k, \quad \mathscr{C}M_k \supset \mathscr{C}M'_k + \mathscr{C}P_k, \tag{37}$$

$$\mathscr{C}N'_k \supset \mathscr{C}N_{k+1} + \mathscr{C}P_k, \quad \mathscr{C}N_k = \mathscr{C}N'_k \mathbin{\overset{*}{-}} \mathscr{C}Q_k, \tag{38}$$

$$s(p, \mathscr{C}M'_k) = \mu'_k(p), \quad s(p, \mathscr{C}M_k) = \mu_k(p) \quad \forall\, p \in \mathscr{C}, \tag{39}$$

$$s(p, \mathscr{C}N'_k) = \nu'_k(p), \quad s(p, \mathscr{C}N_k) = \nu_k(p) \quad \forall\, p \in \mathscr{C}. \tag{40}$$

Доказательство. Докажем соотношения (37) и (39) (доказательство (38) и (40) проводится аналогично).

Для всех $p \in \mathscr{C}$ справедливы равенства $s(p, \mathscr{C}M_K) = \mu_K(p)$. Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого $k = \overline{0, K-1}$ при всех $p \in \mathscr{C}$ справедливы равенства $s(p, \mathscr{C}M_{k+1}) = \mu_{k+1}(p)$. Для каждого $k = \overline{0, K-1}$ и $p \in \mathscr{C}$ определим полупространство

$$H_{k+1}(p) = \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \mu_{k+1}(p)\}.$$

Тогда, очевидно, справедливы соотношения:

$$\mathscr{C}M_{k+1} = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} H_{k+1}(p), \quad \mathscr{C}M_{k+1} \mathbin{\overset{*}{-}} \mathscr{C}Q_k = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} (H_{k+1}(p) \mathbin{\overset{*}{-}} \mathscr{C}Q_k).$$

Покажем, что для любого $p \in \mathscr{C}$ справедливо равенство:

$$H_{k+1}(p) \mathbin{\overset{*}{-}} \mathscr{C}Q_k = \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \mu_{k+1}(p) - s(p, Q_k)\}. \tag{41}$$

Действительно, включение $z \in H_{k+1}(p) \mathbin{\overset{*}{-}} \mathscr{C}Q_k$ равносильно условию

$$\langle p, z + x\rangle \leqslant \mu_{k+1}(p) \quad \forall\, x \in \mathscr{C}Q_k. \tag{42}$$

Так как по определению (32) для любого $p \in \mathscr{C}$ справедливо равенство $s(p, \mathscr{C}Q_k) = s(p, Q_k)$, то неравенство (42) равносильно неравенству

$$\langle p, z\rangle \leqslant \mu_{k+1}(p) - s(p, Q_k),$$

т.е. равенство (41) доказано. Отсюда в силу (25) для любого $p \in \mathscr{C}$ получаем

$$\mu'_k(p) = \max\{\langle p, z\rangle : z \in \mathscr{C}M_{k+1} \mathbin{\overset{*}{-}} \mathscr{C}Q_k\} = s(p, \mathscr{C}M_{k+1} \mathbin{\overset{*}{-}} \mathscr{C}Q_k).$$

Следовательно, равенство из (37) доказано, а для любого $p \in \mathscr{C}$ справедливо соотношение $\mu_k'(p) = s(p, \mathscr{C}M_k')$.

Далее, если $z \in \mathscr{C}M_k' + \mathscr{C}P_k$, то для всех $p \in \mathscr{C}$ справедливы неравенства

$$\langle p, z\rangle \leqslant \mu_k'(p) + s(p, \mathscr{C}P_k) = \mu_k'(p) + s(p, P_k) = \mu_k(p),$$

т.е. $z \in \mathscr{C}M_k$. Следовательно, включение из (37) доказано. Заметим, что при $m = 2$ включение из (37) является равенством в силу леммы 1. Окончательно для любого $p \in \mathscr{C}$ получаем:

$$s(p, \mathscr{C}M_k' + \mathscr{C}P_k) \leqslant s(p, \mathscr{C}M_k) \leqslant \mu_k(p) = s(p, \mathscr{C}M_k') + s(p, \mathscr{C}P_k),$$

т.е. $s(p, \mathscr{C}M_k) = \mu_k(p)$. Теорема доказана.

Для произвольной положительно однородной функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ определим сеточный оператор (см. [11; определение 7]):

$$\mathscr{C}f(p) = \begin{cases} f(p), & \dfrac{p}{|p|} \in \mathscr{C}, \\ +\infty, & \dfrac{p}{|p|} \notin \mathscr{C}, \end{cases}$$

если $p \neq 0$, и $\mathscr{C}f(0) = 0$. Далее нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть сетка $\mathscr{C}$ имеет мелкость $\Delta \in (0, 1/2)$, функция $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ положительно однородна и удовлетворяет условию Липшица с константой $\ell > 0$. Пусть существуют вектор $a \in \mathbb{R}^m$ и число $r > 0$ такие, что $f(p) \geqslant r|p| + \langle p, a\rangle$ для всех $p \in \mathbb{R}^m$. Тогда справедливы неравенства*

$$\operatorname{co} f(p) \leqslant \operatorname{co}\mathscr{C}f(p) \leqslant \operatorname{co} f(p)\left(1 + \frac{2\ell\Delta}{r}\right) - \frac{2\ell\Delta}{r}\langle p, a\rangle$$

для всех $p \in \mathbb{R}^m$.

Доказательство следует из [11; теорема 14, формула (58)].

Лемма 3. *Пусть сетка $\mathscr{C}$ имеет мелкость $\Delta \in (0, 1/2)$, функция $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ выпукла, положительно однородна и удовлетворяет условию Липшица с константой $\ell > 0$. Тогда справедливы неравенства*

$$f(p) \leqslant \operatorname{co}\mathscr{C}f(p) \leqslant f(p) + 2\ell\Delta|p|$$

для всех $p \in \mathbb{R}^m$.

Доказательство следует из [11; теорема 14, формула (58)].

Теорема 2. *Пусть выполнено условие непустоты внутренности альтернированных множеств, т.е.*

$$\exists r > 0 \quad \forall k = \overline{0, K-1} \qquad M_k' \overset{*}{-} r\mathbb{B}^m \neq \varnothing. \tag{43}$$

Тогда существует число $\mathscr{L} = \mathscr{L}(A, B, C, \Pi, M, P, Q, T, r) > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любой сетки $\mathscr{C}$ мелкости $\Delta \leqslant \min\{1/K, \varepsilon/(\mathscr{L}K)\}$ справедливы оценки

$$h(M_0, \mathscr{C}M_0) \leqslant \varepsilon, \tag{44}$$
$$h(N_0, \mathscr{C}N_0) \leqslant \varepsilon. \tag{45}$$

Доказательство. Докажем (44) (доказательство (45) проводится аналогично). Для управляемой системы дифференциальных уравнений (1), (2) можно легко указать положительные числа

$$\ell = \ell(A, B, C, \Pi, P, Q, T) \quad \text{и} \quad R = R(A, B, C, \Pi, M, P, Q, T) \tag{46}$$

такие, что для множеств (9), (10) при всех $k = \overline{0, K-1}$ справедливы включения

$$M_K \subset R\mathbb{B}^m, \quad M_k \subset R\mathbb{B}^m, \quad M_k' \subset R\mathbb{B}^m, \quad P_k \subset \ell\delta\mathbb{B}^m, \quad Q_k \subset \ell\delta\mathbb{B}^m,$$

где $\delta = T/K$ – мелкость разбиения отрезка $[0, T]$. Обозначим для любого вектора $p \in \mathbb{R}^m$

$$s(p, M_k) = s_k(p) \quad \forall k = \overline{0, K},$$
$$s(p, M_k') = s_k'(p) \quad \forall k = \overline{0, K-1}.$$

В силу (43) существуют векторы a_k и a_k' такие, что для любого $p \in \mathbb{R}^m$

$$\langle p, a_k\rangle + r|p| \leqslant s_k(p) \quad \forall k = \overline{0, K},$$
$$\langle p, a_k'\rangle + r|p| \leqslant s_k'(p) \quad \forall k = \overline{0, K-1}.$$

Определим для всех $k = \overline{0, K-1}$ следующие числа и векторы:

$$\alpha_K = \lambda = 1 + \frac{2R\Delta}{r}, \qquad \mathscr{A}_K = \frac{2R\Delta}{r}a_K,$$
$$\alpha_k' = \alpha_{k+1} + \frac{1}{r}(\alpha_{k+1}2R\Delta + (\alpha_{k+1} - 1)\ell\lambda\delta),$$
$$\alpha_k = \alpha_k' + \frac{1}{r}(\alpha_k'2R\Delta + (\alpha_k' - 1)\ell\lambda\delta),$$
$$\mathscr{A}_k' = \mathscr{A}_{k+1} + (\alpha_k' - \alpha_{k+1})a_k', \qquad \mathscr{A}_k = \mathscr{A}_k' + (\alpha_k - \alpha_k')a_k.$$

В силу теоремы 1 для любого $p \in \mathbb{R}^m$ выполнены равенства:

$$\mu_K(p) = \operatorname{co}\mathscr{C}s_K(p),$$
$$\mu_k'(p) = \operatorname{co}\mathscr{C}(\mu_{k+1}(p) - s(p, Q_k)),$$
$$\mu_k(p) = \operatorname{co}\mathscr{C}(\mu_k'(p) + s(p, P_k)) \quad \forall k = \overline{0, K-1}.$$

В силу леммы 2 для любого $p \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство:

$$s_K(p) \leqslant \mu_K(p) \leqslant \alpha_K s_K(p) - \langle \mathscr{A}_K, p\rangle. \tag{47}$$

Предположим, рассуждая по индукции, что для $k = \overline{0, K-1}$ и для любого $p \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство:

$$s_{k+1}(p) \leqslant \mu_{k+1}(p) \leqslant \alpha_{k+1}s_{k+1}(p) - \langle \mathscr{A}_{k+1}, p\rangle. \tag{48}$$

Тогда, применяя лемму 2, для любого $p \in \mathbb{R}^m$ получаем:

$$\begin{aligned}
s'_k(p) \leqslant \mu'_k(p) &= \operatorname{co}\mathscr{C}\{(\mu_{k+1}(p) - \alpha_{k+1}s_{k+1}(p)) \\
&\quad + \alpha_{k+1}(s_{k+1}(p) - s(p,Q_k)) + (\alpha_{k+1}-1)s(p,Q_k)\} \\
&\leqslant -\langle \mathscr{A}_{k+1}, p\rangle + \operatorname{co}\mathscr{C}\Big\{\alpha_{k+1}(s_{k+1}(p) - s(p,Q_k)) \\
&\quad + (\alpha_{k+1}-1)(s_{k+1}(p) - s(p,Q_k) - \langle a'_k, p\rangle)\frac{\ell\delta}{r}\Big\} \\
&= -\Big\langle \mathscr{A}_{k+1} + (\alpha_{k+1}-1)\frac{\ell\delta}{r}a'_k, p\Big\rangle \\
&\quad + \Big(\alpha_{k+1} + (\alpha_{k+1}-1)\frac{\ell\delta}{r}\Big)\operatorname{co}\mathscr{C}(s_{k+1}(p) - s(p,Q_k)) \\
&\leqslant -\Big\langle \mathscr{A}_{k+1} + (\alpha_{k+1}-1)\frac{\ell\delta}{r}a'_k, p\Big\rangle + \Big(\alpha_{k+1} + (\alpha_{k+1}-1)\frac{\ell\delta}{r}\Big) \\
&\quad \times \Big\{\Big(1 + \frac{2R\Delta}{r}\Big)s'_k(p) - \frac{2R\Delta}{r}\langle a'_k, p\rangle\Big\} = \alpha'_k s'_k(p) - \langle \mathscr{A}'_k, p\rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом, для любого $p \in \mathbb{R}^m$ установлено неравенство:

$$s'_k(p) \leqslant \mu'_k(p) \leqslant \alpha'_k s'_k(p) - \langle \mathscr{A}'_k, p\rangle. \tag{49}$$

Далее, применяя (49) и лемму 2, для любого $p \in \mathbb{R}^m$ получаем:

$$\begin{aligned}
s_k(p) \leqslant \mu_k(p) &= \operatorname{co}\mathscr{C}(\mu'_k(p) + s(p,P_k)) \\
&\leqslant -\langle \mathscr{A}'_k, p\rangle + \operatorname{co}\mathscr{C}(\alpha'_k s_k(p) + (1-\alpha'_k)s(p,P_k)) \\
&\leqslant -\langle \mathscr{A}'_k, p\rangle + \operatorname{co}\mathscr{C}\Big(\alpha'_k s_k(p) + (\alpha'_k - 1)\Big(s_k(p) - \langle a_k, p\rangle\Big)\frac{\ell\delta}{r}\Big) \\
&= -\Big\langle \mathscr{A}'_k + (\alpha'_k - 1)\frac{\ell\delta}{r}a_k, p\Big\rangle + \Big(\alpha'_k + (\alpha'_k-1)\frac{\ell\delta}{r}\Big)\operatorname{co}\mathscr{C}s_k(p) \\
&\leqslant -\Big\langle \mathscr{A}'_k + (\alpha'_k - 1)\frac{\ell\delta}{r}a_k, p\Big\rangle + \Big(\alpha'_k + (\alpha'_k-1)\frac{\ell\delta}{r}\Big) \\
&\quad \times \Big\{\Big(1 + \frac{2R\Delta}{r}\Big)s_k(p) - \frac{2R\Delta}{r}\langle a_k, p\rangle\Big\} = \alpha_k s_k(p) - \langle \mathscr{A}_k, p\rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом, по индукции для всех $k = \overline{0,K}$ и для любого $p \in \mathbb{R}^m$ установлены неравенства:

$$s_k(p) \leqslant \mu_k(p) \leqslant \alpha_k s_k(p) - \langle \mathscr{A}_k, p\rangle. \tag{50}$$

Далее, обозначим $\beta_k = \alpha_k - 1$ для любого $k = \overline{0,K}$. Получаем:

$$\begin{aligned}
\beta_k &= (\alpha'_k - 1)\Big\{1 + \frac{1}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\} + \frac{2R\Delta}{r} \\
&= \Big\{\beta_{k+1}\Big(1 + \frac{1}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big) + \frac{2R\Delta}{r}\Big\}\Big\{1 + \frac{1}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\} + \frac{2R\Delta}{r} \\
&= \beta_{k+1}\Big\{1 + \frac{1}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\}^2 + \frac{4R\Delta}{r}\Big\{1 + \frac{1}{2r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\} \\
&\leqslant \beta_{k+1}\exp\Big\{\frac{2}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\} + \frac{4R\Delta}{r}\Big\{1 + \frac{1}{2r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\}.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\mathscr{D} = 1 + \frac{1}{2r}\Big(2R + \ell T\Big(1 + \frac{2R}{r}\Big)\Big). \tag{51}$$

Тогда в силу неравенств $\Delta \leqslant 1$ и $\delta \leqslant T$ получим:

$$\beta_k \leqslant \beta_{k+1}\exp\Big\{\frac{2}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\} + \frac{4R\Delta\mathscr{D}}{r}. \tag{52}$$

Из определений величин $\mathscr{D}, \beta_K$ и α_K очевидно следует неравенство $\beta_K \leqslant 4R\Delta\mathscr{D}/r$. Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого номера $k = \overline{0, K-1}$ выполнено неравенство:

$$\beta_{k+1} \leqslant (K-k)\frac{4R\Delta\mathscr{D}}{r}\exp\Big\{(K-k-1)\frac{2}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\}. \tag{53}$$

Тогда в силу (52) получаем:

$$\begin{aligned}
\beta_k &\leqslant (K-k)\frac{4R\Delta\mathscr{D}}{r}\exp\Big\{(K-k)\frac{2}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\} + \frac{4R\Delta\mathscr{D}}{r} \\
&\leqslant (K-k+1)\frac{4R\Delta\mathscr{D}}{r}\exp\Big\{(K-k)\frac{2}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, по индукции для любого $k = \overline{0,K}$ установлено неравенство

$$\beta_k \leqslant (K-k+1)\frac{4R\Delta\mathscr{D}}{r}\exp\Big\{(K-k)\frac{2}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\Big\}. \tag{54}$$

Применяя неравенства (50) для $k = 0$ и произвольного $p \in \mathbb{R}^m$, получаем оценку:

$$0 \leqslant \mu_0(p) - s_0(p) \leqslant \beta_0 s_0(p) - \langle \mathscr{A}_0, p\rangle. \tag{55}$$

Заметим, что для любого $k = \overline{0, K-1}$ справедливо неравенство

$$|\mathscr{A}_k| \leqslant |\mathscr{A}_{k+1}| + |a'_k|(\alpha'_k - \alpha_{k+1}) + |a_k|(\alpha_k - \alpha'_k). \tag{56}$$

Так как $|a'_k| \leqslant R$ и $|a_k| \leqslant R$ для любого $k = \overline{0, K-1}$, то (56) влечет неравенство

$$|\mathscr{A}_k| \leqslant |\mathscr{A}_{k+1}| + R(\alpha_k - \alpha_{k+1}). \tag{57}$$

Следовательно, используя (57) и (54), получаем:

$$\begin{aligned}
|\mathscr{A}_0| &\leqslant |\mathscr{A}_K| + R(\alpha_0 - \alpha_K) \leqslant |\mathscr{A}_K| + R\beta_0 \\
&\leqslant \frac{2R^2\Delta}{r} + \frac{4R^2\Delta\mathscr{D}(K+1)}{r}\exp\Big\{\frac{2}{r}(2RK\Delta + \ell\lambda T)\Big\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, справедливо неравенство:

$$|\mathscr{A}_0| \leqslant \frac{2R^2\Delta}{r} + \frac{4R^2\Delta\mathscr{D}(K+1)}{r}\exp\Big\{\frac{2}{r}(2RK\Delta + \ell\lambda T)\Big\}. \tag{58}$$

Так как $s_0(p) \leqslant R|p|$ для любого $p \in \mathbb{R}^m$, то, используя (55) и (58), получаем:

$$0 \leqslant \mu_0(p) - s_0(p) \leqslant (|\mathscr{A}_0| + R\beta_0)|p| \leqslant \frac{2R^2\Delta}{r}\left(1 + 4\mathscr{D}(K+1)\exp\left\{\frac{2}{r}(2RK\Delta + \ell\lambda T)\right\}\right)|p|.$$

Отсюда, определяя число

$$\mathscr{L} = \frac{2R^2}{r}\left(1 + 8\mathscr{D}\exp\left\{\frac{2}{r}\left(2R + \ell\left(1 + \frac{2R}{r}\right)T\right)\right\}\right), \tag{59}$$

и из условия $K\Delta \leqslant 1$ для любого $p \in \mathbb{R}^m$ получаем неравенство:

$$0 \leqslant \mu_0(p) - s_0(p) \leqslant \mathscr{L}K\Delta|p|. \tag{60}$$

Наконец, из оценки (60) в силу формулы (24) получаем:

$$h(M_0, \mathscr{C}M_0) = \max_{|p|=1}(\mu_0(p) - s_0(p)) \leqslant \mathscr{L}K\Delta \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Неравенство $\Delta \leqslant \min\{1/K, \varepsilon/(\mathscr{L}K)\}$ в условии теоремы 2 показывает, что необходимо согласованно выбирать мелкость Δ сетки $\mathscr{C}$ и число K шагов по времени. В частности, при фиксированной сетке $\mathscr{C}$ не следует выбирать слишком большое K.

Замечание. Отметим, что точные равенства (10) и (11) теоретических алгоритмов в приближенных численных алгоритмах заменены включениями (37) и (38). Это вызвано тем, что в пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности $m > 2$ при сложении двух выпуклых многогранников, заданных с помощью систем линейных неравенств (каждое описывает полупространство, внешняя нормаль которого принадлежит заданной сетке $\mathscr{C}$), в сумме можно получить многогранник, содержащий новые боковые грани, и поэтому он не может быть представлен как пересечение полупространств, внешние нормали которых принадлежат той же сетке $\mathscr{C}$. Поэтому в соотношениях (37) и (38), в которых множества представимы как пересечения полупространств с нормалями только лишь из $\mathscr{C}$, равенства может не быть. Однако, как показано в лемме 1, в случае, когда размерность пространства равна двум, указанный эффект не имеет места и включения в (37) и (38) обращаются в равенства.

Покажем, что в случае пространства размерности $m > 2$ при выполнении условия (43) множества (27) и (28) являются выпуклыми многогранными аппроксимациями внутренних альтернированных множеств (10), а множества (29) и (30) являются выпуклыми многогранными аппроксимациями внешних альтернированных множеств (11). Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие непустоты внутренности альтернированных множеств* (43). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любой сетки $\mathscr{C}$ мелкости $\Delta \leqslant \min\{1/K, \varepsilon/(2(R + 3\ell T + \mathscr{L}))\}$ (где величины R, ℓ, $\mathscr{L}$ см. в* (46), (59)) *имеют место оценки*

$$h(\mathscr{C}M_k, \mathscr{C}M'_k + \mathscr{C}P_k) \leqslant \varepsilon, \qquad h(\mathscr{C}N'_k, \mathscr{C}N_{k+1} + \mathscr{C}P_k) \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем первое неравенство (второе доказывается аналогично). В силу леммы 3 для произвольного выпуклого компакта $X \subset \mathbb{R}^m$ справедлива оценка

$$s(p, X) \leqslant \operatorname{co}\mathscr{C}s(p, X) \leqslant s(p, X) + 2\|X\|\Delta \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^m,$$

где $\|X\| = h(X, 0)$ – полунорма компакта X. Так как $\operatorname{co}\mathscr{C}s(p, X)$ является опорной функцией выпуклого компакта

$$\mathscr{C}X = \bigcap_{p\in\mathscr{C}}\{x \in \mathbb{R}^m : \langle p, x\rangle \leqslant s(p, X)\},$$

то справедливо неравенство $h(X, \mathscr{C}X) \leqslant 2\|X\|\Delta$. Тогда в силу теоремы 1 получаем:

$$h(\mathscr{C}M_k, \mathscr{C}M'_k + \mathscr{C}P_k) \leqslant 2(\|\mathscr{C}M'_k\| + \|\mathscr{C}P_k\|)\Delta. \tag{61}$$

Далее, используя обозначения, введенные при доказательстве теоремы 2, находим:

$$\|\mathscr{C}P_k\| \leqslant \|P_k\| + h(\mathscr{C}P_k, P_k) \leqslant \ell\delta + 2\ell\delta\Delta \leqslant 3\ell T. \tag{62}$$

Аналогично, для произвольного $k = \overline{0, K-1}$ имеем:

$$\|\mathscr{C}M'_k\| \leqslant \|M'_k\| + h(\mathscr{C}M'_k, M'_k) \leqslant R + h(\mathscr{C}M'_k, M'_k). \tag{63}$$

Получим оценку $h(\mathscr{C}M'_k, M'_k)$, воспользовавшись результатами из доказательства теоремы 2. Определив для любого $k = \overline{0, K-1}$ числа $\beta'_k = \alpha'_k - 1$, для любого $p \in \mathbb{R}^m$ в силу (49) получаем:

$$0 \leqslant \mu'_k(p) - s'_k(p) \leqslant \beta'_k s'_k(p) - \langle\mathscr{A}'_k, p\rangle.$$

Справедливы неравенства:

$$\beta'_{K-1} \leqslant \frac{4R\Delta\mathscr{D}}{r},$$

$$\beta'_k \leqslant \beta'_{k+1}\exp\left\{\frac{2}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\right\} + \frac{4R\Delta\mathscr{D}}{r} \qquad \forall\, k = \overline{0, K-2}.$$

Доказательство этих неравенств аналогично доказательству (52) из теоремы 2. Тогда по индукции (аналогично доказательству (54) из теоремы 2) устанавливаем справедливость оценки

$$\beta'_k \leqslant (K-k)\frac{4R\Delta\mathscr{D}}{r}\exp\left\{(K-k-1)\frac{2}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\right\} \qquad \forall\, k = \overline{0, K-1}.$$

Для любого $k = \overline{0, K-1}$ находим:

$$|\mathscr{A}'_k| \leqslant |\mathscr{A}_K| + R(\alpha'_k - \alpha_K) \leqslant \frac{2R^2\Delta}{r} + R\beta'_k.$$

Следовательно, получаем:

$$h(\mathscr{C}M'_k, M'_k) \leqslant 2R\beta'_k + \frac{2R^2\Delta}{r} = \frac{2R^2\Delta}{r}\left(1 + 4\mathscr{D}(K-k)\exp\left\{(K-k-1)\frac{2}{r}(2R\Delta + \ell\lambda\delta)\right\}\right).$$

Таким образом, для любого $k = \overline{0, K-1}$ справедлива оценка

$$h(\mathscr{C}M'_k, M'_k) \leqslant \mathscr{L}(K-k)\Delta \leqslant \mathscr{L}, \tag{64}$$

где величина $\mathscr{L} = \mathscr{L}(A, B, C, \Pi, M, P, Q, T, r)$ определена в теореме 2. В силу неравенств (61), (62), (64) получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Замечание. Для каждого $p \in \mathscr{C}$ и каждого $k = \overline{0, K-1}$ вычисление значения $\mu_k'(p)$ по формуле (25) (как и значения $\nu_k(p)$ по формуле (26)) требует решить свою задачу линейного программирования. В итоге приходится решать много задач линейного программирования.

В случае, когда размерность пространства $m = 2$, вычисление значений $\mu_k'(p)$ и $\nu_k(p)$ на сетке $\mathscr{C}$ в программе осуществляется простым алгоритмом ($O(L)$ арифметических операций), близким к алгоритму из [12].

В случае $m > 2$ реализованы два способа вычисления значений $\mu_k'(p)$ и $\nu_k(p)$ на сетке $\mathscr{C}$. Первый способ состоит в точном решении (для всех $k = \overline{0, K-1}$ и всех $p \in \mathscr{C}$) задач линейного программирования с помощью модифицированного симплекс-метода (см. [13]), который обладает высокой алгоритмической сложностью. Второй способ состоит в реализации приближенного, но более быстрого алгоритма вычисления максимума выпуклой функции на выпуклом компакте [14], близкого к алгоритму из [15].

Приведем описание алгоритма [14] приближенного вычисления максимума каждой из конечного семейства выпуклых функций вида $f_l(z) = \langle \overline{p}_l, z\rangle$, где $\{\overline{p}_l\}_{l=1}^{L_1}$ – заданная совокупность различных точек единичной сферы, на выпуклом многограннике $X \subset \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим l-задачу

$$\max\{f_l(z) : z \in X\}, \quad \text{где} \quad X = \bigcap_{p\in\mathscr{C}_1} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \gamma(p)\}. \tag{65}$$

Здесь через $\mathscr{C}_1 = \{p_i\}_{i=1}^{N_1}$ обозначена некоторая сетка мелкости $\Delta_1 > 0$, являющаяся подмножеством единичной сферы $\partial\mathbb{B}^m$; величины $\gamma(p) \in \mathbb{R}\ \forall p \in \mathscr{C}_1$.

Для работы алгоритма существенно выполнение следующего предположения.

Предположение 1. Множество X ограничено, т.е. $d = \operatorname{diam} X < +\infty$, и имеет непустую внутренность, т.е. существуют вектор $a \in \mathbb{R}^m$ и число $r > 0$ такие, что $\langle p, a\rangle + r \leqslant \gamma(p)$ для всех $p \in \mathscr{C}_1$.

Опишем алгоритм одновременного решения семейства l-задач (65).

Первый шаг. Прежде всего, проверим выполнение предположения 1. Для этого найдем вектор a и число r как решение задачи

$$\max\{\inf\{|a-y| : y \in \mathbb{R}^m \setminus X\} : a \in X\}.$$

Следуя работе [16], сведем эту задачу к задаче линейного программирования. Для этого вводим дополнительную переменную $\lambda \in \mathbb{R}$ и решаем задачу (линейного программирования) вида

$$\max\{\lambda : (\lambda, z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m;\ \langle p, z\rangle - \gamma(p) + \lambda \leqslant 0\ \ \forall p \in \mathscr{C}_1\},$$

в результате чего получаем точку $z = a \in \mathbb{R}^m$ – центр максимального вписанного в X шара и число $\lambda = r > 0$ – точную верхнюю грань радиусов всех шаров, вписанных в X.

Если $a \neq 0$, то делаем в (65) замену переменного z на $z + a$, т.е. множество X заменяем на множество $X - a$, а функции $f_l(z)$ – на $f_l(z+a)$. В итоге, сводим задачу к случаю, когда центр максимального вписанного в X шара находится в точке 0 и справедливы включения

$$r\mathbb{B}^m \subset X \subset d\mathbb{B}^m. \tag{66}$$

Второй шаг. Введем новую сетку $\mathscr{C}_2 = \{q_j\}_{j=1}^{N_2}$ мелкости $\Delta_2 \in (0, 1/2)$. Для каждого вектора $q \in \mathscr{C}_2$ вычислим значение

$$s^\circ(q) = \max\left\{\frac{\langle p, q\rangle}{\gamma(p)} : p \in \mathscr{C}_1\right\}.$$

Третий шаг. Для всех векторов $q \in \mathscr{C}_2$ определим векторы $z(q) = q/s^\circ(q)$, которые в силу выбора функции $s^\circ(q)$ принадлежат множеству X. Определим выпуклый многогранник

$$\widetilde{X} = \operatorname{co} \bigcup_{q\in\mathscr{C}_2} z(q),$$

который, очевидно, является вписанным в множество X. Далее для каждого $l = \overline{1, L_1}$ находим (перебором) вектор $\widetilde{z}_l \in \bigcup_{q\in\mathscr{C}_2}\{z(q)\}$ такой, что $f_l(\widetilde{z}_l) = \max\{f_l(z(q)) : q \in \mathscr{C}_2\}$. Это и есть приближенное решение l-задачи (65).

Теорема 4. *Если в l-задаче (65) выполнено предположение 1 с центром максимального вписанного шара в точке $a = 0$ и если через z_l обозначено некоторое решение этой задачи, то для приближенного решения $\widetilde{z}_l$, получаемого в результате реализации приведенного выше алгоритма, справедливы соотношения*

$$\widetilde{X} \subset X \subset \widetilde{X} + \frac{2d^2\Delta_2}{r}\mathbb{B}^m, \tag{67}$$

$$f_l(\widetilde{z}_l) \leqslant f_l(z_l) \leqslant f_l(\widetilde{z}_l) + \frac{2d^2|\overline{p}_l|\Delta_2}{r}. \tag{68}$$

Доказательство. Рассмотрим поляру

$$X^\circ = \{y \in \mathbb{R}^m : \langle z, y\rangle \leqslant 1\ \ \forall z \in X\}$$

множества X (см. [17]). В силу теоремы 6.7 из [17] справедливо равенство

$$X^\circ = \operatorname{co} \bigcup_{p\in\mathscr{C}_1} \{z : \langle p, z\rangle \leqslant \gamma(p)\}^\circ = \operatorname{co} \bigcup_{p\in\mathscr{C}_1} \left[0, \frac{p}{\gamma(p)}\right].$$

Из включений (66) и свойств поляры (см. [17; теорема 6.5]) следуют включения

$$\frac{1}{d}\mathbb{B}^m \subset X^\circ \subset \frac{1}{r}\mathbb{B}^m, \tag{69}$$

из которых получаем

$$\|X^\circ\| = h(0, X^\circ) \leqslant \frac{1}{r}, \qquad s(q, X^\circ) \geqslant \frac{1}{d}\ \ \forall q \in \partial\mathbb{B}^m. \tag{70}$$

Определим множество

$$\widetilde{X}^\circ = \bigcap_{q\in\mathscr{C}_2} \{z : \langle q, z\rangle \leqslant s(q, X^\circ)\}.$$

Так как для всех $q \in \mathscr{C}_2$ справедливы равенства $s^\circ(q) = s(q, X^\circ)$, то из определения множества $\widetilde{X}^\circ$ следует включение $X^\circ \subset \widetilde{X}^\circ$. Как показано в работе [11], при выборе сетки $\mathscr{C}_2$ мелкости $\Delta_2 < 1/2$ множество $\widetilde{X}^\circ$ как пересечение полупространств с нормалями, образующими сетку $\mathscr{C}_2$, будет ограниченным множеством, причем в силу (69) и леммы 3 выполнено включение

$$\widetilde{X}^\circ \subset \frac{1}{r}(1 + 2\Delta_2)\mathbb{B}^m \subset \frac{2}{r}\mathbb{B}^m. \tag{71}$$

Известно [4], что опорная функция $s(q, X^\circ)$ ограниченного множества X° удовлетворяет условию Липшица с константой $\ell = \|X^\circ\| \leqslant 1/r$ (см. (70)). Поэтому из леммы 2 (при $f(p) = s(p, X^\circ)$) получаем:

$$s(q, \widetilde{X}^\circ) \leqslant s(q, X^\circ)\left(1 + \frac{2d}{r}\Delta_2\right) \quad \forall q \in \partial\mathbb{B}^m,$$

т.е. справедливо включение:

$$\widetilde{X}^\circ \subset X^\circ\left(1 + \frac{2d}{r}\Delta_2\right). \tag{72}$$

Определяя множество $\widetilde{X}$ как поляру множества $\widetilde{X}^\circ$, получаем

$$\widetilde{X} = (\widetilde{X}^\circ)^\circ = \mathrm{co} \bigcup_{q \in \mathscr{C}_2} \left[0, \frac{q}{s^\circ(q)}\right].$$

Из включения $X^\circ \subset \widetilde{X}^\circ$ следует включение $\widetilde{X} \subset X$.

Из известного свойства поляры [17] о том, что $(\alpha X)^\circ = (1/\alpha)X^\circ$ при $0 \in \mathrm{int}\, X$ и $\alpha > 0$, и из включения (72) получаем включение

$$X \subset \widetilde{X}\left(1 + \frac{2d}{r}\Delta_2\right),$$

которое эквивалентно неравенствам

$$s(q, X) \leqslant s(q, \widetilde{X})\left(1 + \frac{2d}{r}\Delta_2\right) \quad \forall q \in \partial\mathbb{B}^m. \tag{73}$$

Также из включения (71) и свойств поляры следует условие непустоты внутренности множества $\widetilde{X}$, т.е.

$$\frac{r}{2}\mathbb{B}^m \subset \widetilde{X}. \tag{74}$$

Из включения $\widetilde{X} \subset X \subset d\mathbb{B}^m$ и неравенств (73) получаем неравенства

$$s(q, \widetilde{X}) \leqslant d, \quad 0 \leqslant s(q, X) - s(q, \widetilde{X}) \leqslant \frac{2d^2\Delta_2}{r} \quad \forall q \in \partial\mathbb{B}^m.$$

Последнее неравенство и означает выполнение включения (67).

Докажем (68). Так как $\widetilde{X} \subset X$, то $f_l(\widetilde{z}_l) \leqslant f_l(z_l)$. С другой стороны, в силу (67) найдется $x_l \in \widetilde{X}$ такое, что $|z_l - x_l| \leqslant 2d^2\Delta_2/r$. Отсюда

$$f_l(z_l) \leqslant f_l(x_l) + |\overline{p}_l| \cdot |z_l - x_l| \leqslant f_l(\widetilde{z}_l) + \frac{2d^2|\overline{p}_l|\Delta_2}{r}.$$

Таким образом, требуемые неравенства (68) доказаны.

Замечание. Отметим, что объем вычислений в предложенном алгоритме составляет один симплекс-метод плюс $O(N_1 N_2)$ арифметических операций (умножений).

Замечание. Далее при использовании предложенного алгоритма для решения дифференциальной игры в качестве сеток $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ будем использовать одну и ту же сетку $\mathscr{C}$.

На сетке $\mathscr{C}$ введем функции $\widetilde{\mu}_K(p) = \widetilde{\nu}_K(p) = s(p, M)$ для любого $p \in \mathscr{C}$. Определим множества

$$\widetilde{\mathscr{C}N}_K = \widetilde{\mathscr{C}M}_K = \bigcap_{p \in \mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant s(p, M)\},$$

так что для всех $p \in \mathscr{C}$ имеют место соотношения $s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}_K) = \widetilde{\mu}_K(p)$ и $s(p, \widetilde{\mathscr{C}N}_K) = \widetilde{\nu}_K(p)$.

Предположим, рассуждая по индукции, что для $k = \overline{0, K-1}$ на сетке $\mathscr{C}$ определены функции $\widetilde{\mu}_{k+1}(p)$ и $\widetilde{\nu}_{k+1}(p)$ для любого $p \in \mathscr{C}$ и множества

$$\widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} = \bigcap_{p \in \mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \widetilde{\mu}_{k+1}(p)\},$$
$$\widetilde{\mathscr{C}N}_{k+1} = \bigcap_{p \in \mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \widetilde{\nu}_{k+1}(p)\},$$

причем $s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1}) = \widetilde{\mu}_{k+1}(p)$ и $s(p, \widetilde{\mathscr{C}N}_{k+1}) = \widetilde{\nu}_{k+1}(p)$ для всех $p \in \mathscr{C}$.

Определим для каждого $p \in \mathscr{C}$ значение $\widetilde{\mu}'_k(p)$ как приближенное решение задачи

$$\max\{\langle p, z\rangle : \langle q, z\rangle \leqslant \widetilde{\mu}_{k+1}(q) - s(q, Q_k) \ \ \forall q \in \mathscr{C}\},$$

т.е. $\widetilde{\mu}'_k(p)$ есть приближенное решение задачи (65) для $X = \widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k$. Введем множество

$$\widetilde{\mathscr{C}M}'_k = \bigcap_{p \in \mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \widetilde{\mu}'_k(p)\}. \tag{75}$$

Тогда по построению для любого вектора $p \in \mathscr{C}$ справедливо равенство $s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}'_k) = \widetilde{\mu}'_k(p)$. Если существуют вектор $\widetilde{a}_k \in \mathbb{R}^m$ и число $r > 0$ такие, что

$$\widetilde{a}_k + r\mathbb{B}^m \subset \widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k,$$

то по теореме 4 справедливы включения

$$\widetilde{\mathscr{C}M}'_k \subset \mathscr{C}M_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k \subset \widetilde{\mathscr{C}M}'_k\left(1 + \frac{2\widetilde{d}_k\Delta}{r}\right) - \frac{2\widetilde{d}_k\Delta}{r}\widetilde{a}_k,$$

где $\widetilde{d}_k = \mathrm{diam}(\widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k)$.

Далее определяем для каждого $p \in \mathscr{C}$ значение $\widetilde{\mu}_k(p) = \widetilde{\mu}'_k(p) + s(p, P_k)$ и множество

$$\widetilde{\mathscr{C}M}_k = \bigcap_{p \in \mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \widetilde{\mu}_k(p)\}. \tag{76}$$

Тогда для любого $p \in \mathscr{C}$ справедливо равенство $s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}_k) = \widetilde{\mu}_k(p)$ и имеет место включение

$$\widetilde{\mathscr{C}M}'_k + \mathscr{C}P_k \subset \widetilde{\mathscr{C}M}_k.$$

Аналогично, определяем для каждого вектора $p \in \mathscr{C}$ значение $\widetilde{\nu}'_k(p) = \widetilde{\nu}_{k+1}(p) + s(p, P_k)$ и множество

$$\widetilde{\mathscr{C}N}'_k = \bigcap_{p \in \mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z \rangle \leqslant \widetilde{\nu}'_k(p)\}. \tag{77}$$

Тогда для любого $p \in \mathscr{C}$ справедливо равенство $s(p, \widetilde{\mathscr{C}N}'_k) = \widetilde{\nu}'_k(p)$ и имеет место включение

$$\widetilde{\mathscr{C}N}_{k+1} + \mathscr{C}P_k \subset \widetilde{\mathscr{C}N}'_k.$$

Далее, определим для каждого $p \in \mathscr{C}$ значение $\widetilde{\nu}_k(p)$ как приближенное решение задачи

$$\max\{\langle p, z \rangle : \langle q, z \rangle \leqslant \widetilde{\nu}'_k(q) - s(q, Q_k) \quad \forall\, q \in \mathscr{C}\},$$

т.е. $\widetilde{\nu}_k(p)$ есть приближенное решение задачи (65) для множества $X = \widetilde{\mathscr{C}N}'_k \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k$. Введем множество

$$\mathscr{C}N_k = \bigcap_{p \in \mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z \rangle \leqslant \widetilde{\nu}_k(p)\}. \tag{78}$$

Тогда по построению для любого вектора $p \in \mathscr{C}$ справедливо равенство $s(p, \widetilde{\mathscr{C}N}_k) = \widetilde{\nu}_k(p)$. Если существуют вектор $\widetilde{a}_k \in \mathbb{R}^m$ и число $r > 0$ такие, что

$$\widetilde{a}_k + r\mathbb{B}^m \subset \widetilde{\mathscr{C}N}'_k \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k,$$

то по теореме 4 справедливы включения

$$\widetilde{\mathscr{C}N}_k \subset \widetilde{\mathscr{C}N}'_k \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k \subset \widetilde{\mathscr{C}N}_k\left(1 + \frac{2\widetilde{d}_k\Delta}{r}\right) - \frac{2\widetilde{d}_k\Delta}{r}\widetilde{a}_k,$$

где $\widetilde{d}_k = \operatorname{diam}(\widetilde{\mathscr{C}N}'_k \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k)$.

Множества (75) и (76) являются выпуклыми многогранными аппроксимациями альтернированных множеств (10). Множества (77) и (78) являются выпуклыми многогранными аппроксимациями альтернированных множеств (11).

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия непустоты внутренности альтернированных множеств и их аппроксимаций, а именно: существует число $r > 0$ такое, что для всех $k = \overline{0, K-1}$ справедливы неравенства*:

$$M'_k \overset{*}{-} r\mathbb{B}^m \neq \varnothing, \tag{79}$$

$$(\widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k) \overset{*}{-} r\mathbb{B}^m \neq \varnothing, \tag{80}$$

$$(\widetilde{\mathscr{C}N}'_k \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k) \overset{*}{-} r\mathbb{B}^m \neq \varnothing. \tag{81}$$

Тогда существует число $\widetilde{\mathscr{L}} = \widetilde{\mathscr{L}}(A, B, C, \Pi, M, P, Q, T, r) > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любой сетки $\mathscr{C}$ мелкости $\Delta \leqslant \min\{1/K, \varepsilon/(\widetilde{\mathscr{L}}K)\}$ справедливы оценки

$$h(M_0, \widetilde{\mathscr{C}M}_0) \leqslant \varepsilon, \tag{82}$$

$$h(N_0, \widetilde{\mathscr{C}N}_0) \leqslant \varepsilon. \tag{83}$$

Доказательство. Докажем неравенство (82) (доказательство (83) проводится аналогично). Функции $\widetilde{\mu}_k(p)$ и $\widetilde{\mu}'_k(p)$, определенные на сетке $\mathscr{C}$, доопределим для любого $p \in \mathbb{R}^m$ по формулам

$$\widetilde{\mu}_K(p) = s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}_K), \qquad \widetilde{\mu}_k(p) = s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}_k), \qquad \widetilde{\mu}'_k(p) = s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}'_k)$$

для всех $k = \overline{0, K-1}$. Справедливы следующие неравенства:

$$\widetilde{\mu}_k(p) \leqslant \mu_k(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^m, \ \forall\, k = \overline{0, K}, \tag{84}$$

$$\widetilde{\mu}'_k(p) \leqslant \mu'_k(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^m, \ \forall\, k = \overline{0, K-1}. \tag{85}$$

Действительно, $\widetilde{\mu}_K(p) = \mu_K(p) = s(p, \mathscr{C}M_K)$ для любого $p \in \mathbb{R}^m$ по определению. Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого номера $k = \overline{0, K-1}$ и для любого вектора $p \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство $\widetilde{\mu}_{k+1}(p) \leqslant \mu_{k+1}(p)$. Тогда находим:

$$\widetilde{\mu}'_k(p) \leqslant s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k) \leqslant s(p, \mathscr{C}M_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k) = \mu'_k(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^m,$$

т.е. неравенство (85) установлено. Далее получаем:

$$\widetilde{\mu}_k(p) = \operatorname{co}\mathscr{C}(\widetilde{\mu}'_k(p) + s(p, P_k)) \leqslant \operatorname{co}\mathscr{C}(\mu'_k(p) + s(p; P_k)) = \mu_k(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^m,$$

т.е. неравенство (84) установлено. В силу условия (80), определения множества $\widetilde{\mathscr{C}M}'_k$ и включения (74) справедливо

$$\widetilde{\mathscr{C}M}'_k \overset{*}{-} \frac{r}{2}\mathbb{B}^m \neq \varnothing \quad \forall\, k = \overline{0, K-1}.$$

Поэтому для любого $k = \overline{0, K-1}$ существуют векторы $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{a}'_k$ такие, что для любого $p \in \mathbb{R}^m$ выполнены неравенства:

$$\langle \widetilde{a}'_k, p \rangle + r|p| \leqslant s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k),$$

$$\langle \widetilde{a}_k, p \rangle + \frac{r}{2}|p| \leqslant s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}'_k) + s(p, P_k).$$

Используя введенные в теореме 2 обозначения $R, \ell, \mathscr{L}$, определяем положительное число $\widetilde{R} = \widetilde{R}(A, B, C, \Pi, M, P, Q, T, r) = R + \mathscr{L} + \ell T$. Тогда, применяя включения

$$\widetilde{a}'_k \subset \widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k \subset \mathscr{C}M'_k,$$

$$\widetilde{a}_k \subset \widetilde{\mathscr{C}M}'k + P_k \subset \mathscr{C}M'_k + P_k \quad \forall\, k = \overline{0, K-1}$$

и неравенство (64), получаем оценки:

$$|\widetilde{a}'_k| \leqslant R + \mathscr{L} \leqslant \widetilde{R}, \qquad |\widetilde{a}_k| \leqslant R + \mathscr{L} + \ell\delta \leqslant \widetilde{R}. \tag{86}$$

Введем для каждого $k = \overline{0, K-1}$ число $\widetilde{d}_k = \operatorname{diam}(\widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k)$. Тогда справедливо неравенство:

$$\widetilde{d}_k \leqslant 2(R + \mathscr{L}) \leqslant 2\widetilde{R}. \tag{87}$$

В силу неравенства (73) для всех $k = \overline{0, K-1}$ и $p \in \mathbb{R}^m$ получаем:

$$\widetilde{\mu}'_k(p) \leqslant s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} \overset{*}{-} \mathscr{C}Q_k) \leqslant \widetilde{\mu}'_k(p)\left(1 + \frac{2\widetilde{d}_k\Delta}{r}\right) - \frac{2\widetilde{d}_k\Delta}{r}\langle \widetilde{a}'_k, p \rangle. \tag{88}$$

Определим для всех $k = \overline{0, K-1}$ следующие числа и векторы:

$$\widetilde{\alpha}_K = 1, \qquad \widetilde{\mathscr{A}}_K = 0,$$

$$\widetilde{\alpha}'_k = \left(\widetilde{\alpha}_{k+1} + (\widetilde{\alpha}_{k+1} - 1)\frac{\ell\delta}{r}\right)\left(1 + \frac{2\widetilde{d}_k\Delta}{r}\right), \qquad \widetilde{\alpha}_k = \widetilde{\alpha}'_k + (\widetilde{\alpha}'_k - 1)\frac{2\ell\delta}{r},$$

$$\widetilde{\mathscr{A}}'_k = \widetilde{\mathscr{A}}_{k+1} + (\widetilde{\alpha}'_k - \widetilde{\alpha}_{k+1})\widetilde{a}'_k, \qquad \widetilde{\mathscr{A}}_k = \widetilde{\mathscr{A}}'_k + (\widetilde{\alpha}_k - \widetilde{\alpha}'_k)\widetilde{a}_k.$$

Для любого $p \in \mathbb{R}^m$ справедливы неравенства:

$$\widetilde{\mu}_K(p) \leqslant \mu_K(p) \leqslant \widetilde{\alpha}_K\widetilde{\mu}_K(p) - \langle \widetilde{\mathscr{A}}_K, p\rangle.$$

Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого номера $k = \overline{0, K-1}$ и любого $p \in \mathbb{R}^m$ справедливы неравенства:

$$\widetilde{\mu}_{k+1}(p) \leqslant \mu_{k+1}(p) \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\widetilde{\mu}_{k+1}(p) - \langle \widetilde{\mathscr{A}}_{k+1}, p\rangle.$$

Тогда, применяя (88), для любого $p \in \mathbb{R}^m$ получаем:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}'_k(p) &\leqslant \mu'_k(p) = \operatorname{co}\mathscr{C}(\mu_{k+1}(p) - s(p, Q_k)) \\
&\leqslant \operatorname{co}\mathscr{C}\Big\{(\mu_{k+1}(p) - \widetilde{\alpha}_{k+1}\widetilde{\mu}_{k+1}(p)) + \widetilde{\alpha}_{k+1}(\widetilde{\mu}_{k+1}(p) - s(p, Q_k)) \\
&\qquad + (\widetilde{\alpha}_{k+1} - 1)\frac{\ell\delta}{r}(\widetilde{\mu}_{k+1}(p) - s(p, Q_k) - \langle \widetilde{a}'_k, p\rangle)\Big\} \\
&\leqslant \left(\widetilde{\alpha}_{k+1} + (\widetilde{\alpha}_{k+1} - 1)\frac{\ell\delta}{r}\right)s(p, \widetilde{\mathscr{C}M}_{k+1} \,{}^*\, \mathscr{C}Q_k) \\
&\qquad - \left\langle \widetilde{\mathscr{A}}_{k+1} + (\widetilde{\alpha}_{k+1} - 1)\frac{\ell\delta}{r}\widetilde{a}'_k, p\right\rangle \leqslant \widetilde{\alpha}'_k\widetilde{\mu}'_k(p) - \langle \widetilde{\mathscr{A}}'_k, p\rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом, для любого $p \in \mathbb{R}^m$ установлены неравенства:

$$\widetilde{\mu}'_k(p) \leqslant \mu'_k(p) \leqslant \widetilde{\alpha}'_k\widetilde{\mu}'_k(p) - \langle \widetilde{\mathscr{A}}'_k, p\rangle. \tag{89}$$

Далее, применяя (89), для любого $p \in \mathbb{R}^m$ получаем:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}'_k(p) &\leqslant \mu_k(p) = \operatorname{co}\mathscr{C}(\mu'_k(p) + s(p, P_k)) \\
&= \operatorname{co}\mathscr{C}\{(\mu'_k(p) - \widetilde{\alpha}'_k\widetilde{\mu}'_k(p)) + \widetilde{\alpha}'_k(\widetilde{\mu}'_k(p) + s(p, P_k)) + (1 - \widetilde{\alpha}'_k)s(p, P_k)\} \\
&\leqslant -\langle \widetilde{\mathscr{A}}'_k, p\rangle + \operatorname{co}\mathscr{C}\Big\{\widetilde{\alpha}'_k(\widetilde{\mu}'_k(p) + s(p, P_k)) \\
&\qquad + (\widetilde{\alpha}'_k - 1)\frac{2\ell\delta}{r}(\widetilde{\mu}'_k(p) + s(p, P_k) - \langle \widetilde{a}_k, p\rangle)\Big\} \\
&= -\left\langle \widetilde{\mathscr{A}}'_k + (\widetilde{\alpha}'_k - 1)\frac{2\ell\delta}{r}\widetilde{a}_k, p\right\rangle + \widetilde{\alpha}_k \operatorname{co}\mathscr{C}(\widetilde{\mu}'_k(p) + s(p, P_k)) \\
&= -\langle \widetilde{\mathscr{A}}_k, p\rangle + \widetilde{\alpha}_k\widetilde{\mu}_k(p).
\end{aligned}$$

Таким образом, по индукции для всех $k = \overline{0, K}$ и для любого $p \in \mathbb{R}^m$ установлены неравенства:

$$\widetilde{\mu}_k(p) \leqslant \mu_k(p) \leqslant \widetilde{\alpha}_k\widetilde{\mu}_k(p) - \langle \widetilde{\mathscr{A}}_k, p\rangle. \tag{90}$$

Далее, обозначим $\widetilde{\beta}_k = \widetilde{\alpha}_k - 1$ для любого $k = \overline{0, K}$. Применяя неравенство (87), получаем:

$$\widetilde{\beta}_k = (\widetilde{\alpha}'_k - 1)\left(1 + \frac{2\ell\delta}{r}\right) \leqslant \widetilde{\beta}_{k+1}\left(1 + \frac{4\widetilde{R}\Delta}{r}\right)\left(1 + \frac{2\ell\delta}{r}\right)^2 + \frac{4\widetilde{R}\Delta}{r}\left(1 + \frac{2\ell\delta}{r}\right).$$

По индукции устанавливаем, что для любого $k = \overline{0, K}$ справедливо неравенство:

$$\widetilde{\beta}_k \leqslant \frac{4\widetilde{R}\Delta}{r}\left(1 + \frac{2\ell\delta}{r}\right)(K - k)\exp\left\{(K - k)\frac{4}{r}(\widetilde{R}\Delta + \ell\delta)\right\}. \tag{91}$$

Применяя неравенство (90) для $k = 0$ и произвольного $p \in \mathbb{R}^m$, получаем оценку:

$$0 \leqslant \mu_0(p) - \widetilde{\mu}_0(p) \leqslant \widetilde{\beta}_0\widetilde{\mu}_0(p) - \langle \widetilde{\mathscr{A}}_0, p\rangle. \tag{92}$$

Далее, для любого $k = \overline{0, K-1}$ находим:

$$|\widetilde{\mathscr{A}}_k| \leqslant |\widetilde{\mathscr{A}}_{k+1}| + |\widetilde{a}'_k|(\widetilde{\alpha}'_k - \widetilde{\alpha}_{k+1}) + |\widetilde{a}_k|(\widetilde{\alpha}_k - \widetilde{\alpha}'_k).$$

Применяя неравенства (86), получаем:

$$|\widetilde{\mathscr{A}}_k| \leqslant |\widetilde{\mathscr{A}}_K| + \widetilde{R}(\widetilde{\alpha}_k - \widetilde{\alpha}_K) = \widetilde{R}\widetilde{\beta}_k. \tag{93}$$

Определим положительное число

$$\widetilde{\Lambda} = \frac{8\widetilde{R}^2}{r}\left(1 + \frac{2\ell T}{r}\right)\exp\left\{\frac{4}{r}(\widetilde{R} + \ell T)\right\}. \tag{94}$$

В силу неравенств (44) и (84) для любого вектора $p \in \mathbb{R}^m$ справедлива оценка $\widetilde{\mu}_0(p) \leqslant \widetilde{R}|p|$. Поэтому, применяя (92) и (93) и используя (94), находим:

$$0 \leqslant \mu_0(p) - \widetilde{\mu}_0(p) \leqslant 2\widetilde{R}\widetilde{\beta}_0|p| \leqslant \widetilde{\Lambda}K\Delta|p|. \tag{95}$$

Определим положительное число $\widetilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L} + \widetilde{\Lambda}$. Тогда, применяя (44) и (95), получаем:

$$h(M_0, \widetilde{\mathscr{C}M}_0) \leqslant \mathscr{L}K\Delta + \max_{|p|=1}(\mu_0(p) - \widetilde{\mu}_0(p)) \leqslant \widetilde{\mathscr{L}}K\Delta \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Численное построение управления в игре преследования. Полагаем, что до начала игры вычислены все значения $\mu_k(p)$ и $\mu'_k(p)$ для всех $k = \overline{0, K-1}$ и $p \in \mathscr{C}$. Пусть в текущий момент времени t_k, где $k = \overline{0, K-1}$, получен фазовый вектор $z(t_k) = z_k$, который удовлетворяет включению $z_k \in \mathscr{C}M_k$. Если при этом оказалось, что $z_k \in \mathscr{C}M'_k + \mathscr{C}P_k$, т.е. множество

$$\mathscr{C}P_k^{\text{opt}} = (-\mathscr{C}P_k) \cap (\mathscr{C}M'_k - z_k) \tag{96}$$

непусто, то в силу равенства из (37) для любых $u_k \in \mathscr{C}P_k^{\text{opt}}$ и $v_k \in \mathscr{C}Q_k$ следует включение

$$z_k + u_k + v_k \in \mathscr{C}M_{k+1}.$$

Таким образом, определив на интервале $[t_k, t_{k+1})$ управление преследователя $U_k \in P$ так, чтобы $B_k U_k = u_k \in \mathscr{C}P_k^{\rm opt}$, гарантируем для любого допустимого управления убегающего V_k выполнение включения $z(t_{k+1}) = z_{k+1} \in \mathscr{C}M_{k+1}$.

Сделав проверку непустоты множества $\mathscr{C}P_k^{\rm opt}$, которая имеет место, если для любого $p \in \mathscr{C}$ справедливо неравенство $s(-p, P_k) + \mu_k'(-p) + \langle p, z_k\rangle \geqslant 0$, представим множество $\mathscr{C}P_k^{\rm opt}$ с помощью определенной на сетке $\mathscr{C}$ функции

$$\sigma_k(p) = \max\{\langle p, z\rangle : \langle q, z\rangle \leqslant \min\{s(-q, P_k), \mu_k'(q) - \langle q, z_k\rangle\} \quad \forall\, q \in \mathscr{C}\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\mathscr{C}P_k^{\rm opt} = \bigcap_{p\in\mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \sigma_k(p)\},$$

причем для опорной функции этого множества справедливы равенства $s(p, \mathscr{C}P_k^{\rm opt}) = \sigma_k(p)$ для любого $p \in \mathscr{C}$.

Найдем точку $u_k \in \mathscr{C}P_k^{\rm opt}$, решая задачу

$$\max\{r \geqslant 0 : \langle p, u\rangle + r \leqslant \min\{s(-p, P_k), \mu_k'(p) - \langle p, z_k\rangle\} \quad \forall\, p \in \mathscr{C}\}.$$

Эта задача линейного программирования в нашей программе решается с помощью модифицированного симплекс-метода (см. [13]). Ее решение – вектор $u_k \in -\mathscr{C}P_k$ и число $r_k \geqslant 0$ – удовлетворяет включению

$$u_k + r_k \mathbb{B}^m \subset \mathscr{C}P_k^{\rm opt}.$$

Таким образом, найденное u_k является центром шара наибольшего радиуса r_k, вписанного в $\mathscr{C}P_k^{\rm opt}$.

Заметим, что включение $z_k \in \mathscr{C}M_k$ гарантирует непустоту множества $\mathscr{C}P_k^{\rm opt}$ из (96) лишь в случае $m = 2$, когда включение из (37) в силу леммы 1 является равенством. При $m > 2$ может случиться так, что $z_k \in \mathscr{C}M_k \setminus (\mathscr{C}M_k' + \mathscr{C}P_k)$, т.е. множество $\mathscr{C}P_k^{\rm opt} = \varnothing$. В этом случае точку $u_k \in -\mathscr{C}P_k$ определяем таким образом, чтобы расстояние от точки u_k до множества $\mathscr{C}M_k' - z_k$ было по возможности наименьшим. Для этого определим уклонение множеств $\rho_k > 0$ и вектор $p_k \in \mathscr{C}$ как решение задачи

$$\rho_k = -\min\{s(-p, P_k) + \mu_k'(-p) + \langle p, z_k\rangle : p \in \mathscr{C}\},$$
$$p_k = \arg\min\{s(-p, P_k) + \mu_k'(-p) + \langle p, z_k\rangle : p \in \mathscr{C}\}.$$

Для множества $\mathscr{C}P_k$ и для каждого $p \in \mathscr{C}$ определим опорное подмножество

$$\mathscr{C}P_k(p) = \{z \in \mathscr{C}P_k : \langle p, z\rangle = s(-p, P_k)\}.$$

Находим $u_k \in \mathscr{C}P_k(p_k)$ как решение задачи

$$\max\{\langle p_k, u\rangle : \langle p, u\rangle \leqslant \min\{s(-p, P_k), \mu_k'(p) - \langle p, z_k\rangle + \rho_k\} \quad \forall\, p \in \mathscr{C}\}. \tag{97}$$

Эта задача линейного программирования решается с помощью модифицированного симплекс-метода (см. [13]).

Замечание. В силу погрешности многогранной аппроксимации множество

$$\{u \in \mathbb{R}^m : \langle p, u\rangle \leqslant \min\{s(-p, P_k), \mu_k'(p) - \langle p, z_k\rangle + \rho_k\} \quad \forall\, p \in \mathscr{C}\}$$

может оказаться пустым. При этом задача линейного программирования (97) не имеет решения. Однако если учесть возможную погрешность и задать число $\widetilde{\rho}_k = \rho_k + (\|\mathscr{C}P_k\| + \|\mathscr{C}M_k' - z_k\|)\Delta$, то множество

$$\{u \in \mathbb{R}^m : \langle p, u\rangle \leqslant \min\{s(-p, P_k), \mu_k'(p) - \langle p, z_k\rangle + \widetilde{\rho}_k\} \quad \forall\, p \in \mathscr{C}\}$$

наверняка непусто. Методом деления отрезка $[\rho_k, \widetilde{\rho}_k]$ пополам находим как можно меньшее число $d_k \in (\rho_k, \widetilde{\rho}_k]$, для которого разрешима задача

$$\max\{\langle p_k, u\rangle : \langle p, u\rangle \leqslant \min\{s(-p, P_k), \mu_k'(p) - \langle p, z_k\rangle + d_k\} \quad \forall\, p \in \mathscr{C}\}. \tag{98}$$

Окончательно находим $u_k \in \mathscr{C}P_k(p_k)$ как решение задачи (98).

Далее находим управление преследователя $U_k \in P$ как решение задачи (15). В нашей программе реализованы два алгоритма решения этой задачи соответственно для случаев задания множества P в виде многогранника или эллипсоида.

Пусть множество P задано в виде многогранника. Следовательно, известны его вершины $z_P(\tau)$, $\tau = \overline{1, S_P}$ (которые в программе вычисляются до начала игры сразу после задания неравенств, определяющих P). По теореме Крейна–Мильмана для любого $U \in P$ существуют неотрицательные числа α_τ, $\tau = \overline{1, S_P}$, такие, что

$$\sum_{\tau=1}^{S_P} \alpha_\tau = 1, \qquad \sum_{\tau=1}^{S_P} \alpha_\tau z_P(\tau) = U.$$

Числа α_τ называются *барицентрическими координатами* $U \in P$. Вычислив значения $Z_{k\tau} = B_k z_P(\tau)$ для всех $\tau = \overline{1, S_P}$, получаем следующую экстремальную задачу для определения барицентрических координат управления преследователя U_k:

$$\varepsilon + \eta \to \min,$$

$$\sum_{\tau=1}^{S_P} \alpha_\tau (Z_{k\tau})_j - \varepsilon \leqslant (u_k)_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$
$$-\sum_{\tau=1}^{S_P} \alpha_\tau (Z_{k\tau})_j - \varepsilon \leqslant -(u_k)_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$\sum_{\tau=1}^{S_P} \alpha_\tau - \eta \leqslant 1, \quad -\sum_{\tau=1}^{S_P} \alpha_\tau - \eta \leqslant -1, \qquad -\alpha_\tau - \eta \leqslant 0, \quad 1 \leqslant \tau \leqslant S_P.$$

Эта задача линейного программирования в нашей программе решается с помощью модифицированного симплекс-метода (см. [13]).

Если множество P – эллипсоид, решение задачи (15) для вычисления управления преследователя U_k реализовано методом покоординатного спуска из центра эллипсоида [18; гл. 5, § 11].

Численное построение управления в игре убегания. Полагаем, что до начала игры вычислены все значения $\nu_k(p)$ и $\nu'_k(p)$ для всех $k = \overline{0, K-1}$ и $p \in \mathscr{C}$. Пусть в текущий момент времени t_k, где $k = \overline{0, K-1}$, получен фазовый вектор $z(t_k) = z_k \notin \mathscr{C}N_k$. Определим множество

$$\mathscr{C}Q_k^{\text{opt}} = \mathscr{C}Q_k \cap (\mathscr{C}N'_k - z_k).$$

Тогда множество $\mathscr{C}Q_k \setminus \mathscr{C}Q_k^{\text{opt}}$ непусто, а из соотношений (38) для любых $v_k \in \mathscr{C}Q_k \setminus \mathscr{C}Q_k^{\text{opt}}$ и $u_k \in -\mathscr{C}P_k$ имеем

$$z_k + u_k + v_k \notin \mathscr{C}N_{k+1}.$$

Следовательно, определив на интервале $[t_k, t_{k+1})$ управление убегающего $V_k \in Q$ так, чтобы $C_k V_k \in \mathscr{C}Q_k \setminus \mathscr{C}Q_k^{\text{opt}}$, гарантируем для любого допустимого управления преследователя U_k выполнение соотношения $z(t_{k+1}) = z_{k+1} \notin \mathscr{C}N_{k+1}$. Условие непустоты множества $\mathscr{C}Q_k^{\text{opt}}$ эквивалентно тому, что для всех $p \in \mathscr{C}$ выполнены неравенства $s(p, Q_k) + \nu'_k(-p) + \langle p, z_k\rangle \geqslant 0$. Если множество $\mathscr{C}Q_k^{\text{opt}} \neq \varnothing$, то для вычисления множества $\mathscr{C}Q_k^{\text{opt}}$ определяем для каждого $p \in \mathscr{C}$ значение

$$\sigma_k(p) = \max\{\langle p, z\rangle : \langle q, z\rangle \leqslant \min\{s(q, Q_k), \nu'_k(q) - \langle q, z_k\rangle\} \ \ \forall\, q \in \mathscr{C}\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\mathscr{C}Q_k^{\text{opt}} = \bigcap_{p \in \mathscr{C}} \{z \in \mathbb{R}^m : \langle p, z\rangle \leqslant \sigma_k(p)\},$$

причем $s(p, \mathscr{C}Q_k^{\text{opt}}) = q_k(p)$ для любого $p \in \mathscr{C}$. Вычисление значений $q_k(p)$ для каждого $p \in \mathscr{C}$ при $m > 2$ в программе реализовано с помощью модифицированного симплекс-метода (см. [13]), а при $m = 2$ с помощью более простого алгоритма из [12]. Определив множество $\mathscr{C}Q_k^{\text{opt}}$, вычисляем $v_k \in \mathscr{C}Q_k \setminus \mathscr{C}Q_k^{\text{opt}}$ таким образом, чтобы расстояние от v_k до $\mathscr{C}N'_k - z_k$ было по возможности наибольшим. Если $\mathscr{C}Q_k^{\text{opt}} = \varnothing$, то вычисляем

$$p_k = \arg\max\{s(p, Q_k) + \nu'_k(-p) + \langle p, z_k\rangle : p \in \mathscr{C}\}.$$

Если $\mathscr{C}Q_k^{\text{opt}} \neq \varnothing$, то вычисляем

$$p_k = \arg\max\{s(p, Q_k) - q_k(p) : p \in \mathscr{C}\}.$$

Для любого $p \in \mathscr{C}$ определим опорное подмножество

$$\mathscr{C}Q_k(p) = \{z \in \mathscr{C}Q_k : \langle p, z\rangle = s(p, Q_k)\}.$$

Находим $v_k \in \mathscr{C}Q_k(p_k)$ как решение задачи

$$\max\{\langle p_k, v\rangle : \langle p, v\rangle \leqslant s(p, Q_k) \ \ \forall\, p \in \mathscr{C}\}.$$

Эта задача линейного программирования решается с помощью модифицированного симплекс-метода (см. [13]).

Далее находим управление убегающего $V_k \in Q$ как решение задачи (17). Реализовано два алгоритма решения этой задачи отдельно для многогранного и для эллипсоидального множества Q. Вычисление управления убегающего V_k проводится аналогично вычислению управления U_k в игре преследования.

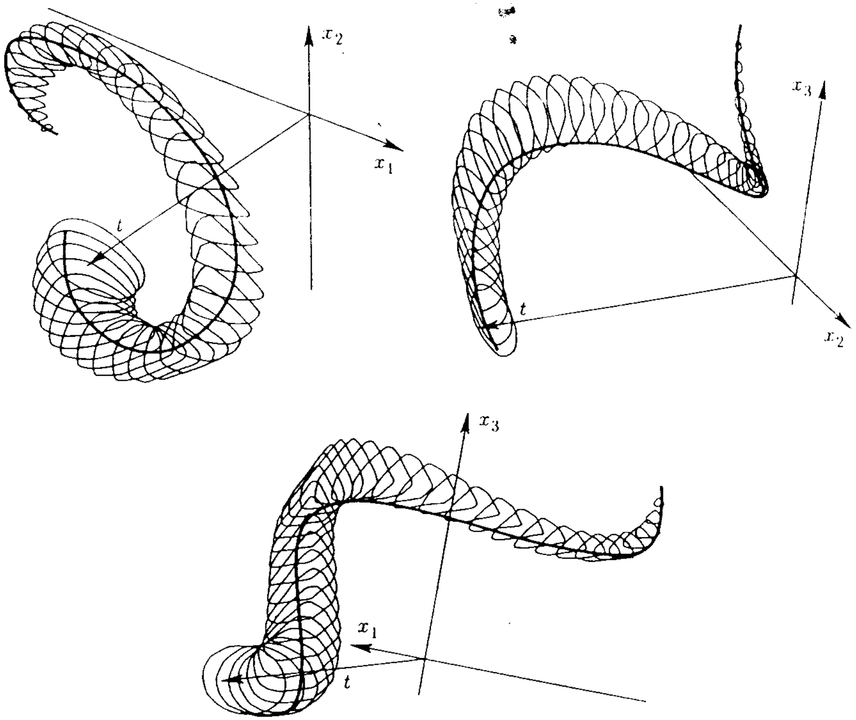

Рис. 1. Множества $\mathscr{C}M_k$, $k = \overline{0, K}$, и траектория $z(t)$, $t \in [0, T]$

§4. Пример

Рассмотрим следующую дифференциальную игру преследования:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0 & 0.6 \\ 0.8 & -0.1 \\ 0.5 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix},$$

где время $t \in [0, T]$, $T = 5.62$. Управления игроков имеют вид

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \in P, \qquad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \in Q,$$

где множества P и Q заданы в виде многогранников следующим образом:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} u_1 \leqslant 1.1, \\ u_2 \leqslant 1.1, \end{matrix} \quad u_1 + u_2 \geqslant 1 \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} v_1 \geqslant 0.0, \\ v_2 \geqslant 0.0, \end{matrix} \quad v_1 + v_2 \leqslant 1 \right\}.$$