Российский государственный университет нефти и газа имени И. М. Губкина

Кафедра высшей математики

В.В. Калинин, И.В. Петрова, В.Т. Харин

МАТЕМАТИКА

в нефтегазовом образовании

ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

ВЫПУСК 3. Часть 1.

Неопределенные и определенные интегралы

Москва 2005

В.В. Калинин, И.В. Петрова, В.Т. Харин

МАТЕМАТИКА

в нефтегазовом образовании

ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

ВЫПУСК 3. Часть 1.

Неопределенные и определенные интегралы

Допущено Учебно-методическим объединением по высшему нефтегазовому образованию в качестве учебного пособия для студентов вузов нефтегазового профиля

РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина
Москва 2005

УДК 517.9:516:512.8:622.27
К 18

Калинин В.В., Петрова И.В., Харин В.Т.

К 18 Математика в нефтегазовом образовании. Теория и задачи: Учеб. пособие. – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2005. Вып. 3. Часть 1: Неопределенные и определенные интегралы. – 117с.

Пособие продолжает серию учебно-методических изданий по курсу высшей математики. Третий выпуск посвящен одному из фундаментальных понятий математики – понятию интеграла. В пособии подробно изучены всевозможные приложения интегрального исчисления, разобраны многочисленные примеры, приведены теоретические вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей нефтегазового образования, а также магистрантов, аспирантов, занимающихся исследованиями, связанными с применениями математических методов. Издание подготовлено на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина.

Рецензенты:

проф. кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина Т.С. Соболева,

проф. кафедры математики МИФИ (технический университет) д.ф.-м.н. Н.В. Мирошин

Из предисловия к выпуску 2.

Пособие «Математика. Теория и задачи», выпущенное на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, представляется изданием, которое позволит читателю (студенту, аспиранту, специалисту, преподавателю) остановиться, чтобы осмыслить великую и «ужасную» науку – **МАТЕМАТИКУ**. Пособие уникально в том смысле, что оно может быть полезно и для тех читателей, кто в данное время изучает вузовский курс высшей математики, и для тех из них, которые этот курс формально (давно или недавно) завершили и даже получили вполне устраивающие их оценки, но при этом хотят понять: чему же их, собственно, обучали на заре их студенческой юности – на первом-втором курсах. Несомненна польза этой книги при подготовке к аспирантуре и магистратуре: ведь многим в процессе дальнейшего обучения предстоит решать задачи, связанные с серьезным математическим аппаратом. А уж специалисты, профессионально работающие в математике – преподаватели, исследователи – несомненно, найдут для себя много новых, нестандартно представленных подходов, и получат истинное удовольствие от прочтения рукописи.

Это издание задумал и начал воплощать в жизнь замечательный человек и ученый, заведующий кафедрой высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, профессор Виталий Тимофеевич Харин. В книге представлен результат его многолетнего опыта преподавания математики в нашем университете и в институтах зарубежных стран.

Предисловие к выпуску 3.

Мы предлагаем читателю третий выпуск пособия «Математика в нефтегазовом образовании. Теория и задачи». Этот выпуск посвящен одному из самых фундаментальных понятий в математике – понятию интеграла. Термин «интегральное исчисление» впервые был введен в обиход И. Бернулли в самом конце XVII века, а его современное обозначение $\int$ обязано своим происхождением Лейбницу. Это, кстати, было частью компромисса между двумя великими учеными: Лейбниц отказался от названия “*calculus summatorius*” в пользу “*calculus integralis”*, введенного И. Бернулли, но зато сохранил свое обозначение – стилизованное латинское «S».

С тех пор понятие интеграла является широко востребованным в самых разных разделах математики: математическом анализе, дифференциальных уравнениях, функциональном анализе, *etc*. О важности этого понятия знал даже Лев Толстой. В "Анне Карениной" он писал: "Когда бы в университете мне сказали, что другие понимают интегральное вычисление, а я не понимаю, – тут самолюбие. Но тут надо быть убежденным прежде, что нужно иметь известные способности для этих дел и, главное, в том, что все эти дела важны очень."

Авторы надеются, что настоящее пособие будет востребовано людьми творческими, желающими узнать предмет больше и глубже, не ограничиваясь лишь формальным и сухим изложением втузовского учебника, имеющими, как герой Л. Толстого, самолюбие, чтобы овладеть им, или, при возникновении такой необходимости, повторить аппарат интегрального исчисления и его приложений.

В ходе подготовки к печати выпуска 3 пособия «Математика в нефтегазовом образовании. Теория и задачи» авторы столкнулись с тем, что объем представленного материала по разделу «Интегральное исчисление» оказался достаточно большим, что создавало определенные сложности в использовании книги. Кроме того, интегральное исчисление в курсе высшей математики обычно изучается студентами в течение нескольких семестров, а некоторая его часть остается вообще за пределами вузовской программы у ряда специальностей, не требующих особо глубокой математической подготовки. Поэтому было принято решение разбить выпуск 3 пособия на две части. Часть 1 выпуска содержит материал по неопределенным, определенным, несобственным интегралам и интегралам, зависящим от параметра. В части 2 излагается теория, связанная с кратными (двойными и тройными), криволинейными и поверхностными интегралами.

Материалы, связанные с данным изданием, можно найти на сайте
кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:

http://kvm.gubkin.ru/index.html

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Неопределенный интеграл.

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Изучая дифференциальное исчисление, мы, в частности, рассматривали следующую задачу: на интервале числовой оси задана функция, надо найти ее производную. Приступая к интегральному исчислению, начнем с обратной задачи: по заданной на интервале производной найти саму функцию (ту, производная которой задана).

Где может возникнуть такая задача? Например, если нужно по известной зависимости скорости движения от времени найти закон движения точки по прямой.

Итак, пусть на интервале I числовой оси $\mathbb{R}$ задана числовая функция $f(x)$. Функция $F(x)$, определенная на том же интервале, называется ***первообразной*** функции $f(x)$, если на I выполнено условие

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Например, при $x > 0$ функция $\ln x$ есть первообразная для $\dfrac{1}{x}$.

Какой должна быть функция $f(x): I \to \mathbb{R}$ для того, чтобы существовала ее первообразная? Достаточное условие для этого дает

Теорема 1. Непрерывная на интервале функция имеет на нем первообразную.

К этой теореме мы вернемся несколько позже.

В отличие от задачи дифференцирования, обратная задача – нахождение первообразной – имеет не одно, а много решений.

Теорема 2. Функция $f(x): I \to \mathbb{R}$ либо вовсе не имеет первообразной, либо имеет множество первообразных. Все это множество выражается в виде $F(x)+C$, где $F(x)$ какая-либо первообразная, а C – произвольная постоянная.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$ на интервале *I*. Тогда, взяв любое фиксированное число *C*, мы видим, что $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)$, т.е. $F(x)+C$ тоже первообразная для $f(x)$. Итак, все функции вида $F(x)+C$ – первообразные для $f(x)$. Других функций в множестве первообразных нет. В самом деле, если $\Phi(x)$ первообразная для $f(x)$, то функция $g(x)=F(x)-\Phi(x)$ для любого значения x обладает свойством $g'(x)=F'(x)-\Phi'(x)=f(x)-f(x)=0$. Теперь, применив теорему Лагранжу для функции $g(x)$ на некотором отрезке $[a,x]$, получим $g(x)-g(a)=g'(\xi)\cdot(x-a)$, $\xi \in (a,x)$. Но $g'(\xi)=0$, поэтому $g(x)=g(a)$ для любого x, т.е. $g(x)=F(x)-\Phi(x)$ есть постоянная на *I*.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале I называется ***неопределенным интегралом*** этой функции на этом интервале и обозначается символом $\int f(x)dx$. Учитывая теорему 2, можно написать

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \quad x \in I, \tag{2}$$

где $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$.

Причина столь сложного и непонятного обозначения неопределенного интеграла прояснится несколько позже.

Приведем несколько простейших примеров вычисления неопределенного интеграла. Эти примеры получаются, если читать "справа налево" таблицу производных основных элементарных функций.

ПРИМЕР 1. $\int 0\,dx = C = const, \qquad x \in \mathbb{R}$. ■ ([1])

ПРИМЕР 2. $\int 1 \cdot dx = x + C, \qquad x \in \mathbb{R}$. ■

ПРИМЕР 3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1),\ \ x > 0$, или $x < 0$, или $x \in \mathbb{R}$

(в зависимости от показателя степени α).

В частности, при $x > 0$: $\int \sqrt[n]{x}\, dx = \dfrac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C = \dfrac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} + C$. ■

ПРИМЕР 4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ (при $x > 0$), $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$ (при $x < 0$),

или, короче, $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,\ \ x \neq 0$. ■

ПРИМЕР 5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ (a > 0,\ a \neq 1),\ x \in \mathbb{R}$,

в частности, $\int e^x dx = e^x + C,\ \ x \in \mathbb{R}$. ■

ПРИМЕР 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,\ \ x \in \mathbb{R}$. ■

ПРИМЕР 7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + (k+1)\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad k\pi < x < (k+1)\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}. \ ■$$

ПРИМЕР 8. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \qquad x \in \mathbb{R}$. ■

ПРИМЕР 9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \qquad -1 < x < 1$. ■

([1]) Знаком ■ здесь и далее обозначается завершение решения примера.

Если вид первообразной заданной функции не очевиден, то для ее нахождения можно воспользоваться свойствами неопределенного интеграла, с которыми мы начинаем знакомиться.

Теорема 3. 1) Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную на интервале *I*, и α = const $\neq 0$. Тогда $\alpha f(x)$ также имеет первообразную на *I*, причем

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx. \tag{3}$$

2) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные на интервале *I*, то сумма $f(x)+g(x)$ также имеет на нем первообразную, причем

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \tag{4}$$

Доказательство. 1) Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная для функции $f(x)$. Тогда $aF(x)$ есть первообразная для $af(x)$, поскольку $[aF(x)]' =$ $= aF'(x) = af(x)$. Поэтому левая часть (3) есть множество всех функций вида $aF(x)+C_1$, где C_1 произвольная постоянная, а правая часть – это множество всех функций вида $a[F(x)+C_2] = aF(x)+aC_2$, где C_2 – произвольная постоянная. Ясно, что оба эти множества совпадают, и утверждение (3) доказано.

2) Пусть теперь $F(x)$ и $G(x)$ первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$, соответственно. Тогда $F(x)+G(x)$ – первообразная для $f(x)+g(x)$, т.к.

$$[F(x)+G(x)]' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x).$$

Таким образом, слева в (4) записано множество вида $F(x)+G(x)+C_1$, а справа – множество вида $(F(x)+C_2)+(G(x)+C_3) = F(x)+G(x)+C_4$, где все значения C с индексами – произвольные постоянные. Поэтому означенные множества совпадают, что и требовалось доказать.

Теорема 3 позволяет несколько расширить класс функций, для которых неопределенные интегралы могут быть найдены на основе таблицы производных основных элементарных функций:

ПРИМЕР 10. $\int\left(4x^5-\frac{1}{x}+\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx=$

$$=4\int x^5dx-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{2}{3}x^6-\ln|x|-2\operatorname{ctg}x+C. \ ▪$$

Теорема 4 (интегрирование по частям). Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на интервале I. Тогда на этом интервале имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx. \qquad (5)$$

Иногда эту формулу записывают в виде

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x),$$

используя выражение дифференциала функции через ее производную.

Доказательство. Левая часть равенства (5) – это множество функций, имеющих на интервале I производную $u(x)v'(x)$. Правая часть есть множество функций, имеющих на интервале I производную

$$\left[u(x)v(x)\right]'-v(x)u'(x)=\left[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right]-v(x)u'(x),$$

т.е. такую же, что и функции в левой части. Значит, оба множества совпадают, что и доказывает теорему.

Спрашивается, какой смысл заменять вычисление $\int u(x)v'(x)dx$ вычислением $\int v(x)u'(x)dx$. Ответ прост: часто случается, что первый из интегралов мы не умеем вычислять, а второй – умеем.

ПРИМЕР 11. Вычислить интеграл $\int \ln x\, dx,\ \ (x>0)$.

Перепишем его в виде $\int 1\cdot \ln x dx$ и положим $\ln x = u(x)$, $1 = v'(x)$. Тогда в качестве $v(x)$ можно взять x. По формуле (5) имеем

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

Можно представить наши рассуждения в этом примере следующим образом:

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x, & dv = dx, \\ du = \frac{1}{x}dx, & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\ln x - x + C = x\left(\ln x - 1\right) + C. \blacksquare.$$

ПРИМЕР 12.

$$\int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & dv = e^x dx, \\ du = 2xdx, & v = e^x \end{vmatrix} = x^2e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx. \blacksquare$$

К последнему интегралу снова примéним интегрирование по частям:

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = e^x dx, \\ du = dx, & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

В результате получаем:

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x + C\right) = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. ▪

Из двух последних примеров видно, что интегрирование по частям "в сторону понижения степени" полезно, в частности, при интегрировании функций вида $x^m a^x$, $x^m \cos x$, $x^m \sin x$ при натуральных m. Конечно, только этим сфера применения рассматриваемого метода не ограничивается.

ПРИМЕР 13. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx, \\ du = dx, & v = -\frac{1}{2\sin^2 x} \end{vmatrix} =$

$$= -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C. \ ■$$

ПРИМЕР 14. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx; \ I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx.$$

Решение. Вычисляем интеграл I_1 по частям:

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx = \begin{vmatrix} u = e^{ax}, & dv = \cos bx dx, \\ du = ae^{ax}dx, & v = \frac{1}{b}\sin bx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}I_2.$$

Аналогично вычисляем интеграл I_2:

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx = \begin{vmatrix} u = e^{ax}, & dv = \sin bx dx, \\ du = ae^{ax}dx, & v = -\frac{1}{b}\cos bx \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}I_1.$$

Подставим этот результат в результат предыдущей выкладки. При этом учтем, что выражения для I_1 в первой и второй выкладках различаются на произвольную постоянную. В первом случае $I_1 = F(x) + C_1$, где $F(x)$ – некоторая первообразная для $e^{ax}\cos bx$, а C_1 – произвольная константа, то во втором это $I_1 = F(x) + C_2$, где C_2 – произвольная константа, значения которой не обязаны зависеть от значений C_1. В результате получаем уравнение для I_1:

$$I_1 = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\mathrm{I}_1 + C_2\right).$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{e^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C.$$

Теперь легко выписать и второй искомый интеграл:

$$I_2 = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C. \blacksquare$$

Теорема 5 (интегрирование методом замены переменной, или подстановки). Пусть непрерывно дифференцируемая функция $x = \varphi(t)$ определена на интервале I числовой оси Ot (рис.1), а её значения заполняют интервал J числовой оси Ox. Пусть, кроме того, на интервале J задана непрерывная функция $f(x)$. Тогда

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt. \tag{6}$$

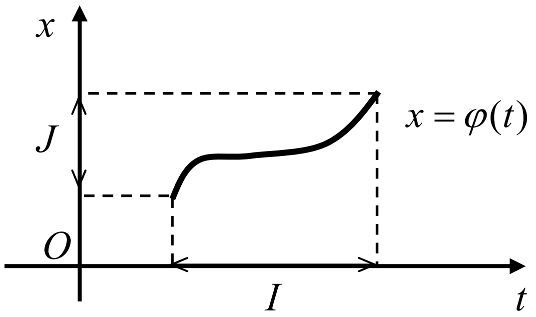


Рис.1. К теореме 5.

Другими словами, если в левом интеграле (6) переменную x заменить ее выражением через t и то же сделать с дифференциалом dx, то полученное множество первообразных как функций переменной t, определенных на интервале I совпадает с множеством первообразных функции $f(x)$, определенных на интервале J.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$ на интервале J, т.е. $F'(x) = f(x)$ на этом интервале. Тогда по теореме о производной сложной функции $F(\varphi(t))$ будет первообразной для функции $f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$ на I. В самом деле:

$$\left[F\left(\varphi(t)\right)\right]' = F'\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t).$$

Тем самым $F(x)+C$ (левая часть (6)) и $F(\varphi(t))+C$ (правая часть) совпадают, если x и t связаны равенством $x=\varphi(t)$.

ПРИМЕР 15. Вычислить интеграл $\int \mathrm{ctg}x\,dx$ (на любом интервале, где определена подынтегральная функция).

Сначала напишем: $\int \mathrm{ctg}x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$. Теперь замечаем, что выражение $\cos x dx$ представляет собой дифференциал выражения $\sin x$, а оставшаяся подынтегральная функция $\frac{1}{\sin x}$ также зависит только от $\sin x$. Поэтому берем в качестве новой переменной $t=\sin x$. Получим тогда

$$\int \mathrm{ctg}x dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

Возвращаясь от переменной t к x, получаем окончательно

$$\int \mathrm{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C.$$

Аналогично вычисляется интеграл $\int \mathrm{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C$. ▪

Заметим, что в этом примере обозначения переменных переставлены по сравнению с общей формулой (6).

ПРИМЕР 16. Вычислить интеграл $\int (ax+b)^{\alpha}\,dx$ при $\alpha\neq-1,\ a\neq 0$.

Введем новую переменную $t=ax+b$. Ясно что $dt=a\,dx$, поэтому

$$\int (ax+b)^{\alpha}\,dx = \frac{1}{a}\int t^{\alpha}dt = \frac{1}{a}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right) = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C_1.$$ ▪

ПРИМЕР 17. Если в предыдущем примере $\alpha = -1$, то с той же заменой переменной имеем $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C_1 = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C_1$. ▪

Обобщив два последних примера, можно сказать, что при $a \neq 0$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt, \qquad \text{где } t = ax+b. \qquad (7)$$

ПРИМЕР 18. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, $a > 0$.

Интеграл легко сводится к интегралу из примера 8, если положить $x = at$. Тогда $dx = adt$, и мы получаем

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{adt}{a^2t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \ ▪$$

С помощью такой же замены $x = at$ легко вычисляется интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

ПРИМЕР 19. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Сначала с помощью уже знакомой замены $x = at$ сводим интеграл к виду $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$. Затем вводим еще одну замену $t = \operatorname{ch} u$, $(u > 0)$, получая $dt = (\operatorname{ch} u)' du = \operatorname{sh} u\, du$. После этого $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{\operatorname{sh} u du}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}} = \int du = u + C$.

Чтобы теперь вернуться от переменной u к переменной x, запишем сначала связь между u и t в виде $\frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right) = t$ и выразим u через t, полагая $e^u = \alpha$. Получим равенство $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2t$, или квадратное уравнение $\alpha^2 - 2t\alpha + 1 = 0$. Отсюда $e^u = \alpha = t \pm \sqrt{t^2-1}$. Знак "–" следует отбросить, т.к.

$e^u > t$ при $u > 0$. Тогда $u = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right) = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)$ и, окончательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C. \ ■$$

ПРИМЕР 20. Аналогично вычисляется интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C,$$

если вместо подстановки $t = \mathrm{ch}\, u$ использовать подстановку $t = \mathrm{sh}\, u$. ■

ПРИМЕР 21. Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

Решение. Попробуем представить подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a},$$

где A и B – неизвестные пока константы. Чтобы определить их, приведем равенство к общему знаменателю и, поскольку он одинаков для правой и левой частей, запишем тождественное равенство числителей:

$$1 \equiv A(x + a) + B(x - a) = (A + B)x + (A - B)a$$

Для выполнения тождества необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях совпадали. Это приводит к системе двух уравнений для A и B:

$$A + B = 0, \qquad A - B = 1/a.$$

Решая ее, находим $A = 1/(2a)$, $B = -1/(2a)$. В результате получаем

$$I = \int \left[\frac{1}{2a(x - a)} - \frac{1}{2a(x + a)}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x + a} = \frac{1}{2a}\ln|x - a| - \frac{1}{2a}\ln|x + a| + C,$$

или, окончательно,

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C. \ ■$$

Подведем промежуточные итоги настоящего раздела. Мы дали определение первообразной и неопределенного интеграла, установили, что операция интегрирования функции в каком-то смысле обратна операции дифференцирования. Были рассмотрены основные методы вычисления неопределенных интегралов, а именно:

1) непосредственное обращение таблицы производных основных элементарных функций (примеры 1 – 9);

2) использование теорем 3 – 5, являющихся следствием известных теорем дифференциального исчисления (о дифференцировании суммы функций и произведения функции на константу, о дифференцировании произведения функций и о производной сложной функции).

Заметим, что применение теорем 4, 5 (интегрирование по частям и с помощью замены переменной) явно труднее по сравнению с применением аналогичных теорем при дифференцировании. В отличие от дифференцирования, которое сводится к автоматическому применению нужных теорем, не требуя особой сообразительности в выборе способа действий, интегрирование представляет более сложную задачу: оно, где-то, сродни искусству. Не всегда просто решить, когда надо интегрировать по частям, а когда искать замену переменной, и какую именно. Умение интегрировать достигается практикой.

Один известный профессор математики так объяснял студентам разницу между интегрированием и дифференцированием. Он говорил, что найти производную функции – это все равно, что найти дитя, если знаешь мать. А интегрирование уже сродни поиску матери, если известно дитя (это более сложная задача!). Правда, как-то раз на лекции умудренная опытом студентка-вечерница задала уважаемому профессору вопрос: а как, зная дитя, найти его отца? Единственное, что смог ответить лектор, это что заданный вопрос выходит за рамки курса дифференциального и интегрального исчислений.

ПРИМЕР 22. Вычислить интеграл $I = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$.

Заметим, во-первых, что $\frac{1}{\sqrt{x}}$ – это почти производная от $\sqrt{x}$ (не хватает множителя $1/2$, который легко "создать"). После этого было бы неплохо, чтобы оставшаяся часть подынтегрального выражения содержала переменную интегрирования только в виде комбинации $\sqrt{x}$. Осталось догадаться, что $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$. Всё – замена найдена: $t = \sqrt{x}$! Итак

$$I = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array} \right| = 2\int \frac{1-t}{t^2+1} dt = 2\int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{2tdt}{t^2+1}.$$

С первым интегралом все ясно:

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

Во втором интеграле надо опять заметить, что $2t$ – это производная от t^2+1, после чего замена $u = t^2+1$ дает

$$\int \frac{2tdt}{t^2+1} = \left| \begin{array}{l} u = t^2+1 \\ du = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(t^2+1) + C = \ln(x+1) + C.$$

В результате имеем

$$I = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \ln(x+1) + C. \ \blacksquare$$

В числе приведенных выше примеров имеется значительное количество таких, к которым достаточно часто сводится вычисление других, более сложных интегралов. Естественно, было бы неразумно каждый раз проводить заново однотипные выкладки. Проще выписать наиболее часто встречающиеся интегралы в специальную таблицу. Такие интегралы и будут называться ***табличными***. Их следует знать наизусть, как таблицу умножения. Для удобства в таблицу занесены и такие интегралы, которые не были разобраны выше (их справедливость можно обосновать с помощью дифференцирования правой части). Мы также опустим области определения соответствующих интегралов, которые легко установить по подынтегральной функции.

Таблица неопределенных интегралов.

I. $\int 0\,dx = C$.

II. $\int dx = x + C$.

III. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1,$

в частности:

III'. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

IV. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

V. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

VI. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

VII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

VIII. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

IX. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

X. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$.

XI. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1,$

в частности:

XI'. $\int e^x dx = e^x + C$.

XII. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

XIII. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

XIV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

XV. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + C$.

XVI. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$.

XVII. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$.

XVIII. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

XIX. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$.

1.2. Интегрирование рациональных дробей.

Вспомним, что рациональной дробью называется функция вида

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{D_n(x)}, \tag{1}$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m, а $D_n(x)$ – многочлен степени n. Функции такого вида часто встречаются в приложениях. Кроме того, что не менее важно, к интегрированию рациональных дробей сводится интегрирование многих других видов функций. Поэтому задача об интегрировании рациональных дробей имеет существенное значение.

Начинать решение такой задачи следует со сравнения степеней m и n в числителе и знаменателе дроби (1). Если $m \geq n$, т.е. дробь ***неправильная***, следует осуществить деление многочлена на многочлен, т.е. получить тождество

$$\frac{P_m(x)}{D_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{R_s(x)}{D_n(x)}, \qquad (2)$$

в котором $T_{m-n}(x)$ есть многочлен степени $m - n$, а $R_s(x)$ – многочлен степени $s < n$. (Операция представления неправильной дроби (1) в виде суммы (2) многочлена и правильной дроби называется ***выделением целой части***).

Поскольку интегрирование многочлена не есть проблема, равенство (2) сводит интегрирование неправильной рациональной дроби к интегрированию правильной рациональной дроби.

ПРИМЕР 1. Выделить целую часть дроби $\dfrac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$.

Замечаем, что под знаком интеграла находится неправильная рациональная дробь: $m = 4$, $n = 2 < 4$. Поэтому делим числитель дроби на знаменатель, например, "уголком":

$$\begin{array}{rrrr|l}
-\,x^4 & & & -3 & x^2+2x+1 \\ \cline{5-5}
x^4 & +2x^3 & +x^2 & & x^2-2x+3 \\ \cline{1-3}
 & -\,{-2x^3} & -x^2 & -3 & \\
 & -2x^3 & -4x^2 & -2x & \\ \cline{2-4}
 & & -\,3x^2 & +2x-3 & \\
 & & 3x^2 & +6x+3 & \\ \cline{3-4}
 & & & -4x-6 &
\end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}. \ \blacksquare$$

Рассмотрим теперь *общий метод интегрирования правильных дробей* (1), где теперь считаем $m < n$. Будем предполагать, что коэффициент при x^n многочлена $D_n(x)$ равен единице, чего легко добиться, умножив дробь (1) на надлежащее число.

Первый этап метода – разложение многочлена $D_n(x)$ на множители как можно более низких степеней. Степень этой возможности определяется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. Всякий многочлен $D_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, может быть представлен в виде

$$D_n(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots \left(x - x_p\right)^{k_p} T(x), \tag{3}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_p$ – различные действительные корни многочлена $D_n(x)$, а $k_1, k_2, \ldots, k_p$ – кратности соответствующих корней. Многочлен $T(x)$ действительных корней не имеет и представляется следующим образом:

$$T(x) = \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\ell_1} \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{\ell_2} \ldots \left(x^2 + p_r x + q_r\right)^{\ell_r}, \tag{4}$$

где все квадратные трехчлены в скобках имеют отрицательные дискриминанты, а $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_r$ – натуральные числа. При этом

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_p + 2(\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_r) = n.$$

Доказывать эту теорему мы не будем.

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{x^4 + 4x^3 - 16x - 16} dx$.

Решение. Непосредственно убеждаемся, что под знаком интеграла уже находится правильная рациональная дробь. Поэтому вначале нужно разложить знаменатель на множители. В общем случае это непростая задача. Но иногда её удается решить с помощью группировки членов. В нашем случае имеем:

$$x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = \left(x^4 - 16\right) + \left(4x^3 - 16x\right) =$$

$$=\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)+4x\left(x^2-4\right)=\left(x^2-4\right)\left(x^2+4+4x\right)=$$

$$=(x-2)(x+2)(x+2)^2=(x-2)(x+2)^3.$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^3+6x^2+13x+6}{x^4+4x^3-16x-16}dx=\int\frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx.$$

Вспоминая теорему 1, видим, что в нашем случае $x_1=2$, $x_2=-2$, $k_1=1$, $k_2=3$, $p=2$, $T(x)\equiv 1$. ▪

Вычисление этого интеграла будет завершено позже. А пока предположим, что знаменатель правильной рациональной дроби (1) уже разложен на множители надлежащим образом. Что делать дальше?

Второй этап метода – представление дроби в виде суммы слагаемых следующего вида:

1) если знаменатель $D_n(x)$ дроби (1) содержит множитель $(x-a)^k$, то в указанную сумму должны входить слагаемые

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k};\qquad (5)$$

2) если тот же знаменатель содержит множитель $\left(x^2+px+q\right)^\ell$, то в сумму должны входить слагаемые

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_\ell x+C_\ell}{\left(x^2+px+q\right)^\ell}.\qquad (6)$$

Числа A, B и C с различными индексами – это константы, которые следует найти.

Все слагаемые в выражениях (5) и (6) называются ***простейшими рациональными дробями***.

То, что описанное разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей всегда возможно, может быть доказано в общем виде. Но и этого мы делать не будем, а просто рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4-3}{x^2+2x+1}dx$.

Подынтегральная функция рассматривалась в примере 1. Тогда

$$\int \frac{x^4-3}{x^2+2x+1}dx = \int (x^2-2x+3)dx - \int \frac{4x+6}{x^2+2x+1}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - \int \frac{4x+6}{x^2+2x+1}dx.$$

Нам осталось вычислить интеграл $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1}dx$. Очевидно, разложение знаменателя подынтегральной дроби имеет вид $x^2+2x+1=\left(x+1\right)^2$. Поэтому дробь представляется в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{2x+3}{x^2+2x+1} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{\left(x+1\right)^2}.$$

Как искать числа A_1, A_2? Приведем последнее равенство к общему знаменателю и отбросим знаменатель. Получится:

$$2x+3 = A_1(x+1) + A_2.$$

Это – равенство двух многочленов первой степени.

Как известно, два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, если равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Приравнивание коэффициентов дает два уравнения относительно чисел A_1, A_2:

$$\begin{array}{ll} x^1: & 2 = A_1; \\ x^0: & 3 = A_1 + A_2. \end{array}$$

Решая их, находим $A_1 = 2$, $A_2 = 1$; после чего искомый интеграл приводится к виду

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1}dx = 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

Интегралы в правой части легко берутся, что позволяет окончательно вычислить искомый интеграл:

$$\int \frac{x^4-3}{x^2+2x+1}dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 4\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C. \ ▪$$

ПРИМЕР 4. Вернемся к примеру 2, в котором вычисление заданного интеграла свелось к вычислению интеграла $\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx$.

Нам уже понятно, что разложение подынтегральной функции на сумму простейших дробей должно иметь вид

$$\frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2} + \frac{A_4}{(x+2)^3}.$$

Для нахождения чисел A_1, A_2, A_3, A_4 приводим это равенство к общему знаменателю и отбрасываем его:

$$x^3+6x^2+13x+6 = A_1(x+2)^3 + A_2(x-2)(x+2)^2 + \\ + A_3(x-2)(x+2) + A_4(x-2).$$

В правой части раскрываем скобки и располагаем члены по убывающим степеням x:

$$x^3+6x^2+13x+6 = (A_1+A_2)x^3 + (6A_1+2A_2+A_3)x^2 + \\ +(12A_1-4A_2+A_4)x + (8A_1-8A_2-4A_3-2A_4).$$

Теперь приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получая следующую систему уравнений относительно искомых чисел:

$$\begin{aligned} x^3: &\quad A_1+A_2=1; \\ x^2: &\quad 6A_1+2A_2+A_3=6; \\ x^1: &\quad 12A_1-4A_2+A_4=13; \\ x^0: &\quad 8A_1-8A_2-4A_3-2A_4=6. \end{aligned}$$

Решая систему, находим: $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 1$.

Таким образом, интеграл примера 2 принимает вид

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x+2)^3} = \ln|x-2| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C. \ ■$$

До сих пор в примерах нам встречались лишь простейшие дроби вида $\frac{A}{(x-a)^k}$ (выражение (5)). Их интегрирование проблем не вызывало, ибо при $k = 1$ очевидным образом имеем

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C, \tag{7}$$

а при $k = 2, 3, ...$ не менее очевидным образом получаем

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A(x-a)^{1-k}}{1-k} + C. \tag{8}$$

Однако, к интегрированию простейших дробей вида $\frac{Bx + C}{\left(x^2 + px + q\right)^k}$ (выражение (6)) мы пока не готовы.

Рассмотрим сначала случай $k = 1$, т.е. будем вычислять интеграл

$$I_1 = \int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx. \tag{9}$$

Для этого, прежде всего, выделим в знаменателе полный квадрат:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + m^2,$$

где $m = \sqrt{4q - p^2} \big/ 2 > 0$.

Теперь выполним в интеграле (9) замену переменной:

$$I_1=\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2}dx=\begin{vmatrix} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{Bt+C-\frac{Bp}{2}}{t^2+m^2}dt=B\int\frac{t}{t^2+m^2}dt+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+m^2}.$$

Первый из интегралов справа берется с помощью уже знакомого нам приема внесения под знак дифференциала:

$$\int\frac{t}{t^2+m^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+m\right)}{t^2+m^2}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+m^2\right|=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+C.$$

Второй интеграл – табличный:

$$\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+const=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{m}+C,$$

Тогда, окончательно,

$$I_1=\frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2C-B}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Покончив с интегралом (9), рассмотрим случай интегрирования простейших дробей вида $\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ при $k=2,3,...$:

$$I_k=\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}dx. \tag{10}$$

Действуя аналогично предыдущему случаю ($k=1$), с теми же обозначениями, приводим интеграл (10) к виду

$$I_k=B\int\frac{tdt}{(t^2+m^2)^k}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}.$$

Ясно, что

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} = \frac{(t^2+m^2)^{1-k}}{2(1-k)} = \frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{2(1-k)} + C,$$

и дело сводится к вычислению интеграла

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},\ k = 2,3,\ldots. \tag{11}$$

Преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$J_k = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{m^2}J_{k-1} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}. \tag{12}$$

Последний интеграл в (12) запишем так:

$$\int \frac{t^2du}{(t^2+m^2)^k} = \int t\cdot\frac{t\,dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{2}\int t\cdot\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Проведя теперь интегрирование по частям, будем иметь:

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

Подставим это выражение в (12). Тогда получим:

$$J_k = \frac{1}{m^2}J_{k-1} + \frac{t}{2m^2(t^2+m^2)^{k-1}(k-1)} - \frac{1}{2(k-1)m^2}J_{k-1},$$

или, после приведения подобных членов,

$$J_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}J_{k-1}. \tag{13}$$

Таким образом, мы получили *рекуррентную формулу* (13) для вычисления интеграла (11), которая позволяет шаг за шагом понижать индекс k, пока дело не дойдет до вычисления табличного интеграла J_1. На практике, конечно, не обязательно на каждом шагу проводить выкладки, ведущие от (11) к (13), а достаточно воспользоваться готовой рекуррентной формулой (13).

ПРИМЕР 5. Вычислить интеграл $I=\int\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$.

Раскладываем интегрируемую дробь на простейшие:

$$\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+1}.$$

Приводим это равенство к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$2x^3+3x^2+3x+2=(B_1x+C_1)(x^2+1)+(B_2x+C_2)(x^2+x+1).$$

Равенство коэффициентов при одинаковых степенях x дает систему:

$$\begin{cases} B_1+B_2=2 \\ C_1+B_2+C_2=3 \\ B_1+B_2+C_2=3 \\ C_1+C_2=2 \end{cases}$$

После несложных алгебраических выкладок находим ее решение:

$$B_1=C_1=B_2=C_2=1.$$

Тогда искомый интеграл принимает вид

$$I=\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx+\int\frac{x+1}{x^2+1}dx.$$

Вычисляем первый из полученных интегралов:

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\ln\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\ln\sqrt{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Теперь вычислим второй интеграл:

$$\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C.$$

В итоге получаем

$$I=\ln\sqrt{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\ln\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C.\ ■$$

ПРИМЕР 6. Вычислить интеграл $I=\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx$.

На этот раз разложение рациональной дроби на простейшие таково:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+2x+3}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Обычным образом находим неизвестные коэффициенты: $A=1$, $B_1=0$, $C_1=0$, $B_2=1$, $C_2=-1$. Поэтому

$$I=\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Первый из интегралов – почти табличный, он равен $\ln|x+1|+C$.

Вычисляем второй:

$$\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{(x^2+2x+3)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+3)}{(x^2+2x+3)^2}-$$

$$-2\int\frac{dx}{[(x^2+2x+1)+2]^2}=-\frac{1}{2(x^2+2x+3)}-2\int\frac{dx}{[(x+1)^2+(\sqrt{2})^2]^2}.$$

Последний интеграл после замены $x+1=t$ принимает вид (11) с $k=2$, $m=\sqrt{2}$. Используя рекуррентную формулу (13), имеем

$$\int\frac{dx}{[(x+1)^2+(\sqrt{2})^2]^2}=\frac{x+1}{2\cdot 2\cdot 1\cdot[(x+1)^2+2]}+\frac{1}{2\cdot 2}\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

В итоге получаем:

$$I=\ln|x+1|-\frac{1}{2(x^2+2x+3)}-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\ln|x+1|-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C. \blacksquare$$

Завершая настоящий раздел, отметим, что любая рациональная дробь может быть проинтегрирована до конца в элементарных функциях с помощью описанного выше алгоритма.

1.3. Рационализация интегралов.

Под ***рационализацией*** неопределенного интеграла мы будем понимать процедуру сведения его к интегралу от рациональной дроби. Если интеграл можно рационализировать, то, как следует из раздела 1.2, он вычисляется в элементарных функциях.

Рационализация, в тех случаях, когда она вообще возможна, осуществляется путем надлежащей замены переменной, сводящей подынтегральную функцию к рациональной дроби.

Рассмотрим наиболее распространенные типы интегралов, которые допускают рационализацию.

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, (1)

где R – рациональная функция переменных $\sin x, \cos x$. Другими словами, подынтегральная функция в (1) – это результат конечного числа операций сложения, вычитания, умножения и деления, производимых над переменными $\sin x, \cos x$ и числами.

Для рационализации данного интеграла рекомендуется, так называемая, ***универсальная тригонометрическая подстановка***:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}. \tag{2}$$

Реализуя ее в интеграле (1), получаем

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},\quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ясно, что под знаком последнего интеграла возникает рациональная функция от переменной t.

ПРИМЕР 1. Провести рационализацию интеграла $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}dx$.

Применяя универсальную тригонометрическую подстановку, получаем:

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{-t^2+2t+1}{(t^2+2t-1)(1+t^2)}dt.$$

Рационализация интеграла закончена. ▪

Хотя универсальная подстановка (2) позволяет взять любой интеграл вида (1), но есть частные случаи, в которых интеграл (1) можно рационализировать значительно проще, чем с помощью этой подстановки. Рассмотрим эти случаи.

Случай 1а. В случае интеграла $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ удобно применять подстановку $t=\sin x$. Интеграл превратится в $\int R(t)\,dt$.

Случай 1б. Аналогично, интеграл $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ с помощью подстановки $t=\cos x$ превращается в $-\int R(t)\,dt$.

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $I=\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$.

Имеем

$$I=\int\frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\sin x\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x\,dx.$$

Теперь видно, что это интеграл вида 1б. Полагая $t=\cos x$, получаем

$$I=-\int\frac{1-t^2}{2+t}dt. \ ■$$

Случай 1в. Интеграл $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ берется с помощью подстановки $t=\operatorname{tg}x$, $x=\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, которая сводит его к интегралу $\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$.

В частности, такую подстановку можно было бы выполнить в примере 1:

$$\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx=\int\frac{\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1\right)}{\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)}dx=$$

$$=\int\frac{\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}x-1}dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t,\\ x=\operatorname{arctg}t,\\ dx=dt/(1+t^2)\end{array}\right|=\int\frac{\mathrm{t}+1}{\mathrm{t}-1}\cdot\frac{dt}{1+t^2}.$$

Рационализация интеграла также удалась, причем проще, чем при использовании универсальной тригонометрической подстановки.

Случай 1г. Интегралы вида $\int R(\sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x)\, dx$, (3)

где R – рациональная функция своих аргументов, также могут быть рационализированы с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$.

Интегралы (3) представляют собой частный случай интегралов (1), когда функции $\sin x$ и $\cos x$ входят в подынтегральное выражение только в четных степенях. Известные тригонометрические тождества

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}. \tag{4}$$

позволяют в этом случае рациональным образом выразить подынтегральную функцию в (3) через переменную *t*.

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x}$.

Здесь можно непосредственно применить тригонометрические формулы (4). Однако есть более простой прием, основанный на внесении множителя $\frac{1}{\cos^2 x}$ под знак дифференциала ($\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$):

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{4\sin x}{\cos x} + 5\right)\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\left(\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 5\right)} = \left|\operatorname{tg} x = t\right| = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 5}.$$

В результате получен рассматривавшийся в 1.2. интеграл от простейшей функции, содержащей квадратный трехчлен:

$$I = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 5} = \int \frac{dt}{(t+2)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(t+2) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + 2) + C. \blacksquare$$

2. Интегралы вида $\int R(x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, \ldots, x^{m_k/n_k})\,dx$, (5)

где R – рациональная функция своих аргументов.

Фактически подынтегральная функция в (5) представляет собой иррациональность, которая содержит конечное число радикалов степеней n_1, n_2, …, n_k от переменной x.

Для сведения задачи (5) к интегрированию рациональной функции достаточно выполнить замену переменной

$$x = t^n, \quad t = \sqrt[n]{x}, \quad dx = n\,t^{n-1}dt,$$

где n – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$n = \text{НОК}\,(n_1, n_2, \ldots, n_k),$$

или, говоря другими словами, n – наименьший общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1}, \dfrac{m_2}{n_2}, \ldots, \dfrac{m_k}{n_k}$.

ПРИМЕР 4. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Поскольку $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, а наименьшим общим кратным знаменателей дробей 1/2 и 1/3, стоящих в показателях степени, является число 6, то рационализирующая подстановка в данном примере имеет вид $x = t^6$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left|\begin{array}{c} x = t^6, \\ t = \sqrt[6]{x}, \\ dx = 6t^5dt \end{array}\right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} =$$

$$= 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C. \blacksquare$$

3. *Интегралы вида* $\int R(z^{m_1/n_1}, z^{m_2/n_2}, \ldots, z^{m_k/n_k})\,dx$, (6)

где $z = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, R – рациональная функция своих аргументов.

Выражение (6) представляет собой интеграл от иррациональности, содержащей радикалы степеней n_1, $n_2, \ldots, n_k$ от переменной $z = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Таким образом, случай (6) обобщает случай (5).

Избавиться от иррациональности в интеграле вида (6) помогает аналогичная подстановка:

$$\frac{ax+b}{px+q} = t^n, \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}}, \quad x = \frac{qt^n - b}{a - pt^n}, \quad dx = \frac{n(aq-bp)t^{n-1}}{\left(a - pt^n\right)^2}dt.$$

ПРИМЕР 5. Рационализировать интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$.

Выполнив замену переменной $\dfrac{x+1}{x-1} = t^4$ (число 4 представляет собой общий знаменатель дробей 1/2 и 1/4), получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \left| \frac{x+1}{x-1} = t^4,\ x = \frac{t^4+1}{t^4-1},\ dx = \frac{-8t^3dt}{\left(t^4-1\right)^2} \right| =$$

$$= -8\int \frac{t^2dt}{\left(t^4-1\right)^2(t+1)} = -8\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2(t-1)^2(t+1)^3}.$$

Цель достигнута: получен интеграл от рациональной функции. Хотя, справедливости ради, отметим, что его аналитическое вычисление представляет собой малоприятную и громоздкую задачу, которую лучше поручить какой-нибудь компьютерной математической программе, способной выполнять символьные вычисления, (например, системе “*Mathematica*”). ▪

Теоретические вопросы к главе 1.

1. Дать определение неопределенного интеграла.
2. Какая разница между неопределенным интегралом и первообразной?
3. Могут ли две различные функции быть первообразными для одной и той же непрерывной функции?
4. Верна ли запись $\int 3x^2 dx = x^3$?
5. Найти неопределенный интеграл $\int |x|\,dx$.
6. Найти неопределенный интеграл $\int |\cos x|\,dx$.
7. Как можно рационализировать интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 3\cos^2 x + 5}$.
8. Как можно рационализировать интеграл $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x - 7}$.
9. Доказать, что $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$.
10. Найти функцию $f(x)$, если $\int f(x)dx = \arcsin\sqrt{x} + C$.
11. Справедливо ли тождество $\int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$?
12. Чему равен интеграл $\int f(z)dz$, если $\int f(x)dx = F(x) + C$?
13. Известны формулы $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$.

    Следует ли из этого тождество: $\arcsin x \equiv -\arccos x$?
14. Табличный интеграл $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ вычислили с помощью замены:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{c} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} = -\int \frac{dt}{1+t^2} = -\operatorname{arctg} t + C = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + C.$$

Почему получены разные результаты?

Задачи к главе 1.

Найти интегралы, используя таблицу неопределенных интегралов:

1. $\int (2-3x)^2\,dx$.

2. $\int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx$.

3. $\int \dfrac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x}}$.

4. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt[5]{x}}$.

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4-5x^2}}$.

6. $\int \dfrac{dx}{3+8x^2}$.

7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{11x^2+6}}$.

8. $\int \dfrac{dx}{2x^2-13}$.

9. $\int e^{-2x+1}\,dx$.

10. $\int 5^{3x-2}\,dx$.

11. $\int \left(\dfrac{2}{\cos x}-5\right)^2 dx$.

12. $\int \left(\dfrac{1}{\sin x}+3\right)^2 dx$.

13. $\int \sqrt{3x^2+4}\,dx$.

14. $\int \sqrt{7-6x^2}\,dx$.

Найти интегралы, используя основные формулы интегрирования:

15. $\int \dfrac{dx}{3x-1}$.

16. $\int \dfrac{x+2}{x-5}\,dx$.

17. $\int \dfrac{dx}{(3+5x)^2}$.

18. $\int \dfrac{xdx}{2x^2-1}$.

19. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{5x^2+6}}$.

20. $\int \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{5-3x^6}}$.

21. $\int \dfrac{e^x\,dx}{\sqrt[3]{8e^x+1}}$.

22. $\int \dfrac{e^x\,dx}{e^{2x}-6}$.

23. $\int \dfrac{2^{3-\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$.

24. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}\cdot(3x-4)}$.

25. $\int \frac{\cos x dx}{11\sin^2 x - 7}$.

26. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 - 5\cos^2 x}}$.

27. $\int \sin 2x \cos^2 2x\, dx$.

28. $\int \frac{\cos 3x\, dx}{\sin^4 3x}$.

29. $\int \frac{\ln^2 x\, dx}{x}$.

30. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln^2 x}}$.

31. $\int \frac{(3\arcsin x + 2\arccos x)dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

32. $\int \frac{dx}{\arcsin^5 2x \cdot \sqrt{1 - 4x^2}}$.

33. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{3} dx}{x^2 + 9}$.

34. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x \sqrt{7 - \operatorname{tg}^2 2x}}$.

Найти интегралы от выражений, содержащих квадратный трехчлен:

35. $\int \frac{x + 2}{x^2 - 6x + 1} dx$.

36. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4x}} dx$.

37. $\int \frac{5 - 2x}{\sqrt{1 + 8x - x^2}} dx$.

38. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$.

Найти интегралы, используя замену переменных:

39. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 3x}}$.

40. $\int (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x}\, dx$.

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$, $(t = e^{-x})$.

42. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}}$, $(t = \frac{1}{x})$.

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$.

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

45. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 2} dx$.

46. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{1 + x^2}}$, $(x = \operatorname{tg} t$, или $x = \frac{1}{t})$.

Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

47. $\int (1-4x)e^{2x}dx$.

48. $\int (x^2-4)\ln x dx$.

49. $\int (3x+4)\sin x dx$.

50. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$.

51. $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

52. $\int e^x \cos 2x dx$.

53. $\int \ln^2(2x-1)dx$.

54. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$.

Найти интегралы от рациональных функций:

55. $\int \frac{(2x^2-3)dx}{(x-1)(x-4)(x+2)}$.

56. $\int \frac{(x+2)dx}{(x-1)^2(x+4)}$.

57. $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-2)}$.

58. $\int \frac{2x^3-x+1}{x^3+2x-3}dx$.

59. $\int \frac{x^4+17}{x^4-1}dx$.

60. $\int \frac{(x^2-3)dx}{(x^2+2)(x^2+1)}$.

61. $\int \frac{dx}{(x^2+10x+26)^2}$.

62. $\int \frac{(x^2-4)dx}{(x-1)^2(x^2+3)}$.

Найти интегралы от тригонометрических функций:

63. $\int \sin^5 \frac{x}{3} dx$.

64. $\int \sin^7 2x \cos^3 2x dx$.

65. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

66. $\int \sin 5x \cos 8x dx$.

67. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

68. $\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{5} dx$.

69. $\int \frac{dx}{\sin^3 2x}$.

70. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}dx$.

71. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x - 3\sin^2 x}$.

72. $\int \frac{dx}{\cos x + 1 - 2\sin x}$.

Найти интегралы, применив тригонометрические подстановки:

73. $\int\sqrt{4-x^2}\,dx, \quad (x=2\sin t)$.

74. $\int\sqrt{x^2-9}\,dx, \quad (x=\dfrac{3}{\cos t})$.

75. $\int\dfrac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}}, \quad (x=\operatorname{tg} t)$.

76. $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$.

Найти интегралы:

77. $\int\dfrac{dx}{(x^2+6x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}$.

78. $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$.

79. $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

80. $\int(x-3)\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

81. $\int xe^x\sin x\,dx$.

82. $\int\dfrac{xdx}{\sin^2 5x}$.

83. $\int\arccos\sqrt{x}\,dx$.

84. $\int\sqrt{e^{2x}-1}\,dx$.

85. $\int|x-4|\,dx$.

86. $\int x|x+2|\,dx$.

Глава 2. Определенный интеграл.

2.1. Понятие определенного интеграла.

В первой главе мы изучали *неопределенный интеграл*, представляющий собой множество первообразных заданной функции. Теперь настала пора познакомиться с понятием *определенного интеграла*, потребность в изучении которого возникла в связи с необходимостью решать геометрические и физические задачи. Помимо этого, дальше в пособии мы встретимся с двойными, тройными, криволинейными интегралами; а еще в математике встречаются однокоренные понятия, такие как «интегральные кривые», «интегральные многообразия», «интегральные преобразования» и т.д. Общий корень всех этих математических терминов произошел от латинского ”integratio” = «восстановление, возобновление», и впервые был предложен *Я. Бернулли* в 1690 году (правда, пальму его первенства оспаривал другой представитель той же семьи – *И. Бернулли*).

Для того чтобы понять, откуда возникает определенный интеграл, обратимся к физической задаче. Пусть автомобиль с неработающим датчиком пройденного пути (одометром) движется по шоссе, на котором нет километровых столбов. (Вместо автомобиля можно рассматривать самолет или ракету, где, уж точно, отсутствие столбиков не вызывает сомнений). В каждый момент времени есть возможность, взглянув на спидометр, выяснить, какова скорость автомобиля. Есть ли возможность в таком случае определить пройденный автомобилем путь? (Для ракет, конечно, спидометр придумать не просто, но для них созданы датчики ускорения – акселерометры, и задача лишь немного видоизменяется).

Пусть данные измерения скорости автомобиля представлены в таблице (из которой очевидно, что рассматривается процесс разгона, когда скорость автомобиля монотонно растет):

Время (с)	0	2	4	6	8	10
Скорость (м/с)	0	6	11	15	18	20

График зависимости скорости от времени состоит из ряда изолированных точек на плоскости (рис.1). На том же графике непрерывной линией представлена реальное изменение скорости автомобиля.

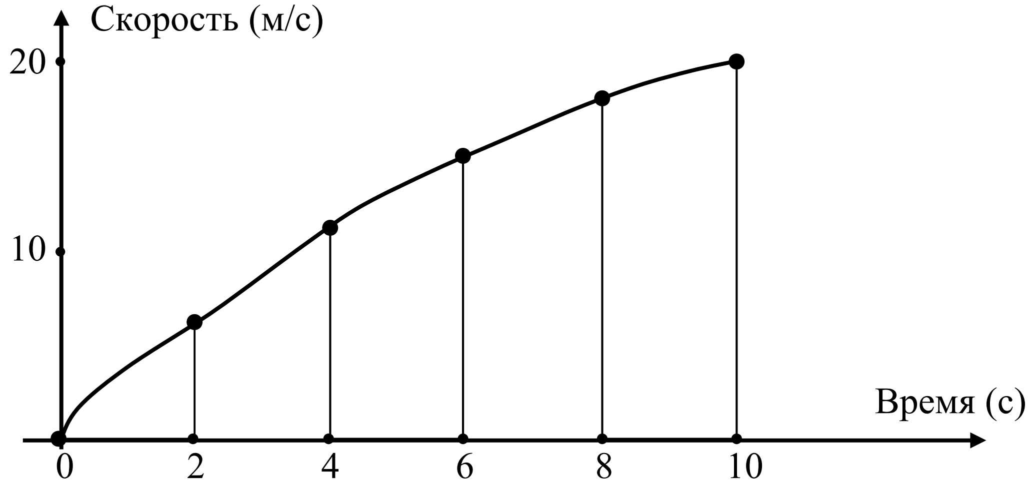


Рис.1. Измерения скорости автомобиля.

Можно представить, по крайней мере, два способа оценки пройденного пути.

Способ №1 (оценка снизу). Будем считать, что на каждом интервале времени после замера скорость сохраняла свое значение. Тогда пройденный путь равен величине

$$0\cdot 2 + 6\cdot 2 + 11\cdot 2 + 15\cdot 2 + 18\cdot 2 = 100 \text{ (м)}.$$

Понятно, что поскольку в данном примере реальная скорость автомобиля возрастала, полученная оценка пути является заниженной, т.е.

S > 100 (м).

Способ №2 (оценка сверху). Предположим теперь, что на каждом интервале скорость совпадала со своим конечным значением на этом интервале. Тогда для пути получаем оценку

$$6 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 15 \cdot 2 + 18 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 140 \text{ (м)}.$$

При таком способе мы переоценили пройденный путь S, и на самом деле:

S < 140 (м).

Изобразим графически, как проводилась оценка пути в каждом из двух способов. На рис.2 горизонтальной штриховкой изображена фигура, площадь которой равна заниженной оценки пути по 1 способу, а вертикальной штриховкой представлена завышенная оценка пути по 2 способу.

Если полученная точность измерения пройденного пути ($100 < S < 140$) кажется нам недостаточно хорошей, то возникает вопрос: возможно ли увеличить эту точность и как? А возможно ли, вообще, нахождение реального значения пути автомобиля?

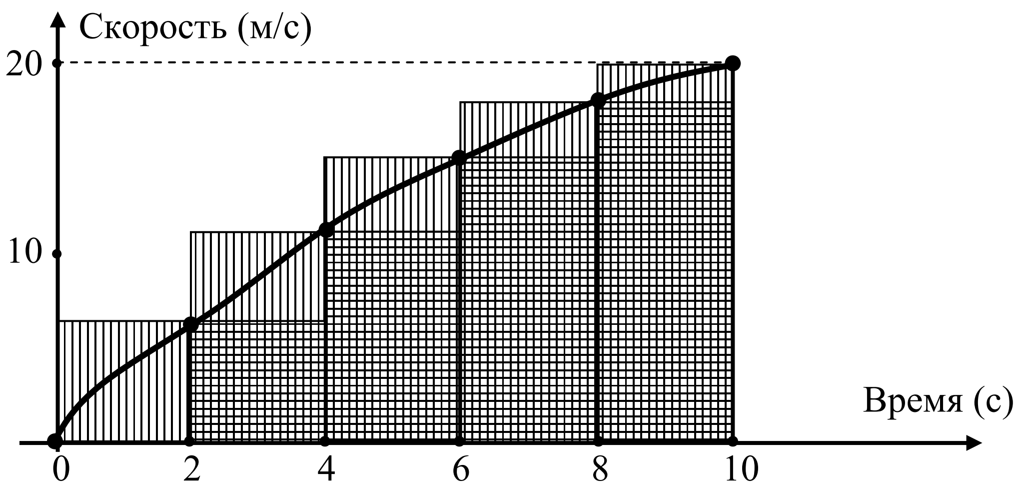


Рис.2. Оценка пройденного пути.

Понятно, что для более аккуратных оценок пути исходной таблицы недостаточно – измерения скорости надо проводить чаще. Пусть соответствующие данные представлены в новой таблице:

Время (с)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Скорость (м/с)	0	4	6	9	11	13	15	17	18	19	20

Теперь можно опять построить график зависимости скорости автомобиля от времени и провести оценки пути снизу (заниженную) и сверху (завышенную). Соответствующие заштрихованные фигуры, дающие эти оценки, нарисованы на рис.3.

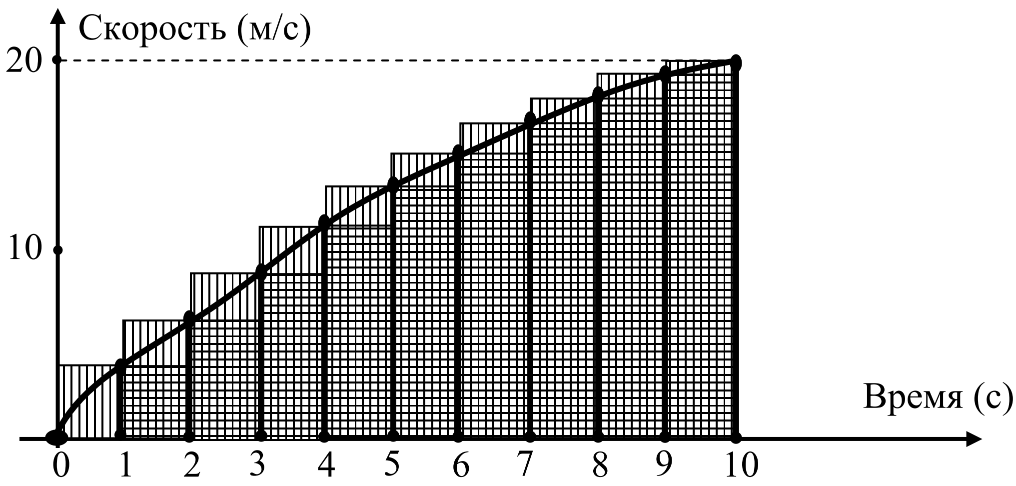


Рис.3. Улучшенная оценка пройденного пути.

Площадь фигуры с горизонтальной штриховкой равна

$$0 \cdot 1+4 \cdot 1+6 \cdot 1+9 \cdot 1+11 \cdot 1+13 \cdot 1+15 \cdot 1+17 \cdot 1+18 \cdot 1+19 \cdot 1 = 112 \text{ (м)}.$$

Площадь фигуры с вертикальной штриховкой равна

$$4 \cdot 1+6 \cdot 1+9 \cdot 1+11 \cdot 1+13 \cdot 1+15 \cdot 1+17 \cdot 1+18 \cdot 1+19 \cdot 1+20 \cdot 1 = 132 \text{ (м)}.$$

Пройденный автомобилем путь больше площади «описанной» ступенчатой фигуры с горизонтальной штриховкой, но меньше площади «вписанной» ступенчатой фигуры с вертикальной штриховкой. Таким образом, теперь для пройденного пути мы получили улучшенную оценку

112 < S < 132.

Для того, чтобы дать еще более точную оценку величины пути автомобиля, нам пришлось бы еще более часто проводить измерения его скорости. При этом площадь вписанной ступенчатой фигуры, дающей нижнюю оценку пути, увеличивалась бы, а площадь описанной ступенчатой фигуры, дающей верхнюю оценку, уменьшалась. Из физических соображений понятно, что с увеличением частоты измерений эти две оценки должны сойтись (ведь существует же точное значение пути, пройденного автомобилем). Но тогда это точное значение пройденного пути должно представлять собой не что иное, как площадь криволинейной фигуры, ограниченной сверху графиком зависимости скорости от времени, снизу – осью абсцисс, а с боков – вертикальными прямыми, отвечающими начальному и конечному времени движения (рис.3).

Вот теперь можно непосредственно перейти к самому понятию определенного интеграла. Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Для удобства изложения пока будем считать, что $a < b$ и $f(x) > 0$ (рис.4).

Проведем произвольным образом разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей точками $x_o = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. Введем обозначения для длин получившихся отрезков:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_o, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad \dots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}. \qquad (1)$$

Для каждого из отрезков $[x_{i+1}, x_i]$, ($i = 1, 2, \dots, n$) введем обозначения $\underline{x}_i$ и $\overline{x}_i$ для точек, отвечающих, соответственно, наименьшему и наибольшему значениям функции $f(x)$ на этом отрезке. Сами указанные значения функции обозначим так:

$$f(\underline{x}_i) = m_i, \qquad f(\overline{x}_i) = M_i.$$

Кроме того, на каждом интервале (x_{i+1}, x_i) выберем произвольным образом по точке ξ_i.

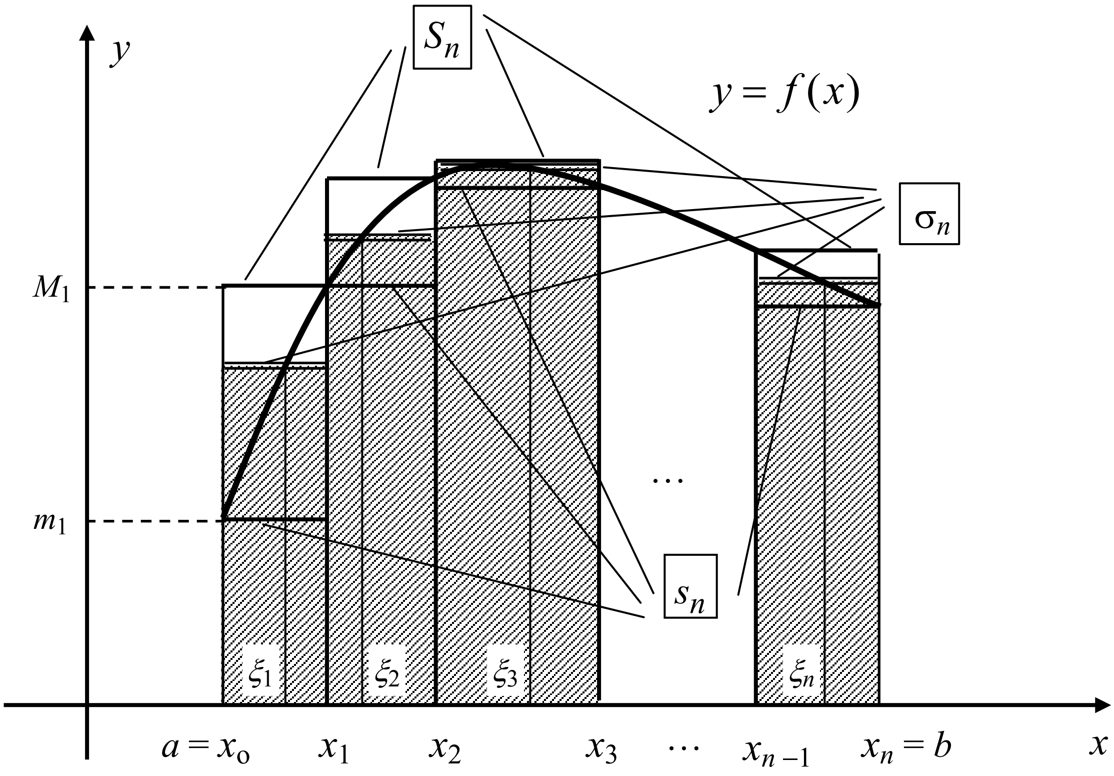


Рис.4. К определению понятия определенного интеграла.

Теперь можно образовать следующие суммы:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n,$$

(***нижняя интегральная сумма***)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n, \tag{2}$$

(***верхняя интегральная сумма***)

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n) \Delta x_n.$$

(***интегральная сумма***)

На рис. 4 заштрихованная ступенчатая фигура имеет площадь, равную интегральной сумме σ_n. Нижняя интегральная сумма представлена площадью вписанной ступенчатой фигуры, расположенной под кривой $y = f(x)$, а верхняя интегральная сумма – площадью описанной фигуры, расположенной выше этой кривой.

Очевидно, что определенные в (1) интегральные суммы связаны неравенствами

$$s_n \le \sigma_n \le S_n. \qquad (3)$$

Важной характеристикой проведенного разбиения отрезка [a, b] является максимальная длина отрезков разбиения (1):

$$\lambda = \max_{i=1,\dots,n} \Delta x_i. \qquad (4)$$

Величину λ обычно называют ***диаметром разбиения***.

Рассмотрим теперь вопрос, о том, как ведут себя интегральные суммы (3) при уменьшении диаметра разбиения λ отрезка [a, b]. Для того чтобы не утомлять читателей сложными оценками, рассмотрим случай, когда функция $y = f(x)$ имеет на отрезке [a, b] <u>конечное</u> число интервалов монотонности, и на каждом из таких интервалов разбиение проводится на отрезки равной длины. (Для функции, изображенной на рис.4 есть <u>два</u> интервала монотонности: вначале, на интервале $(a, \bar{x}_2)$, функция возрастает, а на интервале $(\bar{x}_2, b)$ – убывает).

Пусть на каком-то из интервалов (c, d) монотонности (для определенности, интервале возрастания) проведено разбиение на n равных отрезков, длина каждого из которых равна

$$\Delta x = \frac{d - c}{n}.$$

Для возрастающей функции наименьшее значение достигается на левом конце интервала определения, а наибольшее – на правом. Поэтому

$$m_1 = f(x_0), \quad m_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad m_n = f(x_{n-1});$$

$$M_1 = f(x_1), \quad M_2 = f(x_2), \quad \dots, \quad M_n = f(x_n).$$

Теперь можно записать верхнюю и нижнюю интегральные суммы функции $y = f(x)$ на отрезке [c, d]:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x + \ldots + m_n \Delta x = \Delta x \left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) \right);$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x + \ldots + M_n \Delta x = \Delta x \left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \right).$$

Рассмотрим разность между верхней и нижней интегральными суммами (для примера с движением автомобиля такая разность характеризовала бы точность определения пройденного пути):

$$\Delta S = S_n - s_n = \Delta x \left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) - f(x_0) - f(x_1) - \ldots - f(x_{n-1}) \right].$$

Или

$$\Delta S = S_n - s_n = \Delta x \left[f(x_n) - f(x_0) \right] = \Delta x \left[f(d) - f(c) \right] = \left[f(d) - f(c) \right] \cdot \frac{d - c}{n}.$$

Теперь понятно, что с увеличением количества n отрезков разбиения, величина ΔS стремится к нулю, а значит, верхняя и нижняя интегральные суммы стремятся к одному и тому же пределу при $n \to \infty$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta S = \lim_{n \to \infty} \left(S_n - s_n \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} s_n . \qquad (5)$$

Поскольку, мы предположили, что на всем отрезке [a, b] определения функции $y = f(x)$ имеется конечное число интервалов монотонности, а на каждом из них при разбиении на отрезки равной длины справедливо условие (5), то и для интегральных сумм (2) функции $y = f(x)$ на отрезке [a, b] также имеет место равенство

$$\lim_{\lambda = \max\limits_i \Delta x \to 0} \Delta S = \lim_{\lambda \to 0} \left(S_n - s_n \right) = 0 .$$

Таким образом, верхняя и нижняя интегральные суммы функции $y = f(x)$ на отрезке [a, b] при стремлении к нулю диаметра λ разбиений (4) имеют один и тот же предел I:

$$\lim_{\lambda=\max_i \Delta x\to 0} S_n = \lim_{\lambda=\max_i \Delta x\to 0} s_n = I. \qquad (6)$$

Если теперь вспомнить известную теорему «О двух милиционерах» (см. главу 1 выпуска 1 настоящего пособия), то становится ясно, что и произвольная интегральная сумма σ_n, в силу ограничений (3), должна иметь тот же самый предел:

$$\lim_{\lambda=\max_i \Delta x\to 0} \sigma_n = I. \qquad (7)$$

Теперь мы подошли к определению понятия определенного интеграла.

Определение. Если для любой последовательности разбиений отрезка $[a, b]$ такой, что диаметр разбиений $\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$ стремится к нулю, и при произвольном выборе точек ξ_i на интервалах разбиения (x_{i-1}, x_i) интегральные суммы $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$ функции $f(x)$ стремятся к одному и тому же пределу I, то этот предел называется ***определенным интегралом функции f (x) на отрезке* [*a*, *b*]**:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda=\max_i \Delta x\to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda=\max_i \Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (8)$$

Число a в выражении (8) называется ***нижним пределом***, а число b – ***верхним пределом*** интеграла.

Если определенный интеграл (8) существует, то функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a, b]$.

Если бы не рассуждения, проведенные нами выше, данное определение определенного интеграла могло бы породить целый ряд вопросов, например:

– не слишком ли строги требования, предъявляемые к функции $f(x)$, для существования определенного интеграла: ведь и точки деления отрезка выбирались произвольным образом, и сами выбранные на каждом интервале точки также могли быть любыми?

– не слишком ли ограничен набор функций, для которых при данном определении вообще существует определенный интеграл?

– почему введенное понятие называется *интегралом*, ведь ранее уже был определен неопределенный интеграл как семейство первообразных, а определение (8), на первый взгляд, никак не связано с первообразной функции $f(x)$?

Полученные выше оценки (5) – (7) интегральных сумм (хотя они и были нами обоснованы только для функций с конечным числом интервалов монотонности), позволяют легко ответить на первые два из сформулированных вопросов. Действительно, справедлива следующая теорема (ее доказательство выходит за рамки данного пособия и будет опущено):

Теорема 1. Для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Ответ на вопрос о том, что общего у определенного и неопределенного интегралов, будет получен несколько позже. Перед проведением дальнейшего исследования необходимо сделать два важных для понимания замечания.

Замечание 1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt .$$

Действительно, определенный интеграл представляет собой предел интегральных сумм, а при вычислении предела не имеет значения, как обозначена переменная.

Замечание 2. (Геометрический смысл определенного интеграла). В случае положительной на отрезке $[a, b]$ непрерывной функции $f(x)$ определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью OX, слева – прямой $y = a$ и справа прямой $y = b$ (рис. 5):

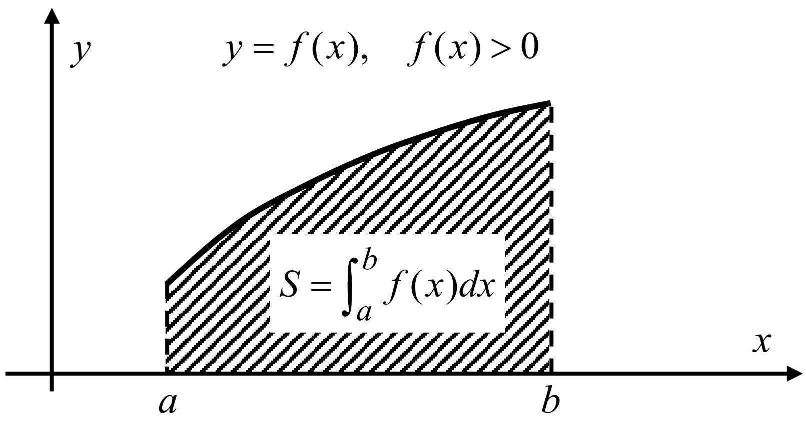


Рис.5. Геометрический смысл определенного интеграла.

Сформулируем теперь общие

Свойства определенного интеграла:

❶. Для постоянной на $[a, b]$ функции

$$\int_a^b k dx = k(b-a). \tag{9}$$

Доказательство. Все интегральные суммы (2) функции $f(x) = k$ являются постоянной величиной:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i = k(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = k(b-a).$$

Следовательно, и их предел (определенный интеграл) равен той же величине.

❷. Определенный интеграл от суммы двух интегрируемых функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,. \tag{10}$$

❸. Определенный интеграл тем больше, чем больше функция:

$$f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx, \quad (a<b). \tag{11}$$

❹. Если m – наименьшее, а M – наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, где $a<b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{12}$$

(Свойства 2 – 4 легко доказываются на основе определения определенного интеграла и свойств пределов функции).

❺. (Теорема о среднем). Для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a). \tag{13}$$

Доказательство. По свойству 4 при $a<b$ справедливо неравенство $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$. Как известно, непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает на этом отрезке любое значение, заключенное между своими наименьшим и наибольшим значениями (см. гл.1 выпуска 2 настоящего пособия). Тогда найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Отсюда и следует утверждение теоремы о среднем.

❻. Для интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и точки $c \in (a, b)$ выполняется равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (14)$$

Геометрическая интерпретация свойства 6 представлена на рис. 6, а доказательство предоставляются читателям для самостоятельной работы.

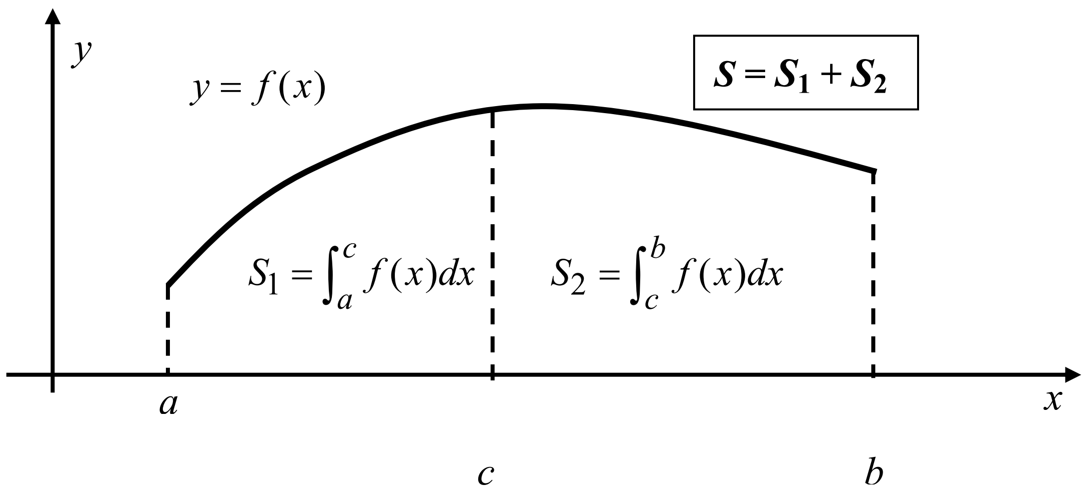


Рис. 6. К свойству 6: $S = \int_a^b f(x)dx = S_1 + S_2$.

До сих пор при записи определенного интеграла мы предполагали, что его нижний предел a меньше верхнего предела b. Для того, чтобы снять этого ограничение, положим <u>по определению</u> (!):

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad (a > b), \qquad (15)$$

а также

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (16)$$

Хотя математические определения и не принято обсуждать, тем не менее, основной довод в пользу того или иного определения состоит в его разумности.

Желательно, в частности, чтобы при расширении некоторого понятия на более широкий класс объектов были выполнены свойства, справедливые для более узкого класса. К примеру, именно таким образом в элементарной математике определили степень с отрицательным показателем: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $(n > 0)$, хотя понятно, что исходное определение степени $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ в данном случае не работоспособно: пытаться умножить число a на само себя «минус три раза» бессмысленно. Вместе с тем, при таком определении, оказались справедливыми все свойства степеней с положительными показателями. Точно так же и определения (15) и (16) позволяют сохранить справедливость свойств 1, 2, 5, 6 определенных интегралов вне зависимости от того, какой из пределов интегрирования больше другого. В частности, само свойство (16) немедленно «следует» из (15) при $a = b$. (В кавычках – потому, что определение (15) не предусматривает возможности совпадения верхнего и нижнего пределов интегрирования).

2.2. Вычисление определенного интеграла.

После данных выше определений можно перейти к вопросу о том, как научиться вычислять определенные интегралы, и как определенные интегралы связаны с неопределенными.

Рассмотрим функцию $f(t)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$. Выберем на интервале (a, b) произвольную точку x. Тогда на отрезке $[a, x]$ существует определенный интеграл от функции $f(t)$. (Для того чтобы избежать путаницы с обозначениями переменных, переменную интегрирования будем обозначать через t, сохраняя обозначение x для верхнего предела интеграла). Этот интеграл, естественно, зависит не только от вида функции $f(t)$, но и от переменной x, т.е. представляет собой функцию переменной x – верхнего предела интегрирования:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (1)$$

Геометрически, в случае положительной функции $f(t)$, величина $\Phi(x)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, осью OX и прямыми $t = a$ и $t = b$ (рис. 7).

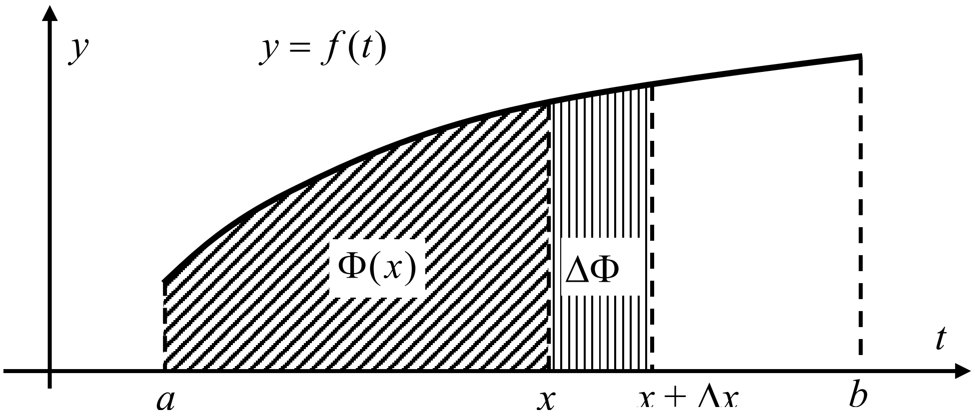


Рис. 7. К вычислению определенного интеграла.

Пусть теперь независимая переменная x получила приращение Δx. Тогда имеем приращение функции $\Phi(x)$:

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Используя свойства 6 и 5 определенных интегралов, получим

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\cdot\Delta x, \quad \xi \in [x, x+\Delta x]. \qquad (2)$$

(На рис. 7 приращение $\Delta\Phi$ представляет собой площадь фигуры с вертикальной штриховкой).

Теперь, окончательно, можно установить связь понятий неопределенного и определенного интегралов. Эта связь основана на следующих двух теоремах:

Теорема 1. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $\Phi(x)$ определена на интервале (a, b) как определенный интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

тогда функция $\Phi(x)$ представляет собой первообразную функции $f(x)$:

$$\Phi'(x) = f(x). \tag{3}$$

Доказательство теоремы немедленно вытекает из равенства (2). Действительно, имеем

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x).$$

Следствие. Следствием из теоремы 1 является утверждение, сформулированное без доказательства при изучении неопределенных интегралов: *любая непрерывная функция имеет первообразную*. (Первообразная непрерывной функции $f(x)$ может быть получена по формуле (1)).

Теорема 2. (Формула Ньютона – Лейбница). Если функция $F(t)$ является первообразной непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Доказательство. По теореме 1 функция $\Phi(x)$, определенная по формуле (1), также является первообразной для $f(x)$. Следовательно, по теореме о первообразных (см. главу 1) функции $\Phi(x)$ и $f(x)$ отличаются на постоянную величину:

$$\Phi(x) - F(x) = C = \text{const}.$$

Имеем при $x = a$:

$$C = \Phi(a) - F(a) = -F(a).$$

Тогда

$$\Phi(x) = C + F(x) = F(x) - F(a).$$

Теперь при подстановке в последнее равенство значения $x = b$, получим

$$\Phi(b) = F(b) - F(a),$$

что, по определению функции $\Phi(x)$, приводит к равенству (4).

Формула Ньютона – Лейбница позволяет вычислять определенные интегралы для функций, первообразные которых известны.

ПРИМЕР 1. $\int\limits_0^1 x^5 dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}.$ ▪

ПРИМЕР 2. $\int\limits_{-1}^{-e} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{-e} = \ln|-e| - \ln|-1| = \ln e - \ln 1 = 1.$ ▪

ПРИМЕР 3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 x e^{-x^2} dx$.

Здесь удобнее вначале найти первообразную (неопределенный интеграл):

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Тогда

$$\int_0^2 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_0^2 = -\frac{1}{2}\left(e^{-4} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4}\right).$$ ▪

ПРИМЕР 4. Найти $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx$, ($m$ и n – целые).

Для случая $n \neq m$ имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

При $n = m$ интеграл вычисляется иначе:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(1-\cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\sin 2x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}(\pi - (-\pi)) = \pi.$$

Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}$$

(Заметим, что если определить скалярное произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ с помощью формулы

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) \, dx,$$

то полученный в примере результат свидетельствует об ***ортогональности*** функций $\sin nx$ и $\sin mx$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $n \neq m$). ▪

Теорема 3. (Замена переменной в определенном интеграле).

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_0, t_1]$ и удовлетворяет на концах этого отрезка условиям: $\varphi(t_0) = a$, $\varphi(t_1) = b$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, т.е. $\int f(x) dx = F(x) + C$. Тогда, по формуле для замены переменной в неопределенном интеграле, $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$. Теперь, используя формулу Ньютона – Лейбница, получаем требуемое утверждение:

$$\int_{r_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Bigg|_{t_0}^{t_1} = F(\varphi(t_1)) - F(\varphi(t_0)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

ПРИМЕР 5. Найти определенный интеграл $\int_3^{11} x\sqrt{x-2}\,dx$.

Для устранения иррациональности в интеграле удобно выполнить замену переменной $\sqrt{x-2} = t$. Тогда по формуле (5) получаем

$$\int_3^{11} x\sqrt{x-2}dx = \left| \begin{array}{l} x = 2 + t^2, \\ dx = 2t\,dt. \\ x = 3 \Rightarrow t = 1 \\ x = 11 \Rightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_1^3 (2+t^2)t \cdot 2t\,dt =$$

$$= \int_1^3 (4t^2 + 2t^4)\,dt = \frac{4}{3}t^3\Bigg|_1^3 + \frac{2}{5}t^5\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{4}{3}(3^3 - 1) + \frac{2}{5}(3^5 - 1) = \frac{1972}{15}. \blacksquare$$

Замечание. Отметим, что при всей схожести применения формул замены переменной в неопределенном и определенном интегралах, имеется весьма важное их отличие: при вычислении определенного интеграла не нужно возвращаться к исходной переменной, вместо этого просто производится соответствующее изменение пределов интегрирования.

ПРИМЕР 6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

Здесь для вычисления интеграла удобно выполнить тригонометрическую подстановку, которая позволяет избавиться от иррациональности:

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx == \left| \begin{aligned} &x = a\sin t, \\ &dx = a\cos t\,dt. \\ &x=0 \Rightarrow t=0 \\ &x=a \Rightarrow t=\pi/2 \end{aligned} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi a^2}{4}. \blacksquare$$

Сформулируем еще один прием вычисления определенных интегралов, аналогичный уже рассмотренному в главе 1 для неопределенных интегралов.

Теорема 4. (Интегрирование по частям в определенном интеграле).

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывны и имеют непрерывные производные. Тогда

$$\int\limits_a^b u\,dv = \left(uv\right)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du\,. \tag{6}$$

Доказательство. Проинтегрируем обе части равенства $\left(uv\right)' = u'v + uv'$ по переменной x в пределах от a до b:

$$\int\limits_a^b \left(uv\right)' dx = \int\limits_a^b u'v\,dx + \int\limits_a^b uv'\,dx\,.$$

Интеграл в левой части может быть найден по формуле Ньютона–Лейбница, а правая часть преобразована с учетом равенств $du = u'dx, \quad dv = v'dx$:

$$\left(uv\right)\Big|_a^b = \int\limits_a^b v\,du + \int\limits_a^b u\,dv\,.$$

Отсюда и получаем формулу (6).

ПРИМЕР 7. Вычислить интеграл $\int_0^1 \arcsin x\, dx$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_0^1 \underbrace{\arcsin x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{x}_{v}\, \underbrace{d \arcsin x}_{du} = 1 \cdot \arcsin 1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} + (0-1) = \frac{\pi}{2} - 1. \blacksquare$$

ПРИМЕР 8. Вычислить $\int_1^e (x+3) \ln x\, dx$.

Здесь предварительно нужно внести множитель $(x + 3)$ под знак дифференциала и только затем интегрировать по частям:

$$\int_1^e (x+3)\ln x dx = \int_1^e \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{d\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)}_{dv} = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)}_{v} \underbrace{d \ln x}_{du} =$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} + 3e\right) \ln e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx = \frac{e^2}{2} + 3e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e - 3x\Big|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} + 3e - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} - 3e + 3 = \frac{e^2+13}{4}. \blacksquare$$

2.3. Геометрические приложения определенного интеграла.

Ранее мы уже отмечали геометрический смысл определенного интеграла от непрерывной положительной функции как площади криволинейной трапеции, расположенной под графиком этой функции. Уже одно это свойство делает оправданным подробное изучение определенных интегралов. Вспомним, как в очень древние времена Архимед (*Archimedes*; *около 287−212 до н.э.*) путем сложных и громоздких вычислений находил площадь параболического сегмента. Сейчас такая задача доступна среднему ученику средней школы, изучившему основы интегрального исчисления. Понятно, однако, что сфера применения определенных интегралов не ограничивается только задачей нахождения площадей: как мы увидим дальше, с их помощью можно находить другие важные характеристики геометрических фигур (длины дуг, поверхности и объемы тел вращения, и т.д.), а также решать различные механические и физические задачи. Таким образом, в каком-то смысле, определенный интеграл представляет собой универсальный математический аппарат, связывающий математику с реальной жизнью.

1. Вычисление площадей в декартовых координатах.

Напомним, что для нахождения площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, снизу − осью OX, слева – прямой $y = a$ и справа – прямой $y = b$ (рис. 8а), необходимо просто вычислить соответствующий определенный интеграл:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad f(x) \ge 0. \tag{1а}$$

Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ отрицательна, то площадь криволинейной трапеции равна соответствующему интегралу, взятому с противоположным знаком (рис. 8б):

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx, \qquad f(x) \le 0. \tag{1б}$$

Наконец, для функции $y = f(x)$, которая на отрезке $[a, b]$ может менять свой знак, для нахождения площади нужно вычислить определенный интеграл от *абсолютной величины* функции $f(x)$ (рис. 8в):

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{1в}$$

(Отметим, впрочем, что в последнем случае, обычно бывает удобней разбить отрезок интегрирования на интервалы, где функция сохраняет свой знак, а после этого вычислить получившиеся площади по формулам (1а) и (1б)).

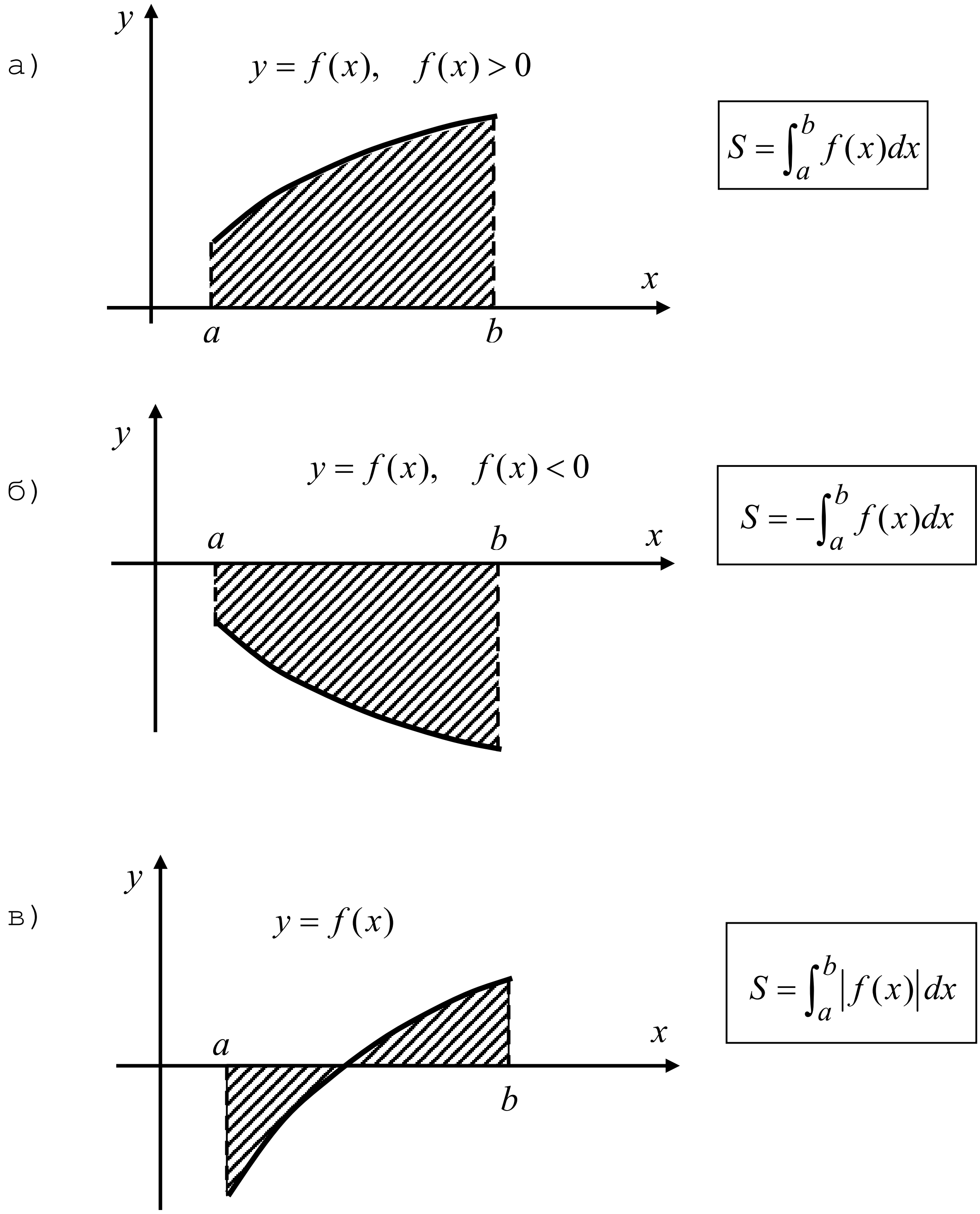


Рис. 8. Вычисление площади криволинейной трапеции в декартовых координатах: а) случай $f(x) > 0$; б) случай $f(x) < 0$; в) общий случай.

Полученные для вычисления площадей криволинейных трапеций формулы могут быть обобщены на случай фигур, которые ограниченны сверху и снизу кривыми, задаваемыми на отрезке $[a, b]$ уравнениями $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x) \geq g(x)$ (рис. 9). Действительно, площадь такой фигуры можно получить как разность площадей двух криволинейных трапеций рассмотренного ранее вида. Первая из таких трапеций ограничена сверху кривой $y = f(x)$, а снизу – осью OX. Вторая трапеция ограничена кривой $y = g(x)$ и осью OX. Справа и слева обе трапеции ограничены прямыми $x = a$ и $x = b$. Тогда по формуле (1а) получаем

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx. \qquad (2а)$$

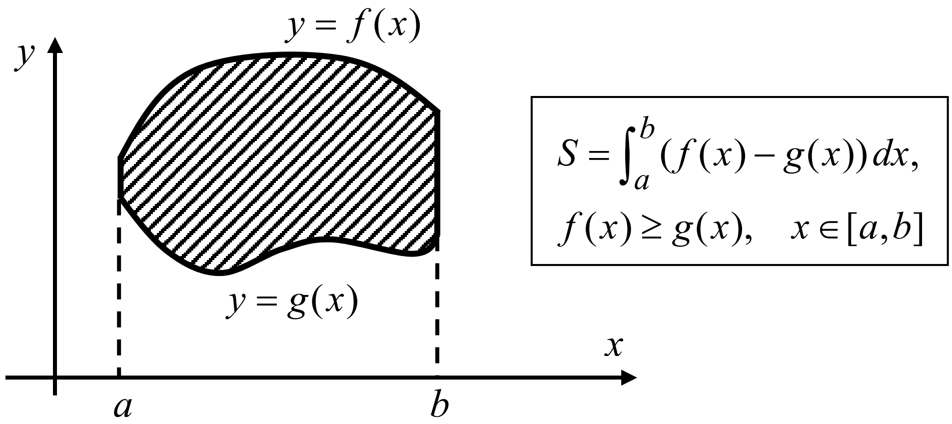


Рис. 9. Вычисление площади криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

Замечание. На рис. 9 изображен случай положительных на $[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$, однако формула (2) сохраняет справедливость и для функций произвольного знака, лишь бы неравенство $f(x) \geq g(x)$ выполнялось для всех $x \in [a, b]$. Если же такое неравенство не выполнено, то для нахождения площади фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, нужно пользоваться обобщенной формулой:

$$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx. \qquad (2б)$$

ПРИМЕР 1 (Задача Архимеда). Найти площадь параболического сегмента, ограниченного параболой $y = a^2 - x^2$ и осью OX (рис. 10).

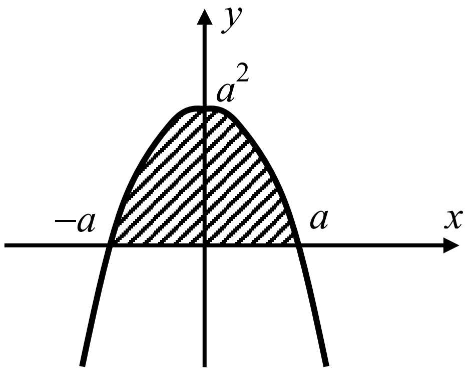


Рис. 10. Параболический сегмент.

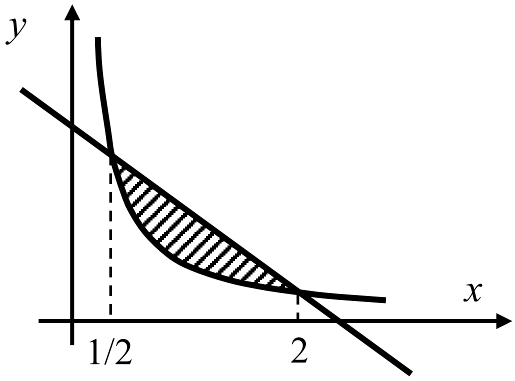


Рис. 11. Гиперболический сегмент.

Абсциссы точек пересечения параболы с осью OX находятся из уравнения

$$a^2 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm a.$$

На отрезке $[-a, a]$ функция $y = a^2 - x^2$ неотрицательна. Тогда по формуле (1а) получаем искомую площадь:

$$S = \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right) dx = a^2 x\Big|_{-a}^{a} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-a}^{a} =$$

$$= a^2(a - (-a)) - \frac{1}{3}(a^3 - (-a)^3) = 2a^3 - \frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}.$$

Заметим, что в этом примере боковые границы криволинейной трапеции, определяемые уравнениями $x = \pm\, a$, вырождаются в две точки. ▪

ПРИМЕР 2. Найти площадь сегмента, который прямая $y = \dfrac{5}{2} - x$ отсекает от гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 11).

Для определения левой и правой границ сегмента (играющих роль пределов интегрирования) имеем уравнение:

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{2}-x \quad \Rightarrow x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2.$$

На интервале $x\in(0,5;\ 2)$ прямая расположена выше гиперболы, поэтому по формуле (2а) получаем искомую площадь сегмента:

$$S=\int_{0,5}^{2}\left(\frac{5}{2}-x-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{5}{2}x\Big|_{0,5}^{2}-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0,5}^{2}-\ln|x|\Big|_{0,5}^{2}=$$

$$=\left(5-\frac{5}{4}\right)-\left(2-\frac{1}{8}\right)-\left(\ln 2-\ln 0,5\right)=\frac{15}{8}-2\ln 2.\ ■$$

ПРИМЕР 3. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\cos x$, осью OX и прямыми $x=0,\ x=3\pi/2$.

На этом примере удобно показать характерные ошибки, возникающие при решении подобных задач. Приведем вначале

Неверное решение. Воспользуемся формулой (1а) для площади фигуры:

$$S=\int_{0}^{3\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{0}^{3\pi/2}=\sin 3\pi/2-\sin 0=-1. \qquad \mathbf{(???)}$$

Часто после этого, спохватившись, что площадь фигуры не может быть отрицательной, результат "слегка" подправляют, и пишут: $S=1$. Здесь ошибка возникла из-за того, что не было проверено условие $f(x)>0$, при котором справедлива формула (1а). На самом деле, это условие не выполнено!

Правильное решение. Изобразим график функции $y=\cos x$ (рис. 12). Очевидно, что на отрезке $[0,\frac{3\pi}{2}]$ имеется область, где этот график выше оси

OX (а именно, на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$). В то же время, на интервале $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ график функции $y = \cos x$ расположен ниже оси OX. Поэтому для вычисления площади искомую фигуру следует разбить на две части: $S = S_1 + S_2$. Для первой части, расположенной над интервалом $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, функция $f(x)$ положительна, и справедлива формула (1а):

$$S_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \pi/2 - \sin 0 = 1.$$

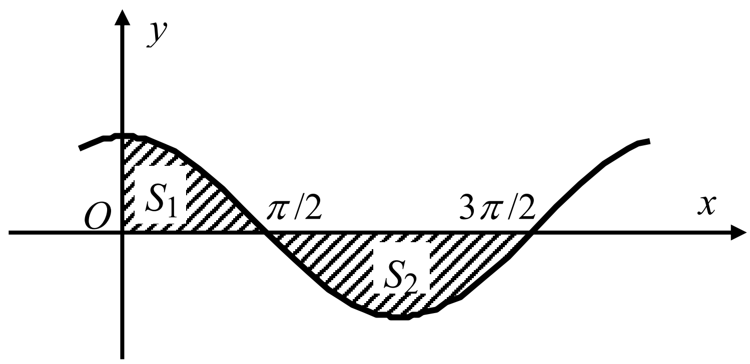


Рис. 12. К примеру 3.

Для второй части фигуры, расположенной над интервалом $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, функция $f(x)$ отрицательна, и для нахождения ее площади должна быть использована формула (1б):

$$S_2 = -\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx = -\sin x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -\sin(3\pi/2) + \sin(\pi/2) = 2.$$

Окончательно, получаем площадь искомой фигуры: $S = S_1 + S_2 = 3$. ▪

Последний пример показывает, какую важную роль в геометрических приложениях определенных интегралов играет предварительный анализ задачи и построение необходимых графиков. Иначе, даже вполне правильные (для определенных условий) формулы могут привести к неверным результатам.

1. Вычисление площади в случае параметрического задания кривой.

Кривая, ограничивающая криволинейную трапецию на рис. 8, может быть задана в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \end{cases}$$

Для нахождения площади фигуры в этом случае проведем замену переменной в интеграле из формулы (1в):

$$S = \int_a^b |y| dx = \int_{t_0}^{t_1} |\psi(t)||d\varphi(t)|, \quad \text{где } a = \varphi(t_0), b = \varphi(t_1).$$

Или, окончательно,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |\psi(t) \cdot \varphi'(t)| dt. \qquad (3)$$

ПРИМЕР 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b.

Запишем, вначале, уравнение эллипса в каноническом виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Использование формул площади фигуры в декартовых координатах в данном случае привело бы к необходимости вычисления достаточно громоздких интегралов. Перепишем уравнение эллипса в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad \text{где } t \in [0, 2\pi].$$

Принимая во внимание осевую симметрию эллипса, ограничимся вычислением четверти площади, расположенной в первом квадранте. Верхняя граница этой области отвечает значениям параметра $t \in [0, \pi/2]$ (рис. 13).

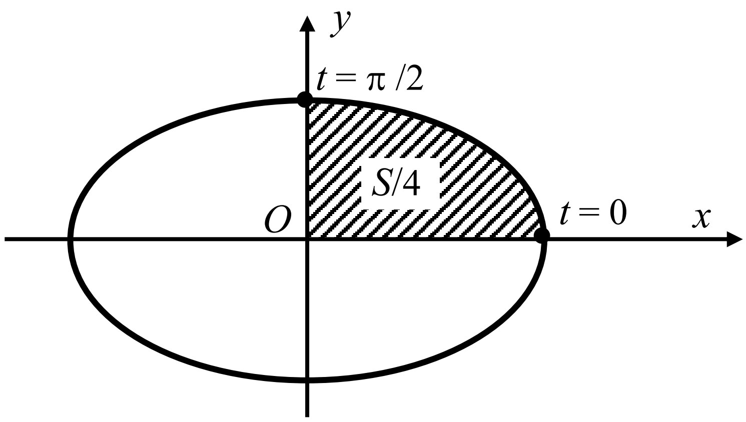


Рис. 13. К вычислению площади эллипса.

Тогда

$$\frac{S}{4} = \int\limits_0^{\pi/2} \left| b\sin t \, d\left(a\cos t\right)\right| = ab\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt =$$

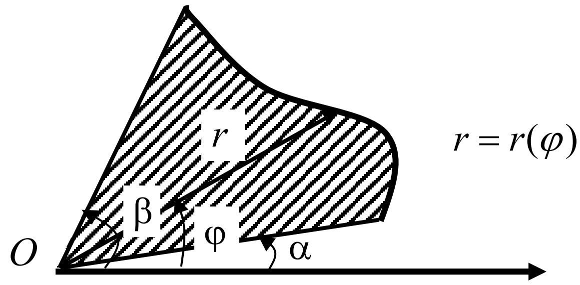
$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos 2t\right)dt = \frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

В результате можно найти площадь всего эллипса: $S = \pi ab$. ▪

3. Вычисление площадей в полярных координатах.

Многие интересные кривые на плоскости (скажем, различного рода спирали) удобно описывать не декартовыми, а полярными координатами. Уравнение кривой в полярных координатах представляет собой функциональную зависимость между текущим значением полярного угла φ точки на плоскости и ее полярным радиусом r (рис. 14).

Попробуем найти площадь S криволинейного треугольника, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и двумя лучами: $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. Естественно предположить, что для решения такой задачи можно будет воспользоваться изложенным ранее аппаратом определенных интегралов.



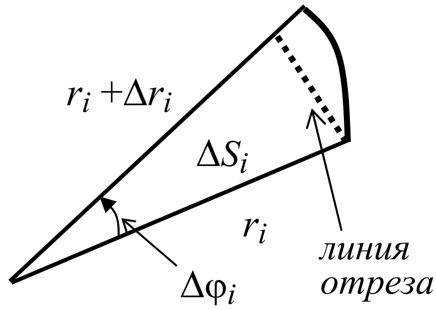


Рис.14 Криволинейный треугольник в полярных координатах.

Рис.15. К выводу формулы(5).

Вначале нам придется в общих чертах повторить процедуру построения интегральных сумм, которая лежала в основе понятия определенного интеграла. Роль отрезка [a, b], на котором в декартовых координатах была определена функция $f(x)$, в полярной системе координат играет интервал изменения углов [α, β], на котором определена функция $r(\varphi)$. Разобьем интервал [α, β] на n "маленьких" углов $\Delta\varphi_i$, сумма которых дает весь диапазон изменения полярного угла для рассматриваемой фигуры:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i = \beta - \alpha .$$

Рассмотрим часть фигуры, расположенную внутри угла $\Delta\varphi_i$ (рис. 15). В получившемся элементарном "криволинейном" треугольнике с углом $\Delta\varphi_i$ одна из сторон равна r_i, а другая $r_i + \Delta r_i$. Третья сторона этого треугольника – "кривая", она описывается уравнением $r = r(\varphi)$. Превратим этот криволинейный треугольник в настоящий, отрезав "лишнюю" криволинейную часть как это показано на рис. 15. Поскольку угол $\Delta\varphi_i$ мал (а точнее говоря, будет стремится к нулю в ходе предельного перехода), то и площадь исходного криволинейного треугольника ΔS_i мало отличается от площади равнобедренного треугольника:

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} r_i^2 \sin \Delta\varphi_i .$$

В свою очередь, для малых углов справедливо условие $\sin \Delta\varphi_i \approx \Delta\varphi_i$, поэтому

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i .$$

Площадь интересующей нас фигуры может быть найдена как сумма площадей всех элементарных треугольников:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta\varphi_i . \tag{4}$$

Выражение (4) представляет собой интегральную сумму функции $r = r(\varphi)$ на отрезке $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Теперь осталось совершить предельный переход: устремить к бесконечности число n, одновременно устремив к нулю максимальный из углов $\Delta\varphi_i$. Для непрерывной функции $r = r(\varphi)$ в результате такого предельного перехода интегральная сумма (4) даст определенный интеграл:

$$\lim_{\max\limits_i \Delta\varphi_i \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi .$$

Таким образом, приходим к формуле для площади фигуры, ограниченной в полярных координатах кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi . \tag{5}$$

Замечание. Проведенная здесь процедура, имеет чрезвычайно важное значение в различных геометрических и физических приложениях определенного интеграла, и будет дальше применяться в еще более схематичном виде. Суть процедуры состоит в том, что на первом ее этапе "малый" криволинейный объект заменяется на прямолинейный. Понятие "малости" при этом не носит универсального характера − оно относительно. Так, несмотря на криволинейность поверхности Земли, никому не придет в голову учитывать ее при строительстве дома: его характерный размер много меньше земного радиуса. На втором, заключительном этапе процедуры сумма большого числа "малых" слагаемых (интегральная сумма) заменяется определенным интегралом.

ПРИМЕР 5. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1-\cos\varphi)$, (рис. 16).

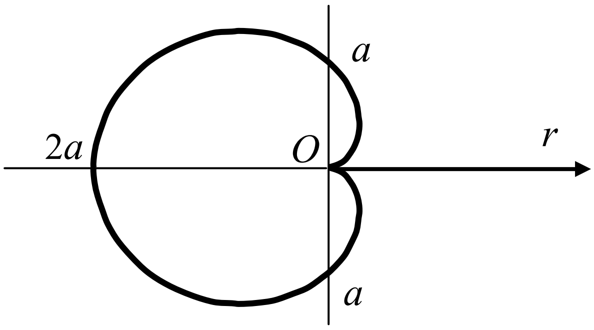


Рис.16. Кардиоида.

В силу четности функции $r = a(1-\cos\varphi)$ фигура обладает симметрией относительно горизонтальной оси. Достаточно найти площадь ее верхней половины, отвечающей диапазону изменения полярного угла $0 \le \varphi \le \pi$:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi\Big|_0^{\pi} - 2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\pi + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{3\pi a^2}{4}.$$

Таким образом, искомая площадь $S = \dfrac{3\pi a^2}{2}$. (Заметим, что площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, оказалась в 1,5 раза больше площади круга радиуса a). ▪

4. Длина дуги кривой в декартовых координатах.

Решим задачу о нахождении длины L плоской кривой, описываемой уравнением $y = f(x)$, между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$ (рис. 17). Будем считать, что функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$.

Примéним уже знакомую нам процедуру разбиения отрезка $[a, b]$ на мелкие отрезки Δx_i. Обозначим через $\Delta\ell_i$ длину элементарной дуги кривой $y = f(x)$, расположенной над отрезком Δx_i. Теперь, как уже делалось ранее, можно приближенно заменить эту малую дугу кривой отрезком прямой линии. Тогда по теореме Пифагора

$$\Delta\ell_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} ,$$

где Δy_i – приращение функции $f(x)$ на отрезке Δx_i. Из определения производной $y' = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ следует, что для малых Δx_i справедливо приближенное равенство

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \approx y'(x_i),$$

где точка x_i – некоторая точка интервала Δx_i (например, его левая граница).

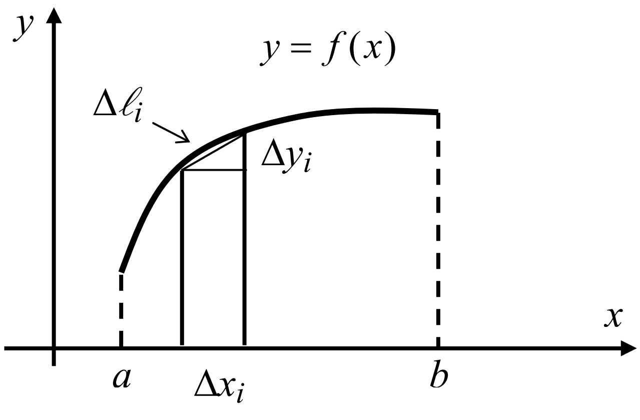


Рис.17. К выводу формулы длины дуги кривой.

Тогда

$$\Delta\ell_i \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i \approx \sqrt{1 + \left(y_i'\right)^2} \cdot \Delta x_i .$$

Длина всей кривой может быть получена суммированием длин всех элементарных дуг $\Delta\ell_i$: $L = \sum\limits_i \Delta\ell_i$. Осуществляя в полученной интегральный сумме предельный переход $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$, получим окончательную формулу для длины дуги кривой:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \qquad (6)$$

Замечание. Формула (6) справедлива только для кривых, задаваемых дифференцируемыми функциями. В частности, если у кривой имеются точки с вертикальными касательными (там $y' = \infty$), то для вычисления ее длины можно либо использовать формулу (6), рассматривая соответствующий интеграл как несобственный (о них будет идти речь в главе 5), либо записав уравнение кривой в параметрической форме, для которой требование существования производной $f'(x)$ не обязательно.

ПРИМЕР 6. Найти длину дуги астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (рис. 18).

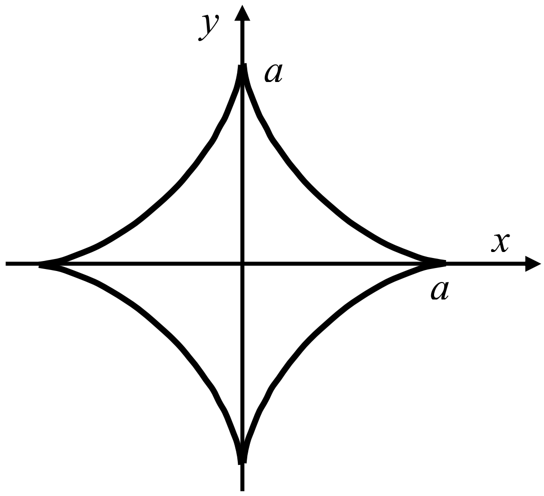


Рис.18. Астроида.

Продифференцируем уравнение астроиды как неявную функцию:

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}y'=0 \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Астроида имеет две оси симметрии. Найдем по формуле (6) длину ее четвертой части, лежащей в первом квадранте:

$$\frac{L}{4}=\int_0^a\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+\left(-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx=$$

$$=\int_0^a\sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx=a^{1/3}\int_0^a x^{-1/3}\,dx=\frac{3}{2}a^{1/3}x^{2/3}\Big|_0^a=\frac{3}{2}a.$$

Тогда длина всей астроиды $L=6a$. ▪

5. *Длина дуги кривой в полярных координатах.*

Получим теперь формулу для длины дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$ между точками с полярными углами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$. Следуя стандартной процедуре, разобьем интервал углов $[\alpha, \beta]$ на малые углы $\Delta\varphi_i$ (рис. 19). Каждую элементарную дугу $\Delta\ell_i$ заменим отрезком прямой, длину которого вычислим по теореме косинусов:

$$\Delta\ell_i^2\approx r_i^2+(r_i+\Delta r_i)^2-2r_i(r_i+\Delta r_i)\cos\Delta\varphi_i\,.$$

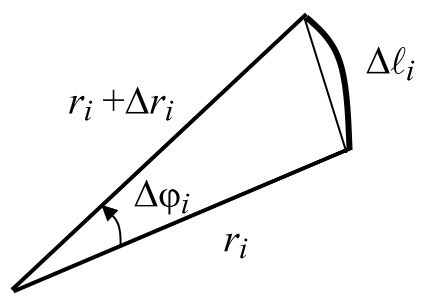


Рис. 19. К выводу формулы (7).

Воспользовавшись известным разложением $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, справедливым для малых значений аргумента, получим

$$\Delta\ell_i^2 \approx r_i^2 + (r_i + \Delta r_i)^2 - 2r_i(r_i + \Delta r_i)\left(1 - \frac{(\Delta\varphi_i)^2}{2}\right).$$

Отсюда после упрощения и отбрасывания членов более высокого порядка малости по сравнению с $(\Delta r_i)^2$ и $(\Delta\varphi_i)^2$ имеем

$$\Delta\ell_i^2 \approx (\Delta r_i)^2 + r_i^2(\Delta\varphi_i)^2 \approx \left(r_i^2 + (r_i')^2\right)(\Delta\varphi_i)^2 .$$

Длина искомой дуги кривой получается при суммировании длин всех элементарных дуг:

$$L = \sum_i \Delta\ell_i \approx \sqrt{r_i^2 + (r_i')^2} \cdot \Delta\varphi_i .$$

После уже описанного предельного перехода в интегральной сумме приходим к окончательной формуле для длины дуги, заданной в полярных координатах:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi . \qquad (7)$$

ПРИМЕР 7. Найти длину кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$, (рис. 16).

Имеем

$$r^2 + (r')^2 = a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = a^2(2 - 2\cos\varphi) = 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2} .$$

Длину верхней половины кардиоиды найдем по формуле (7):

$$\frac{L}{2} = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = 2a\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = -4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = -4a(0-1) = 4a .$$

Тогда, окончательно, получаем длину целой кардиоиды: $L = 8a$. (Достаточно странный на первый взгляд результат: кривая "более сложная", чем окружность, не содержит числа π в выражении для своей длины!). ▪

6. Длина дуги кривой, заданной параметрически.

Пусть плоская кривая описывается в декартовых координатах параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{8}$$

Найдем длину дуги этой кривой между точками, соответствующими значениям параметра $t = t_1$ и $t = t_2$, считая функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемыми на отрезке $[t_1, t_2]$. Воспользуемся уже полученным выражением для длины элементарной дуги в декартовых координатах, лежащей над отрезком Δx_i:

$$\Delta \ell_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2}\, \Delta t_i .$$

При малых Δt_i справедливы равенства

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \approx x'(t_i), \quad \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \approx y'(t_i) .$$

Тогда, суммируя длины всех элементарных дуг, в пределе при $\max\limits_i \Delta t_i \to 0$ получим искомую длину всей дуги:

$$L = \lim_{\max\limits_i \Delta t_i \to 0} \sum_i \Delta \ell_i .$$

Отсюда приходим к выражению для длины дуги кривой, заданной параметрически:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\, dt . \tag{9}$$

Замечание. Формула (9) справедлива и для кривых, имеющих точки, где $x'(t) = 0$. В этих точках, как уже было отмечено, производная функции (8)

$y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ обращается в бесконечность, касательная к кривой на плоскости OXY оказывается вертикальной, и формула (6), вообще говоря, оказывается неработоспособной.

ПРИМЕР 8. Найти длину эвольвенты (развертки) окружности (рис. 20):

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(Такую кривую описывает конец нити, разматывающейся с окружности радиуса a.)

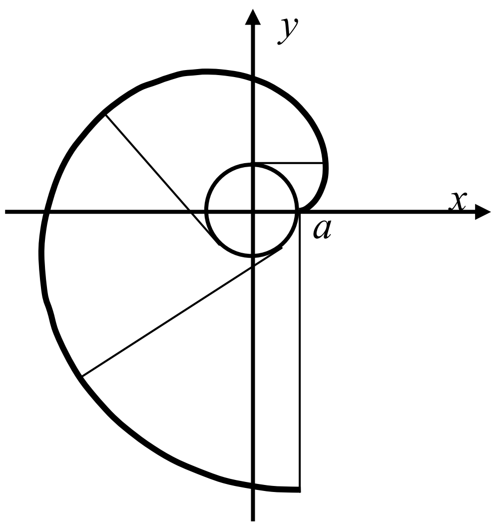


Рис.20. Развертка окружности.

Получим вначале выражения для производных x'_t и y'_t:

$$\begin{cases} x'_t = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t, \\ y'_t = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t. \end{cases}$$

Теперь по формуле (9) может быть найдена искомая длина кривой:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(t\cos t\right)^2 + \left(t\sin t\right)^2}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} t\, dt = \frac{1}{2}at^2 \Big|_0^{2\pi} = 2a\pi^2. \blacksquare$$

7. Объем тел вращения.

Здесь мы познакомимся с еще одним геометрическим приложением определенных интегралов, связанным с вычислением объемов тел вращения. В этом пункте будут рассмотрены два основных типа таких задач, различающихся выбором оси вращения – горизонтальной или вертикальной.

Вращение вокруг оси OX. В задаче этого типа криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми $y = a$ и $y = b$, вращается вокруг оси OX (т.е. вокруг стороны трапеции, перпендикулярной ее основаниям). Исходная трапеция при этом представляет собой половину сечения тела вращения плоскостью OXY (рис.21).

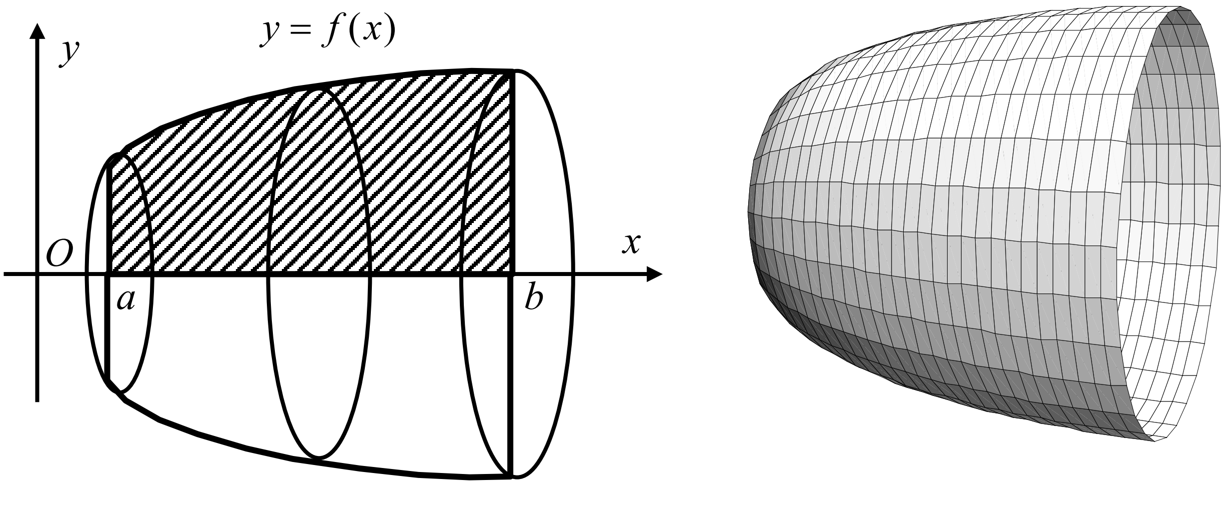


Рис.21. Тело вращения вокруг оси OX.

Выведем формулу объема получающегося тела вращения, проведя стандартную процедуру его разбиения на малые элементы. Рассмотрим элементарную трапецию, расположенную над отрезком Δx_i оси OX. При вращении этой фигуры вокруг оси OX возникает тело (слой) толщины Δx_i. Как и ранее, проведем спрямление полученного тела, отрезав его криволинейный край. Это соответствует тому, что вместо элементарной криволинейной трапеции, вращению подвергается прямоугольник с основанием Δx_i и высотой y_i (рис. 22).

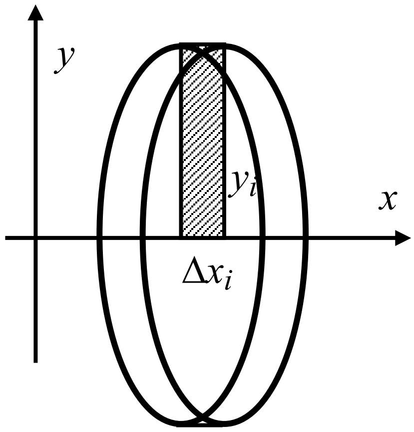


Рис.22. К выводу формулы (10).

В результате получается цилиндр с высотой Δx_i и радиусом основания y_i. При малой величине Δx_i объем элементарного слоя приблизительно равен объему этого цилиндра:

$$\Delta V_i \approx \pi y_i^2 \Delta x_i .$$

Объем всего тела вращения получается при сложении объемов всех элементарных слоев:

$$V_x = \sum_i \Delta V_i \approx \sum_i \pi y_i^2 \Delta x_i .$$

Осуществляя в полученной интегральной сумме предельный переход (при $\Delta x_i \to 0$, $n \to \infty$), найдем объем тела вращения вокруг оси OX.

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx, \quad \text{где } y = f(x). \tag{10}$$

ПРИМЕР 9. Найти объем шара радиуса R.

Будем считать, что шар образован вращением полукруга радиуса R с центром в начале координат вокруг оси OX (рис. 23).

Запишем уравнение верхней границы полукруга:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} .$$

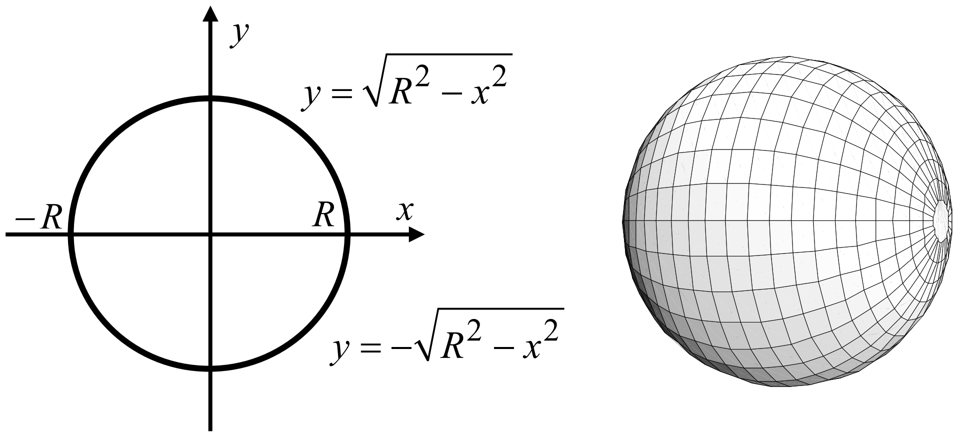


Рис.23. К выводу формулы объема шара.

Тогда формула (10) приводит к хорошо известному выражению для объема шара:

$$V_x=\pi\int_{-R}^{R}y^2dx=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi R^2x\Bigg|_{-R}^{R}-\frac{1}{3}\pi x^3\Bigg|_{-R}^{R}=$$

$$=\pi R^2(R+R)-\frac{1}{3}\pi(R^3+R^3)=2\pi R^3-\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3.\blacksquare$$

Вращение вокруг оси OY. В задаче этого типа рассмотренная ранее криволинейная трапеция вращается вокруг оси OY, т.е. вокруг прямой, параллельной основаниям трапеции). Тело вращения имеет кольцевидную форму, а исходная трапеция, по-прежнему, представляет собой половину сечения тела плоскостью OXY (рис.24).

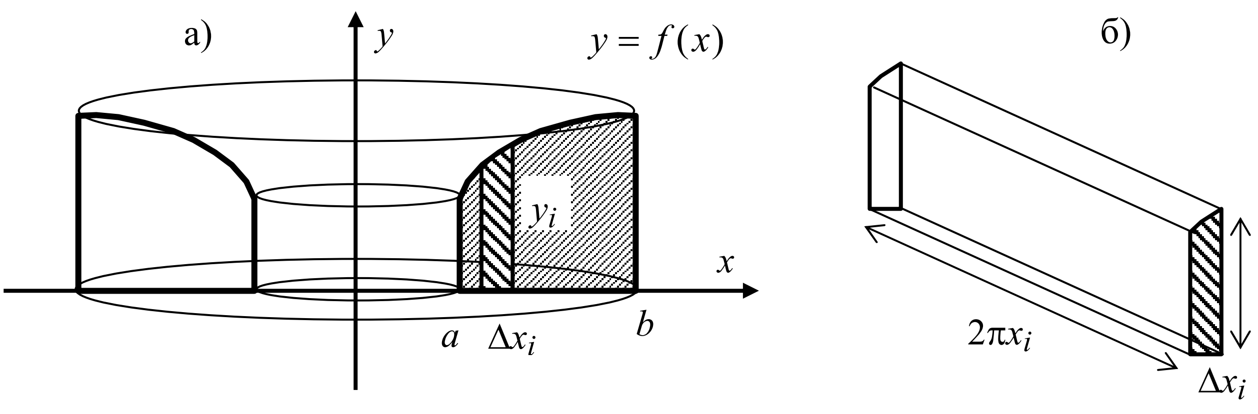


Рис.24. Тело вращения вокруг оси *OY*.

Выделим элементарную трапецию, расположенную над отрезком Δx_i оси OX. При ее вращении вокруг оси OY возникает кольцо радиуса x_i с криволинейным верхним краем. Разрежем его по плоскости OXY и выпрямим. Пренебрегая возникающими незначительными деформациями, получим в результате пластину (рис. 24 б). Заменим эту пластину прямоугольным параллелепипедом (для этого у нее просто отрежем верхний криволинейный край), длина которого равна $2\pi x_i$ (длина окружности радиуса x_i), ширина Δx_i и высота $y_i = f(x_i)$. При малой величине Δx_i объем исходного элементарного кольца приблизительно равен объему полученного параллелепипеда:

$$\Delta V_i \approx 2\pi x_i y_i \Delta x_i .$$

Объем тела вращения равен сумме объемов всех элементарных колец:

$$V_y = \sum_i \Delta V_i \approx 2\pi \sum_i x_i y_i \Delta x_i .$$

После уже не раз проводившегося предельного перехода ($\Delta x_i \to 0$, $n \to \infty$) интегральная сумма превратится в определенный интеграл. В результате получим объем тела вращения вокруг оси OY:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\,y\,dx , \quad \text{где } y = f(x) . \qquad (11)$$

ПРИМЕР 10. Найти объем тора, образованного вращением круга радиуса R с центром, который удален от оси вращения на расстояние r, где $r > R$ (рис.25).

Примем ось OY в качестве оси вращения окружности с центром, расположенном в точке $(r, 0)$ на оси OX, и радиусом R. Уравнение такой окружности имеет вид

$$(x - r)^2 + y^2 = R^2 .$$

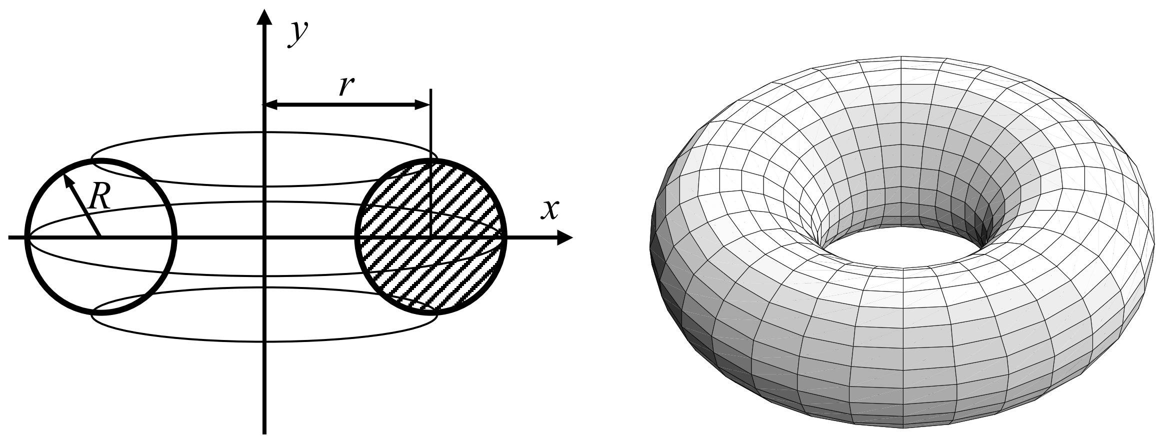


Рис.25. Тор как тело вращения.

В силу симметрии достаточно рассмотреть вращение только верхней половины круга, граница которого состоит из полуокружности

$$y = \sqrt{R^2 - (x-r)^2}\,.$$

и отрезка $[r-R,\ r+R]$ оси OX. Объем полученного тела вращения даст половину объема тора.

По формуле (11) получаем

$$\frac{1}{2}V_y = 2\pi\int\limits_{r-R}^{r+R} x\,y\,dx = 2\pi\int\limits_{r-R}^{r+R} x\sqrt{R^2-(x-r)^2}\,dx\,.$$

Для вычисления интеграла выполним в нем замену переменной:

$$\int\limits_{r-R}^{r+R} x\sqrt{R^2-(x-r)^2}\,dx = \begin{vmatrix} x = r + R\sin t, \\ dx = R\cos t\,dt, \\ x = r - R \Rightarrow t = -\pi/2, \\ x = r + R \Rightarrow t = \pi/2 \end{vmatrix} =$$

$$= R^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(r+R\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt =$$

$$= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r + R\sin t)\cos^2 t\, dt =$$

$$= R^2 r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt + R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos^2 t\, dt = I_1 + I_2.$$

Найдем первый из полученных интегралов, учитывая четность подынтегральной функции:

$$I_1 = R^2 r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2R^2 r \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = R^2 r \int_{0}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt =$$

$$= R^2 r \left(t \Big|_{0}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin 2t \Big|_{0}^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2}\pi R^2 r.$$

Второй из интегралов I_2 обращается в нуль в силу нечетности подынтегральной функции на отрезке интегрирования $[-\pi/2, \pi/2]$.

Теперь получаем окончательное выражение для объема тора:

$$V_y = 4\pi(I_1 + I_2) = 2\pi^2 R^2 r. \blacksquare$$

Теоретические вопросы к главе 2.

1. Как связаны понятия неопределенного и определенного интеграла?
2. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
3. Проверить выполнение теоремы о среднем для функции $f(x) = x^2$ на отрезке [1, 2].
4. Доказать неравенство $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x^2)dx \le 1$.
5. Найти любую функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям $\int\limits_{-3}^{-2} f(x)dx = 5$, $f(-3) = -1$.
6. Существует ли непрерывная функция, удовлетворяющая условиям: $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1$, $f(0) = 100$, $f(1) = 100$?
7. Найти любую функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям $\int\limits_0^2 f(x)dx = 4$, $f'(0) = 1$.
8. Построить график функции $y(x) = \int\limits_{-2}^{x} |t|\,dt$.
9. Справедливо ли тождество $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \cdot \int\limits_a^b g(x)dx$?
10. Существуют ли функции $f(x)$ и $g(x)$ для которых выполнено равенство $\int\limits_0^1 f(x)\cdot g(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx \cdot \int\limits_0^1 g(x)dx$?
11. Найти интеграл $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt[3]{\sin\left(x^3\right)}dx$.

12. Можно ли найти по формуле $S=\int\limits_{-1}^{1}(x^3-x)dx$ площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^3-x$ и осью OX?
13. Вывести формулу объема тела вращения вокруг прямой $x=a$.
14. Вывести формулу объема тела вращения вокруг прямой $y=b$.
15. Вывести формулу для объема тела, образованного при вращении вокруг полярной оси фигуры, границы которой задаются в полярных координатах уравнениями $r=r(\varphi),\ \varphi=\alpha, \varphi=\beta$:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\varphi d\varphi.$$

Задачи к главе 2.

Найти интегралы:

1. $\int\limits_{0}^{3}\left(x^2+3x-4\right)dx.$
2. $\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt[3]{x}+4\sqrt{x}-x\sqrt[5]{x}-4\right)dx.$
3. $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2+4x+5}.$
4. $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}.$
5. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin^2\varphi d\varphi.$
6. $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x dx}{e^{2x}+4}.$

Найти интегралы, выполнив замену переменных:

7. $\int\limits_{0}^{9}\frac{dx}{5+\sqrt{x}},\quad x=t^2.$
8. $\int\limits_{1}^{28}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{8-2\sqrt[3]{x-1}}dx,\quad x-1=t^3.$
9. $\int\limits_{0}^{\ln 3}\sqrt[3]{e^{2x}-1}dx,\ e^{2x}-1=z^3.$
10. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{5-2\sin x},\quad \mathrm{tg}\frac{x}{2}=t.$

11. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}$.

12. $\int\limits_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx$.

Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

13. $\int\limits_1^{e^2} (x+2)\ln x dx$.

14. $\int\limits_0^{\pi/6} x\sin x dx$.

15. $\int\limits_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$.

16. $\int\limits_1^2 \sqrt{x^2+5}\,dx$.

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

17. $y^2 = x^3, \quad x=0, \quad y=8.$

18. $y = x^2/4, \qquad y = 3-\frac{x^2}{2}.$

19. $y=\sqrt{x}, \quad y = 6-x, \quad y=0.$

20. $y=4-x^2, \quad y=2-x, \quad y=0.$

21. $4y = 8x-x^2, \qquad 4y = x+6.$

22. $y=\mathrm{ctg}\, x, \quad x=\pi/6, \quad x=\pi/3, \quad y=0.$

Найти площади фигур в полярных координатах:

23. $r = 2(3-\cos\varphi)$.

24. $r = 8\sin 3\varphi$.

25. $r = \frac{2}{\sin^2\varphi}$.

26. $r = \frac{6}{2-\cos\varphi}$.

Найти длины дуг кривых:

27. $y = (x+1)^{3/2}, \quad -1 \le x \le 3.$

28. $y = \ln(1-x^2), \quad 0 \le x \le 0{,}5.$

29. $y = \ln(3\cos x), \quad x \in [0,\ \pi/3].$

30. $\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$.

31. $r = 5(3 - \cos\varphi)$.

32. $r = e^{2\varphi}, \quad A(0,1), B(2\pi, e^{4\pi})$.

Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных линиями

33. $y = 6x - x^2, \quad y = 0$.

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

34. $y = \sin^2 x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$.

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

35. $y = x^2 - 4x, \quad y = 2x - 5$.

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

36. $y = \mathrm{tg}\, x, \quad y = 0, \quad x = \pi/3$, (вокруг оси OX).

37. $y^2 = x - 3, \quad x = 3$, (вокруг прямой $x = 3$).

38. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

39. $\begin{cases} x = 6\cos^4 t, \\ y = 8\sin^4 t, \end{cases}$ (вокруг оси OX).

40. $r = 2(1 + \cos\varphi)$, (вокруг полярной оси).

41. $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, (вокруг полярной оси).

Глава 3. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ в главе 2 был введен для случая конечного промежутка $[a, b]$ и ограниченной функции $f(x)$. Теперь это понятие можно обобщить на случай бесконечных промежутков интегрирования, а также на случай неограниченных функций.

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Понятие определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в главе 2 вводилось на основе процедуры разбиения отрезка $[a, b]$ на вспомогательные подотрезки. Если функция $f(x)$ рассматривается на бесконечном интервале $[a, +\infty)$ или $(-\infty, a]$, разбить ее область определения на конечное число подотрезков невозможно. Поэтому определение понятия несобственного интеграла с бесконечными пределами будем проводить на основе предельного перехода в определенном интеграле.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a,+\infty)$ и при любом значении $A > a$ интегрируема на конечном отрезке $[a, A]$. ***Несобственным интегралом*** функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ называется предел интеграла $\int\limits_a^A f(x)dx$ при $A \to +\infty$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx. \qquad (1)$$

Если предел (1) существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***сходится***, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в бесконечном промежутке $[a,+\infty)$ (иногда в этом случае используют обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$). Если же этот предел (1) не существует (в частности, бесконечен), то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называют ***расходящимся***.

ПРИМЕР 1. Найти интеграл от функции $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ в пределах от a до $+\infty$, где a – положительное число.

Имеем

$$\int\limits_a^A \frac{dx}{x^p} = \int\limits_a^A x^{-p}dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^A, & p \neq 1 \\ \ln|x|\Big|_a^A, & p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{A^{1-p}}{1-p} - \dfrac{a^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1; \\ \ln\left|\dfrac{A}{a}\right|, & p = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} -\dfrac{a^{1-p}}{1-p}, & p > 1; \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом, **при $p > 1$ интеграл** $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ **сходится и равен** $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$.

При $p \leq 1$ этот **интеграл расходится**. ■

ПРИМЕР 2. Найти интеграл от функции $f(x) = \cos x$ в пределах от $x = 0$ до $x = +\infty$.

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx$ расходится, поскольку $\int\limits_0^A \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^A = \sin A$,

а предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \sin A$ не существует. ■

Определение 2. Несобственные интегралы от функции $f(x)$ в интервалах $(-\infty, a]$ и $(-\infty, +\infty)$ определяются аналогичным образом:

Если функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty, a]$ и для любого $A < a$ эта функция интегрируема на отрезке $[A, a]$, то

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{a} f(x)dx. \qquad (2)$$

Если функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на отрезке $[A, B]$ для любых A и B, таких, что $A < B$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_{A}^{B} f(x)dx. \qquad (3)$$

Если пределы (2) или (3) существуют и конечны, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на интервалах $(-\infty, a]$ или $(-\infty, +\infty)$, соответственно, а про несобственные интегралы, определяемые выражениями (2) или (3), говорят, что они с***ходятся***. Если пределы (2) или (3) не существуют или бесконечны, то говорят, что соответствующие интегралы ***расходятся***.

ПРИМЕР 3. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_{A}^{B} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \operatorname{arctg} x \Big|_{A}^{B} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} (\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A) =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} \operatorname{arctg} B - \lim_{A \to -\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi,$$

т.е. несобственный интеграл сходится. ▪

Замечание. Все дальнейшие утверждения будут формулироваться для несобственных интегралов вида (1), однако, аналогичные утверждения могут быть сформулированы и доказаны для интегралов вида (2) и (3).

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***абсолютно интегрируемой*** в промежутке $[a, +\infty)$, а интеграл (1) – ***абсолютно сходящимся***, если наряду с интегралом (1) сходится интеграл от абсолютной величины функции $f(x)$:

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx. \tag{4}$$

Если интеграл (1) сходится, но не абсолютно, то он называется ***условно сходящимся***.

3.2. Свойства несобственных интегралов.

Из свойств определенных интегралов и пределов легко выводятся следующие свойства несобственных интегралов:

❶. Из сходимости интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

❷. Пусть $k \neq 0$ – произвольная постоянная, тогда из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} k f(x)\, dx = k \int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Если же интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ расходится, то расходится также интеграл $\int_a^{+\infty} k f(x)\, dx$.

3.3. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

Сформулируем и докажем ряд утверждений, аналогичных соответствующим утверждениям (признакам сравнения) для числовых рядов.

Теорема 1. Если для некоторого числа c при $x \ge c$ имеют место неравенства:

$$0 \le f(x) \le g(x),$$

то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \qquad (1)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \qquad (2)$$

а из расходимости интеграла (2) следует расходимость интеграла (1).

Доказательство. Докажем сначала одно важное вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть d – наименьшее из чисел a и c, т.е. $d = \min\{a, c\}$, и пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на любом конечном промежутке $[d, A]$, где $A > d$. Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Действительно, имеем

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx. \qquad (3)$$

Переходя в обеих частях равенства (3) к пределу при $A \to +\infty$ с учетом того, что $\int_a^c f(x)dx = const$, получим три возможных результата:

1) пределы в правой и левой частях (3) одновременно не существуют;

2) оба этих предела бесконечны;

3) оба предела конечны. В этом случае имеет место равенство:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx .$$

Лемма, таким образом, доказана. Из нее следует, что на сходимость (расходимость) несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ влияет только поведение функции $f(x)$ при достаточно больших значениях аргумента x (т.е. при $x >> 1$) .

Теперь можно перейти к доказательству теоремы:

Пусть значение $c \le a$. Тогда неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$ справедливо для всех $x \ge a$. Рассмотрим функцию $F(A) = \int_a^A f(x)dx$. Эта функция – неубывающая. Действительно, из условия $0 \le f(x)$ при $B > A$ следует неравенство $F(B) = F(A) + \int_A^B f(x)dx \ge F(A)$.

Как известно, для монотонно неубывающей функции $F(A)$ всегда существует предел:

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \begin{cases} F_0 = const < \infty, & \text{если } F(A) \text{ ограничена;} \\ +\infty, & \text{если } F(A) \text{ не ограничена.} \end{cases}$$

Аналогичные утверждения справедливы и для функции $G(A) = \int_a^A g(x)dx$.

Итак, если интеграл (1) сходится, т.е. существует конечный предел $\lim_{A\to+\infty} G(A) = G_0$, то функция $G(A)$ ограничена, поскольку $G(A) \le G_0$. Из неравенства $f(x) \le g(x)$, верного для всех $x \ge a$, и свойств определенного интеграла получаем $F(A) \le G(A) \le G_0$, т.е. функция $F(A)$ ограничена. Поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = F_0$, и интеграл (2) сходится.

Наоборот, если интеграл (2) расходится, т.е. $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = +\infty$, то из неравенства $F(A) \le G(A)$ следует: $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A) = +\infty$. Поэтому интеграл (1) также расходится.

Пусть теперь значение $c > a$. Если интеграл (1) сходится, то из доказанной выше леммы следует, что сходится интеграл $\int\limits_c^{+\infty} g(x)dx$. Поскольку для всех $x \ge c$ справедливо неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$, то из доказанного, следует сходимость интеграла $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$, откуда по лемме вытекает сходимость интеграла (2). Если же интеграл (2) расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$. Из неравенства $0 \le f(x) \le g(x)$ (при $x \ge c$) и доказанного выше, следует расходимость интеграла $\int\limits_c^{+\infty} g(x)dx$, откуда и следует расходимость интеграла (1).

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. Если для функций $f(x) \ge 0$ и $g(x) > 0$ существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 \le k \le +\infty, \tag{4}$$

то из сходимости несобственного интеграла (1) при $k < +\infty$, следует сходимость интеграла (2), а из расходимости интеграла (1) при $k > 0$ вытекает расходимость интеграла (2).

Доказательство. Доказательство утверждения основано на теореме 1. Если $0 < k < +\infty$, то из равенства (4) и определения предела следует, что для любого числа ε > 0, существует δ = δ(ε) > 0 такое, что для любого x > δ выполняется неравенство: $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon$, т.е. $k-\varepsilon < \dfrac{f(x)}{g(x)} < k+\varepsilon$. Взяв, например, ε = = $k/2$ и используя положительность функции $g(x)$, получим два неравенства:

$$\begin{cases} f(x) > (k/2)\,g(x), \\ f(x) < (3k/2)\,g(x). \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая, что при c_0 = const ≠ 0 интегралы $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} c_0 g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, из неравенства (5) и теоремы 1 получаем, что интегралы (1) и (2) сходятся и расходятся одновременно.

Если $k = 0$, из равенства (4) и определения предела следует:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x>\delta\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}<\varepsilon.$$

Взяв, например, ε = 1, получаем отсюда, что $0 \le f(x) \le g(x)$, и из теоремы 1 выводим заключение теоремы 2: из сходимости интеграла (1) следует сходимость интеграла (2).

Если значение k в пределе (4) бесконечно ($k = +\infty$), то из равенства (4) и определения бесконечного предела получаем

$$\forall M>0\ \ \exists\delta>0:\forall x>\delta\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}>M.$$

Отсюда при $M = 1$ имеем, что при x > δ выполнено неравенство $f(x) > g(x)$. Тогда в силу теоремы 1 из расходимости интеграла (1) следует расходимость интеграла (2).

Теоремы 1 и 2 называют ***теоремами сравнения***. Из этих теорем следует, что сходимость несобственного интеграла можно установить, не вычисляя его значения, а просто сравнив его с интегралом от уже исследованной функции. Для сравнения часто используют интеграл от степенной функции: $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$ (см. пример 1 п.3.1).

ПРИМЕР 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

Подынтегральная функция положительна, а ее числитель и знаменатель – многочлены, причем степень числителя на два меньше степени знаменателя. Следовательно, сравнение удобно проводить с функцией $1/(x^2)$. Существует предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} : \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4 - x^2 + 1} = 1.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится (см. пример 1 из п. 3.1, $p = 2 > 1$), то в силу теоремы 2 сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1}$. Поскольку на отрезке $[0,1]$ подынтегральная функция непрерывна, то интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1}$ сходится (он уже не является несобственным). Таким образом, сходится и исходный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1}$. ■

Напомним, что для функций одной переменной имеет место

Критерий Коши существования предела функции.

Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ существует и конечен тогда и только тогда, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' > \delta \Rightarrow \left|\varphi(x') - \varphi(x'')\right| < \varepsilon .$$

Аналогичный критерий справедлив и для несобственного интеграла с бесконечными пределами:

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.

Для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon \text{ для } \forall b', b'' > \delta .$$

На основе критерия Коши может быть доказана еще одна важная теорема:

Теорема 3. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)| dx$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится.

Доказательство. Если $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$, то в силу критерия Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall b', b'' > \delta \Rightarrow \left| \int\limits_{b'}^{b''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon .$$

Но по свойству определенного интеграла справедливо неравенство $\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| \le \left| \int\limits_{b'}^{b''} |f(x)| dx \right|$. Отсюда $\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon$ и по критерию Коши сходится также несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

ПРИМЕР 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2 + 100} dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2 + 100}$ на интервале [0, +∞] не сохраняет знак, в то же время теоремы сравнения справедливы только для положительных функций. Рассмотрим функцию $| f(x) | = \frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x^2 + 100} \ge 0$. Для нее справедливо неравенство: $\left|f\left(x\right)\right| \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2+100} \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} = g\left(x\right)$. Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} g(x)dx < \infty$ сходится (см. пример 1 п.3.1 при $p = 3/2$), то по теореме 1 сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|f(x)\right|dx$, а значит, по теореме 3, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2+100}$ также сходится. На отрезке [0,1] функция $f(x)$ непрерывна, следовательно, существует конечный интеграл $\int\limits_0^1 f(x)dx$. Таким образом, заданный интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится. ■

Теоремы 1– 3 дают возможность исследовать на сходимость несобственные интегралы от положительных функций или абсолютную сходимость несобственных интегралов. Как быть с условной сходимостью?

Приведем без доказательства признак сходимости, применимый и для неабсолютно сходящихся интегралов.

Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов.

Пусть выполнены условия:

1) функция $\varphi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$;

2) первообразная $\Psi(x) = \int\limits_a^x \psi(\xi)d\xi$ ограничена.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \psi(x)\varphi(x)dx$ сходится (вообще говоря, не абсолютно).

Замечание. В качестве $\varphi(x)$ часто берут степенную функцию $\varphi(x) = 1/x^p$, $p > 0$. Эта функция, очевидно, монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$.

ПРИМЕР 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

Рассмотрим функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ и $\psi(x) = \sin x$. Первообразная функции $\psi(x)$ ограничена: $\Psi(x) = \int\limits_1^x \sin\xi \, d\xi = -\cos\xi \,\Big|_1^x = \cos 1 - \cos x$, а значит $|\Psi(x)| \le |\cos 1| + |\cos x| \le 2$. Следовательно, по признаку Дирихле, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится.

Докажем, что сходимость этого интеграла условная. Предположим противное: имеет место абсолютная сходимость, т.е. интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} dx$ сходится. Тогда по теореме 1, в силу неравенств $0 \le \sin^2 x \le |\sin x|$, сходится также интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$. Но $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} dx$, как можно доказать, сходится по признаку Дирихле. Значит, по свойству несобственного интеграла должен также сходится интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} dx .$$

Получено противоречие (см. интеграл из примера 1 при $p = 1/2 < 1$). Сделанное предположение оказалось неверным, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} dx$, на самом деле расходится. ■

3.4. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, заданную в конечном промежутке $[a,b)$, но не ограниченную на этом промежутке. Предположим, что функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на любом отрезке $[a,\ b-\delta]$, где $\delta > 0$, но не ограничена на интервале $(b-\delta,\ b)$. Точка b в этом случае называется ***особой точкой***.

Определение 1. ***Несобственным интегралом*** функции $f(x)$ в промежутке от a до b называется предел интеграла $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$ при $\delta\to 0$ (конечный или бесконечный):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx. \qquad (1)$$

Если предел (1) конечен, то говорят, что несобственный интеграл ***сходится***, а функцию $f(x)$ называют ***интегрируемой*** в промежутке $[a,b)$. Если предел (1) бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл ***расходится***.

Аналогично, для функции $f(x)$, определенной и интегрируемой в промежутке $[a+\delta,\ b]$ и неограниченной на интервале $(a,\ a+\delta)$ определяется несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx. \qquad (2)$$

Здесь точка a – особая точка функции $f(x)$.

Возможен случай, когда особые точки расположены внутри отрезка $[a,\ b]$. Пусть $a \le c_1 < c_2 <\ldots< c_n \le b$, где $c_1,\ c_2,\ldots,\ c_n$ – особые точки функции $f(x)$, т.е. $f(x)$ не ограничена в окрестностях точек c_i, но ограничена и интегрируема на отрезке $[a,\ b]$ с выброшенными окрестностями точек c_i. Тогда несобственный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма несобственных интегралов вида (1) и (2):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx + \int_{c_n}^{b} f(x)dx, \qquad (3)$$

где

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx = \lim_{\delta_1 \to 0} \lim_{\delta_2 \to 0} \int_{c_i+\delta_1}^{c_{i+1}-\delta_2} f(x)dx.$$

Если $c_1 = a$, то первое слагаемое в правой части (3) отсутствует. Если $c_n = b$, то отсутствует последнее слагаемое.

Определение 2. Интегралы вида (1) – (3) из разделов 3.1 и 3.4 называются ***несобственными*** интегралами (в отличие от изученных в главе 2 определенных интегралов Римана, называемых ***собственными***).

ПРИМЕР 1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Здесь особые точки подынтегральной функции – точки $x = \pm 1$. По формуле (3) имеем

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\delta_2 \to 0} \arcsin\left(1-\delta_2\right) - \lim_{\delta_1 \to 0} \arcsin\left(-1+\delta_1\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right) = \pi. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Подынтегральная функция на отрезке $[0, 1]$ имеет единственную особую точку: $x = 0$. По определению получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\delta\to 0}\begin{cases} \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\delta^1, & \text{при } p\neq 1,\\ \ln|x|\Big|_\delta^1, & \text{при } p=1, \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{1-p} - \lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\delta^{1-p}}{1-p}, & p\neq 1,\\ -\lim\limits_{\delta\to 0}\ln|\delta|, & p=1, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & p<1,\\ +\infty, & p\geq 1. \end{cases}$$

Итак, **несобственный интеграл** $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ **сходится при p < 1, а при $p \geq 1$ этот интеграл расходится**, (в отличие от несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ из примера 1 п.3.1).▪

ПРИМЕР 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Особая точка $x = 1$ лежит внутри отрезка интегрирования. По определению,

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left.\frac{-1}{(x-1)}\right|_0^{1-0} - \left.\frac{1}{(x-1)}\right|_{1+0}^2 =$$

$$= -\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{(x-1)} - 1 - 1 + \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{(x-1)} = -(-\infty) - 2 + (+\infty) = +\infty.$$

Интеграл расходится. ▪

Замечание. Пример 3 демонстрирует, как важно начинать исследование несобственного интеграла с определения особых точек. Ведь, если решать его формально по формуле Ньютона – Лейбница для определенных интегралов:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\left.\frac{1}{x-1}\right|_0^2 = -2, \quad (???)$$

был бы получен неверный результат.

Для несобственных интегралов от неограниченных функций справедливы те же утверждения, что и для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования. Сформулируем, например теоремы сравнения для интеграла вида (2) (для интегралов вида (1) и (3) они формулируются и доказываются аналогично).

Теорема 1. Если для некоторого числа $\delta > 0$ при $a \le x \le a + \delta$ имеет место неравенство:

$$0 \le f(x) \le g(x),$$

то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$, (a – особая точка функции $g(x)$) следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, (a – особая точка функции $f(x)$), а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Теорема 2. Если существует предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 \le k \le +\infty,$$

причем для некоторого положительного числа δ при $a \le x \le a + \delta$ справедливы неравенства $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$, то из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b g(x)dx$ при $0 \le k < \infty$ следует сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ при $0 < k \le \infty$ следует расходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$ (точка a – особая точка).

Теорема 3. Если сходится несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то сходится интеграл $\int_a^b f(x)dx$, (a – особая точка функции $f(x)$).

Определение 3. Пусть несобственный интеграл (2) сходится. Тогда он называется ***абсолютно сходящимся***, если, наряду с ним, сходится и интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{4}$$

и ***условно сходящимся***, если интеграл (4) расходится.

Замечание. Для исследования сходимости интеграла (2) по теоремам 1 и 2 функцию $f(x)$ часто сравнивают со степенной функцией $1/x^p$ (см. пример 2).

ПРИМЕР 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+4x}\,dx. \tag{5}$$

Здесь точка $x = 0$ – особая точка. В окрестности нуля бесконечно малая функция $\ln(1+x)$ эквивалентна x, а функция $x^2 + 4x^3$ эквивалентна x^2. Тогда, сравнивая подынтегральную функцию с функцией $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^2+4x^3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x)}{x^2+4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+4x} = 1\ .$$

Но интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится, следовательно, по теореме 2 расходится и интеграл (5). ▪

ПРИМЕР 5. ***Интегралом Эйлера I-го рода***, или ***бета-функцией***, называется интеграл:

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\,, \tag{6}$$

где a и b – положительные постоянные.

При $a \geq 1$ и $b \geq 1$ в интеграле (6) особых точек нет, при $a < 1$ особая точка – ноль, при $b < 1$ особая точка – единица.

Разложим интеграл (6) на сумму двух интегралов:

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx + \int_{1/2}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = I_1 + I_2,$$

и оценим каждое из слагаемых.

При $x \leq 1/2$ и $b < 1$ имеем: $x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \dfrac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}} \leq \dfrac{x^{a-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-b}} = x^{a-1} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{b-1}$.

При $b \geq 1$ и $0 \leq x \leq 1/2$ имеем: $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leq x^{a-1}$.

Интеграл $\displaystyle\int_0^{1/2} x^{a-1}dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1-a}}$ сходится при $p = 1 - a < 1$, т.е. при $a > 0$.

То же справедливо и для интеграла: $\displaystyle\int_0^{1/2} x^{a-1}(1/2)^{b-1}dx = (1/2)^{b-1}\int_0^{1/2} x^{a-1}dx$. Следовательно, по теореме 1 интеграл I_1 сходится при $a > 0$ для всех b.

При $x \geq 1/2$ и $a < 1$ имеем:

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}} \leq \frac{(1-x)^{b-1}}{(1/2)^{1-a}} = (\frac{1}{2})^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

После замены $y = 1 - x$ получаем

$$\int_{1/2}^{1} (1-x)^{b-1}dx = -\int_{1/2}^{0} y^{b-1}dy = \int_0^{1/2} y^{b-1}dy = \int_0^{1/2} \frac{dy}{y^{1-b}}.$$

Этот интеграл сходится при $1 - b < 1$, т.е. при $b > 0$.

При $a \geq 1$ и $1 \geq x \geq 1/2$ имеем: $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leq (1-x)^{b-1}$.

Следовательно, по теореме 1 интеграл I_2 сходится при $b > 0$.

Таким образом, интеграл Эйлера I-го рода определен (сходится) для любых положительных значений a и b. ▪

ПРИМЕР 6. ***Интегралом Эйлера II-го рода***, или ***гамма-функцией***, называется интеграл

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx, \quad a > 0. \tag{7}$$

Для исследования интеграла (7) на сходимость разобьем его на сумму двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} \cdot e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx = I_1 + I_2.$$

Если $a \geq 1$, то подынтегральная функция непрерывна, а значит, I_1 – собственный интеграл.

При $0 < a < 1$ и $x \geq 0$ имеем $x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a-1}$. Поэтому в силу теоремы 1 интеграл $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$ сходится, если сходится интеграл $\int_0^1 x^{a-1} dx$, т.е. при $a > 0$ (подробнее см. пример 2).

Исследуем теперь на сходимость интеграл I_2.

Известно, что для достаточно больших значениий x (т.е. при $x >> 1$) и при любом положительном числе λ справедливо соотношение: $\ln x < x^{\lambda} < e^{x}$. Поэтому, приняв $\lambda = 2a$, получим: $e^{x/2} > x^{a}$ при $a > 0$. Тогда подынтегральная функция в (7) удовлетворяет неравенству: $x^{a-1} e^{-x} = \frac{x^{a}}{x e^{x/2}} \cdot \frac{1}{e^{x/2}} < \frac{1}{e^{x/2}}$. Поскольку $\int_1^{\infty} e^{-x/2} dx = -2e^{-x/2} \Big|_1^{\infty} = 2e^{-1/2} < \infty$, то по теореме 1 п. 3.3 интеграл I_2 сходится при $a > 0$.

Таким образом, доказано, что интеграл Эйлера II-го рода (7) сходится при любом положительном значении параметра a. ▪

Замечание. Отметим важное свойство гамма-функции. Имеем

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Для любого натурального значения n, применив формулу интегрирования по частям, получим

$$\Gamma(n) = \int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx = -\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} de^{-x} = -\left(x^{n-1}\, e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx^{n-1} \right) =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{+\infty} x^{n-2} \cdot e^{-x} dx = (n-1)\cdot \Gamma(n-1).$$

Повторяя процедуру интегрирования по частям, приходим к формуле

$$\Gamma(n) = (n-1)\cdot\Gamma(n-1) = (n-1)\cdot(n-2)\cdot\Gamma(n-2) = \ldots$$
$$= (n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot\Gamma(1).$$

Отсюда получаем известное соотношение, связывающее гамму-функцию натурального аргумента n и факториал этого числа:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Таким образом, гамма-функция представляет собой обобщение понятия факториала на множество неотрицательных чисел.

3.5. Интегралы, зависящие от параметра.

Интегралы Эйлера представляют собой пример несобственных интегралов, зависящих от параметра. Такие интегралы можно рассматривать в качестве функции, аргументом которой является параметр. Тогда с этой функцией можно производить операции, известные из курса математического анализа, в частности, интегрировать или дифференцировать. Сформулируем некоторые получающиеся при этом результаты.

Интегрирование под знаком интеграла.

Исследуем интеграл:

$$I(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

в котором и подынтегральная функция, и пределы интегрирования зависят от параметра y. В этом случае и результат интегрирования будет представлять собой функцию переменной y.

Пусть функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны, а функция $f(x,y)$ непрерывна по совокупности своих переменных. В этом случае существует интеграл:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{2}$$

В частном случае, если функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ есть постоянные: $\varphi_1(y) \equiv a$; $\varphi_2(y) \equiv b$, то в равенстве (2) можно поменять порядок интегрирования:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \tag{3}$$

Дифференцирование под знаком интеграла.

Теорема 1. Пусть функция $I(y)$ задана равенством:

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx, \tag{4}$$

где функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$ в прямоугольнике: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

Тогда существует производная функции (4), причем

$$I'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f'_y(x,y)dx. \tag{5}$$

ПРИМЕР 1. Найти производную функции $I(y)=\int\limits_0^1 \ln\left(x^2+y^2\right)dx.$

Имеем по формуле (5):

$$I'(y)=\int\limits_0^1 \left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y dx=\int\limits_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}dx=2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}. \ ■$$

Теорема 2. Пусть функция $I(y)$ задается формулой (1):

$$I(y)=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx,$$

где функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $a \le x \le b,\ c \le y \le d$, функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны при $c \le y \le d$ и принимают значения в интервале от a до b. Тогда функция $I(y)$ непрерывна при $c \le y \le d$.

Если к тому же в указанном прямоугольнике существует и непрерывна частная производная $f'_y(x,y)$, а также существуют производные $\varphi'_1(y)$ и $\varphi'_2(y)$, то производная интеграла $I(y)$ существует определяется по формуле

$$I'(y)=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f'_y\left(x,y\right)dx+\varphi'_2(y)\cdot f\left(\varphi_2(y),y\right)-\varphi'_1(y)\cdot f\left(\varphi_1(y),y\right). \qquad (6)$$

ПРИМЕР 2. Найти производную функции $I(y)=\int\limits_y^{y^2} e^{yx^2}dx$.

По формуле (6) получаем

$$I'(y)=\int\limits_y^{y^2} (e^{yx^2})'_y\,dx+(y^2)'_y\cdot\left(e^{yx^2}\right)\Big|_{x=y^2}-(y)'_y\cdot\left(e^{yx^2}\right)\Big|_{x=y}=$$

$$=\int\limits_y^{y^2} x^2e^{yx^2}dx+2ye^{y^5}-e^{y^3}. \ ■$$

Интегрирование и дифференцирование по параметру в несобственных интегралах.

Введем вначале важное понятие равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Определение. Несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{7}$$

и

$$\int_a^{b} f(x,y)dx\,, \ (a - \text{особая точка}) \tag{8}$$

называются ***сходящимися равномерно*** по переменной y, принадлежащей некоторой области U, если они сходятся при любом фиксированном значении $y \in U$ и величина δ в критерии сходимости несобственного интеграла (см. п. 3.3) не зависит от значения y, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \left| \int_{b'}^{b''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \ \text{ для } \forall b', b'' > \delta \ \text{ и } \forall y \in U$$

– для интеграла (7),

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \left| \int_{a+b'}^{a+b''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \ \text{ для } \forall b', b'': 0 < b', b'' < \delta \ \text{ и } \forall y \in U$$

– для интеграла (8).

Сформулируем **свойства равномерно сходящегося интеграла** (7). (Аналогичные свойства справедливы и для интеграла (8)):

❶. Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $x \ge a$ и $c \le y \le d$ и интеграл (7) сходится равномерно при $c \le y \le d$, то функция $I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$ непрерывна по y при $c \le y \le d$.

❷. При условиях, сформулированных в свойстве 1, справедлива формула интегрирования под знаком интеграла:

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy .$$

❸. Если функции $f(x,y)$ и $f_y'(x,y)$ непрерывны, несобственный интеграл (7) сходится, а интеграл $\int_a^\infty f_y'(x,y)dx$ сходится равномерно, то имеет место формула дифференцирования под знаком интеграла:

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty f_y'(x,y)dx \ .$$

Интегрирование и дифференцирование по параметру иногда позволяет значительно упростить процедуру вычисления определенных интегралов:

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $A = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Соответствующий неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ не может быть выражен в элементарных функциях, он носит название ***интегрального синуса***.

Для вычисления искомого интеграла A рассмотрим функцию

$$I(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \cdot \frac{\sin x}{x} dx, \quad t \ge 0 .$$

Тогда $A = I(0)$.

Дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$I'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx .$$

Этот интеграл легко вычисляется при $t > 0$:

$$I'(t)=\frac{1}{t}\int_0^{\infty}\sin x\,de^{-tx}=\frac{1}{t}\left(\sin x\,e^{-tx}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-tx}\cos x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{t^2}\int_0^{\infty}\cos x\,de^{-tx}=\frac{1}{t^2}\left(\cos x\,e^{-tx}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-tx}\sin x\,dx\right)=\frac{1}{t^2}\big(-1-I'(t)\big).$$

Отсюда

$$I'(t)=-\frac{1}{1+t^2}.$$

Интегрируя полученное соотношение, находим

$$I(t)=-\int\frac{1}{1+t^2}dt=-\operatorname{arctg}t+C.$$

Постоянную интегрирования C можно определить из условия $I(+\infty)=0$:

$$0=-\frac{\pi}{2}+C \quad\Rightarrow\quad C=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $I(t)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}t$. По свойству 1 функция $I(t)$ непрерывна, поэтому искомый интеграл может быть найден в результате предельного перехода:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=I(0)=\lim_{t\to 0}I(t)=\lim_{t\to 0}\Big(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}t\Big)=\frac{\pi}{2}.\ ■$$

Теоретические вопросы к главе 3.

1. Дать определения несобственного интеграла с бесконечным пределом.
2. Дать определение несобственного интеграла от неограниченной функции.
3. В каком случае интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2+4x+4}$ является несобственным?
4. Какие интегралы называются интегралами Эйлера? При каких значениях параметра они сходятся?
5. Справедлива ли следующая запись
$$\int\limits_{-e+1}^{e+1} \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Bigg|_{-e+1}^{e+1} = \ln|e| - \ln|-e| = 1-1=0\,?$$
6. Найти производную функции $I(y) = \int\limits_y^5 \sin(xy)dx$ двумя способами: 1) вычислив предварительно интеграл; 2) используя формулу (6) из раздела 3.5. Сравнить результаты.

Задачи к главе 3.

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2+1}$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\cos x\, dx$.
5. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x}\sin x\, dx$.
6. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x}dx$.
7. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$.
8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$.
9. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x^2+1}dx$.

10. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

11. $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^2}$.

12. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

13. $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx$.

14. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

15. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^3} dx$.

16. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

17. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[4]{\ln x}}$.

18. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^{3/2}}$.

19. $\int\limits_{1}^{\infty} \ln x dx$.

20. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

21. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3-1}}$.

22. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 2x}$.

23. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{dx}{x \ln 2x (\ln(\ln 2x))^3}$.

24. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$.

25. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+4}}$.

26. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \operatorname{arctg} x^3 dx}{1+x^6}$.

27. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{\left(x^4+5\right)^{1/2}}$.

28. $\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-2x} dx$.

29. $\int\limits_{2}^{\infty} \ln 3x dx$.

30. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x \, dx}{1+x^2}$.

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

31. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^4}$.

32. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[4]{\ln x}}$.

33. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(2x-1)^{3/2}}$.

34. $\int\limits_{0}^{1} \ln x dx$.

35. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

36. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

37. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

38. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x \ln x}$.

39. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\cos x \, dx}{\sin^3 x}$.

40. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

41. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x}$.

42. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

43. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2}$.

44. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

45. $\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x^3}dx$.

46. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

47. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x(x-2)^2}$.

48. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$.

49. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

50. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

51. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$.

52. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

53. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

54. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}$.

55. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\sin^2 x}$.

56. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}$.

57. $\int\limits_0^1 \frac{(2x+5)dx}{x^2+5x}$.

58. $\int\limits_0^1 \frac{(4x+3\sqrt{x})dx}{\left(x^2+x\sqrt{x}\right)^2}$.

59. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x\ln^3 x}$.

60. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos dx}{\sqrt{\sin x}}$.

Исследовать интегралы на сходимость:

61. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^3+\sqrt{x^2+4}}{3x^2+x^4+5}dx$.

62. $\int\limits_2^{\infty} \frac{3\sqrt[3]{x^3+1}-2x\sqrt{x}}{x^2+4}dx$.

63. $\int\limits_3^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3+3x+4}+2\sqrt[3]{x^2+6}}{3\sqrt[3]{x^8+24}+10}dx$.

64. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{3x^3+8x+6}-2x+\sqrt{x^2+8}}{3\sqrt[3]{x^4+4x^6}+x^2}dx$.

65. $\int\limits_2^{\infty} \frac{3x+8x^2+\sqrt{x^3+4}}{3x^8+2\sqrt{x^2+4}}dx$.

66. $\int\limits_3^{\infty} \frac{2x\sqrt[3]{x^4+5}+5x}{6x^6+4x^4+2\sqrt{x^2+1}}dx$.

67. $\int\limits_1^{\infty} \frac{2x\sqrt[3]{x^2+4}+3\sqrt{x\sqrt{x}}}{3x^4+25x^2+6}dx$.

68. $\int\limits_2^{\infty} \frac{2x\sqrt[3]{3x^2+8}+5x}{3x^2+28}dx$.

69. $\int\limits_3^{\infty} \frac{3x+\sqrt{x^3+4}}{5x^2+16x^4+3\sqrt[3]{x^2}}dx$.

70. $\int\limits_1^{\infty} \frac{3x\sqrt{x}-16\sqrt{x^2+4}}{5x^8+16x^2+25\sqrt[3]{x^{12}+4}}dx$.

71. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+6}+18}{\sqrt[3]{x^{12}+5}+2x^2}dx$.

72. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{3x^2+5x+6}{3x^2+\sqrt{x^6+8}}dx$.

73. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{2x+3x^{18}+\sqrt{x}}{3x^2+16+2\sqrt[3]{x^2}}dx$.

74. $\int\limits_{5}^{\infty} \frac{5x\sqrt{x}-6x+3}{5x^2+8x^4+\sqrt[3]{x^{12}+4}}dx$.

75. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+4}+5x-6}{3\sqrt[3]{x^8+6}+\sqrt{x^{10}+4}}dx$.

76. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{3x^2\sqrt{x+5}+8x}{3\sqrt[3]{x^4+25}+\sqrt[5]{x^{20}+4}}dx$.

77. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{8x^2\sqrt{x+5}-4x}{2\sqrt[3]{x^8+6}+24x^4}dx$.

78. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{2x\sqrt{x}+5}{3\sqrt[3]{x^{12}+4}+5x^2+6}dx$.

79. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{16\sqrt[3]{x^2+4x^3+8}+3\sqrt{x}}{25x^4+13x^2+6}dx$.

80. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{2\sqrt{x^3+8x-4}+\sqrt[3]{x^2+3}}{x^4+2x^2+10}dx$.

81. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{3x^2+5x+16}{16x^4+32\sqrt[3]{x^{12}+8x^2+4}}dx$.

82. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+4x+3}}{5x^4+30x^2+16\sqrt{x^2+1}}dx$.

83. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{3x^5+4x^3+2}{3\sqrt[3]{x^6+8}+4x^2+5}dx$.

84. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{x^3+2x+4}{2\sqrt[3]{x^{12}+4}+x^4+3}dx$.

85. $\int\limits_{5}^{\infty} \frac{3x^2+8x^{3/2}+6}{3\sqrt[3]{x^{16}+5}+5x^{10}}dx$.

86. $\int\limits_{6}^{\infty} \frac{2x^2+\sqrt[3]{3x^4+1}+2\sqrt{x^3}}{2x^{16}+5x^{10}+8}dx$.

87. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{2x^3+3x^2-8}{25\sqrt{x^8+2x^4}+3\sqrt{x^2+4}}dx$.

88. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{2x^2+3\sqrt[3]{x^4+3}+5x}{x^{16}+25x^8+3}dx$.

89. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{2\sqrt[3]{2x^5+8x+9}+\sqrt{x+3}}{3x^2+16x^4+5}dx$.

90. $\int\limits_{4,5}^{\infty} \frac{3x^2+4x+5}{3\sqrt[3]{x^4+25x^2+1}+5\sqrt{x^6+8}}dx$.

ГЛОССАРИЙ

Двойной интеграл (*double integral*) – обобщение понятия определенного интеграла на двумерный случай. Определяется как предел соответствующих интегральных сумм.

Диаметр множества (diameter of a set) – наибольшее расстояние между двумя точками множества.

Замыкание области (*closure of a domain*) – объединение области и ее границы.

Криволинейный интеграл (*curvilinear integral*) – обобщение понятия определенного интеграла, связанное с заменой отрезка интегрирования на дугу кривой линии.

Неопределенный интеграл (*indefinite integral*) – множество всех первообразных подынтегральной функции.

Несобственный интеграл (*improper definite integral*) – интеграл, один из пределов интегрирования которого бесконечен, а также интеграл от разрывной функции.

Определенный интеграл (*definite integral*) – предел последовательности интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка интегрирования.

Первообразная (*antiderivative*) функции $f(x)$ – функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$.

Повторный интеграл (*iterated integral*) – интеграл от функции двух переменных, взятый последовательно по одной переменной, а затем по другой.

Потенциал (потенциальная функция) вектора (*potential*) – функция трех переменных, частные производные которой по соответствующим координатам совпадают с координатами вектора.

Правильная область 1-го типа (*regular domain of 1-st type*) – область на плоскости, ограниченная прямыми $x=a$ и $x=b$ и кривыми $y= =\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$.

Правильная область 2-го типа (*regular domain of 2-nd type*) – область на плоскости, ограниченная прямыми $y=c$, $y=d$ и кривыми $x= =\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, где функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$ и $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$.

Рациональная дробь (***rational fraction***) – функция вида $f(x)=\dfrac{P(x)}{D(x)}$, где $P(x)$ и $D(x)$ – многочлены.

Сапог Шварца (*Schwarz's boot*) – вписанный в цилиндр многогранник, сумма площадей граней которого стремится к бесконечности при стремлении диаметров граней к нулю.

Связное множество (***connected set***) – множество, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству.

Тройной интеграл (*triple integral*) – обобщение понятия определенного интеграла на трехмерный случай. Определяется как предел соответствующих интегральных сумм.

«Хорошая» кривая (*regular curve*) – кривая, граница которой составлена из конечного числа графиков непрерывных функций.

Циркуляция вектора (*circulation*) – криволинейный интеграл II-рода от векторной функции по замкнутому контуру.

Якобиан (*Jacobian*) – определитель, составленный из частных производных n функций, зависящих от n переменных.

Материалы, относящиеся к данному изданию можно найти на сайте кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:

http://kvm.gubkin.ru/index.html

Глава 3. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ в главе 2 был введен для случая конечного промежутка $[a, b]$ и ограниченной функции $f(x)$. Теперь это понятие можно обобщить на случай бесконечных промежутков интегрирования, а также на случай неограниченных функций.

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Понятие определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в главе 2 вводилось на основе процедуры разбиения отрезка $[a, b]$ на вспомогательные подотрезки. Если функция $f(x)$ рассматривается на бесконечном интервале $[a, +\infty)$ или $(-\infty, a]$, разбить ее область определения на конечное число подотрезков невозможно. Поэтому определение понятия несобственного интеграла с бесконечными пределами будем проводить на основе предельного перехода в определенном интеграле.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a,+\infty)$ и при любом значении $A > a$ интегрируема на конечном отрезке $[a, A]$. ***Несобственным интегралом*** функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ называется предел интеграла $\int\limits_a^A f(x)dx$ при $A \to +\infty$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx. \qquad (1)$$

Если предел (1) существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***сходится***, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в бесконечном промежутке $[a,+\infty)$ (иногда в этом случае используют обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$). Если же этот предел (1) не существует (в частности, бесконечен), то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называют ***расходящимся***.

ПРИМЕР 1. Найти интеграл от функции $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ в пределах от a до $+\infty$, где a – положительное число.

Имеем

$$\int\limits_a^A \frac{dx}{x^p} = \int\limits_a^A x^{-p}dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^A, & p \neq 1 \\ \ln|x|\,\Big|_a^A, & p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{A^{1-p}}{1-p} - \dfrac{a^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1; \\ \ln\left|\dfrac{A}{a}\right|, & p = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} -\dfrac{a^{1-p}}{1-p}, & p > 1; \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом, **при $p > 1$ интеграл** $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ **сходится и равен** $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$.

При $p \leq 1$ этот **интеграл расходится**. ■

ПРИМЕР 2. Найти интеграл от функции $f(x) = \cos x$ в пределах от $x = 0$ до $x = +\infty$.

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx$ расходится, поскольку $\int\limits_0^A \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^A = \sin A$, а предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \sin A$ не существует. ■

Определение 2. Несобственные интегралы от функции $f(x)$ в интервалах $(-\infty, a]$ и $(-\infty, +\infty)$ определяются аналогичным образом:

Если функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty, a]$ и для любого $A < a$ эта функция интегрируема на отрезке $[A, a]$, то

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{a} f(x)dx. \qquad (2)$$

Если функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на отрезке $[A, B]$ для любых A и B, таких, что $A < B$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_{A}^{B} f(x)dx. \qquad (3)$$

Если пределы (2) или (3) существуют и конечны, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на интервалах $(-\infty, a]$ или $(-\infty, +\infty)$, соответственно, а про несобственные интегралы, определяемые выражениями (2) или (3), говорят, что они с***ходятся***. Если пределы (2) или (3) не существуют или бесконечны, то говорят, что соответствующие интегралы ***расходятся***.

ПРИМЕР 3. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_{A}^{B} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \operatorname{arctg} x \Big|_{A}^{B} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} (\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A) =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} \operatorname{arctg} B - \lim_{A \to -\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi,$$

т.е. несобственный интеграл сходится. ▪

Замечание. Все дальнейшие утверждения будут формулироваться для несобственных интегралов вида (1), однако, аналогичные утверждения могут быть сформулированы и доказаны для интегралов вида (2) и (3).

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***абсолютно интегрируемой*** в промежутке $[a, +\infty)$, а интеграл (1) – ***абсолютно сходящимся***, если наряду с интегралом (1) сходится интеграл от абсолютной величины функции $f(x)$:

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx. \tag{4}$$

Если интеграл (1) сходится, но не абсолютно, то он называется ***условно сходящимся***.

3.2. Свойства несобственных интегралов.

Из свойств определенных интегралов и пределов легко выводятся следующие свойства несобственных интегралов:

❶. Из сходимости интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

❷. Пусть $k \neq 0$ – произвольная постоянная, тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} k f(x)\, dx = k \int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Если же интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ расходится, то расходится также интеграл $\int\limits_a^{+\infty} k f(x)\, dx$.

3.3. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

Сформулируем и докажем ряд утверждений, аналогичных соответствующим утверждениям (признакам сравнения) для числовых рядов.

Теорема 1. Если для некоторого числа c при $x \geq c$ имеют место неравенства:

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{1}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \tag{2}$$

а из расходимости интеграла (2) следует расходимость интеграла (1).

Доказательство. Докажем сначала одно важное вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть d – наименьшее из чисел a и c, т.е. $d = \min\{a, c\}$, и пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на любом конечном промежутке $[d, A]$, где $A > d$. Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Действительно, имеем

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx. \tag{3}$$

Переходя в обеих частях равенства (3) к пределу при $A \to +\infty$ с учетом того, что $\int_a^c f(x)dx = const$, получим три возможных результата:

1) пределы в правой и левой частях (3) одновременно не существуют;

2) оба этих предела бесконечны;

3) оба предела конечны. В этом случае имеет место равенство:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx .$$

Лемма, таким образом, доказана. Из нее следует, что на сходимость (расходимость) несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ влияет только поведение функции $f(x)$ при достаточно больших значениях аргумента x (т.е. при $x >> 1$) .

Теперь можно перейти к доказательству теоремы:

Пусть значение $c \le a$. Тогда неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$ справедливо для всех $x \ge a$. Рассмотрим функцию $F(A) = \int_a^A f(x)dx$. Эта функция – неубывающая. Действительно, из условия $0 \le f(x)$ при $B > A$ следует неравенство $F(B) = F(A) + \int_A^B f(x)dx \ge F(A)$.

Как известно, для монотонно неубывающей функции $F(A)$ всегда существует предел:

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \begin{cases} F_0 = const < \infty, & \text{если } F(A) \text{ ограничена;} \\ +\infty, & \text{если } F(A) \text{ не ограничена.} \end{cases}$$

Аналогичные утверждения справедливы и для функции $G(A) = \int_a^A g(x)dx$.

Итак, если интеграл (1) сходится, т.е. существует конечный предел $\lim_{A\to+\infty} G(A) = G_0$, то функция $G(A)$ ограничена, поскольку $G(A) \le G_0$. Из неравенства $f(x) \le g(x)$, верного для всех $x \ge a$, и свойств определенного интеграла получаем $F(A) \le G(A) \le G_0$, т.е. функция $F(A)$ ограничена. Поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = F_0$, и интеграл (2) сходится.

Наоборот, если интеграл (2) расходится, т.е. $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = +\infty$, то из неравенства $F(A) \le G(A)$ следует: $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A) = +\infty$. Поэтому интеграл (1) также расходится.

Пусть теперь значение $c > a$. Если интеграл (1) сходится, то из доказанной выше леммы следует, что сходится интеграл $\int\limits_c^{+\infty} g(x)dx$. Поскольку для всех $x \ge c$ справедливо неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$, то из доказанного, следует сходимость интеграла $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$, откуда по лемме вытекает сходимость интеграла (2). Если же интеграл (2) расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$. Из неравенства $0 \le f(x) \le g(x)$ (при $x \ge c$) и доказанного выше, следует расходимость интеграла $\int\limits_c^{+\infty} g(x)dx$, откуда и следует расходимость интеграла (1).

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. Если для функций $f(x) \ge 0$ и $g(x) > 0$ существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 \le k \le +\infty, \tag{4}$$

то из сходимости несобственного интеграла (1) при $k < +\infty$, следует сходимость интеграла (2), а из расходимости интеграла (1) при $k > 0$ вытекает расходимость интеграла (2).

Доказательство. Доказательство утверждения основано на теореме 1. Если $0 < k < +\infty$, то из равенства (4) и определения предела следует, что для любого числа ε > 0, существует δ = δ(ε) > 0 такое, что для любого x > δ выполняется неравенство: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon$, т.е. $k-\varepsilon\ <\frac{f(x)}{g(x)}<k+\varepsilon$. Взяв, например, ε = = $k/2$ и используя положительность функции $g(x)$, получим два неравенства:

$$\begin{cases} f(x) > (k/2)\,g(x), \\ f(x) < (3k/2)\,g(x). \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая, что при c_0 = const ≠ 0 интегралы $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} c_0 g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, из неравенства (5) и теоремы 1 получаем, что интегралы (1) и (2) сходятся и расходятся одновременно.

Если $k\ =\ 0$, из равенства (4) и определения предела следует:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x>\delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}<\varepsilon\,.$$

Взяв, например, ε = 1, получаем отсюда, что $0\ \le f(x)\ \le\ g(x)$, и из теоремы 1 выводим заключение теоремы 2: из сходимости интеграла (1) следует сходимость интеграла (2).

Если значение k в пределе (4) бесконечно (k = +∞), то из равенства (4) и определения бесконечного предела получаем

$$\forall M>0\ \ \exists\delta>0:\forall x>\delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}>M\,.$$

Отсюда при M = 1 имеем, что при x > δ выполнено неравенство $f(x) > g(x)$. Тогда в силу теоремы 1 из расходимости интеграла (1) следует расходимость интеграла (2).

Теоремы 1 и 2 называют ***теоремами сравнения***. Из этих теорем следует, что сходимость несобственного интеграла можно установить, не вычисляя его значения, а просто сравнив его с интегралом от уже исследованной функции. Для сравнения часто используют интеграл от степенной функции: $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ (см. пример 1 п.3.1).

ПРИМЕР 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

Подынтегральная функция положительна, а ее числитель и знаменатель – многочлены, причем степень числителя на два меньше степени знаменателя. Следовательно, сравнение удобно проводить с функцией $1/(x^2)$. Существует предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} : \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4 - x^2 + 1} = 1.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится (см. пример 1 из п. 3.1, $p = 2 > 1$), то в силу теоремы 2 сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$. Поскольку на отрезке $[0,1]$ подынтегральная функция непрерывна, то интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ сходится (он уже не является несобственным). Таким образом, сходится и исходный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$. ■

Напомним, что для функций одной переменной имеет место

Критерий Коши существования предела функции.

Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ существует и конечен тогда и только тогда, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' > \delta \Rightarrow \left|\varphi\left(x'\right) - \varphi\left(x''\right)\right| < \varepsilon .$$

Аналогичный критерий справедлив и для несобственного интеграла с бесконечными пределами:

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.

Для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \ \delta=\delta(\varepsilon)>0:\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon \text{ для } \forall b',b''>\delta\,.$$

На основе критерия Коши может быть доказана еще одна важная теорема:

Теорема 3. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится.

Доказательство. Если $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$, то в силу критерия Коши

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\forall b',b''>\delta\Rightarrow\left|\int\limits_{b'}^{b''}|f(x)|dx\right|<\varepsilon.$$

Но по свойству определенного интеграла справедливо неравенство $\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx\right|\le\left|\int\limits_{b'}^{b''}|f(x)|dx\right|$. Отсюда $\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon$ и по критерию Коши сходится также несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

ПРИМЕР 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2+100}dx$.

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2+100}$ на интервале [0, +∞] не сохраняет знак, в то же время теоремы сравнения справедливы только для положительных функций. Рассмотрим функцию$\left|\ f\left(x\right)\ \right|=\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x^2+100}\ge 0$. Для нее справедливо неравенство: $\left|f\left(x\right)\right| \le \frac{\sqrt{x}}{x^2+100} \le \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} = g\left(x\right)$. Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} g(x)dx < \infty$ сходится (см. пример 1 п.3.1 при $p = 3/2$), то по теореме 1 сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} |\, f(x)| dx$, а значит, по теореме 3, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2+100}$ также сходится. На отрезке [0,1] функция $f(x)$ непрерывна, следовательно, существует конечный интеграл $\int\limits_0^1 f(x)dx$. Таким образом, заданный интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится. ▪

Теоремы 1– 3 дают возможность исследовать на сходимость несобственные интегралы от положительных функций или абсолютную сходимость несобственных интегралов. Как быть с условной сходимостью?

Приведем без доказательства признак сходимости, применимый и для неабсолютно сходящихся интегралов.

Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов.

Пусть выполнены условия:

1) функция $\varphi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$;

2) первообразная $\Psi(x) = \int\limits_a^x \psi(\xi)d\xi$ ограничена.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \psi(x)\varphi(x)dx$ сходится (вообще говоря, не абсолютно).

Замечание. В качестве $\varphi(x)$ часто берут степенную функцию $\varphi(x) = 1/x^p$, $p > 0$. Эта функция, очевидно, монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$.

ПРИМЕР 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

Рассмотрим функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ и $\psi(x) = \sin x$. Первообразная функции $\psi(x)$ ограничена: $\Psi(x) = \int\limits_1^x \sin\xi \, d\xi = -\cos\xi \,\Big|_1^x = \cos 1 - \cos x$, а значит $\left|\Psi(x)\right| \le |\cos 1| + |\cos x| \le 2$. Следовательно, по признаку Дирихле, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится.

Докажем, что сходимость этого интеграла условная. Предположим противное: имеет место абсолютная сходимость, т.е. интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} dx$ сходится. Тогда по теореме 1, в силу неравенств $0 \le \sin^2 x \le |\sin x|$, сходится также интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$. Но $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} dx$, как можно доказать, сходится по признаку Дирихле. Значит, по свойству несобственного интеграла должен также сходится интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} dx .$$

Получено противоречие (см. интеграл из примера 1 при $p = 1/2 < 1$). Сделанное предположение оказалось неверным, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} dx$, на самом деле расходится. ▪

3.4. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, заданную в конечном промежутке $[a,b)$, но не ограниченную на этом промежутке. Предположим, что функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на любом отрезке $[a, b-\delta]$, где $\delta > 0$, но не ограничена на интервале $(b-\delta, b)$. Точка b в этом случае называется ***особой точкой***.

Определение 1. ***Несобственным интегралом*** функции $f(x)$ в промежутке от a до b называется предел интеграла $\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ при $\delta \to 0$ (конечный или бесконечный):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx. \qquad (1)$$

Если предел (1) конечен, то говорят, что несобственный интеграл ***сходится***, а функцию $f(x)$ называют ***интегрируемой*** в промежутке $[a,b)$. Если предел (1) бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл ***расходится***.

Аналогично, для функции $f(x)$, определенной и интегрируемой в промежутке $[a+\delta, b]$ и неограниченной на интервале $(a, a+\delta)$ определяется несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx. \qquad (2)$$

Здесь точка a – особая точка функции $f(x)$.

Возможен случай, когда особые точки расположены внутри отрезка $[a, b]$. Пусть $a \le c_1 < c_2 < \ldots < c_n \le b$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – особые точки функции $f(x)$, т.е. $f(x)$ не ограничена в окрестностях точек c_i, но ограничена и интегрируема на отрезке $[a, b]$ с выброшенными окрестностями точек c_i. Тогда несобственный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма несобственных интегралов вида (1) и (2):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx + \int_{c_n}^{b} f(x)dx, \qquad (3)$$

где

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx = \lim_{\delta_1 \to 0} \lim_{\delta_2 \to 0} \int_{c_i+\delta_1}^{c_{i+1}-\delta_2} f(x)dx.$$

Если $c_1 = a$, то первое слагаемое в правой части (3) отсутствует. Если $c_n = b$, то отсутствует последнее слагаемое.

Определение 2. Интегралы вида (1) – (3) из разделов 3.1 и 3.4 называются ***несобственными*** интегралами (в отличие от изученных в главе 2 определенных интегралов Римана, называемых ***собственными***).

ПРИМЕР 1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Здесь особые точки подынтегральной функции – точки $x = \pm 1$. По формуле (3) имеем

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\delta_2 \to 0} \arcsin\left(1-\delta_2\right) - \lim_{\delta_1 \to 0} \arcsin\left(-1+\delta_1\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right) = \pi. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Подынтегральная функция на отрезке $[0, 1]$ имеет единственную особую точку: $x = 0$. По определению получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\delta\to 0}\begin{cases} \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\delta^1, & \text{при } p \ne 1, \\ \ln|x|\Big|_\delta^1, & \text{при } p = 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} - \lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\delta^{1-p}}{1-p}, & p \ne 1, \\ -\lim\limits_{\delta\to 0}\ln|\delta|, & p = 1, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & p < 1, \\ +\infty, & p \ge 1. \end{cases}$$

Итак, **несобственный интеграл** $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ **сходится при p < 1, а при p ≥ 1 этот интеграл расходится**, (в отличие от несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ из примера 1 п.3.1).▪

ПРИМЕР 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Особая точка $x = 1$ лежит внутри отрезка интегрирования. По определению,

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left.\frac{-1}{(x-1)}\right|_0^{1-0} - \left.\frac{1}{(x-1)}\right|_{1+0}^2 =$$

$$= -\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{(x-1)} - 1 - 1 + \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{(x-1)} = -(-\infty) - 2 + (+\infty) = +\infty.$$

Интеграл расходится. ▪

Замечание. Пример 3 демонстрирует, как важно начинать исследование несобственного интеграла с определения особых точек. Ведь, если решать его формально по формуле Ньютона – Лейбница для определенных интегралов:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\left.\frac{1}{x-1}\right|_0^2 = -2, \quad (???)$$

был бы получен неверный результат.

Для несобственных интегралов от неограниченных функций справедливы те же утверждения, что и для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования. Сформулируем, например теоремы сравнения для интеграла вида (2) (для интегралов вида (1) и (3) они формулируются и доказываются аналогично).

Теорема 1. Если для некоторого числа $\delta > 0$ при $a \le x \le a + \delta$ имеет место неравенство:

$$0 \le f(x) \le g(x),$$

то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$, (a – особая точка функции $g(x)$) следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, (a – особая точка функции $f(x)$), а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Теорема 2. Если существует предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 \le k \le +\infty,$$

причем для некоторого положительного числа δ при $a \le x \le a + \delta$ справедливы неравенства $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$, то из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b g(x)dx$ при $0 \le k < \infty$ следует сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ при $0 < k \le \infty$ следует расходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$ (точка a – особая точка).

Теорема 3. Если сходится несобственный интеграл $\int_a^b \left|f(x)\right|dx$, то сходится интеграл $\int_a^b f(x)dx$, (a – особая точка функции $f(x)$).

Определение 3. Пусть несобственный интеграл (2) сходится. Тогда он называется ***абсолютно сходящимся***, если, наряду с ним, сходится и интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{4}$$

и ***условно сходящимся***, если интеграл (4) расходится.

Замечание. Для исследования сходимости интеграла (2) по теоремам 1 и 2 функцию $f(x)$ часто сравнивают со степенной функцией $1/x^p$ (см. пример 2).

ПРИМЕР 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+4x}\,dx. \tag{5}$$

Здесь точка $x = 0$ – особая точка. В окрестности нуля бесконечно малая функция $\ln(1+x)$ эквивалентна x, а функция $x^2 + 4x^3$ эквивалентна x^2. Тогда, сравнивая подынтегральную функцию с функцией $\dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^2+4x^3}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x)}{x^2+4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+4x} = 1 .$$

Но интеграл $\int_0^1 \dfrac{dx}{x}$ расходится, следовательно, по теореме 2 расходится и интеграл (5). ▪

ПРИМЕР 5. ***Интегралом Эйлера I-го рода***, или ***бета-функцией***, называется интеграл:

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx, \tag{6}$$

где a и b – положительные постоянные.

При $a \geq 1$ и $b \geq 1$ в интеграле (6) особых точек нет, при $a < 1$ особая точка – ноль, при $b < 1$ особая точка – единица.

Разложим интеграл (6) на сумму двух интегралов:

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx + \int_{1/2}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = I_1 + I_2,$$

и оценим каждое из слагаемых.

При $x \leq 1/2$ и $b < 1$ имеем: $x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \dfrac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}} \leq \dfrac{x^{a-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-b}} = x^{a-1} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{b-1}$.

При $b \geq 1$ и $0 \leq x \leq 1/2$ имеем: $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leq x^{a-1}$.

Интеграл $\displaystyle\int_0^{1/2} x^{a-1}dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1-a}}$ сходится при $p = 1 - a < 1$, т.е. при $a > 0$.

То же справедливо и для интеграла: $\displaystyle\int_0^{1/2} x^{a-1}(1/2)^{b-1}dx = (1/2)^{b-1}\int_0^{1/2} x^{a-1}dx$. Следовательно, по теореме 1 интеграл I_1 сходится при $a > 0$ для всех b.

При $x \geq 1/2$ и $a < 1$ имеем:

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}} \leq \frac{(1-x)^{b-1}}{(1/2)^{1-a}} = (\frac{1}{2})^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

После замены $y = 1 - x$ получаем

$$\int_{1/2}^{1} (1-x)^{b-1}dx = -\int_{1/2}^{0} y^{b-1}dy = \int_0^{1/2} y^{b-1}dy = \int_0^{1/2} \frac{dy}{y^{1-b}}.$$

Этот интеграл сходится при $1 - b < 1$, т.е. при $b > 0$.

При $a \geq 1$ и $1 \geq x \geq 1/2$ имеем: $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leq (1-x)^{b-1}$.

Следовательно, по теореме 1 интеграл I_2 сходится при $b > 0$.

Таким образом, интеграл Эйлера I-го рода определен (сходится) для любых положительных значений a и b. ▪

ПРИМЕР 6. ***Интегралом Эйлера II-го рода***, или ***гамма-функцией***, называется интеграл

$$\Gamma(a)=\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}dx,\quad a>0\,. \tag{7}$$

Для исследования интеграла (7) на сходимость разобьем его на сумму двух интегралов:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}dx=\int\limits_0^{1} x^{a-1}\cdot e^{-x}dx+\int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}dx=I_1+I_2\,.$$

Если $a\ge 1$, то подынтегральная функция непрерывна, а значит, I_1 – собственный интеграл.

При $0<a<1$ и $x\ge 0$ имеем $x^{a-1}e^{-x}\le x^{a-1}$. Поэтому в силу теоремы 1 интеграл $\int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится, если сходится интеграл $\int\limits_0^1 x^{a-1}dx$, т.е. при $a>0$ (подробнее см. пример 2).

Исследуем теперь на сходимость интеграл I_2.

Известно, что для достаточно больших значениий x (т.е. при $x\gg 1$) и при любом положительном числе λ справедливо соотношение: $\ln x<x^{\lambda}<e^{x}$. Поэтому, приняв $\lambda=2a$, получим: $e^{x/2}>x^{a}$ при $a>0$. Тогда подынтегральная функция в (7) удовлетворяет неравенству: $x^{a-1}e^{-x}=\dfrac{x^a}{xe^{x/2}}\cdot\dfrac{1}{e^{x/2}}<\dfrac{1}{e^{x/2}}$. Поскольку $\int\limits_1^{\infty} e^{-x/2}dx=-2e^{-x/2}\Big|_1^{\infty}=2e^{-1/2}<\infty$, то по теореме 1 п. 3.3 интеграл I_2 сходится при $a>0$.

Таким образом, доказано, что интеграл Эйлера II-го рода (7) сходится при любом положительном значении параметра a. ▪

Замечание. Отметим важное свойство гамма-функции. Имеем

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Для любого натурального значения n, применив формулу интегрирования по частям, получим

$$\Gamma(n) = \int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx = -\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} de^{-x} = -\left(x^{n-1} e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx^{n-1} \right) =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{+\infty} x^{n-2} \cdot e^{-x} dx = (n-1)\cdot\Gamma(n-1).$$

Повторяя процедуру интегрирования по частям, приходим к формуле

$$\Gamma(n) = (n-1)\cdot\Gamma(n-1) = (n-1)\cdot(n-2)\cdot\Gamma(n-2) = \ldots$$
$$= (n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot\Gamma(1).$$

Отсюда получаем известное соотношение, связывающее гамму-функцию натурального аргумента n и факториал этого числа:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Таким образом, гамма-функция представляет собой обобщение понятия факториала на множество неотрицательных чисел.

3.5. Интегралы, зависящие от параметра.

Интегралы Эйлера представляют собой пример несобственных интегралов, зависящих от параметра. Такие интегралы можно рассматривать в качестве функции, аргументом которой является параметр. Тогда с этой функцией можно производить операции, известные из курса математического анализа, в частности, интегрировать или дифференцировать. Сформулируем некоторые получающиеся при этом результаты.

Интегрирование под знаком интеграла.

Исследуем интеграл:

$$I(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

в котором и подынтегральная функция, и пределы интегрирования зависят от параметра y. В этом случае и результат интегрирования будет представлять собой функцию переменной y.

Пусть функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны, а функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности своих переменных. В этом случае существует интеграл:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dx. \tag{2}$$

В частном случае, если функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ есть постоянные: $\varphi_1(y) \equiv a$; $\varphi_2(y) \equiv b$, то в равенстве (2) можно поменять порядок интегрирования:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy. \tag{3}$$

Дифференцирование под знаком интеграла.

Теорема 1. Пусть функция $I(y)$ задана равенством:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx, \tag{4}$$

где функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$ в прямоугольнике: $a \le x \le b, c \le y \le d$.

Тогда существует производная функции (4), причем

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b f'_y(x, y)dx. \tag{5}$$

ПРИМЕР 1. Найти производную функции $I(y)=\int\limits_0^1 \ln\left(x^2+y^2\right)dx.$

Имеем по формуле (5):

$$I'(y)=\int\limits_0^1\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y dx=\int\limits_0^1\frac{2y}{x^2+y^2}dx=2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}. \ ■$$

Теорема 2. Пусть функция $I(y)$ задается формулой (1):

$$I(y)=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx,$$

где функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $a \le x \le b,\ c \le y \le d$, функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны при $c\le y\le d$ и принимают значения в интервале от a до b. Тогда функция $I(y)$ непрерывна при $c\le y\le d$.

Если к тому же в указанном прямоугольнике существует и непрерывна частная производная $f'_y(x,y)$, а также существуют производные $\varphi'_1(y)$ и $\varphi'_2(y)$, то производная интеграла $I(y)$ существует определяется по формуле

$$I'(y)=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f'_y\left(x,y\right)dx+\varphi'_2(y)\cdot f\left(\varphi_2(y),y\right)-\varphi'_1(y)\cdot f\left(\varphi_1(y),y\right). \qquad (6)$$

ПРИМЕР 2. Найти производную функции $I(y)=\int\limits_y^{y^2} e^{yx^2}dx$.

По формуле (6) получаем

$$I'(y)=\int\limits_y^{y^2}(e^{yx^2})'_y\,dx+(y^2)'_y\cdot\left(e^{yx^2}\right)\Big|_{x=y^2}-(y)'_y\cdot\left(e^{yx^2}\right)\Big|_{x=y}=$$

$$=\int\limits_y^{y^2}x^2e^{yx^2}dx+2ye^{y^5}-e^{y^3}. \ ■$$

Интегрирование и дифференцирование по параметру в несобственных интегралах.

Введем вначале важное понятие равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Определение. Несобственные интегралы

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx \tag{7}$$

и

$$\int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx\,,\ \ (a-\text{особая точка}) \tag{8}$$

называются ***сходящимися равномерно*** по переменной y, принадлежащей некоторой области U, если они сходятся при любом фиксированном значении $y \in U$ и величина δ в критерии сходимости несобственного интеграла (см. п. 3.3) не зависит от значения y, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x,y)dx\right|<\varepsilon\ \ \text{для}\ \forall b',b''>\delta\ \ \text{и}\ \forall y\in U$$

– для интеграла (7),

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\left|\int\limits_{a+b'}^{a+b''} f(x,y)dx\right|<\varepsilon\ \ \text{для}\ \forall b',b'':0<b',b''<\delta\ \ \text{и}\ \forall y\in U$$

– для интеграла (8).

Сформулируем **свойства равномерно сходящегося интеграла** (7). (Аналогичные свойства справедливы и для интеграла (8)):

❶. Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $x \ge a$ и $c \le y \le d$ и интеграл (7) сходится равномерно при $c \le y \le d$, то функция $I(y)=\int\limits_{a}^{\infty} f(x,y)dx$ непрерывна по y при $c \le y \le d$.

❷. При условиях, сформулированных в свойстве 1, справедлива формула интегрирования под знаком интеграла:

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy\,.$$

❸. Если функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны, несобственный интеграл (7) сходится, а интеграл $\int_a^\infty f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно, то имеет место формула дифференцирования под знаком интеграла:

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty f'_y(x,y)dx\ .$$

Интегрирование и дифференцирование по параметру иногда позволяет значительно упростить процедуру вычисления определенных интегралов:

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $A = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

Соответствующий неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x}{x}dx$ не может быть выражен в элементарных функциях, он носит название ***интегрального синуса***.

Для вычисления искомого интеграла A рассмотрим функцию

$$I(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\cdot\frac{\sin x}{x}dx, \quad t \ge 0\,.$$

Тогда $A = I(0)$.

Дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$I'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x dx\,.$$

Этот интеграл легко вычисляется при $t > 0$:

$$I'(t)=\frac{1}{t}\int_0^{\infty}\sin x\,de^{-tx}=\frac{1}{t}\left(\sin x\,e^{-tx}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-tx}\cos x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{t^2}\int_0^{\infty}\cos x\,de^{-tx}=\frac{1}{t^2}\left(\cos x\,e^{-tx}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-tx}\sin x\,dx\right)=\frac{1}{t^2}\left(-1-I'(t)\right).$$

Отсюда

$$I'(t)=-\frac{1}{1+t^2}.$$

Интегрируя полученное соотношение, находим

$$I(t)=-\int\frac{1}{1+t^2}dt=-\operatorname{arctg}t+C.$$

Постоянную интегрирования C можно определить из условия $I(+\infty)=0$:

$$0=-\frac{\pi}{2}+C\quad\Rightarrow\quad C=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $I(t)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}t$. По свойству 1 функция $I(t)$ непрерывна, поэтому искомый интеграл может быть найден в результате предельного перехода:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=I(0)=\lim_{t\to 0}I(t)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}t\right)=\frac{\pi}{2}.\ ■$$

Теоретические вопросы к главе 3.

1. Дать определения несобственного интеграла с бесконечным пределом.
2. Дать определение несобственного интеграла от неограниченной функции.
3. В каком случае интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2+4x+4}$ является несобственным?
4. Какие интегралы называются интегралами Эйлера? При каких значениях параметра они сходятся?
5. Справедлива ли следующая запись

$$\int\limits_{-e+1}^{e+1} \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Bigg|_{-e+1}^{e+1} = \ln|e| - \ln|-e| = 1-1 = 0\,?$$

6. Найти производную функции $I(y) = \int\limits_y^5 \sin(xy)dx$ двумя способами: 1) вычислив предварительно интеграл; 2) используя формулу (6) из раздела 3.5. Сравнить результаты.

Задачи к главе 3.

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2+1}$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\cos x\, dx$.

5. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x}\sin x\, dx$.

6. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x} dx$.

7. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$.

9. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x^2+1} dx$.

10. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

11. $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2}$.

12. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

13. $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx$.

14. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

15. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^3} dx$.

16. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

17. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{\ln x}}$.

18. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^{3/2}}$.

19. $\int\limits_{1}^{\infty} \ln x dx$.

20. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

21. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3-1}}$.

22. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 2x}$.

23. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{dx}{x\ln 2x(\ln(\ln 2x))^3}$.

24. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$.

25. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+4}}$.

26. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \operatorname{arctg} x^3 dx}{1+x^6}$.

27. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{\left(x^4+5\right)^{1/2}}$.

28. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-2x} dx$.

29. $\int\limits_{2}^{\infty} \ln 3x dx$.

30. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x\, dx}{1+x^2}$.

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

31. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^4}$.

32. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{\ln x}}$.

33. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(2x-1)^{3/2}}$.

34. $\int\limits_{0}^{1} \ln x dx$.

35. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

36. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

37. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

38. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x\ln x}$.

39. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x}$.

40. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

41. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x}$.

42. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

43. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2}$.

44. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

45. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2+1}{x^3}dx$.

46. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

47. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x(x-2)^2}$.

48. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$.

49. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

50. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

51. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$.

52. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

53. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

54. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{4x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}$.

55. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\sin^2 x}$.

56. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}$.

57. $\int\limits_{0}^{1} \frac{(2x+5)dx}{x^2+5x}$.

58. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\left(4x+3\sqrt{x}\right)dx}{\left(x^2+x\sqrt{x}\right)^2}$.

59. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{3x\ln^3 x}$.

60. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos dx}{\sqrt{\sin x}}$.

Исследовать интегралы на сходимость:

61. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^3+\sqrt{x^2+4}}{3x^2+x^4+5}dx$.

62. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{3\sqrt[3]{x^3+1}-2x\sqrt{x}}{x^2+4}dx$.

63. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3+3x+4}+2\sqrt[3]{x^2+6}}{3\sqrt[3]{x^8+24}+10}dx$.

64. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{3x^3+8x+6}-2x+\sqrt{x^2+8}}{3\sqrt[3]{x^4+4x^6}+x^2}dx$.

65. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{3x+8x^2+\sqrt{x^3+4}}{3x^8+2\sqrt{x^2+4}}dx$.

66. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{2x\sqrt[3]{x^4+5}+5x}{6x^6+4x^4+2\sqrt{x^2+1}}dx$.

67. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{2x\sqrt[3]{x^2+4}+3\sqrt{x\sqrt{x}}}{3x^4+25x^2+6}dx$.

68. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{2x\sqrt[3]{3x^2+8}+5x}{3x^2+28}dx$.

69. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{3x+\sqrt{x^3+4}}{5x^2+16x^4+3\sqrt[3]{x^2}}dx$.

70. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{3x\sqrt{x}-16\sqrt{x^2+4}}{5x^8+16x^2+25\sqrt[3]{x^{12}+4}}dx$.

71. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+6}+18}{\sqrt[3]{x^{12}+5}+2x^2}dx$.

72. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{3x^2+5x+6}{3x^2+\sqrt{x^6+8}}dx$.

73. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{2x+3x^{18}+\sqrt{x}}{3x^2+16+2\sqrt[3]{x^2}}dx$.

74. $\int\limits_{5}^{\infty} \frac{5x\sqrt{x}-6x+3}{5x^2+8x^4+\sqrt[3]{x^{12}+4}}dx$.

75. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+4}+5x-6}{3\sqrt[3]{x^8+6}+\sqrt{x^{10}+4}}dx$.

76. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{3x^2\sqrt{x+5}+8x}{3\sqrt[3]{x^4+25}+\sqrt[5]{x^{20}+4}}dx$.

77. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{8x^2\sqrt{x+5}-4x}{2\sqrt[3]{x^8+6}+24x^4}dx$.

78. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{2x\sqrt{x}+5}{3\sqrt[3]{x^{12}+4}+5x^2+6}dx$.

79. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{16\sqrt[3]{x^2+4x^3+8}+3\sqrt{x}}{25x^4+13x^2+6}dx$.

80. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{2\sqrt{x^3+8x-4}+\sqrt[3]{x^2+3}}{x^4+2x^2+10}dx$.

81. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{3x^2+5x+16}{16x^4+32\sqrt[3]{x^{12}+8x^2+4}}dx$.

82. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+4x+3}}{5x^4+30x^2+16\sqrt{x^2+1}}dx$.

83. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{3x^5+4x^3+2}{3\sqrt[3]{x^6+8}+4x^2+5}dx$.

84. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{x^3+2x+4}{2\sqrt[3]{x^{12}+4}+x^4+3}dx$.

85. $\int\limits_{5}^{\infty} \frac{3x^2+8x^{3/2}+6}{3\sqrt[3]{x^{16}+5}+5x^{10}}dx$.

86. $\int\limits_{6}^{\infty} \frac{2x^2+\sqrt[3]{3x^4+1}+2\sqrt{x^3}}{2x^{16}+5x^{10}+8}dx$.

87. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{2x^3+3x^2-8}{25\sqrt{x^8+2x^4}+3\sqrt{x^2+4}}dx$.

88. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{2x^2+3\sqrt[3]{x^4+3}+5x}{x^{16}+25x^8+3}dx$.

89. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{2\sqrt[3]{2x^5+8x+9}+\sqrt{x+3}}{3x^2+16x^4+5}dx$.

90. $\int\limits_{4,5}^{\infty} \frac{3x^2+4x+5}{3\sqrt[3]{x^4+25x^2+1}+5\sqrt{x^6+8}}dx$.

ГЛОССАРИЙ

Двойной интеграл (*double integral*) – обобщение понятия определенного интеграла на двумерный случай. Определяется как предел соответствующих интегральных сумм.

Диаметр множества (diameter of a set) – наибольшее расстояние между двумя точками множества.

Замыкание области (*closure of a domain*) – объединение области и ее границы.

Криволинейный интеграл (*curvilinear integral*) – обобщение понятия определенного интеграла, связанное с заменой отрезка интегрирования на дугу кривой линии.

Неопределенный интеграл (*indefinite integral*) – множество всех первообразных подынтегральной функции.

Несобственный интеграл (*improper definite integral*) – интеграл, один из пределов интегрирования которого бесконечен, а также интеграл от разрывной функции.

Определенный интеграл (*definite integral*) – предел последовательности интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка интегрирования.

Первообразная (*antiderivative*) функции $f(x)$ – функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$.

Повторный интеграл (*iterated integral*) – интеграл от функции двух переменных, взятый последовательно по одной переменной, а затем по другой.

Потенциал (потенциальная функция) вектора (*potential*) – функция трех переменных, частные производные которой по соответствующим координатам совпадают с координатами вектора.

Правильная область 1-го типа (*regular domain of 1-st type*) – область на плоскости, ограниченная прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$.

Правильная область 2-го типа (*regular domain of 2-nd type*) – область на плоскости, ограниченная прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, где функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$ и $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$.

Рациональная дробь (***rational fraction***) – функция вида $f(x)=\dfrac{P(x)}{D(x)}$, где $P(x)$ и $D(x)$ – многочлены.

Сапог Шварца (***Schwarz's boot***) **–** вписанный в цилиндр многогранник, сумма площадей граней которого стремится к бесконечности при стремлении диаметров граней к нулю.

Связное множество (***connected set***) – множество, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству.

Тройной интеграл (***triple integral***) – обобщение понятия определенного интеграла на трехмерный случай. Определяется как предел соответствующих интегральных сумм.

«Хорошая» кривая (***regular curve***) **–** кривая, граница которой составлена из конечного числа графиков непрерывных функций.

Циркуляция вектора (***circulation***) **–** криволинейный интеграл II-рода от векторной функции по замкнутому контуру.

Якобиан (***Jacobian***) **–** определитель, составленный из частных производных n функций, зависящих от n переменных.

Материалы, относящиеся к данному изданию можно найти на сайте кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:

http://kvm.gubkin.ru/index.html