Т. Г. НЕЗБАЙЛО

НОВАЯ ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Санкт-Петербург
КОРОНА-Век
2007

УДК 372.8 373 5
Н44

В тексте используются результаты, полученные с помощью специализированной компьютерной программы символьных вычислений — MAPLE (десятая версия), а также следующие условные обозначения и равенства:

$C_j^i = C(i,\ j)$ — биномиальные коэффициенты;

hypergeom — гипергеометрическая функция;

pochhammer — функция Похгаммера;

$\Gamma(m+1)$, $\Gamma(p,\ x-s)$ — полная и неполная гамма-функции;

$[f(x)]_n$ — n-кратный интеграл от функции $f(x)$ по переменной x; $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Например: $[f(x)]_0 = f(x)$, $[f(x)]_1 = \int f(x)\,dx$, $[f(z)]_2 = \iint f(z)\,dz\,dz$, $[f(s)]_3 = \iiint f(s)\ ds\ ds\ ds$ и так далее.

I — мнимая единица.

$R(Q)$ — реальная часть комплексной функции Q.

$I(Q)$ — мнимая часть комплексной функции Q.

$$Ei(a,\ z) = \int_1^\infty e^{(-\_k1\, z)}\_k1^{(-a)}d\_k1$$

$$\mathrm{MeijerG}\left(\left[\left[0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right],[\ ]\right],\left[[0],\left[-\frac{1}{2}+\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}\right]\right],\ -x^2\right) =$$

$$= \frac{2^{(-n)}\sqrt{\pi}\ \mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ 1\right],\left[1-\frac{n}{2},\frac{3}{2}-\frac{n}{2}\right],\ x^2\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right)\Gamma(1-n)}.$$

$$\mathrm{LegendreP}(a, b, z) = \frac{\sqrt{(z+1)^b}\ \mathrm{hypergeom}\left([-a,\ a+1],[1-b],\ \frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)}{\sqrt{(z-1)^b}\ \Gamma(1-b)}.$$

Курсивом излагаются доказательства и пояснения, которые можно пропустить при первом чтении.

Те формулы, которые очень важны, очерчены прямоугольником, остальные приводятся без выделения.

ISBN 978-5-903383-41-2

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Бесконечно мало всегда больше чем ничего.

Основы теории **дифференциального** и **интегрального исчисления** заложены независимо в трудах **Ньютона и Лейбница** в период с **1666** по **1702** год [1]. И хотя с тех пор эта теория существенно обогатилась трудами многих выдающихся математиков: **И. Бернулли, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, Коши, Лобачевского** и других, она все же содержит **нерешенную до настоящего фундаментальную проблему: данная теория не задает математический алгоритм операции интегрирования**.

Действительно, алгоритм операции дифференцирования достаточно гладкой функции $f(x)$ определяется формулой:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}. \qquad (1.0)$$

В то же время под неопределенным интегралом от этой же функции $f(x)$ понимается равенство:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (1.1)$$

где C — произвольная постоянная, $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, т. е. любая функция, удовлетворяющая равенству:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x). \qquad (1.2)$$

Посредством какого математического алгоритма, т. е. последовательности известных математических операций, можно перейти от функции $f(x)$ к первообразной $F(x)$, пока современной математике неизвестно. Таким образом, под вычислением неопределенного интеграла от функции $f(x)$, т. е. определением $\int f(x)\,dx$, понимается набор математических алгоритмов, когда посредством искусственных приемов: замены переменной интегрирования, использования формулы интегрирования по частям и т.д., производится преобразование выражения $\int f(x)\,dx$ к виду, который принадлежит к уже известному множеству интегралов (1.1). В том случае, если это удается сделать, интеграл $\int f(x)\,dx$ считается вычисленным, если нет, то задача остается нерешенной.

Поскольку из формул (1.1) и (1.2) следует:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x), \tag{1.3}$$

то это означает, что операция интегрирования является обратной к операции дифференцирования.

Таким образом, **между операциями дифференцирования и интегрирования существует некая связь**, в определении которой и заключается задача настоящей работы. Устанавливается эта связь через исследование свойств n-й производной от функции $f(x)$.

2. *n*-е ПРОИЗВОДНЫЕ

2.1. Определение и вычисление производной *n*-го порядка

Будем предполагать (с целью простоты изложения), что все функции, о которых будет идти далее речь, являются достаточно гладкими и определенными как минимум в некоторой локальной области Ω, определяемой координатами $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Таким образом, все изучаемые функции n раз дифференцируемы и интегрируемы в области Ω.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Производной n-го порядка от функции $f(x)$, называется функция $G(n, x)$, содержащая параметр n (натуральное число) и определяемая формулой:**

$$G(n, x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x). \qquad (2.1.0)$$

Функция $G(n, x)$ образует последовательность

$$G(1, x),\ G(2, x),\ G(3, x)\ldots \qquad (2.1.1)$$

и обладает следующими свойствами.

а) Реккурентность.

$$G(n, x) = \frac{\partial}{\partial x} G(n-1, x). \qquad (2.1.2)$$

Доказательство. По определению

$$G(n, x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad G(n-1, x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x).$$

Подставляя в (2.1.2), получим:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x)\right) = \frac{d^n}{dx^n} f(x),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. **Если параметрическая функция $\boldsymbol{G(i, x)}$ является $\boldsymbol{i}$-й производной, то имеет место также формула:**

$$\boldsymbol{G(i+k, x) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(i, x), \quad i = 1 \,..\, n,} \tag{2.1.3}$$

$\boldsymbol{k}$ — натуральное число.

Доказательство. Так как $(i + 1)$-й член последовательности $G(i + 1, x)$ определяется из i-го по формуле (2.1.2), следовательно, i-й член последовательности (2.1.1) определяется из k-го, при условии $k < i$, по формуле:

$$G(i, x) = \frac{\partial^{i-k}}{\partial x^{i-k}} G(k, x), \quad i, \ k = 1 \,..\, n.$$

Данная формула является расширением формулы (2.1.2).

б) Инверсия порядка.

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} G(k, x) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(n, x), \tag{2.1.4}$$

n, k — натуральные числа.

Доказательство. В соответствии с (2.1.0)

$$G(n, x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad G(k, x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x).$$

Тогда (2.1.4) примет вид:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right) = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right)$$

или

$$\frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}} f(x) = \frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}} f(x),$$

что и требовалось доказать.

в) Свойство аддитивности.

Пусть $G_1(k, x)$ и $G_2(s, x)$ — соответственно k-я и s-я производные от функций $f(x)$, $\varphi(x)$. Тогда

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(G_1(k, x) + G_2(s, x)) = G_1(k + n, x) + G_2(s + n, x). \tag{2.1.5}$$

г) Свойство разложения.

Если $G_1(k, x)$ и $G_2(k, x)$ — k-е производные от функций $f(x)$, $\varphi(x)$ соответственно, то

$$G(k, x) = G_1(k, x) + G_2(k, x) \tag{2.1.6}$$

является k-й производной от функции $f(x) + \varphi(x)$.

Доказательство. Свойство очевидно, так как по определению (2.1.0):

$$G_1(k, x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x), \quad G_2(k, x) = \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right) + \left(\frac{d^k}{dx^k} \varphi(x)\right) = \frac{d^k}{dx^k}(f(x) + \varphi(x)) = G(k, x),$$

что и требовалось доказать.

Иногда возникает обратная задача: Задана некая параметрическая функция $G(n, x)$. Установить является ли она n-й производной от некоторой функции $f(x)$.

Ответ на этот вопрос дает следующая **ТЕОРЕМА:**

Параметрическая функция $G(n, x)$ является n-й производной от некоторой функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию (2.1.2).

Доказательство. Для того чтобы $G(n, x)$ являлась n-й производной, необходимо и достаточно, чтобы она определялась формулой (2.1.0). Следовательно, для этого необходимо, чтобы $(n + 1)$-й член последовательности (2.1.1) находился из n-го по формуле (2.1.2). Теорема доказана.

▶ **Пример 1.** Задана параметрическая функция:

$$G(i,\ x) = x^{i}.$$

Доказать, что эта функция не является i-й производной.

Доказательство. Так как

$$G(i+1,\ x) = x^{(i+1)}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} G(i,\ x) = \frac{\partial}{\partial x} x^{i} = i x^{(i-1)},$$

то в соответствии с формулой (2.1.2) эти равенства должны были давать один и тот же результат. Так как это не так, то исходная параметрическая функция не является i-й производной.

▶ **Пример 2.** Доказать, что параметрическая функция:

$$G(i,\ x) = (p \ln(a) + q(\ln(b))^{i} a^{(px)} b^{(bx)} \qquad (2.1.8)$$

представляет собой i-ю производную.

Доказательство. Так как

$$G(i+1,\ x) = (p \ln(a) + q \ln(b))^{(i+1)} a^{(px)} b^{(qx)}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} G(i,\ x) = \frac{\partial}{\partial x}((p \ln(a) + q \ln(b))^{i} a^{(px)} b^{(qx)}) = (p \ln(a) + q \ln(b))^{(i+1)} a^{(px)} b^{(qx)},$$

т. е. правые части их раны. Таким образом, условие (2.1.2) выполнено, поэтому параметрическая функция (2.1.8) определяет i-ю производную.

Так как операция дифференцирования преобразует функцию $G(n, x)$ в $G(n+1, x)$, то возникает вопрос о существовании функций, инвариантных относительно операции дифференцирования, т. е. удовлетворяющих условию:

$$G(n, x) = \frac{\partial}{\partial x} G(n, x).$$

Решая это дифференциальное уравнение, устанавливаем, что такой единственной является функция:

$$G(n, x) = Ce^{x},$$

C — произвольная постоянная.

Эта функция не зависит от параметра n.

Очевидно, что функция $G(n, x)$ является, в общем случае, принципиально иной, чем $f(x)$, так как она содержит дополнительный новый параметр — n. Следовательно, по функции $f(x)$ невозможно ничего сказать о виде функции $G(n, x)$.

Из условия (2.1.2) следует обратное равенство:

$$G(i, x) = \int G(i+1, x)\,dx + C, \quad i = 1\,..\,n, \tag{2.1.9}$$

C — произвольная постоянная. Или:

$$\int \frac{\partial}{\partial x} G(i, x)\,dx = G(i, x) + C. \tag{2.1.10}$$

Таким образом, формула (2.1.10) определяет формулу вычисления неопределенного интеграла, не только если $G(i, x)$ является i-й производной, но и даже произвольной дифференцируемой функцией.

Аналогично из (2.1.3) следует формула:

$$G(i, x) = [G(i+k, x)]_k + \sum_{p=0}^{k-1} \frac{c_p x^p}{p!}, \quad i = 1\,..\,n, \tag{2.1.11}$$

c_p — произвольные постоянные.

В соответствии с формулой Коши [1]:

$$[G(i,\ x)]_k = \frac{1}{(k-1)!}\cdot\int\limits_0^x G(i+k,\ s)(x-s)^{(k-1)}ds.$$

Таким образом, (2.1.11) принимает вид:

$$G(i,\ x) = \frac{1}{(k-1)!}\cdot\int\limits_0^x G(i+k,\ s)(x-s)^{(k-1)}ds + \sum_{p=0}^{k-1}\frac{c_p x^p}{p!},\quad i = 1\ ..\ n. \tag{2.1.12}$$

Отсюда следует справедливость Утверждения: **если параметрическая функция $G(i, s)$ является i-й производной, то имеет место формула:**

$$\int\limits_0^x \boldsymbol{G(i+k,\ s)(x-s)^{(k-1)}ds = (k-1)!\,G(i,\ x) + (k-1)!\sum_{p=0}^{k-1}\frac{c_p x^p}{p!},\quad i = 1\ ..\ n} \tag{2.1.13}$$

▶ **Пример.** Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^x s^m(x-s)^{(k-1)}ds,\quad m,\ k \text{ — натуральные числа.} \tag{2.1.14}$$

Р е ш е н и е. Известно, что i-я производная от функции x^q, q — натуральное число, определяется формулой;

$$\varphi(x,\ i) = \frac{\Gamma(q+1)\,x^{(q-i)}}{\Gamma(q-i+1)},\quad \varphi(x,\ i) = \frac{\partial^i}{\partial x^i}x^q. \tag{2.1.15}$$

Следовательно,

$$\varphi(x,\ i+k) = \frac{\Gamma(q+1)\,x^{(q-i-k)}}{\Gamma(q-i+1-k)}.$$

Примем

$$m = q - i - k,$$

тогда

$$\varphi(x,\ q-m)=\frac{\Gamma(q+1)\,x^{m}}{\Gamma(m+1)}.$$

Следовательно, отсюда имеем:

$$x^{m}=\frac{\varphi(x,\,q-m)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(q+1)}.$$

Поэтому

$$s^{m}=\frac{\varphi(s,\,q-m)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(q+1)}.$$

Тогда (2.1.14) примет вид:

$$\int_0^x s^{m}(x-s)^{(k-1)}ds=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(q+1)}\cdot\int_0^x\varphi(s,\ q-m)(x-s)^{(k-1)}ds.$$

Так как в соответствии с формулой (2.1.13):

$$\int_0^x\varphi(s,\ q-m)(x-s)^{(k-1)}ds=(k-1)!\,\varphi(x,\ q-m-k)+(k-1)!\sum_{p=0}^{k-1}\frac{c_p\,x^{p}}{p!},$$

то с учетом (2.1.15) имеем:

$$\varphi(x,\ q-m-k)=\frac{\Gamma(q+1)\,x^{(m+k)}}{\Gamma(m+k+1)}.$$

Поэтому искомая формула принимает вид:

$$\int_0^x s^{m}(x-s)^{(k-1)}ds=\frac{\Gamma(m+1)(k-1)!\,x^{(m+k)}}{\Gamma(m+k+1)}.$$

Это в точности совпадает с известной табличной формулой.

Приведем примеры вычисления n-х производных.

Пример 1. Вычислить n-ю производную от функции $f(x) = e^{(kx)}$, k — const.

Решение. Выпишем последовательность вида (2.1.1) для этой функции:

$$f(x) = e^{(kx)},\quad \frac{d}{dx} f(x) = ke^{(kx)},\quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) = k^2 e^{(kx)},\quad \frac{d^3}{dx^3} f(x) = k^3 e^{(kx)}. \tag{2.1.16}$$

По индукции производная n-го порядка имеет вид:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{(kx)}) = k^n e^{(kx)}. \tag{2.1.17}$$

Действительно, задавая последовательно $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$... из формулы (2.1.17) следует последовательность (2.1.16).

Проверим выполнение условия (2.1.2).

$$k^{(i+1)} e^{(kx)} = \frac{\partial}{\partial x}(k^i e^{(kx)}) = k^{(i+1)} e^{(kx)}.$$

Таким образом, формула (2.1.17) действительно определяет n-ю производную от функции $e^{(kx)}$.

Пример 2. Вычислить n-ю производную от функции $f(x) = x^m$, m — натуральное число.

Решение. В этом случае последовательность (2.1.1) принимает вид:

$$x^m,\quad \frac{d}{dx} f(x) = mx^{(m-1)},\quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) = m(m-1)x^{(m-2)},\quad \frac{d^3}{dx^3} f(x) = m(m-1)(m-2)x^{(m-3)}.$$

Очевидно, что n-й член этой последовательности определяется формулой при $n \leqslant m$:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} x^m = A_n(m)x^{(m-n)},\quad A_n(m) = \frac{m!}{(m-n)!}. \tag{2.1.18}$$

Справедливость этой формулы устанавливается аналогично изложенному в примере 1.

Примечание. Как видим, полученная n-я производная (2.1.18) имеет принципиально другой вид, чем начальная функция x^m. Отметим, что вычисление производной n-го порядка от функции $f(x)$ в ряде случаев дает на первый взгляд «парадоксальные» результаты.

▶ **Пример 3.** Вычислим n-ю производную от функции $f(x) = C$, где C — произвольная постоянная. Действительно, функция $f(x) = C$ является частным случаем более общей функции

$$f(x) = Cx^m$$

при $m = 0$. Поэтому в соответствии с (2.1.18)

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(Cx^m) = C\frac{\partial^n}{\partial x^n}x^m = \frac{C\,m!\,x^{(m-n)}}{(m-n)!}.$$

Принимая в этом равенстве $m = 0$, получим:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}C = \frac{Cx^{(-n)}}{\Gamma(-n+1)}. \qquad (2.1.19)$$

Эта формула верна при $n = 0$ и в пределе для любых натуральных n. Как видим, формально n-я производная от постоянной C определяется выражением, не тождественным нулю.

В общем случае для определения вида n-й производной от $f(x)$ требуется развитая интуиция, связанная с определением вида $G(n, x)$, на основании установленной последовательности вида (2.1.1).

2.2. Производные n-го порядка от сложных функций

А. В том случае, если функция $f(x)$ допускает представление в виде произведения двух и более функций, например $f(x) = u(x)\,v(x)$, для вычисления производной n-го порядка от функции $f(x)$ можно воспользоваться формулой Лейбница [1]:

$$\frac{d^n}{dx^n}(u(x)\,v(x)) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\,\frac{d^i}{dx^i}(u(x))\,\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}v(x). \qquad (2.2.0)$$

▶ **Пример.** Вычислить n-ю производную от функции:

$$f(x) = xe^x. \qquad (2.2.1)$$

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой (2.2.0)

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^i}{dx^i}(x)\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}(e^x).$$

Так как

$$\frac{d^i}{dx^i}x = \frac{x^{(1-i)}}{(1-i)!}, \quad \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}(e^x) = e^x,$$

то

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = e^x \sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i x^{(1-i)}}{(1-i)!}.$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i x^{(1-i)}}{(1-i)!} = x + n,$$

то искомая формула имеет вид:

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = e^x(x+n). \qquad (2.2.2)$$

В. В том случае, если исходная функция $f(x)$ является сложной функцией, т. е. представима в виде:

$$f(x) = F(R), \quad R = R(x), \qquad (2.2.3)$$

формула для ее производной n-го порядка имеет вид [2]:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}F(R) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s C(k,s) R^s \frac{\partial^n}{\partial x^n}(R^{(k-s)}) \frac{d^k}{dR^k}F(R)}{k!}. \qquad (2.2.4)$$

Она определена только для натуральных значений n.

▶ **Пример 1.** Вычислить *n*-ю производную от функции:

$$f(x) = e^{(e^x)}. \tag{2.2.5}$$

Р е ш е н и е. Введем обозначения:

$$F(R) = e^R, \quad R = e^x. \tag{2.2.6}$$

Тогда в соответствии с формулой (2.2.4) получим:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{(e^x)}\right) = e^{(e^x)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s C(k,\ s)(k-s)^n e^{(k \cdot x)}}{k!}.$$

▶ **Пример 2.** Вычислить *n*-ю производную от функции:

$$f(x) = \sin(x^3 - 2x + 2). \tag{2.2.7}$$

Р е ш е н и е. Введем обозначения:

$$F(R) = \sin(R), \quad R = x^3 - 2x + 2. \tag{2.2.8}$$

Тогда в соответствии с формулой (2.2.4) получим: (2.2.9)

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin(x^3 - 2x + 2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} \cdot \sin\left(x^3 - 2x + 2 + \frac{k\pi}{2}\right)\right) \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C(k,\ s)(x^3 - 2x + 2)^s \frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^3 - 2x + 2)^{(k-s)}.$$

Установим значение

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^3 - 2x + 2)^{(k-s)}.$$

Так как в соответствии с формулой бинома Ньютона:

$$(x^3 - 2x + 2)^{(k-s)} = \sum_{i=0}^{k-s} \sum_{i_1=0}^{k-s-i} C(k-s,\ i)\, C(k-s-i,\ i_1)(-2)^{i_1} 2^{(k-s-i-i_1)} x^{(3i+i_1)},$$

то

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^3-2x+2)^{(k-s)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{k-s}\sum_{i_1=0}^{k-s-i}\mathrm{pochhammer}(3i+i_1-n+1,\ n)\,C(k-s,\ i)\,C(k-s-i,\ i_1)(-2)^{i_1}2^{(k-s-i-i_1)}x^{(3i+i_1-n)}.$$

Таким образом, искомое значение (2.2.9) принимает вид: (2.2.10)

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin(x^3-2x+2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\sin\left(x^3-2x+2+\frac{k\pi}{2}\right)\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s C(k,\ s)(x^3-2x+2)^s$$

$$\sum_{i=0}^{k-s}\sum_{i_1=0}^{k-s-i}\mathrm{pochhammer}(3i+i_1-n+1,\ n)\,C(k-s,\ i)\,C(k-s-i,\ i_1)(-2)^{i_1}2^{(k-s-i-i_1)}x^{(3i+i_1-n)}.$$

Непосредственная проверка (при $n=1,\ 2,\ 3\ ..\ N$) подтверждает правильность данной формулы.

2.3. Нормальные и особые *n*-е производные

Ранее было определено, что n-я производная $G(n,\ x)$ изменением параметра n определяет последовательность функций:

$$G(1,\ x),\ G(2,\ x),\ G(3,\ x)\ ..\ G(n,\ x). \tag{2.3.0}$$

В этом случае заведомо известны все функции $G(i,\ x)$, $i=1\ ..\ n$.

Расширим область определения параметра n на точку $n=k$, где k — произвольное целое число, в том числе и отрицательное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Если существует предел выражения в точке $n=0$**

$$\lim_{n\to 0} G(n,\ x)=f(x), \tag{2.3.1}$$

а для других точек $n=k$

$$\lim_{n\to k} G(n,\ x)=G(k,\ x), \tag{2.3.2}$$

где $G(k, x)$ — некоторая определенная функция, то n-я производная $G(n, x)$ называется нормальной в точке $n = k$. В противном случае она называется особой n-й производной в точке $n = k$.

Примечание. В принципе формулы (2.3.1), (2.3.2) определяют непрерывность функции $G(n, x)$ в соответствующих точках, однако данное определение необходимо ввиду чрезвычайной важности для дальнейшего изложения.

▶ **Пример 1.** Проверить, является ли n-я производная

$$G(n, x) = k^n e^{(kx)} \tag{2.3.3}$$

от функции $e^{(kx)}$ нормальной в точке $n = 0$.

Решение. Так как

$$G(0, x) = e^{(kx)},$$

что совпадает с исходной функцией, то приходим к выводу, что n-я производная (2.3.3) — нормальна в точке $n = 0$.

▶ **Пример 2.** Проверить, является ли n-я производная

$$G(n, x) = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!\, c^n}{(cx+b)^n} \tag{2.3.3}$$

от функции $\ln(cx + b)$ нормальной в точке $n = 0$.

Решение. Так как равенство

$$\lim_{n \to 0} G(n, x) = \lim_{n \to 0} \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!\, c^n}{(cx+b)^n} \tag{2.3.4}$$

не определено (т. е. не установлено), то функция $\ln(cx + b)$ определяет особую n-ю производную в точке $n = 0$. К классу функций, порождающих особые производные, относятся также функции: $\arccos x$, $\arcsin x$ и т. д.

Функция

$$f(x) = \arccos x \tag{2.3.5}$$

имеет особую n-ю производную в точке $n = 0$:

$$G(n,\ x) = -\frac{2^{(n-1)}\, x^{(1-n)}\, \mathrm{MeijerG}\left(\left[\left[0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right], [\ ]\right], \left[[0], \left[-\frac{1}{2} + \frac{n}{2},\ \frac{n}{2}\right]\right], -x^2\right)}{\sqrt{\pi}}, \tag{2.3.6}$$

так как при $n = 0$ отсюда следует:

$$\lim_{n \to 0} G(n,\ x) = -\arcsin x, \tag{2.3.7}$$

что не соответствует (2.3.5).

В том случае, если заданная n-я производная является особой в точке $n = k$, практически часто есть возможность перейти к другому ее представлению, которое уже будет являться нормальной n-й производной в данной точке.

Например, представим функцию $\ln x$ через гипергеометрическую функцию:

$$\ln x = (x - 1)\ \mathrm{hypergeom}([1,\ 1],\ [2],\ 1 - x). \tag{2.3.8}$$

Действительно, производная n-го порядка от $\ln x$ в представлении (2.3.8), после применения формулы Лейбница, имеет вид:

$$\frac{d^n}{dx^n} \ln x = \sum_{k=0}^{n} C(n,\ k) \frac{d^k}{dx^k}(x - 1) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \mathrm{hypergeom}([1,\ 1],\ [2],\ 1 - x). \tag{2.3.9}$$

Так как

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \mathrm{hypergeom}([1,\ 1],\ [2],\ 1 - x) = \frac{(-1)^{n-k}(n - k)!\ \mathrm{hypergeom}([n - k + 1,\ n - k + 1],\ [n - k + 2],\ 1 - x)}{n - k + 1},$$

$$\frac{d^k}{dx^k} x = \frac{x^{(1-k)}}{(1 - k)!}, \quad \frac{d^k}{dx^k}(-1) = -\frac{x^{(-k)}}{(-k)!},$$

то (2.3.9) приводится к виду:

$$G(n,\ x) = \frac{(x-1)(-1)^n\,\Gamma(n+1)\ \mathrm{hypergeom}([n+1,\ n+1],[n+2],1-x)}{n+1} -$$
$$-\ \theta(n)(-1)^n\ \Gamma(n)\ \mathrm{hypergeom}([n,\ n],\ [n+1],\ 1-x). \qquad (2.3.10)$$

Здесь $\theta(n)$ — специальная функция, $\theta(0) = 0$, $\theta(n) = 1$, n — натуральное число.

Проверим выполнение условия:

$$\lim_{n\to 0} G(n,\ x) = \ln x.$$

Действительно, из (2.3.10) имеем:

$$G(0,\ x) = (x-1)\ \mathrm{hypergeom}([1,\ 1],\ [2],\ 1-x) = \ln x,$$

что и требовалось показать.

Соответственно при $n = 1$, $n = 2$ из формулы (2.3.10) имеем:

$$G(1,\ x) = -\frac{x\ \mathrm{hypergeom}([2,2],[3],1-x)}{2} + \frac{\mathrm{hypergeom}([2,2],[3],1-x)}{2} + \mathrm{hypergeom}([1,\ 1],\ [2],\ 1-x),$$
$$G(2,\ x) = \frac{2\,\mathrm{hypergeom}([3,3],[4],1-x)\,x}{3} - \frac{2\,\mathrm{hypergeom}([3,3],[4],1-x)}{3} - \mathrm{hypergeom}([2,\ 2],\ [3],\ 1-x)$$

и т. д. Эти равенства в точности соответствуют

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2}{dx^2}\ln x = -\frac{1}{x^2} \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, n-я производная (2.3.10) от $\ln x$ является нормальной в точке $n = 0$.

3. ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

3.1. Сумма производных *n*-го порядка

Пусть задана n-я производная $G(x, n)$ от функции $f(x)$, нормальная в точке $n = 0$. Вычислим сумму S_n

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} G(i, x) \tag{3.1.1}$$

функциональной последовательности

$$G(0, x),\ G(1, x),\ G(2, x),\ G(3, x)\ldots,$$

где, очевидно, $G(0, x) = f(x)$.

С этой целью, дифференцируя левую и правую часть равенства (3.1.1), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_n = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=0}^{n} G(i, x)\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x} G(i, x) = \sum_{i=0}^{n} G(i+1, x). \tag{3.1.2}$$

Вычитая из (3.1.2) равенство (3.1.1), с учетом свойства (2.1.2) получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(S_n) - S_n = \sum_{i=0}^{n} G(i+1, x) - \sum_{i=0}^{n} G(i, x) = G(n+1, x) - G(0, x). \tag{3.1.3}$$

Так как $G(n, x)$ — нормальная n-я производная в точке $n = 0$, то справедливо:

$$G(0, x) = f(x).$$

Поэтому равенство (3.1.3) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_n - S_n = G(n + 1, x) - f(x). \tag{3.1.4}$$

Таким образом, получено линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции S_n.

Уравнение (3.1.4) имеет общее решение:

$$S_n = e^x \int (G(n+1,\ x) - f(x))\, e^{(-x)} dx + Ce^x; \tag{3.1.5}$$

C — const.

Произвольная постоянная C определяется из условия:

$$[S_n]_{n=0} = f(x).$$

В этом случае (3.1.5) принимает вид:

$$f(x) = e^x \int \frac{d}{dx}(f(x))\, e^{(-x)} dx - e^x \int f(x)\, e^{(-x)} dx + Ce^x. \tag{3.1.6}$$

Так как в соответствии с формулой интегрирования по частям:

$$\int \frac{d}{dx}(f(x))\, e^{(-x)} dx = f(x)\, e^{(-x)} + \int f(x)\, e^{(-x)} dx,$$

то (3.1.6) приводится к виду:

$$f(x) = f(x) + Ce^x.$$

Отсюда следует, что $C = 0$.

Поэтому искомая формула (3.1.5) принимает вид:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} G(i,\ x) = e^x \int (G(n+1,\ x) - f(x))\, e^{(-x)} dx.} \tag{3.1.7}$$

Таким образом, если параметрическая функция $G(i,\ x)$ является нормальной в точке $i = 0$ i-й производной от функции $f(x)$, то формула (3.1.7) определяет сумму этого ряда.

▶ **Пример.** Вычислить сумму ряда:

$$\sum_{i=0}^{n} \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right).$$

Р е ш е н и е. Так как

$$G(i,\ x) = \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad G(0,\ x) = \sin x,$$

то используем формулу (3.1.7).

В этом случае:

$$\sum_{i=0}^{n} \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right) = e^{x}\int\left(\sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) - \sin x\right)e^{(-x)}dx.$$

Так как

$$\int\left(\sin\left(x + \frac{\pi(n+1)}{2}\right) - \sin x\right)e^{(-x)}dx = \frac{1}{2}e^{(-x)}\left(\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) + \cos x + \sin x\right),$$

то в итоге имеем:

$$\sum_{i=0}^{n} \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) + \cos x + \sin x,$$

что строго совпадает с табличным значением.

Следствие. Если $G(n,\ x)$ — такая параметрическая функция, для которой выполнено условие:

$$\lim_{n\to\infty} G(n+1,\ x) = 0,$$

то имеет место формула:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^{i}}{dx^{i}} f(x) = -e^{x}\int f(x)\,e^{(-x)}dx. \qquad (3.1.8)$$

▶ **Пример 1.** Пусть задана функция

$$f(x) = e^{(kx)},$$

k — параметр, такой что $0 < k < 1$.

Так как

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{(kx)}) = k^n e^{(kx)},$$

то в этом случае:

$$\lim_{i \to \infty} k^i e^{(kx)} = 0.$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i}{\partial x^i}(e^{(kx)}) = -e^x \int e^{(kx)} e^{(-x)} dx \quad \text{или} \quad \sum_{i=0}^{\infty} k^i = -e^{(-kx)} e^x \int e^{((k-1)x)} dx.$$

Следовательно:

$$\sum_{i=0}^{\infty} k^i = -\frac{1}{k-1},$$

что совпадает с известным значением.

3.2. Основная теорема

Докажем теорему, именуемую далее **«Основной теоремой»**:

Если для заданной n раз дифференцируемой функции $f(x)$ последовательность:

$$f(x), \ \frac{d}{dx} f(x), \ \frac{d^2}{dx^2} f(x), \ \frac{d^3}{dx^3} f(x) \ldots$$

позволяет установить ее общее функциональное представление:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = G(n, x), \ n \text{ — натуральное число,}$$

такое, что $G(n, x)$ является нормальной производной в точке $n = 0$, т. е. выполняется условие:

$$\lim_{n \to 0} G(n, x) = f(x)$$

и при этом существует предел выражения:

$$\lim_{n \to (-1)} G(n, x),$$

то имеет место формула:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \lim_{n \to (-1)} \frac{d^n}{dx^n} f(x) + C,} \qquad (3.2.0)$$

C — const.

Доказательство. Так как n-я производная $G(n, x)$ от функции $f(x)$ является нормальной производной в точке $n = 0$, т. е. имеет место равенство:

$$\lim_{n \to 0} G(n, x) = f(x),$$

то будет иметь место также эквивалентное равенство:

$$\lim_{n \to (-1)} G(n+1, x) = f(x).$$

Поэтому формула (3.1.7) в результате преобразования:

$$\lim_{n \to (-1)} S_n = \int (G(0, x) - f(x))\, e^{(-x)} dx\, e^x = \int (f(x) - f(x))\, e^{(-x)} dx\, e^x = 0$$

принимает вид:

$$\lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n} G(i, x) = 0. \qquad (3.2.1)$$

▶ **Пример.** Проверить выполнение формулы (3.2.1) для функции:

$$f(x) = \sin x.$$

Р е ш е н и е. Так как i-я производная для этой функции равна

$$G(i,\ x) = \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right),$$

то

$$G(0,\ x) = \sin x.$$

Поэтому необходимое условие выполнено.

Следовательно, равенство (3.2.1) принимает вид:

$$\lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n} G(i,\ x) = \lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n} \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right).$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{n} \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right) = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2} + \frac{1}{2}\right)\sin x + \left(-\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2} + \frac{1}{2}\right)\cos x,$$

то поскольку

$$\lim_{n \to (-1)} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2} + \frac{1}{2}\right)\sin x + \left(-\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2} + \frac{1}{2}\right)\cos x = 0,$$

следовательно:

$$\lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n} \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Продолжая далее, представим равенство (3.2.1) в виде:

$$\lim_{n \to (-1)} \sum_{i=1}^{n} G(i,\ x) + f(x) = 0.$$

Отсюда

$$f(x) = -\lim_{n \to (-1)} \sum_{i=1}^{n} G(i,\ x). \tag{3.2.3}$$

Произведем замену индекса суммирования i на $i + 1$ в правой части равенства (3.2.3). Это приводит к соотношению:

$$f(x) = -\lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n-1} G(i+1,\ x).$$

Так как в силу (2.1.2)

$$G(i+1,\ x) = \frac{\partial}{\partial x} G(i,\ x),$$

то предыдущее равенство принимает вид:

$$f(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n-1} G(i,\ x)\right).$$

Правая часть этого равенства в итоге не изменится, если прибавить и отнять слагаемое $G(n,\ x)$:

$$f(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{n \to (-1)} \left(\sum_{i=0}^{n} G(i,\ x)\right) - G(n,\ x)\right).$$

В этом случае данное равенство представляется в виде:

$$f(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n} G(i, x)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{n \to (-1)} G(n, x)\right).$$

Так как по формуле (3.2.1)

$$\lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n} G(i, x) = 0,$$

то предыдущее равенство принимает вид:

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{n \to (-1)} G(n, x)\right). \qquad (3.2.4)$$

Поскольку по условиям Теоремы предел выражения

$$\lim_{n \to (-1)} G(n, x)$$

существует, т. е. представляет собой некоторую функцию, то интегрируя равенство (3.2.4), получаем искомую формулу для вычисления неопределенного интеграла (3.2.0).

Теорема доказана.

Таким образом, доказано, что при выполнении определяемых основной теоремой условий, формула (3.2.0) устанавливает искомый алгоритм операции интегрирования, т.е. определения выражения $\int f(x)\,dx$ и устраняет основную проблему в построенной Ньютоном и Лейбницем теории дифференциального и интегрального исчислений.

Следствие. **Если $G(n, x)$ является нормальной производной в точке $n = -1$, то формулу (3.2.0) можно использовать также в упрощенном виде:**

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \left\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\}_{n=-1} + C.} \qquad (3.2.5)$$

▶ **Пример 1.** Вычислить интеграл от постоянной C

$$\int C\,dx.$$

Р е ш е н и е. Так как по формуле (2.1.19)

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} C = \frac{Cx^{(-n)}}{(-n)!},$$

то искомый интеграл равен:

$$\int C\,dx = \lim_{n\to(-1)} \frac{Cx^{(-n)}}{(-n)!} = Cx,$$

что соответствует табличному значению.

▶ **Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int x^p\,dx,$$

p — натуральное число.

Р е ш е н и е. Так как

$$f(x) = x^p, \quad G(x,\ n) = \frac{\Gamma(p+1)\,x^{(p-n)}}{\Gamma(p-n+1)}.$$

Поэтому

$$\int x^p\,dx = \lim_{n\to(-1)} \frac{\Gamma(p+1)\,x^{(p-n)}}{\Gamma(p-n+1)} = \frac{\Gamma(p+1)\,x^{(p+1)}}{\Gamma(p+2)}$$

или окончательно:

$$\int x^p\,dx = \frac{x^{(p+1)}}{(p+1)},$$

что соответствует табличному значению.

▶ **Пример 3.** Вычислить интеграл

$$\int xe^x\,dx.$$

Р е ш е н и е. В соответствии с (2.2.2):

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = e^x(x+n).$$

Таким образом, используя (3.2.0), получаем:

$$\int xe^x dx = \lim_{n\to(-1)} (e^x)(x+n) = e^x(x-1)$$

или окончательно:

$$\int xe^x\,dx = e^x(x-1),$$

что совпадает с табличным значением.

▶ **Пример 4.** Вычислить интеграл

$$\int \sin(ax)\,dx,$$

a — постоянная.

Р е ш е н и е. Так как

$$f(x) = \sin x, \quad G(x,\ n) = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right),$$

то по формуле (3.2.0)

$$\int \sin(ax)\,dx = \lim_{n\to(-1)} a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) = -\frac{\cos(ax)}{a}.$$

Следовательно,

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a},$$

что соответствует табличному значению.

▶ **Пример 5.** Вычислить интеграл

$$\int \operatorname{sh}(ax)\,dx.$$

Р е ш е н и е. Так как

$$f(x) = \operatorname{sh}(ax), \quad G(x,\ n) = \frac{a^n(e^{(ax)} - (-1)^n e^{(-ax)})}{2},$$

то по формуле (3.2.0)

$$\int \operatorname{sh}(ax)\,dx = \lim_{n \to (-1)} \frac{a^n(e^{(ax)} - (-1)^n e^{(-ax)})}{2} = \frac{e^{(ax)} + e^{(-ax)}}{2a}.$$

Следовательно,

$$\int \operatorname{sh}(ax)\,dx = \frac{e^{(ax)} + e^{(-ax)}}{2a},$$

что соответствует табличному значению.

▶ **Пример 6.** Вычислить интеграл

$$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+m)}\,dx,$$

где a, b, c, m — постоянные.

Р е ш е н и е. Вычисляя n-ю производную от функции

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+m)},$$

получим формулу:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{(ax+b)(cx+m)}\right) = \frac{n!\,(-1)^n (cx+m)^{(-n-1)}(a^{(n+1)}(ax+b)^{(-n)}(cx+m)^{(n+1)} - c^{(n+1)}ax - c^{(n+1)}b)}{(ax+b)(am-bc)}.$$

Так как

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{(ax+b)(cx+m)}\right)\right]_{n=0} = \frac{1}{(ax+b)(cx+m)},$$

то

$$\lim_{n\to(-1)} \frac{n!\,(-1)^n (cx+m)^{(-n-1)} (a^{(n+1)} (ax+b)^{(-n)} (cx+m)^{(n+1)} - c^{(n+1)} ax - c^{(n+1)} b)}{(ax+b)(am-bc)} =$$

$$= \frac{-\ln(cx+m) + \ln(ax+b) - \ln a + \ln c}{am-bc}.$$

Следовательно, в итоге имеем:

$$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+m)}\,dx = \frac{-\ln(cx+m) + \ln(ax+b) - \ln a + \ln c}{am-bc} + C.$$

Примечание. Табличное значение интеграла:

$$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+m)}\,dx = \frac{-\ln(cx+m) + \ln(ax+b)}{am-bc}.$$

Разница составляет константу $\frac{-\ln a + \ln c}{am-bc}$, которая нивелируется выбором произвольной постоянной C.

3.3. Другие формулы, вытекающие из основной теоремы

Докажем **ТЕОРЕМУ 3.3. Если $G(n, x)$ является нормальной производной в точке $n = 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to(-s)} \frac{d^n}{dx^n} f(x)$, то s-кратный интеграл от функции $f(x)$ определяется формулой:**

$$\boxed{[f(x)]_s = \lim_{n\to(-s)} \frac{d^n}{dx^n} f(x) + \sum_{i=0}^{s-1} \frac{c_i x^i}{i!},} \tag{3.3.0}$$

где c_i — произвольные постоянные.

Доказательство. Действительно,

$$[f(x)]_s = \left[\lim_{n \to (-1)} \frac{d^n}{dx^n} f(x)\right]_{s-1} = \lim_{n \to (-1)} \frac{d^{n-s+1}}{dx^{n-s+1}} f(x).$$

Производя замену индекса n на $k + s - 1$, получаем:

$$[f(x)]_s = \lim_{k \to (-s)} \frac{d^k}{dx^k} f(x),$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Следствие. **Если $G(n, x)$ является нормальной производной в точке $n = -s$, то s-кратный интеграл от функции $f(x)$ определяется также формулой:**

$$[f(x)]_s = \left\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\}_{n=-s} + \sum_{i=0}^{s-1} \frac{c_i x^i}{i!},$$

где c_i — произвольные постоянные.

Следствие очевидно, в силу определения нормальной производной в заданной точке.

П р и м е ч а н и е. Фактически формула (3.3.0) является новым представлением формулы Коши и позволяет легко вычислить s-кратный интеграл, если известна производная n-го порядка от его подынтегральной функции $f(x)$.

▶ **Пример 1.** Вычислить трехкратный интеграл от постоянной C

$$\int C\,dx.$$

Р е ш е н и е. Так как

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} C = \frac{Cx^{(-n)}}{(-n)!},$$

то по формуле (3.3.0) имеем:

$$\iiint C\,dx\,dx\,dx = \lim_{n \to (-3)} \frac{Cx^{(-n)}}{(-n)!} + \sum_{i=0}^{2} \frac{c_i x^i}{i!}$$

или

$$\iiint C\,dx\,dx\,dx = \frac{Cx^3}{3!} + \sum_{i=0}^{2} \frac{c_i x^i}{i!},$$

c_i — постоянные, $i = 0, 1, 2$, что совпадает с табличным значением.

▶ **Пример 2.** Вычислить трехкратный интеграл от функции

$$f(x) = x^p.$$

Решение. Так как

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} x^p = \frac{\Gamma(p+1)\,x^{(p-n)}}{\Gamma(p-n+1)},$$

то по формуле (3.3.0) имеем:

$$\iiint x^p\,dx\,dx\,dx = \lim_{n\to(-3)} \frac{\Gamma(p+1)\,x^{(p-n)}}{\Gamma(p-n+1)} = \frac{\Gamma(p+1)\,x^{(p+3)}}{\Gamma(p+4)}$$

или окончательно:

$$\iiint x^p\,dx\,dx\,dx = \frac{\Gamma(p+1)\,x^{(p+3)}}{\Gamma(p+4)}.$$

Результат соответствует табличному значению.

Из доказанной теоремы вытекает **Утверждение**. **Имеет место формула:**

$$\int_0^x f(l)\,(x-l)^{(s-1)}\,dl = (s-1)!\,\lim_{n\to(-s)} \frac{d^n}{dx^n} f(x) + (s-1)!\sum_{i=0}^{s-1} \frac{c_i x^i}{i!}. \qquad (3.3.1)$$

Доказательство. Сравнивая формулу (3.3.0) с формулой Коши:

$$[f(x)]_s = \frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^x f(l)(x-l)^{(s-1)}\,dl,$$

получаем равенство (3.3.1).

▶ **Пример.** Вычислить интеграл

$$\int_0^x e^l (x - l)^{(s-1)} dl. \tag{3.3.2}$$

Р е ш е н и е. Так как

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x) = e^x,$$

то в соответствии с формулой (3.3.1) имеем:

$$\int_0^x e^l (x - l)^{(s-1)} dl = (s-1)!\, e^x - (s-1)! \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x^i}{i!}.$$

Здесь постоянные c_i были подобраны таким образом, чтобы это равенство выполнялось для любых натуральных s.

Анализируя равенство (3.3.1), приходим к выводу, что справедливо Утверждение: **Равенство**

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{s \to (-n)} \left(\frac{1}{(s-1)!} \cdot \int_0^x f(l)(x - l)^{(s-1)} dl \right) \tag{3.3.3}$$

определяет формулу для вычисления n-й производной от функции $f(x)$:

▶ **Пример.** Вычислить n-ю производную от функции

$$f(x) = x^{\left(\frac{2}{3}\right)}. \tag{3.3.4}$$

Р е ш е н и е. Используя формулу (3.3.3), имеем:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{\left(\frac{2}{3}\right)} = \lim_{s \to (-n)} \left(\frac{1}{(s-1)!} \cdot \int_0^x l^{\left(\frac{2}{3}\right)} (x - l)^{(s-1)} dl \right) = \lim_{s \to (-n)} \frac{2x^{\left(s + \frac{2}{3}\right)} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3(s-1)!\, \Gamma\left(s + \frac{5}{3}\right)} = \frac{2x^{\left(-n + \frac{2}{3}\right)} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\, \Gamma\left(\frac{5}{3} - n\right)}.$$

Таким образом,

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{2x^{\left(-n+\frac{2}{3}\right)} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\,\Gamma\left(\frac{5}{3} - n\right)}.$$

Действительно, при $n = 0$ отсюда следует функция (3.3.4).

Проверим, удовлетворяет ли это равенство рекуррентному условию (2.1.2):

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} x^{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{2x^{\left(-n-\frac{1}{3}\right)} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\,\Gamma\left(-n + \frac{2}{3}\right)}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^n}{dx^n} x^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right) = \frac{2x^{\left(-n-\frac{1}{3}\right)} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\,\Gamma\left(-n + \frac{2}{3}\right)}.$$

Так как правые части этих равенств равны, то это означает, что формула (3.3.5) установлена верно.

С помощью формулы (3.3.3), используя табличные данные по уже вычисленным интегралам, можно установить n-е производные от достаточно сложных начальных функций.

Доказанные теоремы позволяют по-иному интерпретировать известные формулы. В частности, это касается формулы Лейбница [1]:

$$\frac{d^n}{dx^n}(u(x)\,v(x)) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^i}{dx^i}(u(x)) \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} v(x). \tag{3.3.6}$$

Утверждение 3.1. В том случае, если функция $f(x)$ допускает представление в виде произведения двух функций:

$$\boldsymbol{f(x) = u(x)\, v(x),} \tag{3.3.7}$$

то

$$\boxed{[u(x)\, v(x)]_s = \lim_{n \to (-s)} \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^i}{dx^i}(u(x)) \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} v(x).} \tag{3.3.8}$$

Доказательство. С учетом (3.3.7) формула (3.3.0) принимает вид:

$$[u(x)\, v(x)]_s = \lim_{n \to (-s)} \frac{d^n}{dx^n}(u(x)\, v(x)).$$

С учетом формулы Лейбница (3.3.6) отсюда следует искомое равенство (3.3.8).

В частности, из (3.3.8) следует **формула вычисления неопределенного интеграла:**

$$\boxed{\int u(x)\, v(x)\, dx = \lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(u(x)) \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} v(x).} \tag{3.3.9}$$

Следствие 1. Интегралы вида:

$$\int f(x)\, e^x\, dx$$

вычисляются по формуле:

$$\boxed{\int f(x)\, e^x\, dx = e^x \lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} f(x).} \tag{3.3.10}$$

Доказательство. Действительно, принимая в формуле (3.3.9) $v(x) = e^x$ и используя свойство инвариантности этой функции относительно операции дифференцирования, получаем формулу (3.3.10).

Следствие 2. Имеет место формула:

$$\boxed{[f(x)\,e^{x}]_k = e^{x} \lim_{n \to (-k)} \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^i}{dx^i} f(x).} \tag{3.3.11}$$

Доказательство. Данная формула следует из (3.3.8), если там принять $u(x) = f(x)$, $v(x) = e^x$.

Следствие 3. Интегралы вида

$$\int f(x)\, x^k\, dx$$

определяются формулой:

$$\boxed{\int f(x)\, x^k\, dx = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{(k-i)} \left[\int f(x)\,dx\right]_i}{(k-i)!}.} \tag{3.3.12}$$

Доказательство. Так как i-я производная от функции x^k равна:

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} x^k = \frac{k!\, x^{(k-i)}}{(k-i)!},$$

то, подставляя это значение в (3.3.9), с учетом

$$C(-1,\, i) = (-1)^i,$$

получим в итоге формулу (3.3.12).

▶ **Пример 6.** Вычислить интеграл

$$\int x \ln(x)\, e^x\, dx.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (3.3.12). Тогда

$$\int x \ln(x)\, e^x\, dx = x \int \ln(x)\, e^x\, dx - \iint \ln(x)\, e^x\, dx\, dx.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению однократного и двукратного интегралов от функции $\ln(x)\, e^x$.

Воспользуемся формулами (3.2.0) и (3.3.0). В этом случае:

$$\int \ln(x)\, e^{x}\, dx = e^{x} \lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n} C(n,\ i) \frac{d^{i}}{dx^{i}} \ln(x),$$

$$\iint \ln(x)\, e^{x}\, dx\, dx = e^{x} \lim_{n \to (-2)} \sum_{i=0}^{n} C(n,\ i) \frac{d^{i}}{dx^{i}} \ln(x).$$

Так как

$$\lim_{n \to (-1)} \sum_{i=0}^{n} C(n,\ i) \frac{d^{i}}{dx^{i}} \ln(x) = \ln(x) + \lim_{n \to (-1)} \sum_{i=1}^{n} C(n,\ i) \frac{d^{i}}{dx^{i}} \ln(x),$$

то заменой индекса суммирования получаем равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} C(n,\ i) \frac{d^{i}}{dx^{i}} \ln(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{C(n,\ 1+s)(-1)^{s}\, s!}{x^{(1+s)}}.$$

Тогда

$$\lim_{n \to (-1)} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{C(n,\ 1+s)(-1)^{s}\, s!}{x^{(1+s)}} = -\frac{\mathrm{hypergeom}\left([1,\ 1],\ [\ ],\ \frac{1}{x}\right)}{x}.$$

Следовательно, искомая формула принимает вид:

$$\int \ln(x)\, e^{x}\, dx = e^{x} \left(\ln(x) - \frac{\mathrm{hypergeom}\left([1,\ 1],\ [\ ],\ \frac{1}{x}\right)}{x} \right).$$

Данная формула справедлива для всех отрицательных и комплексных значений переменной x. Для целых положительных значений переменной x она принимает вид:

$$\int \ln(x)\, e^{x}\, dx = \Re(Q) - \Im(Q)\, I, \quad Q = e^{x}\left(\ln(x) - \frac{\operatorname{hypergeom}\left([1,\,1],\,[\,],\,\dfrac{1}{x}\right)}{x}\right).$$

П р и м е ч а н и е. Табличная формула равна:

$$\int \ln(x)\, e^{x}\, dx = \ln(x)\, e^{x}\, dx + Ei(1,\,-x).$$

Совершенно аналогичным образом имеем

$$\iint \ln(x)\, e^{x}\, dx\, dx = e^{x} \lim_{n \to (-2)} \sum_{i=0}^{n} \frac{C(n,\,i)(-1)^{(i-1)}(i-1)!}{x^{i}},$$

следовательно:

$$\lim_{n \to (-2)} \sum_{i=0}^{n} C(n,\,i) \frac{d^{i}}{dx^{i}} \ln(x) = \ln(x) + \lim_{n \to (-2)} \sum_{i=1}^{n} C(n,\,i)\left(\frac{d^{i}}{dx^{i}} \ln(x)\right).$$

Так как

$$\lim_{n \to (-2)} \sum_{i=1}^{n} C(n,\,i) \frac{d^{i}}{dx^{i}} \ln(x) = -\frac{2\operatorname{hypergeom}\left([1,\,1],\,[\,],\,\dfrac{1}{x}\right)x + \operatorname{hypergeom}\left([2,\,2],\,[\,],\,\dfrac{1}{x}\right)}{x^{2}},$$

то искомое значение равно:

$$\iint \ln(x)\, e^{x}\, dx\, dx = e^{x}\left(\ln(x) - \frac{2\operatorname{hypergeom}\left([1,\,1],\,[\,],\,\dfrac{1}{x}\right)x + \operatorname{hypergeom}\left([2,\,2],\,[\,],\,\dfrac{1}{x}\right)}{x^{2}}\right).$$

Это решение справедливо для отрицательных и комплексных значений x.

Для положительных значений оно определяется формулой:

$$\iint \ln(x)\, e^{x}\, dx = \Re(Q) - \Im(Q)\, I, \quad Q = e^{x}\left(\ln(x) - \frac{2\,\mathrm{hypergeom}\left([1,\,1],\,[\;],\,\frac{1}{x}\right)x + \mathrm{hypergeom}\left([2,\,2],\,[\;],\,\frac{1}{x}\right)}{x^{2}}\right).$$

Таким образом, итоговая искомая формула принимает вид:

$$\int x\ln(x)\, e^{x}\, dx = \left(-\frac{(x-2)\,\mathrm{hypergeom}\left([1,\,1],\,[\;],\,\frac{1}{x}\right)}{x} + \frac{x^{3}\ln(x) - \ln(x)\, x^{2} + \mathrm{hypergeom}\left([2,\,2],\,[\;],\,\frac{1}{x}\right)}{x^{2}}\right)e^{x}.$$

В таком виде она справедлива для отрицательных и мнимых значений x. Для положительных значений x она определяется формулой:

$$\int x\ln(x)\, e^{x}\, dx = \Re(Q) - \Im(Q)\, I,$$

$$Q = xe^{x}\left(\ln(x) - \frac{\mathrm{hypergeom}\left([1,1],\,[\;],\,\frac{1}{x}\right)}{x}\right) - e^{x}\left(\ln(x) - \frac{2\,\mathrm{hypergeom}\left([1,1],\,[\;],\,\frac{1}{x}\right)x + \mathrm{hypergeom}\left([2,\,2],\,[\;],\,\frac{1}{x}\right)}{x^{2}}\right).$$

П р и м е ч а н и е. Табличное значение равно:

$$\int x\ln(x)\, e^{x}\, dx = (-1 + x)\, e^{x}\ln(x) - e^{x} - Ei(1,\,-x).$$

3.3.1. Нахождение новых неопределенных интегралов

Рассмотрим случаи нахождения интегралов, которые известными способами не получить или известные формулы чрезвычайно сложны для практического использования.

▶ **Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int \frac{e^{(ax)}}{x}\,dx.$$

П р и м е ч а н и е. Данный интеграл в элементарных функциях получить невозможно. Поэтому он принят в качестве табличного:

$$\int \frac{e^{(ax)}}{x}\,dx = -Ei(1,\ -ax).$$

Р е ш е н и е. Так как

$$\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln x,$$

то

$$\int \frac{e^{(ax)}}{x}\,dx = \int e^{(ax)}\left(\frac{d}{dx}\ln x\right)dx = e^{(ax)}\ln x - a\int e^{(ax)}\ln x\,dx.$$

Вычислим интеграл

$$\int e^{(ax)}\ln x\,dx.$$

Для этого достаточно установить n-ю производную от функции: $e^{(ax)}\ln x$. Она определяется формулой:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{(ax)}\ln x\right) = \frac{e^{(ax)}\left(\ln x\, a^n x + n a^{(n-1)}\ \mathrm{hypergeom}\left([1,\ 1,\ 1-n],\ [2],\ \frac{1}{xa}\right)\right)}{x}.$$

Тогда

$$\int e^{(ax)} \ln x\, dx = \frac{e^{(ax)} \left(\ln x\, ax - \operatorname{hypergeom}\left([1, 1], [\ ], \dfrac{1}{xa} \right) \right)}{a^2 x}.$$

Таким образом, искомая формула принимает вид:

$$\int \frac{e^{(ax)}}{x} dx = e^{(ax)} \ln x - \frac{e^{(ax)} \left(\ln x\, ax - \operatorname{hypergeom}\left([1, 1], [\ ], \dfrac{1}{xa} \right) \right)}{a^2 x}.$$

Вообще k-кратный интеграл от $\dfrac{e^{(ax)}}{x}$ равен:

$$\left[\frac{e^{(ax)}}{x} \right]_k = \frac{e^{(ax)} \left(\ln x\, a^{(-k)} x - k a^{(-k-1)} \operatorname{hypergeom}\left([1, 1, 1 + k], [2], \dfrac{1}{xa} \right) \right)}{x},$$

и получить его современными способами пока не удалось.

▶ **Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int e^{(ax)} x^p\, dx.$$

Решение. Известное табличное представление данного интеграла определяется формулой:

$$\int e^{(ax)} x^p\, dx = -\frac{(-a)^{(-p)} (x^p (-a)^p\, p\, \Gamma(p) (-ax)^{(-p)} - x^p (-a)^p e^{(ax)} - x^p (-a)^p\, p\, (-ax)^{(-p)} \Gamma(p, -ax))}{a},$$

которая имеет весьма громоздкий вид и не удобна для практического применения.

Получим более эффективную формулу. Так как n-я производная от подынтегральной функции равна:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{(ax)} x^p) = \frac{e^{(ax)}\, \Gamma(p + 1)\, x^{(p-n)} \operatorname{hypergeom}([-n], [p - n + 1], -ax)}{\Gamma(p - n + 1)},$$

то искомый интеграл определяется формулой:

$$\int e^{(ax)} x^p \, dx = -\frac{(-ax)^{(-p)} x^p (\Gamma(p+1) - \Gamma(p+1, -ax))}{a}.$$

В этом виде (при вычислениях) он совпадает с табличным значением.

Двукратный интеграл получить известными способами нельзя, однако в нашем случае это возможно:

$$\iint e^{(ax)} x^p \, dx \, dx = \frac{e^{(ax)} x^{(2+p)} \operatorname{hypergeom}([2], [p+3], -ax)}{(p+1)(2+p)}.$$

Аналогично:

$$\iiint e^{(ax)} x^p \, dx \, dx \, dx = \frac{e^{(ax)} x^{(p+3)} \operatorname{hypergeom}([3], [p+4], -ax)}{(p+1)(2+p)(p+3)}$$

и в общем случае k-кратный интеграл равен:

$$[e^{(ax)} x^p]_k = \frac{e^{(ax)} x^{(p+k)} \operatorname{hypergeom}([k], [p+k+1], -ax)}{\operatorname{pochhammer}(p+1, k)}.$$

▶ **Пример 3.** Вычислить интеграл

$$\iint \frac{e^{(qx)}}{x^m} \, dx \, dx, \quad q, \ m \text{ — произвольные параметры.}$$

Существующими способами можно вычислить только однократный интеграл и только для отрицательных значений параметра m:

$$\int \frac{e^{(qx)}}{x^m} \, dx = \frac{(x)^{(-m)}((-qx)^m \, \Gamma(-m) m - m(-qx)^m \, \Gamma(-m, -qx) + e^{(qx)})}{q},$$

так как $\Gamma(-m)$ для положительных m расходится (правая часть в итоге дает неопределенность вида $\infty - \infty$), т. е. правая часть для конкретных значений m неопределима без использования специальных подходов.

Р е ш е н и е. Выпишем производную n-го порядка для подынтегральной функции.

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{e^{(qx)}}{x^m}\right) = \frac{e^{(qx)}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C(n,k)(qx)^{(n-k)}(m+k-1)!}{(m-1)!}\right)}{x^{(m+n)}}$$

или в другой форме:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{e^{(qx)}}{x^m}\right) =$$

$$= \frac{e^{(qx)}\left((qx)^n \operatorname{hypergeom}\left([m,-n],[\,],\frac{1}{qx}\right) qx(m-1)! + C(n,n+1)(m+n)! \operatorname{hypergeom}\left([1,1,m+n+1],[2+n],\frac{1}{qx}\right)(-1)^n\right)}{x^{(m+n)}\, qx(m-1)!}.$$

Так как

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{e^{(qx)}}{x^m}\right)\right]_{n=0} = \frac{e^{(qx)}}{x^m},$$

то в этом случае

$$\int \frac{e^{(qx)}}{x^m}\,dx = e^{(qx)} q^{(-1)} x^{(-m)} \operatorname{hypergeom}\left([1,\ m],[\,],\frac{1}{qx}\right).$$

Как видим, полученное нами решение более «красиво», чем полученное традиционным способом, так как уже при $m = 1$ табличный интеграл расходится, а полученный нами — нет.

Теперь, так как имеет место условие (3.2.7), легко вычислить значения интегралов:

$$\iint \frac{e^{(qx)}}{x^m}\,dx\,dx = \frac{e^{(qx)} \operatorname{hypergeom}\left([2,m],[\,],\frac{1}{qx}\right) x^{(-m)}}{q^2}, \quad \iiint \frac{e^{(qx)}}{x^m}\,dx\,dx\,dx = \frac{e^{(qx)} x^{(-m)} \operatorname{hypergeom}\left([3,m],[\,],\frac{1}{qx}\right)}{q^3},$$

которые известными существующими способами не берутся.

В итоге можно выписать значение для k-кратного интеграла:

$$\left[\frac{e^{(qx)}}{x^m}\right]_k = \frac{e^{(qx)}\,x^{(-m)}\,\mathrm{hypergeom}\left([k, m], [\,], \dfrac{1}{qx}\right)}{q^k}.$$

▶ **Пример 4.** Вычислить двукратный интеграл от функции.

$$f(x) := x^p \sin(ax),$$

a, p — действительные числа.

Р е ш е н и е. Представим $f(x)$ в виде:

$$f(x) = -\frac{x^p I\,(e^{(axI)} - e^{(-Iax)})}{2}.$$

Так как

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^p \sin(ax)) = \frac{I x^p (aI)^n (-e^{(axI)} + (-1)^n e^{(-Iax)})}{2} +$$

$$+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{I\,C(n, n-s)\,\mathrm{pochhammer}(p-n+s+1, n-s)\,x^{(p-n+s)}(aI)^s(-e^{(axI)} + (-1)^s e^{(-Iax)})}{2},$$

то в раскрытой форме:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^p \sin(ax)) =$$

$$= -\frac{I\,x^{(p-n)}\,(e^{(axI)}\,\mathrm{hypergeom}([-n], [p-n+1], -Iax) - e^{(-Iax)}\,\mathrm{hypergeom}([-n], [p-n+1], axI))\,\Gamma(p+1)}{2\,\Gamma(p-n+1)}.$$

Следовательно, так как

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^p \sin(ax))\right\}_{n=0} = x^p \sin(ax),$$

то используя формулы (3.2.5) и (3.3.0), находим:

$$\int x^p \sin(ax)\,dx = -\frac{I\,x^{(p+1)}\left(e^{(axI)}\ \mathrm{hypergeom}([1],[p+2],-Iax) - e^{(-Iax)}\ \mathrm{hypergeom}([1],[p+2],axI)\right)\Gamma(p+1)}{2\,\Gamma(p+2)},$$

$$\iint x^p \sin(ax)\,dx\,dx = -\frac{I\,x^{(p+2)}\left(e^{(axI)}\ \mathrm{hypergeom}([2],[p+3],-Iax) - e^{(-Iax)}\ \mathrm{hypergeom}([2],[p+3],axI)\right)\Gamma(p+1)}{2\,\Gamma(p+3)}.$$

В общем случае k-кратный интеграл равен:

$$[x^p \sin(ax)]_k = -\frac{I\,x^{(p+k)}\left(e^{(axI)}\ \mathrm{hypergeom}([k],[p+k+1],-Iax) - e^{(-Iax)}\ \mathrm{hypergeom}([k],[p+k+1],axI)\right)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+k+1)\,2}.$$

3.4. Вычисление интегралов, имеющих особую производную

Ранее было определено, что особой производной n-го порядка от функции $f(x)$ в точке $n = 0$ называется функция $G(x, n)$, которая в этой точке не установлена.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int f(x)\,dx,$$

где $G(x, n)$ — особая n-я производная в точке $n = 0$ от функции $f(x)$.

Основным способом вычисления таких интегралов является нахождение подстановки:

$$x = \rho(t),$$

где $\rho(t)$ — необходимое число раз дифференцируемая функция, для которой выполняется условие нормальности.

$$\left\{\frac{d^n}{dt^n}\rho(t)\right\}_{n=0} = \rho(t).$$

В этом случае исходный интеграл приводится к виду:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\rho(t))\left(\frac{d}{dt}\rho(t)\right)dt.$$

Функцию $\rho(t)$ выбираем такой, при которой подынтегральная функция $f(\rho(t))\dfrac{d}{dt}\rho(t)$ имеет нормальную n-ю производную в точке $n = 0$.

▶ **Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int \ln(x)^2\,dx. \tag{3.4.1}$$

Р е ш е н и е. Так как

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n},$$

то подынтегральная функция $\ln(x)$ имеет особую n-ю производную в точке $n = 0$, поэтому вычисление интеграла (3.4.1) с использованием основной теоремы невозможно.

Используя подстановку:

$$x = e^t, \tag{3.4.2}$$

приводим интеграл (3.4.1) к виду:

$$\int e^t t^2\,dt.$$

С использованием формулы (3.3.12) этот интеграл приводится к эквивалентной форме:

$$\int e^t t^2\,dt = t^2\int e^t dt - 2t\,[e^t]_2 + 2\,[e^t]_3.$$

Так как функция e^t инвариантна относительно операции интегрирования, то условие нормальности для нее заведомо выполнено. Следовательно,

$$\int e^t\,dt = e^t,\quad [e^t]_2 = e^t,\quad [e^t]_3 = e^t.$$

Поэтому

$$\int e^t t^2\,dt = t^2 e^t - 2t\mathrm{e}^t + 2e^t.$$

С учетом формулы (3.4.2) отсюда следует искомое решение:

$$\int \ln(x)^2\,dx = x\ln(x)^2 - 2\ln(x)\,x + 2x,$$

что соответствует табличному значению.

▶ **Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int \ln(x)^2 e^x\,dx. \tag{3.4.3}$$

Решение. Очевидно, что подынтегральная функция $\ln(x)$ даст особую производную, поэтому преобразованием (3.4.2) этот интеграл приводится к виду:

$$\int t^2 e^{(e^t+t)}\,dt.$$

С использованием формулы (3.3.12) он приводится к эквивалентной форме:

$$\int t^2 e^{(e^t+t)}\,dt = t^2\int e^{(e^t+t)}\,dt - 2t\,[e^{(e^t+t)}]_2 + 2[e^{(e^t+t)}]_3. \tag{3.4.4}$$

Так как

$$\int e^{(e^t+t)}\,dt = \int e^{(e^t)}\,de^t = e^{(e^t)},$$

то

$$[e^{(e^t+t)}]_2 = \int e^{(e^t)}\,dt = -Ei(1, -e^t).$$

Следовательно:

$$[e^{(e^t+t)}]_3 = -\int Ei(1, -e^t)\,dt.$$

Так как

$$\int Ei(1, -e^t)\,dt = \frac{\ln(e^t)^2}{2} - \frac{5\pi^2}{12} + \ln(e^t)\,\gamma + \frac{\gamma^2}{2} + \pi\gamma I + \ln(e^t)\,\pi I + e^t\,\mathrm{hypergeom}([1, 1, 1], [2, 2, 2], e^t),$$

то формула (3.4.4) примет вид:

$$\int t^2 e^{(e^t+t)}\,dt = t^2 e^{(e^t)} - 2t(-Ei(1, -e^t)) -$$
$$- 2\left(\frac{\ln(e^t)^2}{2} - \frac{5\pi^2}{12} + \ln(e^t)\,\gamma + \frac{\gamma^2}{2} + \pi\gamma I + \ln(e^t)\,\pi I + e^t\,\mathrm{hypergeom}([1, 1, 1], [2, 2, 2], e^t)\right).$$

Возвращаясь к исходной переменной, с учетом (3.4.2) в итоге получим искомую формулу:

$$\int \ln(x)^2 e^x\,dx = \ln(x)^2 e^x + 2\ln(x)\,Ei(1,-x) - \ln(x)^2 + \frac{5\pi^2}{6} - 2\ln(x)\,\gamma - \gamma^2 - 2I\pi\gamma - 2I\ln(x)\,\pi -$$
$$- 2x\,\mathrm{hypergeom}([1,\,1,\,1],\,[2,\,2,\,2],\,x).$$

▶ **Пример 3.** Вычислить интеграл

$$\int \arccos x\,dx. \qquad (3.4.5)$$

Р е ш е н и е. Так как n-я производная от подынтегральной функции равна:

$$\frac{d^n}{dx^n}\arccos x = -\frac{2^{(n-1)}\,x^{(1-n)}\,\mathrm{MeijerG}\left(\left[\left[0,\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right],\,[\,]\right],\,\left[[0],\,\left[-\frac{1}{2}+\frac{n}{2},\,\frac{n}{2}\right]\right],\,-x^2\right)}{\sqrt{\pi}}$$

и является особой в точке $n = 0$, т. е.

$$\left[\frac{d^n}{dx^n}\arccos x\right]_{n=0} = -\arcsin x,$$

то используем подстановку:

$$x = \cos t. \qquad (3.4.6)$$

В этом случае исходный интеграл примет вид:

$$\int \arccos x\,dx = -\int t\sin t\,dt.$$

Используя формулу (3.2.13), отсюда имеем:

$$\int t\sin t\,dt = t\int \sin t\,dt - [\sin t]_2.$$

Так как

$$\frac{d^n}{dt^n}\sin t = \sin\left(t + \frac{n\pi}{2}\right)$$

и

$$\left[\frac{d^n}{dt^n}\sin t\right]_{n=0} = \sin t,$$

то

$$\int \sin t\,dt = \left[\sin\left(t + \frac{n\pi}{2}\right)\right]_{n=-1} = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$[\sin t]_2 = \left[\sin\left(t + \frac{n\pi}{2}\right)\right]_{n=-2} = \sin(t - \pi).$$

Таким образом, искомое значение равно:

$$\int \arccos x\,dx = -t\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(t - \pi)$$

или окончательно, с учетом подстановки (3.4.6):

$$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1 - x^2}.$$

3.5. Другие формальные способы трансформации особых производных в нормальные

Представим еще два формальных подхода к решению проблемы вычисления неопределенных интегралов. Они используются при условии если подынтегральная функция имеет особую n-ю производную в точке $n = k$.

Первый подход заключается в том, что n-я производная от исходной функции $f(x)$ в силу того, что она может быть представлена разными способами, представляется в виде, который не содержит особых производных. Например, функция

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \qquad (3.5.0)$$

определяет последовательность из производных:

$$\frac{d}{dx} f(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}, \quad \frac{d^3}{dx^3} f(x) = -\frac{24x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}, \quad \frac{d^4}{dx^4} f(x) = \frac{24(5x^4+1-10x^2)}{(x^2+1)^5}$$

и так далее.

Отсюда следует, что n-я производная определяется как отношение двух полиномов:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{(x^2+1)^{(n+1)}},$$

где a_i — некоторые постоянные.

Очевидно, что такое представление не позволяет использовать формулу (3.2.0), так как эта n-я производная является особой, поскольку она не определена ни при одном отрицательном значении n. В то же время, используя программу Maple, можно показать, что для функции (3.5.0) можно записать следующее представление для n-й производной:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 2^n \operatorname{MeijerG}\left(\left[\left[0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right],\ [\ ]\right],\ \left[[0],\ \left[\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right]\right],\ x^2\right) x^{(-n)}, \tag{3.5.1}$$

которая является особой уже только в точке $n = -1$.

$$\lim_{n \to (-1)} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = -\frac{1}{2} I \ln\left(-\frac{-I+x}{I+x}\right).$$

Поэтому формула (3.5.1) позволяет вычислять интегралы, кратность которых больше единицы.

▶ **Пример.** Вычислить интеграл

$$\iint \frac{1}{x^2+1}\,dx\,dx.$$

Решение. В соответствии с формулой (3.3.0)

$$\iint \frac{1}{x^2+1}\,dx\,dx = \lim_{n\to(-2)} 2^n \operatorname{MeijerG}\left(\left[\left[0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right],\ [\ ]\right],\ \left[[0],\ \left[\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right]\right],\ x^2\right) x^{(-n)}.$$

Следовательно, так как

$$\lim_{n\to(-2)} 2^n \operatorname{MeijerG}\left(\left[\left[0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right],\ [\ ]\right],\ \left[[0],\ \left[\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right]\right],\ x^2\right) x^{(-n)} = \frac{x^2 \operatorname{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right],\ \left[\frac{3}{2},\ 2\right],\ -x^2\right)}{2},$$

$$\frac{x^2 \operatorname{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right],\ \left[\frac{3}{2},\ 2\right],\ -x^2\right)}{2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{\ln(x^2+1)}{2},$$

то искомое значение исходного интеграла равно:

$$\iint \frac{1}{x^2+1}\,dx\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{\ln(x^2+1)}{2},$$

что в точности совпадает с табличным значением.

Вообще k-кратный интеграл при условии $2 \leqslant k$ определяется формулой:

$$\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_k = \lim_{n\to(-k)} 2^n \operatorname{MeijerG}\left(\left[\left[0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right],\ [\ ]\right],\ \left[[0],\ \left[\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right]\right],\ x^2\right) x^{(-n)}.$$

Аналогично функция

$$f(x) = \arcsin x \tag{3.5.2}$$

определяет последовательность из производных:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}},\quad \frac{d^3}{dx^3} f(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{(1-x^2)^5}},\quad \frac{d^4}{dx^4} f(x) = \frac{3x(3+2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^7}},$$

которая в общем виде представляется как

$$\frac{d^n}{dx^n}\arcsin x = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i}{(x^2+1)^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)}},$$

здесь b_i — постоянные, которые следует установить.

Очевидно, что в таком представлении данная n-я производная заведомо будет особой, так как не дает правильного значения даже при $n = 0$. Использование Maple-программы дает:

$$\frac{d^n}{dx^n}\arcsin x = \frac{2^{(n-1)}\, x^{(1-n)}\, \mathrm{MeijerG}\left(\left[\left[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [\,]\right], \left[[0], \left[-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right]\right], -x^2\right)}{\sqrt{\pi}}. \qquad (3.5.3)$$

Эта формула определяет нормальную n-ю производную т. е. дает правильный результат для всех значений параметра n, включая и отрицательные целые числа.

▶ **Пример.** Вычислить двукратный интеграл

$$\iint \arcsin x\, dx\, dx.$$

Р е ш е н и е. Так как n-я производная от подынтегральной функции является нормальной, то:

$$\iint \arcsin x\, dx\, dx = \lim_{n\to(-2)} \frac{2^{(n-1)}\, x^{(1-n)}\, \mathrm{MeijerG}\left(\left[\left[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [\,]\right], \left[[0], \left[-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right]\right], -x^2\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

Отсюда имеем:

$$\iint \arcsin x\, dx\, dx = \frac{x^3\, \mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right], \left[2, \frac{5}{2}\right], x^2\right)}{6}$$

или окончательно:

$$\iint \arcsin x\,dx\,dx = -x + \frac{3x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x^2 \arcsin x}{2}.$$

Второй подход трансформации особых производных в нормальные заключается в том, что определяется чисто формальное соотношение между неопределенным выражением и точным значением, использование которого в ряде случаев позволяет правильно решать возникающие задачи.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x) = \ln(x). \tag{3.5.4}$$

Так как

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln(x) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!\,x^{(-n)}, \tag{3.5.5}$$

то при $n = 0$ отсюда следует формальное равенство:

$$\lim_{n\to 0}(-1)^{(n-1)}(n-1)!\,x^{(-n)} = \ln(x). \tag{3.5.6}$$

Таким образом, поскольку в левой части предел не определен, то n-я производная (3.5.5) является особой производной в точке $n = 0$.

Тем не менее (3.5.6) определяет формальное равенство, которое мы считаем истинным.

Принимая в (3.5.5) $n = -1$, снова получаем формальное равенство:

$$\lim_{n\to(-1)}(-1)^{(n-1)}(n-1)!\,x^{(-n)} = \int \ln(x)\,dx + c_1,$$

c_1 — произвольная постоянная.

Отсюда следует:

$$\lim_{n\to(-1)}(-1)^{(n-1)}(n-1)!\,x^{(-n)} = x\ln(x) - x + c_1.$$

Принимая снова в (3.5.5) $n = -2$, получаем формальное равенство:

$$\lim_{n\to(-2)}(-1)^{(n-1)}(n-1)!\,x^{(-n)} = \int x\ln(x)\,dx - \int x\,dx + c_1 x + c_2,$$

c_2 — произвольная постоянная.

С учетом формулы (3.2.0) имеем:

$$\lim_{n\to(-2)}(-1)^{(n-1)}(n-1)!\,x^{(-n)}=\frac{x^2\ln(x)}{2}-\frac{3x^2}{4}+c_1x+c_2.$$

Продолжая аналогичным образом, устанавливаем формулу:

$$\lim_{n\to(-s+1)}(-1)^{(n-1)}(n-1)!\,x^{(-n)}=\frac{(-1)^s\,x^{(s-1)}\ln(x)}{\Gamma(s)}+\frac{(-1)^{(s-1)}\,x^{(s-1)}(\Psi(s)+\gamma)}{\Gamma(s)}-\left(\sum_{j=0}^{s-2}\frac{c_j\,x^j}{j!}\right). \quad (3.5.7)$$

Фактически в данной формуле переменная x может быть заменена на некоторую функцию — $R(x)=ax+b$, a, b — произвольные постоянные, которая выбирается исходя из условий исходной задачи. Поэтому в общем случае (3.5.8)

$$\lim_{n\to(-s+1)}(-1)^{(n-1)}(n-1)!\,R(x)^{(-n)}=\frac{(-1)^s\,R(x)^{(s-1)}\ln(R(x))}{\Gamma(s)}+\frac{(-1)^{(s-1)}\,R(x)^{(s-1)}(\Psi(s)+\gamma)}{\Gamma(s)}-\left(\sum_{j=0}^{s-2}\frac{c_j\,x^j}{j!}\right).$$

▶ **Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int\frac{x}{ax+b}\,dx. \quad (3.5.9)$$

Решение. С учетом формулы (3.3.12) имеем:

$$\int\frac{x}{ax+b}\,dx=x\int\frac{1}{ax+b}\,dx-\left[\frac{1}{ax+b}\right]_2. \quad (3.5.10)$$

Таким образом, для нахождения интеграла (3.5.9) необходимо вычислить однократный и двукратный интеграл от функции $\frac{1}{ax+b}$.

С этой целью вычислим n-ю производную от данной функции:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right)=(-1)^n\,n!\,a^n\,(ax+b)^{(-1-n)}. \quad (3.5.11)$$

Так как в соответствии с формулами (3.2.0), (3.3.0):

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \lim_{n\to(-1)} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right), \quad \left[\frac{1}{ax+b}\right]_2 = \lim_{n\to(-2)} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right),$$

то с учетом (3.5.11) имеем:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\lim\limits_{n\to 0}(-1)^n n!\,a^n(ax+b)^{(-1-n)}}{a}, \tag{3.5.12}$$

$$\left[\frac{1}{ax+b}\right]_2 = \frac{\left(\lim\limits_{n\to(-1)}(-1)^n n!\,a^n(ax+b)^{(-1-n)}\right)(ax+b)}{a^2}. \tag{3.5.13}$$

В соответствии с правилом (3.5.8) принимаем

$$R(x) = ax+b.$$

Тогда для $s = 1$, 2 из формулы (3.5.8) следует формально:

$$\lim_{n\to 0}(-1)^n n!\,a^n(ax+b)^{(-1-n)} = -\ln(ax+b),$$

$$\lim_{n\to(-1)}(-1)^n n!\,a^n(ax+b)^{(-1-n)} = \ln(ax+b)-1.$$

Следовательно, формулы (3.5.12), (3.5.13) примут вид:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\ln(ax+b)}{a}, \quad \left[\frac{1}{ax+b}\right]_2 = \frac{(\ln(ax+b)-1)(ax+b)}{a^2}.$$

Подставляя эти значения в (3.5.10), имеем:

$$\int \frac{x}{ax+b}\,dx = \frac{x\ln(ax+b)}{a} - \frac{(\ln(ax+b)-1)(ax+b)}{a^2}.$$

Отсюда получаем искомый интеграл:

$$\int \frac{x}{ax+b}\,dx = \frac{-b\ln(ax+b)+ax+b}{a^2} + C.$$

П р и м е ч а н и е. Табличное значение интеграла равно:

$$\int \frac{x}{ax+b}\,dx = \frac{ax-b\ln(ax+b)}{a^2}.$$

Разница составляет константу $\frac{b}{a^2}$, которая нивелируется выбором произвольной постоянной C.

▶ **Пример 3.** Вычислить интеграл

$$\int x\ln(x^2+1)\,dx.$$

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой (3.3.12) имеем:

$$\int x\ln(x^2+1)\,dx = x\int \ln(x^2+1)\,dx - [\ln(x^2+1)]_2. \qquad (3.5.14)$$

Функция $\ln(x^2+1)$, как известно, порождает особую производную, однако используя свойства операции дифференцирования, можно легко обойти это препятствие.

Действительно, по определению:

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = \lim_{n\to(-1)} \frac{d^n}{dx^n}\ln(x^2+1).$$

Так как

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln(x^2+1) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right),$$

то, используя формулу Лейбница, имеем:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = 2\sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,\, i)\left(\frac{d^i}{dx^i}x\right)\frac{d^{n-1-i}}{dx^{n-1-i}}\left(\frac{1}{x^2+1}\right).$$

Правая часть этой формулы приводится к виду:

$$\sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,\ i)\left(\frac{d^i}{dx^i}x\right)\frac{d^{n-1-i}}{dx^{n-1-i}}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = C(n-1,\ 0)\,x\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) + C(n-1,\ 1)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{1}{x^2+1}\right).$$

Принимая в правой части этого равенства $n = -1$, получим:

$$C(-2,\ 0)\,x\,\frac{d^{-2}}{dx^{-2}}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) + C(-2,\ 1)\frac{d^{-3}}{dx^{-3}}\left(\frac{1}{x^2+1}\right).$$

Так как $C(-2;\ 0) = 1$, $C(-2;\ 1) = -2$, то искомый интеграл приводится к виду:

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = 2x\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_2 - 4\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_3.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению кратных интегралов от функции $\frac{1}{x^2+1}$.
Так как

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 2^n \operatorname{MeijerG}\left(\left[\left[0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right],\ [\ ]\right],\ \left[[0],\ \left[\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right]\right],\ x^2\right)x^{(-n)},$$

то отсюда легко находим:

$$\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_2 = \frac{x^2 \operatorname{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right],\ \left[\frac{3}{2},\ 2\right],\ -x^2\right)}{2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(x^2+1)}{2},$$

$$\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_3 = \frac{x^3 \operatorname{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right],\ \left[2,\ \frac{5}{2}\right],\ -x^2\right)}{6} = \frac{x}{2} + \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x\ln(x^2+1)}{2}.$$

Следовательно, искомый интеграл равен:

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}\,x. \qquad (3.5.15)$$

Отсюда следует:

$$\iint \ln(x^2+1)\,dx\,dx = \int x\ln(x^2+1)\,dx - 2\int x\,dx + 2\int \mathrm{arctg}\,x\,dx.$$

Так как

$$\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{arctg}\,x = \frac{2^n\,\mathrm{MeijerG}\left(\left[\left[0,0,\frac{1}{2}\right],[\ ]\right],\left[[0],\left[-\frac{1}{2}+\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right]\right],x^2\right)x^{(1-n)}}{2},$$

то

$$\int \mathrm{arctg}\,x\,dx = \lim_{n\to(-1)} 2^{(n-1)}\mathrm{MeijerG}\left(\left[\left[0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right],[\ ]\right],\left[[0],\left[-\frac{1}{2}+\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}\right]\right],\ x^2\right)x^{(1-n)}$$

или после упрощений:

$$\int \mathrm{arctg}\,x\,dx = \mathrm{arctg}\,(x)\,x - \frac{\ln(x^2+1)}{2}.$$

Следовательно:

$$\iint \ln(x^2+1)\,dx\,dx = \int x\ln(x^2+1)\,dx - x^2 + 2\,\mathrm{arctg}\,(x)\,x - \ln(x^2+1).$$

Подставляя эту формулу и равенство (3.5.15) в (3.5.14), получим:

$$\int x\ln(x^2+1)\,dx = x\left(x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}\,x\right) - \left(\int x\ln(x^2+1)\,dx - x^2 + 2\,\mathrm{arctg}\,(x)\,x - \ln(x^2+1)\right).$$

Отсюда находим искомый интеграл:

$$\int x\ln(x^2+1)\,dx = \frac{(x^2+1)\ln(x^2+1)}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

Он строго соответствует табличному значению.

▶ **Пример 4.** Вычислить интеграл

$$\int \frac{x}{(ax+k)^2}\,dx.$$

Решение. В соответствии с формулой (3.3.12):

$$\int \frac{x}{(ax+k)^2}\,dx = x \cdot \int \frac{1}{(ax+k)^2}\,dx - \left[\frac{1}{(ax+k)^2}\right]_2.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению одно- и двукратного интегралов от функции

$$\frac{1}{(ax+k)^2},$$

где a, k — произвольные постоянные.

Так как эта функция имеет особую n-ю производную:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{(ax+k)^2}\right) = (-1)^n a^n (n+1)!\,(ax+k)^{(-2-n)},$$

то, приняв последовательно $n = -1, -2$, формально получим:

$$\int \frac{1}{(ax+k)^2}\,dx = -\frac{1}{a(ax+k)},$$

$$\left[\frac{1}{(ax+k)^2}\right]_2 = \frac{\lim\limits_{n\to 0}(-1)^n a^n (n+1)!\,(ax+k)^{(-2-n)}}{a^2}.$$

В соответствии с формулой (3.5.8) и видом исходной подынтегральной функции принимаем:

$$\lim_{n\to 0} (-1)^n a^n (n+1)!\,(ax+k)^{(-2-n)} = -\ln(ax+k).$$

Следовательно,

$$\left[\frac{1}{(ax+k)^2}\right]_2 = \frac{-\ln(ax+k)}{a^2}.$$

Поэтому итоговая формула принимает вид:

$$\int \frac{x}{(ax+k)^2}\,dx = -\frac{x}{a(ax+k)} + \frac{\ln(ax+k)}{a^2},$$

что соответствует табличному значению.

3.6. Формула для вычисления определенного интеграла

В классическом изложении вычисление определенного интеграла производится по формуле [1]:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная.

Так как в соответствии с (3.2.0) первообразная определяется как:

$$F(x) = \lim_{n\to(-1)} \frac{d^n}{dx^n} f(x),$$

то это дает формулу для вычисления определенного интеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left\{\lim_{n\to(-1)} \frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\}_{[x=b]} - \left\{\lim_{n\to(-1)} \frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\}_{[x=a]}.} \qquad (3.6.0)$$

▶ **Пример 1.** Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^{12} x^{\left(\frac{2}{3}\right)}\,dx. \qquad (3.6.1)$$

Р е ш е н и е. Так как

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{2x^{\left(-n+\frac{2}{3}\right)}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\,\Gamma\left(\frac{5}{3}-n\right)},$$

то, используя формулу (3.6.0), имеем:

$$\int_1^{12}x^{\left(\frac{2}{3}\right)}dx=\left\{\frac{2x^{\left(-n+\frac{2}{3}\right)}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\,\Gamma\left(\frac{5}{3}-n\right)}\right\}_{[n=-1,\ x=12]}-\left\{\frac{2x^{\left(-n+\frac{2}{3}\right)}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\,\Gamma\left(\frac{5}{3}-n\right)}\right\}_{[n=-1,\ x=1]}=\frac{8\cdot 12^{\left(\frac{2}{3}\right)}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}-\frac{2\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\,\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}=\frac{36\cdot 12^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{5}-\frac{3}{5}.$$

Следовательно, в итоге:

$$\int_1^{12}x^{\left(\frac{2}{3}\right)}dx=\frac{36\cdot 12^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{5}-\frac{3}{5},$$

что соответствует результату вычисления традиционным способом.

▶ **Пример 2.** Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^{2}x^3\sin 5x\,dx.$$

Р е ш е н и е. Ранее было показано, что

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^p\sin(ax))=$$

$$=-\frac{I\,x^{(p-n)}\left(e^{(axI)}\,\mathrm{hypergeom}([-n],[p-n+1],-Iax)-e^{(-Iax)}\,\mathrm{hypergeom}([-n],[p-n+1],axI)\right)\Gamma(p+1)}{2\,\Gamma(p-n+1)}.$$

В нашем случае эта формула приобретает вид:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^3 \sin 5x) = -\frac{I\,x^{(3-n)}\left(e^{(5Ix)}\ \mathrm{hypergeom}([-n],[4-n],-5Ix) - e^{(-5Ix)}\ \mathrm{hypergeom}([-n],[4-n],5Ix)\right)\Gamma(4)}{2\,\Gamma(4-n)}.$$

В соответствии с формулой (3.6.0) имеем:

$$\int_{-2}^{2} x^{(-3)}\sin 5x\,dx =$$

$$= \left\{-\frac{I\,x^{(3-n)}\left(e^{(5Ix)}\ \mathrm{hypergeom}([-n],[4-n],-5Ix) - e^{(-5Ix)}\ \mathrm{hypergeom}([-n],[4-n],5Ix)\right)\Gamma(4)}{2\,\Gamma(4-n)}\right\}_{n=-1,\ x=2} -$$

$$- \left\{-\frac{I\,x^{(3-n)}\left(e^{(5Ix)}\ \mathrm{hypergeom}([-n],[4-n],-5Ix) - e^{(-5Ix)}\ \mathrm{hypergeom}([-n],[4-n],5Ix)\right)\Gamma(4)}{2\,\Gamma(4-n)}\right\}_{n=-1,\ x=-2}.$$

Так как

$$\left\{-\frac{I\,x^{(3-n)}\left(e^{(5Ix)}\ \mathrm{hypergeom}([-n],[4-n],-5Ix) - e^{(-5Ix)}\ \mathrm{hypergeom}([-n],[4-n],5Ix)\right)\Gamma(4)}{2\,\Gamma(4-n)}\right\}_{n=-1,\ x=2} =$$

$$= \left(-\frac{94}{125} - \frac{147\,I}{625}\right)e^{(10\,I)} + \left(-\frac{94}{125} + \frac{147\,I}{625}\right)e^{(-10\,I)},$$

$$\left\{-\frac{I\,x^{(3-n)}\left(e^{(5Ix)}\ \mathrm{hypergeom}([-n],[4-n],-5Ix) - e^{(-5Ix)}\ \mathrm{hypergeom}([-n],[4-n],5Ix)\right)\Gamma(4)}{2\,\Gamma(4-n)}\right\}_{n=-1,\ x=-2} =$$

$$= \left(\frac{94}{125} + \frac{147\,I}{625}\right)e^{(10\,I)} + \left(\frac{94}{125} - \frac{147\,I}{625}\right)e^{(-10\,I)},$$

то итоговый результат принимает вид:

$$\int_{-2}^{2} x^3 \sin 5x\,dx = \left(-\frac{188}{125} - \frac{294\,I}{625}\right) e^{(10\,I)} + \left(-\frac{188}{125} + \frac{294\,I}{625}\right) e^{(-10\,I)} = 2.012112098.$$

Примечание. Существующие методы дают результат

$$\int_{-2}^{2} x^3 \sin 5x\,dx = -\frac{376\cos 10}{125} + \frac{588\sin 10}{625} = 2.012112099.$$

3.7. Поверхностные интегралы

Утверждение 3.7.1. **Если функция $f(x, y)$ необходимое число раз дифференцируема, является нормальной в точках $m, n = 0$ и существует предел $\lim\limits_{m \to (-1)} \lim\limits_{n \to (-1)} \frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y)\right)$, то имеет место формула для вычисления поверхностного интеграла:**

$$\boxed{\iint f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{m \to (-1)} \lim_{n \to (-1)} \frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y)\right).} \qquad (3.7.0)$$

Доказательство. В связи с тем, что в поверхностных интегралах переменные интегрирования независимы, то, используя формулу (3.2.0), получаем формулу (3.7.0).

Утверждение 3.7.2. **Если функция $f(x, y, z)$ необходимое число раз дифференцируема, является нормальной в точках $m, n, p = 0$ и существует предел $\lim\limits_{p \to (-1)} \lim\limits_{m \to (-1)} \lim\limits_{n \to (-1)} \frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y, z)\right)\right)$, то имеет место формула для вычисления объемного интеграла:**

$$\boxed{\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{p \to (-1)} \lim_{m \to (-1)} \lim_{n \to (-1)} \frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y, z)\right)\right).} \qquad (3.7.1)$$

Доказательство. В связи с тем, что в поверхностных интегралах переменные интегрирования независимы, то, используя формулу (3.2.0), получаем формулу (3.7.1).

Совершенно аналогичным образом доказываются и более общие формулы, например:

$$\boxed{\iiiint f(x,\ y,\ z,\ t)\,dx\,dy\,dz\,dt = \lim_{k\to(-1)}\ \lim_{p\to(-1)}\ \lim_{m\to(-1)}\ \lim_{n\to(-1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x,\ y,\ z,\ t)\right)\right)\right)}$$

и так далее.

▶ **Пример 1.** Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint \sqrt{x+y}\,dx\,dy.$$

Решение. Так как для подынтегральной функции справедливо равенство:

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\sqrt{x+y}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(x+y)^{\left(\frac{1}{2}-n-m\right)}}{2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-n-m\right)},$$

то по формуле (3.7.0) находим:

$$\iint \sqrt{x+y}\,dx\,dy = \lim_{m\to(-1)}\ \lim_{n\to(-1)} \frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x+y)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \lim_{m\to(-1)}\ \lim_{n\to(-1)} \frac{\sqrt{\pi}\,(x+y)^{\left(\frac{1}{2}-n-m\right)}}{2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-n-m\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\,(x+y)^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{2\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}.$$

Таким образом, в итоге имеем:

$$\iint \sqrt{x+y}\,dx\,dy = \frac{4(x+y)^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{15},$$

что в точности соответствует табличному значению.

▶ **Пример 2.** Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint \sqrt{x}\cos(x+y)\,e^{x}\,dx\,dy, \tag{3.7.2}$$

здесь x — определено только на множестве положительных действительных чисел.

Решение. Так как

$$\frac{\partial^{m}}{\partial x^{m}}\left(\sqrt{x}\cos(x+y)\,e^{x}\right)=\sqrt{x}\,e^{x}\cos\left(x+y+\frac{m\pi}{2}\right),$$

то принимаем $m = -1$. Тогда имеем:

$$\lim_{m\to(-1)}\frac{\partial^{m}}{\partial y^{m}}\left(\sqrt{x}\cos(x+y)\,e^{x}\right)=\sqrt{x}\,e^{x}\cos\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right).$$

В этом случае снова находим:

$$\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}\left(\sqrt{x}\,e^{x}\cos\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{x}\,I\,e^{x}\cos(x+y)(1-I)^{n}\,\mathrm{hypergeom}\left(\left[-\frac{1}{2},-n\right],[\ ],\frac{\frac{1}{2}+\frac{I}{2}}{x}\right)}{2}-$$

$$-\frac{\sqrt{x}\,I\,e^{x}\cos(x+y)(1+I)^{n}\,\mathrm{hypergeom}\left(\left[-\frac{1}{2},-n\right],[\ ],\frac{\frac{1}{2}-\frac{I}{2}}{x}\right)}{2}+$$

$$+\frac{\sqrt{x}\,e^{x}\sin(x+y)(1-I)^{n}\operatorname{hypergeom}\left(\left[-\frac{1}{2},-n\right],[\,],\frac{\frac{1}{2}+\frac{I}{2}}{x}\right)}{2}+$$

$$+\frac{\sqrt{x}\,e^{x}\sin(x+y)(1+I)^{n}\operatorname{hypergeom}\left(\left[-\frac{1}{2},-n\right],[\,],\frac{\frac{1}{2}-\frac{I}{2}}{x}\right)}{2}.$$

В соответствии с (3.7.0) в этом равенстве примем $n = -1$. Тогда получим искомое значение интеграла (3.7.2):

$$\iint \sqrt{x}\cos(x+y)\,e^{x}\,dx\,dy = \left(\frac{1}{4}+\frac{I}{4}\right)x^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\cos(x+y)\,I+\sin(x+y))\,e^{x}\operatorname{hypergeom}\left(\left[-\frac{1}{2},1\right],[\,],\frac{\frac{1}{2}+\frac{I}{2}}{x}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{4}+\frac{I}{4}\right)x^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\cos(x+y)\,I-\sin(x+y))\,e^{x}\operatorname{hypergeom}\left(\left[-\frac{1}{2},1\right],[\,],\frac{\frac{1}{2}-\frac{I}{2}}{x}\right).$$

Аналогичным подходом можно находить весьма сложные объемные интегралы.

▶ **Пример 3.** Вычислить объемный интеграл

$$\iiint \sqrt{x-z}\,\sqrt{x+y}\,dx\,dy\,dz. \qquad (3.7.2)$$

Примечание. Вычислить данный интеграл традиционными способами не удается.

Р е ш е н и е. Так как p-кратная производная по z равна

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}(\sqrt{x-z}\,\sqrt{x+y}) = \mathrm{pochhammer}\left(\frac{3}{2}-p,\ p\right)(x+y)^{\left(\frac{1}{2}\right)}(-1)^p(x-z)^{\left(\frac{1}{2}-p\right)},$$

то можно принять в правой части $p = -1$.

$$\lim_{p\to(-1)}\frac{\partial^p}{\partial z^p}(\sqrt{x-z}\,\sqrt{x+y}) = -\frac{2}{3}(x+y)^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Снова определяем m-кратную производную уже по y от полученной функции:

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(-\frac{2}{3}(x+y)^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right) = -\frac{2}{3}\mathrm{pochhammer}\left(\frac{3}{2}-m,\ m\right)(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x+y)^{\left(\frac{1}{2}-m\right)}.$$

Так как данная функция снова удовлетворяет условию (3.2.0), то, принимая $m = -1$ в правой части этого равенства, получим:

$$\lim_{m\to(-1)}-\frac{2}{3}\mathrm{pochhammer}\left(\frac{3}{2}-m,\ m\right)(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x+y)^{\left(\frac{1}{2}-m\right)} = -\frac{4}{9}(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x+y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Снова вычисляем n-ю производную от полученного выражения по x:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(-\frac{4}{9}(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x+y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right) = -\frac{4}{9}\sum_{k_1=0}^{n} C(n,\ k_1)\left(\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right)\left(\frac{\partial^{n-k_1}}{\partial x^{n-k_1}}(x+y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right). \quad (3.7.3)$$

Так как

$$\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)} = \text{pochhammer}\left(\frac{5}{2}-k_1,\ k_1\right)(x-z)^{\left(\frac{3}{2}-k_1\right)},$$

$$\frac{\partial^{n-k_1}}{\partial x^{n-k_1}}(x+y)^{\left(\frac{3}{2}\right)} = \text{pochhammer}\left(\frac{5}{2}-n+k_1,\ n-k_1\right)(x+y)^{\left(\frac{3}{2}-n+k_1\right)},$$

то, подставляя эти значения в правую часть (3.7.3), имеем:

$$\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}\left(-\frac{4}{9}(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x+y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right) = -\frac{4}{9}\sum_{k_1=0}^{n} C(n,k_1)\,\text{pochhammer}\left(\frac{5}{2}-k_1,\ k_1\right)(x-z)^{\left(\frac{3}{2}-k_1\right)}\times$$

$$\times\,\text{pochhammer}\left(\frac{5}{2}-n+k_1,\ n-k_1\right)(x+y)^{\left(\frac{3}{2}-n+k_1\right)}.$$

В итоге получим:

$$\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}\left(-\frac{4}{9}(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x+y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right) =$$

$$= -\frac{4(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}\,\text{pochhammer}\left(\frac{5}{2}-n,n\right)\left(\frac{x+y}{x-z}\right)^{\left(-\frac{3}{4}+\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{-z-y}{x-z}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}\text{LegendreP}\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}+n,\frac{-2x-y+z}{y+z}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}-n\right)}{9(x+y)^{\left(-\frac{3}{2}+n\right)}}.$$

Принимая здесь $n = -1$, находим:

$$\lim_{n \to (-1)} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(-\frac{4}{9}(x-z)^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x+y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}(x-z)^{\left(\frac{5}{4}\right)}(x+y)^{\left(\frac{5}{4}\right)}(-z-y)^{\left(\frac{3}{2}\right)} \operatorname{LegendreP}\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{2x+y-z}{y+z}\right)\pi^{\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Таким образом, искомое значение интеграла (3.7.2) равно:

$$\iiint \sqrt{x-z}\,\sqrt{x+y}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= -\frac{1}{3}(x-z)^{\left(\frac{5}{4}\right)}(x+y)^{\left(\frac{5}{4}\right)}(-z-y)^{\left(\frac{3}{2}\right)} \operatorname{LegendreP}\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{2x+y-z}{y+z}\right)\sqrt{\pi}.$$

П р и м е ч а н и е. Решение справедливо только для значений x, y, z удовлетворяющих области определения правой и левой части этого решения.

Вычисление других криволинейных и поверхностных интегралов производится по изложенным правилам, аналогично.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В том случае, когда вычисление неопределенного интеграла производится от сложной функции вида $u(x)$, $v(x)$ или $F(R(x))$, то возникает необходимость определения значения суммы ряда (2.2.0) или (2.2.4). Безусловно, что такая задача разрешима далеко не в каждом случае.

Здесь можно воспользоваться установленной еще Ньютоном полезной особенностью некоторых конечных рядов, заключающейся в следующем.

Выражение вида

$$\sum_{i=0}^{n} C(n, k)\, x^k \tag{4.1}$$

при целых n удовлетворяет формуле

$$\sum_{i=0}^{n} C(n, k)\, x^k = (1 + x)^n \tag{4.2}$$

для любых значений x.

Если осуществить переход к биномиальному ряду:

$$\sum_{i=0}^{\infty} C(n, k)\, x^k,$$

то получаем формулу

$$\sum_{i=0}^{\infty} C(n, k)\, x^k = (1 + x)^n, \tag{4.3}$$

которая выполняется уже при дробных и отрицательных значениях n. При этом «платой» за это является ограничение области изменения x, в которой данная формула применима.

Например, формула (4.3) выполнена, при положительных действительных значениях n, только для $|x| \leqslant 1$.

Применительно к нашему случаю, допустим, что заданы такие две дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$, что выполняются условия:

$$\lim_{i \to 0} \frac{d^i}{dx^i} u(x) = u(x), \quad \lim_{i \to 0} \frac{d^i}{dx^i} v(x) = v(x).$$

Тогда, поскольку в соответствии с равенством

$$\frac{d^n}{dx^n}(u(x)v(x)) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^i}{dx^i}(u(x)) \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} v(x)$$

выполняется условие

$$\lim_{n \to 0} \frac{d^n}{dx^n}(u(x)v(x)) = u(x)v(x),$$

то в соответствии с **Основной Теоремой** и сделанным предположением, получим следующие формулы:

— для вычисления интеграла от сложной функции вида $u(x)v(x)$:

$$\boxed{\int u(x)v(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(u(x)) \lim_{n \to (-1)} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} v(x)} \qquad \textbf{(4.4)}$$

или эквивалентная ей (в силу того, что $u(x)v(x) = v(x)u(x)$) формула:

$$\boxed{\int u(x)v(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(v(x)) \lim_{n \to (-1)} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} u(x).} \qquad \textbf{(4.5)}$$

Какая из приведенных зависимостей является истинной, и в какой области определения переменной x, устанавливается дополнительной проверкой.

▶ **Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int \sqrt{x}\,\sin x\,dx. \tag{4.6}$$

Р е ш е н и е. Примем

$$u(x) = \sqrt{x}, \quad v(x) = \sin x. \tag{4.7}$$

Тогда, пользуясь формулой (4.4), имеем:

$$\int \sqrt{x}\,\sin x\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(\sqrt{x})\,\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}\sin x. \tag{4.8}$$

Так как

$$\frac{d^i}{dx^i}\sqrt{x} = \text{pochhammer}\left(\frac{3}{2} - i,\ i\right) x^{\left(\frac{1}{2} - i\right)}, \quad \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}\sin x = -\sin\left(-x - \frac{(n-i)\pi}{2}\right),$$

то формула (4.8) принимает вид:

$$\int \sqrt{x}\,\sin x\,dx = \sum_{i=0}^{\infty}\left(-(-1)^i\,\text{pochhammer}\left(\frac{3}{2} - i,\ i\right) x^{\left(\frac{1}{2} - i\right)}\,\sin\left(-x - \frac{(-1-i)\pi}{2}\right)\right). \tag{4.9}$$

С целью установить ее истинность выполним численную проверку в интервале [–10; 10] с шагом 1 для первых 10 членов ряда.

Так как

$$\int \sqrt{x}\,\sin x\,dx = -\sqrt{x}\cos x + \frac{\sqrt{2\pi}\,\text{FresnelC}\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right)}{2},$$

где

$$\text{FresnelC}(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt,$$

то значение абсолютной ошибки в заданном интервале определяется формулой:

$$\Delta x = \left| -\sqrt{x}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{FresnelC}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{10} -(-1)^i \,\mathrm{pochhammer}\left(\frac{3}{2} - i,\ i\right) x^{\left(\frac{1}{2} - i\right)} \sin\left(-x - \frac{(-1-i)\pi}{2}\right) \right|.$$

Приведем вычисленные значения

$\Delta(-10) = (3.201030252\,I = 2.574374493\,I)$
$\Delta(-9) = (3.436254344\,I = 2.809616184\,I)$
$\Delta(-8) = (1.212781534\,I = 0.5861730592\,I)$
$\Delta(-7) = (-1.255037077\,I = -1.881744201\,I)$
$\Delta(-6) = (-1.796365879\,I = -2.424079211\,I)$
$\Delta(-5) = (-0.2226285984\,I = -0.8539655819\,I)$
$\Delta(-4) = (1.768748705\,I = 1.158524912\,I)$
$\Delta(-3) = (2.417852014\,I = 2.697215364\,I)$
$\Delta(-2) = (1.532645017\,I = 28.37436817\,I)$
$\Delta(-1) = (0.3642219316\,I = -14639.13113\,I)$
$\Delta(0) = \infty$
$\Delta(1) = (.3642219316 = -14639.13113)$
$\Delta(2) = (1.532645016 = 28.37436817)$
$\Delta(3) = (2.417852014 = 2.697215364)$
$\Delta(4) = (1.768748705 = 1.158524912)$
$\Delta(5) = (-0.2226285984 = -0.8539655815)$
$\Delta(6) = (-1.796365879 = -2.424079211)$
$\Delta(7) = (-1.255037077 = -1.881744201)$
$\Delta(8) = (1.212781534 = 0.5861730592)$
$\Delta(9) = (3.436254344 = 2.809616184)$
$\Delta(10) = (3.201030252 = 2.574374493)$

Как видим, полученное значение абсолютной ошибки принимает очень большое значение, достигая в точке ноль бесконечности. Следовательно, формула (4.9) является неверной.

В этом случае (4.7) представим в виде:

$$u(x) = \sin x, \quad v(x) = \sqrt{x}. \tag{4.10}$$

Тогда искомая формула приобретает вид:

$$\int \sin x \sqrt{x}\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} C(-1,\ i) \frac{d^i}{dx^i} (\sin x) \lim_{n \to (-1)} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} \sqrt{x}. \tag{4.11}$$

Так как

$$\frac{d^i}{dx^i} \sin x = \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right), \quad \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} \sqrt{x} = \text{pochhammer}\left(\frac{3}{2} - n + i,\ n - i\right) x^{\left(\frac{1}{2} - n + i\right)}, \tag{4.12}$$

то (4.11) приводится к виду:

$$\int \sin x \sqrt{x}\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right) \text{pochhammer}\left(\frac{5}{2} + i,\ -1 - i\right) x^{\left(\frac{3}{2} + i\right)}. \tag{4.13}$$

В этом случае формула для вычисления абсолютной ошибки в том же интервале равна: (4.14)

$$\Delta x = \left| -\sqrt{x} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\pi}\, \text{FresnelC}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{10} -(-1)^i\, \text{pochhammer}\left(\frac{5}{2} + i,\ -1 - i\right) x^{\left(\frac{3}{2} + i\right)} \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right) \right|.$$

Приведем вычисленные значения:

$\Delta(-10) = 1325.060462$	$\Delta(-4) = 0.0141252415$
$\Delta(-9) = 189.0030336$	$\Delta(-3) = 0.0004367887$
$\Delta(-8) = 34.52155489$	$\Delta(-2) = 0.826 \cdot 10^{-6}$
$\Delta(-7) = 16.58116158$	$\Delta(-1) = 0.2 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-6) = 1.931998146$	$\Delta(0) = 0$
$\Delta(-5) = 0.0192693667$	$\Delta(1) = 0.2 \cdot 10^{-9}$

$\Delta(2) = 0.826 \cdot 10^{-6}$
$\Delta(3) = 0.0004367887$
$\Delta(4) = 0.0141252415$
$\Delta(5) = 0.0192693668$
$\Delta(6) = 1.931998146$
$\Delta(7) = 16.58116158$
$\Delta(8) = 34.52155489$
$\Delta(9) = 189.0030336$
$\Delta(10) = 1325.060462$

Если принять $M = 30$, то значения (4.14) в том же интервале будут равны:

$\Delta(-10) = .1715432\text{e-}3$
$\Delta(-9) = 0.45298 \cdot 10^{-5}$
$\Delta(-8) = 0.114 \cdot 10^{-7}$
$\Delta(-7) = 0.30 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-6) = 0.9 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-5) = 0.2 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-4) = 0.3 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-3) = 0.5 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-2) = 0.1 \cdot 10^{-8}$
$\Delta(-1) = 0.5 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(0) = 0.$
$\Delta(1) = 0.5 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(2) = 0.4 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(3) = 0.5 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(4) = 0.3 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(5) = 0.4 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(6) = 0.9 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(7) = 0.3 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(8) = 0.114 \cdot 10^{-7}$
$\Delta(9) = 0.45298 \cdot 10^{-5}$
$\Delta(10) = 0.0001715432$

Таким образом, убеждаемся в том, что формула (4.13) действительно дает точные значения искомого интеграла в области изменения переменной x $[-\infty, \infty]$.

▶ **Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int e^x x^{\left(\frac{3}{5}\right)} dx \tag{4.15}$$

и установить область определения переменной x, полученного решения.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (4.4). В этом случае примем:

$$u(x) = e^x, \quad v(x) = x^{\left(\frac{3}{5}\right)}.$$

Тогда

$$\int e^x x^{\left(\frac{3}{5}\right)} dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(e^x) \lim_{n \to (-1)} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} x^{\left(\frac{3}{5}\right)}. \tag{4.16}$$

Так как

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{\left(\frac{3}{5}\right)} = \text{pochhammer}\left(\frac{8}{5} - n,\ n\right) x^{\left(\frac{3}{5} - n\right)}, \tag{4.17}$$

$$\frac{d^i}{dx^i} e^x = e^x, \tag{4.18}$$

то (4.16) примет вид:

$$\int e^x x^{\left(\frac{3}{5}\right)} dx = e^x \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\text{pochhammer}\left(\frac{13}{5} + i,\ -1 - i\right) x^{\left(\frac{8}{5} + i\right)} \right).$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\text{pochhammer}\left(\frac{13}{5} + i,\ -1 - i\right) x^{\left(\frac{8}{5} + i\right)} = \frac{1}{5}\left(3\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) - 5\Gamma\left(\frac{8}{5},\ -x\right)\right) e^{(-x)} (-1)^{\left(\frac{2}{5}\right)},$$

то в итоге:

$$\int e^x x^{\left(\frac{3}{5}\right)} dx = \frac{(-1)^{\left(\frac{2}{5}\right)}}{5} \cdot \left(3\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) - 5\Gamma\left(\frac{8}{5},\ -x\right)\right). \tag{4.19}$$

Установим область определения этой формулы.

Так как табличное значение вычисляемого интеграла:

$$\int e^x x^{\left(\frac{3}{5}\right)} dx = \frac{(-1)^{\left(\frac{7}{5}\right)}}{5} \left(3\Gamma\left(\frac{3}{5},\ -x\right) - 3\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) + 5x^{\left(\frac{3}{5}\right)} e^{\left(\frac{3I\pi}{5}\right)} e^x\right),$$

то численная проверка в интервале [–20; 20] с шагом 1 дала для их абсолютной относительной ошибки:

$$\Delta x = \left| 1 + \frac{\left(-3\,\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) + 3\,\Gamma\left(\frac{3}{5}, -x\right) + 5x^{\left(\frac{3}{5}\right)} e^{\left(\frac{3}{5I\pi}\right)} e^{x} \right)}{3\,\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) - 5\,\Gamma\left(\frac{8}{5}, -x\right)} \right|$$

следующие значения:

$\Delta(-20) = 0.2630476519 \cdot 10^{-7}$	$\Delta(1) = 0.3340260929 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-19) = 0.6943414945 \cdot 10^{-7}$	$\Delta(2) = 0.3475281413 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-18) = 0.1839721862 \cdot 10^{-6}$	$\Delta(3) = 0.3968375578 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-17) = 0.4825990155 \cdot 10^{-6}$	$\Delta(4) = 0.1831239045 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-16) = 0.1263912290 \cdot 10^{-5}$	$\Delta(5) = 0.6001642576 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-15) = 0.3306818371 \cdot 10^{-5}$	$\Delta(6) = 0.1173938759 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-14) = 0.8623098476 \cdot 10^{-5}$	$\Delta(7) = 0.7001567377 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-13) = 0.00002242145467$	$\Delta(8) = 0.2638267440 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-12) = 0.00005809325235$	$\Delta(9) = 0.7050695054 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-11) = 0.0001498880315$	$\Delta(10) = 0.2521460017 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-10) = 0.0003848415292$	$\Delta(11) = 0.1084407461 \cdot 10^{-8}$
$\Delta(-9) = 0.0009823538468$	$\Delta(12) = 0.4417104615 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-8) = 0.002490241074$	$\Delta(13) = 0.3273910173 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-7) = 0.006261454419$	$\Delta(14) = 0.2895683395 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-6) = 0.01560052607$	$\Delta(15) = 0.7190425427 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-5) = 0.03852286522$	$\Delta(16) = 0.3479614188 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-4) = 0.09465065057$	$\Delta(17) = 0.4994502949 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-3) = 0.2347484772$	$\Delta(18) = 0.3330613359 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-2) = 0.6146529906$	$\Delta(19) = 0.1016689848 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-1) = 2.002820109$	$\Delta(20) = 0.6702660904 \cdot 10^{-9}$

Отсюда следует, после дополнительной численной проверки, что абсолютная погрешность с точностью не менее $10^{(-5)}$ достигается в области: $[-\infty; -14]$, $[1; \infty)$.

Рассуждая аналогичным образом, как и при выводе формул (4.4), (4.5), получим формулу для вычисления s-кратного интеграла от сложной функции вида $u(x)\,v(x)$:

$$\boxed{[u(x)\,v(x)]_s = \sum_{i=0}^{\infty} C_{-s}^{i} \frac{d^i}{dx^i}(u(x)) \lim_{n \to (-s)} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} v(x)} \tag{4.20}$$

или

$$\boxed{[u(x)\,v(x)]_s = \sum_{i=0}^{\infty} C_{-s}^{i} \frac{d^i}{dx^i}(v(x)) \lim_{n \to (-s)} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} u(x).} \tag{4.21}$$

▶ **Пример 3.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint \sqrt{x}\,\sin x\,dx\,dx \tag{4.22}$$

и установить область определения полученного решения.

Решение. Учитывая результаты примера 2, принимаем следующие значения задаваемых функций:

$$u(x) = \sin x, \quad v(x) = \sqrt{x}.$$

Тогда искомая формула в соответствии с (4.20) принимает вид:

$$\iint \sqrt{x}\,\sin x\,dx\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} C_{-2}^{i} \frac{d^i}{dx^i}(\sin x) \lim_{n \to (-2)} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} \sqrt{x}.$$

С учетом формулы (4.20) в итоге имеем:

$$\iint \sin x \sqrt{x}\,dx\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} C(-2,\ i) \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right) \operatorname{pochhammer}\left(\frac{7}{2} + i,\ -2 - i\right) x^{\left(\frac{5}{2} + i\right)}. \tag{4.23}$$

П р о в е р к а. Так как табличное значение интеграла (4.22) равно:

$$\iint \sin x \sqrt{x}\, dx\, dx = -\frac{3 \sin x \sqrt{x}}{2} + \frac{3\sqrt{2}\sqrt{\pi}\ \mathrm{FresnelS}\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right)}{4} + \frac{\sqrt{2}\, x\, \mathrm{FresnelC}\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right)\sqrt{\pi}}{2},$$

то формула для определения абсолютной ошибки принимает вид:

$$\Delta x = \left| 1 - \frac{\sum_{i=0}^{M} C(-2, i) \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right) \mathrm{pochhammer}\left(\frac{7}{2} + i, -2 - i\right) x^{\left(\frac{5}{2} + i\right)}}{-\frac{3 \sin x \sqrt{x}}{2} + \frac{3\sqrt{2}\sqrt{\pi}\ \mathrm{FresnelS}\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right)}{4} + \frac{\sqrt{2}\, x\, \mathrm{FresnelC}\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right)\sqrt{\pi}}{2}} \right|.$$

Вычисляя в интервале [–10; 10] с шагом 1 значения Δx при $M = 30$, получим:

$\Delta(-10) = 0.11 \cdot 10^{-8}$	$\Delta(1) = 0.4 \cdot 10^{-8}$
$\Delta(-9) = 0.16 \cdot 10^{-8}$	$\Delta(2) = -0.1 \cdot 10^{-8}$
$\Delta(-8) = 0.1 \cdot 10^{-8}$	$\Delta(3) = -0.1 \cdot 10^{-8}$
$\Delta(-7) = 0.2 \cdot 10^{-8}$	$\Delta(4) = 0.2 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-6) = 0.1 \cdot 10^{-8}$	$\Delta(5) = 0.$
$\Delta(-5) = 0.$	$\Delta(6) = 0.1 \cdot 10^{-8}$
$\Delta(-4) = 0.$	$\Delta(7) = 0.2 \cdot 10^{-8}$
$\Delta(-3) = 0.3 \cdot 10^{-9}$	$\Delta(8) = -0.1 \cdot 10^{-8}$
$\Delta(-2) = 0.2 \cdot 10^{-8}$	$\Delta(9) = 0.2 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-1) = 0.9 \cdot 10^{-8}$	$\Delta(10) = 0.11 \cdot 10^{-8}$

Увеличивая значение интервала изменения переменной x и параметра M, убеждаемся в том, что абсолютная относительная ошибка остается ничтожно малой.

Отсюда следует, что область определения формулы (4.23) равна $(-\infty; \infty)$. Задача решена.

Для вычисления интеграла от сложной функции вида $F(R(x))$ n-я производная определяется формулой (2.2.4):

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} F(R) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{k!} C(k, s) R^s \frac{\partial^n}{\partial x^n} (R^{(k-s)}) \frac{d^k}{dR^k} F(R).$$

Данная формула не удовлетворяет условию

$$\lim_{n \to 0} \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(R) = F(R),$$

так как правая часть предыдущего равенства в этом случае равна нулю. Поэтому точную формулу для вычисления интеграла

$$\int F(R(x))\, dx$$

из этого равенства не получить.

Однако если все же пренебречь этим условием и формально считать, что

$$\lim_{n \to (-1)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(R) = \int F(R(x))\, dx \quad \text{и} \quad \lim_{n \to (-1)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} R(x)^{(k-s)} = \int R(x)^{(k-s)} dx,$$

то получаем формулу:

$$\boxed{\int F(R(x))\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dR^k} (F(R)) \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C(k, s) R(x)^s \int R(x)^{(k-s)} dx,} \qquad (4.24)$$

которая в ряде случаев позволяет произвести вычисление интеграла от сложной функции вида $F(R(x))$.

Как видим, этот интеграл определяется двукратным суммированием более простых интегралов вида:

$$\int R(x)^{(k-s)}\,dx.$$

Аналогично, для вычисления p-кратного интеграла от функции вида $F(R(x))$ формально можно использовать формулу:

$$\boxed{[F(R(x))]_p = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s}{k!}C(k,\ s)\,R(x)^s[R(x)^{(k-s)}]_p\,\frac{d^k}{dR^k}F(R).} \tag{4.25}$$

Область определения переменной x устанавливается в каждом случае отдельно, в зависимости от вида подынтегральных функций.

Отметим, что формулы (4.24), (4.25) не являются строгими во всех случаях, в силу того что не выполнено условие Основной Теоремы. Тем не менее, как будет показано далее, в ряде случаев это, однако, дает хорошие результаты.

▶ **Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int \sin(\sin x)\,dx \tag{4.26}$$

и установить ее область определения.

Р е ш е н и е. Введем обозначение:

$$R = \sin x.$$

Тогда в соответствии с формулой (4.24) имеем:

$$\int \sin(\sin x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dR^k}(\sin R)\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\,C(k,\ s)\,(\sin x)^s\int(\sin x)^{(k-s)}\,dx.$$

Так как

$$\frac{d^k}{dR^k}\sin R = \sin\left(R + \frac{k\pi}{2}\right),$$

то искомая формула принимает вид: (4.27)

$$\int \sin(\sin x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\sin\left(R + \frac{k\pi}{2}\right)\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\,C(k,\ s)\,(\sin x)^s\int(\sin x)^{(k-s)}\,dx.$$

Вычисляя абсолютную относительную ошибку:

$$\Delta x = \left|1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\sin\left(R + \frac{k\pi}{2}\right)\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\,C(k,\ s)\,(\sin x)^s\int(\sin x)^{(k-s)}\,dx}{\int\sin(\sin x)\,dx}\right|$$

в интервале [–10; 10] с шагом 1, убеждаемся, что полученная формула справедлива с высокой точностью.

$\Delta(-10) = -0.14\cdot 10^{-8}$	$\Delta(1) = 0.$
$\Delta(-9) = -0.5\cdot 10^{-9}$	$\Delta(2) = 0.$
$\Delta(-8) = 0.$	$\Delta(3) = -0.57\cdot 10^{-8}$
$\Delta(-7) = -0.7\cdot 10^{-9}$	$\Delta(4) = -0.9\cdot 10^{-9}$
$\Delta(-6) = 0.7\cdot 10^{-8}$	$\Delta(5) = 0.$
$\Delta(-5) = 0.$	$\Delta(6) = 0.7\cdot 10^{-8}$
$\Delta(-4) = -0.9\cdot 10^{-9}$	$\Delta(7) = -0.7\cdot 10^{-9}$
$\Delta(-3) = -0.57\cdot 10^{-8}$	$\Delta(8) = 0.$
$\Delta(-2) = 0.$	$\Delta(9) = -0.5\cdot 10^{-9}$
$\Delta(-1) = 0.$	$\Delta(10) = -0.14\cdot 10^{-8}$

Расширение интервала показывает, что формула (4.27) справедлива на всем интервале изменения переменной x.

▶ **Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int \sin(x^3 - 2x + 2)\,dx$$

и установить ее область определения.

Решение. Так как n-я производная от функции $\sin(x^3 - 2x + 2)$ определяется в соответствии с формулой (2.2.9), то в соответствии с (4.24) получаем искомую формулу: (4.28)

$$\int \sin(x^3 - 2x + 2)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sin\left(x^3 - 2x + 2 + \frac{k\pi}{2}\right) \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C(k, s)(x^3 - 2x + 2)^s \int (x^3 - 2x + 2)^{(k-s)}\,dx.$$

Установим ее область определения.

Так как табличного значения интеграла (4.26) нет, то разложим функцию $\sin(x^3 - 2x + 2)$ в ряд Маклорена до пятого члена включительно.

Тогда получаем:

$$\sin(x^3 - 2x + 2) = \sin 2 + (-2\cos 2)\,x + (-2\sin 2)\,x^2 + \frac{7\cos(2)\,x^3}{3} + \frac{8\sin(2)\,x^4}{3}.$$

В этом случае формула (4.28) в приближенном виде принимает форму:

$$\int \sin 2 + (-2\cos 2)\,x + (-2\sin 2)\,x^2 + \frac{7\cos(2)\,x^3}{3} + \frac{8\sin(2)\,x^4}{3}\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k!} \cdot \sin\left(x^3 - 2x + 2 + \frac{k\pi}{2}\right) \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C(k, s)\,(x^3 - 2x + 2)^s \int (x^3 - 2x + 2)^{(k-s)}\,dx,$$

где M — задаваемый параметр.

Тогда абсолютная относительная ошибка определяется формулой:

$$\Delta x = \left| 1 + \frac{\sum\limits_{k=1}^{M} \frac{1}{k!} \cdot \sin\left(x^3 - 2x + 2 + \frac{k\pi}{2} \right) \sum\limits_{s=0}^{k-1} (-1)^s C(k, s)(x^3 - 2x + 2)^s \int (x^3 - 2x + 2)^{(k-s)}\, dx}{\sin(2)\, x + \cos(2)\, x^2 - \frac{2\sin(2)\, x^3}{3} - \frac{7\cos(2)\, x^4}{12} - \frac{8\sin(2)\, x^5}{15}} \right|.$$

Принимая $M = 5$ и производя вычисления в интервале [–1; 1] с шагом 0.1, получаем значения:

$\Delta(-1) = 1.237262408$	$\Delta(0.1) = 0.04893540752$
$\Delta(-0.9) = 1.247783662$	$\Delta(0.2) = 0.02386486719$
$\Delta(-0.8) = 1.185998323$	$\Delta(0.3) = 0.01091613317$
$\Delta(-0.7) = 1.074487473$	$\Delta(0.4) = 0.004496522780$
$\Delta(-0.6) = 0.9290919658$	$\Delta(0.5) = 0.001424245500$
$\Delta(-0.5) = 0.7604076842$	$\Delta(0.6) = 0.0007602914847$
$\Delta(-0.4) = 0.5830491332$	$\Delta(0.7) = 0.003619170205$
$\Delta(-0.3) = 0.4155715623$	$\Delta(0.8) = 0{,}01303245170$
$\Delta(-0.2) = 0.2740347706$	$\Delta(0.9) = 0.03358418027$
$\Delta(-0.1) = 0.1668252277$	$\Delta(1.0) = 0.07041168123$
$\Delta(0.) = 0$	

В том случае если принять $M = 40$, значение абсолютной ошибки в этом же интервале равно:

$\Delta(-1) = 0.4204251509$	$\Delta(-0.3) = 0.0007258711016$
$\Delta(-0.9) = 0.2863374988$	$\Delta(-0.2) = 0.00008061768800$
$\Delta(-0.8) = 0.1680027287$	$\Delta(-0.1) = 0.2101142556 \cdot 10^{-5}$
$\Delta(-0.7) = 0.08407936863$	$\Delta(0.) = 0$
$\Delta(-0.6) = 0.03573040793$	$\Delta(0.1) = 0.1393099901 \cdot 10^{-5}$
$\Delta(-0.5) = 0.01268676815$	$\Delta(0.2) = 0.00003468571687$
$\Delta(-0.4) = 0.003590352856$	$\Delta(0.3) = 0.0001940579159$

$$\Delta(0.4) = 0.0005441907295 \qquad \Delta(0.8) = 0.01263984230$$
$$\Delta(0.5) = 0.0008726738615 \qquad \Delta(0.9) = 0.03307283883$$
$$\Delta(0.6) = 0.0003172872114 \qquad \Delta(1.0) = 0.06942110072$$
$$\Delta(0.7) = 0.003067380506$$

Продолжая увеличивать значение параметра M, убеждаемся, что реальная область определения формулы (4.28) $(-\infty;\ \infty)$.

▶ **Пример 2.** Вычислить двукратный интеграл

$$\iint e^x x^{\left(\frac{3}{5}\right)} dx\, dx \tag{4.29}$$

и установить его область определения.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (4.25). Тогда

$$\iint e^x x^{\left(\frac{3}{5}\right)} dx\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} C(-2,\ i) \frac{d^i}{dx^i}(e^x) \lim_{n \to (-2)} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} x^{\left(\frac{3}{5}\right)}.$$

Учитывая полученные результаты (4.12), (4.13), имеем:

$$\iint e^x x^{\left(\frac{3}{5}\right)} dx\, dx = e^x \sum_{i=0}^{\infty} C(-2,\ i) \operatorname{pochhammer}\left(\frac{18}{5} + i,\ -2 - i\right) x^{\left(\frac{13}{5} + i\right)}.$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{\infty} C(-2, i) \operatorname{pochhammer}\left(\frac{18}{5} + i, -2 - i\right) x^{\left(\frac{13}{5} + i\right)} = -\frac{5x^{\left(\frac{3}{10}\right)} e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} \left(\operatorname{WhittakerM}\left(\frac{7}{10}, \frac{4}{5}, x\right) - \operatorname{WhittakerM}\left(-\frac{3}{10}, \frac{4}{5}, x\right)\right)}{8},$$

где функция WhittakerM(mu, nu, z) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} y + \left(-\frac{1}{4} + \frac{mu}{z} + \frac{\frac{1}{4} - nu^2}{z^2} \right) y = 0.$$

В этом случае искомое значение равно:

$$\iint e^x x^{\left(\frac{3}{5}\right)} dx\, dx = \frac{5e^{\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\text{WhittakerM}\left(\frac{7}{10}, \frac{4}{5}, x\right) - \text{WhittakerM}\left(-\frac{3}{10}, \frac{4}{5}, x\right)\right)}{8\left(x^{\left(\frac{3}{10}\right)}\right)}.$$

Численные вычисления, которые здесь производятся по схеме, аналогичной вышеприведенной, показывают, что практическая область определения данной формулы [–1; 1].

П р и м е ч а н и е. Табличного значения для данного интеграла нет.

▶ **Пример 3.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint \sin(x^3 - 2x + 2)\, dx\, dx \tag{4.30}$$

и установить область его определения.

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой (4.25) и (2.2.9) имеем: (4.31)

$$\iint \sin(x^3 - 2x + 2)\, dx\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^3 - 2x + 2 + \frac{k\pi}{2}\right) \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C(k, s)(x^3 - 2x + 2)^s \iint (x^3 - 2x + 2)^{(k-s)}\, dx\, dx}{k!}.$$

С целью определения его области определения, разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена до 5 члена включительно и вычислим относительную ошибку:

$$\Delta x = \left| 1 + \frac{\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k!} \cdot \sin\left(x^3 - 2x + 2 + \frac{k\pi}{2}\right) \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C(k, s)(x^3 - 2x + 2)^s \iint (x^3 - 2x + 2)^{(k-s)}\, dx\, dx}{-\frac{\sin(2)\, x^2}{2} + \frac{\cos(2)\, x^3}{3} + \frac{\sin(2)\, x^4}{6} - \frac{7\cos(2)\, x^5}{60} - \frac{4\sin(2)\, x^6}{45}} \right|$$

в интервале [–1; 1] с шагом 0.1.

Вычисления при $M = 40$ дают значения:

$\Delta(-1) = 0.1265750510$	$\Delta(0.1) = 0.4130936679 \cdot 10^{-6}$
$\Delta(-0.9) = 0.07443723751$	$\Delta(0.2) = 0.00001070968920$
$\Delta(-0.8) = 0.03983665452$	$\Delta(0.3) = 0.00006341758809$
$\Delta(-0.7) = 0.01921293604$	$\Delta(0.4) = 0.0001957913887$
$\Delta(-0.6) = 0.008198824309$	$\Delta(0.5) = 0.0003915284856$
$\Delta(-0.5) = 0.002994052492$	$\Delta(0.6) = 0.0004918530896$
$\Delta(-0.4) = 0.0008806050517$	$\Delta(0.7) = 0.00008725879508$
$\Delta(-0.3) = 0.0001854700660$	$\Delta(0.8) = 0.001594598481$
$\Delta(-0.2) = 0.00002142045146$	$\Delta(0.9) = 0.005780684816$
$\Delta(-0.1) = 0.5829486413 \cdot 10^{-6}$	$\Delta(1.0) = 0.01418712939$
$\Delta(0.) = 0$	

Увеличивая M и расширяя область определения переменной x, убеждаемся в том, что область определения формулы (4.31) вся ось x.

Задача решена.

Приведем пример, когда формула (4.24) не работает.

▶ **Пример 4.** Вычислить интеграл

$$\int e^{\sin x}\,dx,$$

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой (4.24) имеем:

$$\int e^{\sin x}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s}{k!}C(k,\ s)(\sin x)^s\left(\frac{d^k}{dR^k}e^R\right)\int(\sin x)^{(k-s)}dx, \tag{4.31}$$

где $R = \sin x$.

Так как

$$\frac{d^k}{dR^k}e^R = e^R,$$

то (4.31) принимает вид:

$$\int e^{\sin x}dx = e^{\sin x}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s}{k!}C(k,\ s)\,(\sin x)^s\int(\sin x)^{(k-s)}dx.$$

Поскольку

$$\int \sin x^{(k-s)}dx = \left(\frac{1}{-s+1+k}\right)\cdot \sin x^{(-s+1+k)}\ \mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{k}{2}-\frac{s}{2}\right],\ \left[\frac{3}{2}+\frac{k}{2}-\frac{s}{2}\right],\ (\sin x)^2\right),$$

то итоговая формула определяется равенством:

$$\int e^{\sin x}dx = e^{\sin x}\sum_{k=1}^{\infty}\sin x^{(1+k)}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s C(k,\ s)\ \mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{k}{2}-\frac{s}{2}\right],\left[\frac{3}{2}+\frac{k}{2}-\frac{s}{2}\right],(\sin x)^2\right)}{k!\,(-s+1+k)}.$$

Абсолютная ошибка, определяемая формулой

$$\Delta x = \left| 1 - \frac{e^{\sin x} \sum_{k=1}^{M} \sin x^{(1+k)} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s C(k, s) \operatorname{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right], \left[\frac{3}{2} + \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right], (\sin x)^2\right)}{k!\,(-s + 1 + k)}}{\int e^{\sin x} dx} \right|,$$

даже при условии разложения в ряд Маклорена функции $e^{\sin x}$ до 200 члена включительно и при $M = 60$ дает неудовлетворительные значения:

$\Delta(-1) = 1.535332030$	$\Delta(0.1) = 0.9508739936$
$\Delta(-0.9) = 1.482776297$	$\Delta(0.2) = 0.9036500386$
$\Delta(-0.8) = 1.429158498$	$\Delta(0.3) = 0.8585382942$
$\Delta(-0.7) = 1.374798384$	$\Delta(0.4) = 0.8157184949$
$\Delta(-0.6) = 1.320015500$	$\Delta(0.5) = 0.7753375781$
$\Delta(-0.5) = 1.265128598$	$\Delta(0.6) = 0.7375083811$
$\Delta(-0.4) = 1.210454289$	$\Delta(0.7) = 0.7023094812$
$\Delta(-0.3) = 1.156304902$	$\Delta(0.8) = 0.6697861789$
$\Delta(-0.2) = 1.102985578$	$\Delta(0.9) = 0.6399525028$
$\Delta(-0.1) = 1.050790730$	$\Delta(1.0) = 0.6127940582$
$\Delta(0.) = \mathrm{Float(undefined)}$	

Примечание. В то же время замечено, что если к правой части прибавить переменную x, то полученное значение

$$\int e^{\sin x} dx = x + e^{\sin x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin x^{(1+k)}}{k!} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s C(k, s) \operatorname{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right], \left[\frac{3}{2} + \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right], (\sin x)^2\right)}{-s + 1 + k} \tag{4.32}$$

с высокой точностью дает искомое равенство.

Действительно, абсолютная относительная ошибка в этом случае определяется формулой

$$\Delta x = \left| 1 - \frac{e^{\sin x} \sum_{k=1}^{M} \sin x^{(1+k)} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s C(k, s) \operatorname{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right], \left[\frac{3}{2} + \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right], (\sin x)^2\right)}{k!\,(-s + 1 + k)} + x}{\int e^{\sin x} dx} \right|$$

и вычисленные значения в том же интервале равны

$\Delta(-1) = 0.$	$\Delta(0.1) = 0.$
$\Delta(-0.9) = 0.$	$\Delta(0.2) = 0.$
$\Delta(-0.8) = 0.$	$\Delta(0.3) = 0.$
$\Delta(-0.7) = 0.$	$\Delta(0.4) = 0.2 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-0.6) = 0.$	$\Delta(0.5) = 0.$
$\Delta(-0.5) = 0.$	$\Delta(0.6) = 0.1 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-0.4) = 0.$	$\Delta(0.7) = 0.1 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(-0.3) = 0.$	$\Delta(0.8) = 0.$
$\Delta(-0.2) = 0.$	$\Delta(0.9) = 0.$
$\Delta(-0.1) = 0.$	$\Delta(1.0) = 0.$
$\Delta(0.) = 0$	

Дополнительная численная проверка показала, что формула (4.32) справедлива на всем интервале изменения переменной x.

Совершенно аналогичным образом показывается, что имеет место также формула

$$\int e^{\cos x} dx = x + e^{\cos x} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s C(k, s) \cos x^s}{k!} \int (\cos x)^{(k-s)} dx,$$

которая также справедлива на всем интервале изменения переменной x.

Литература

1. СМБ, Математический анализ. Дифференцирование и интегрирование. 1978.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. — М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1962.
3. *Куваев М. Р.* Дифференциальное и интегральное исчисление, часть 1, 2. — Томск: Изд-во ТГУ, 1973.

Незбайло Т. Г.
Н44 Новая теория вычисления неопределенного интеграла : учебное пособие. — СПб. : КОРОНА-Век, 2007. — 95 с. — ISBN 978-5-903383-41-2.

Научное пособие, которое с позиции единого подхода задает общий алгоритм вычисления неопределенных интегралов. Предназначено для специалистов по математике, научных работников, инженеров, преподавателей, студентов математических и технических вузов, учащихся физико-математических школ и интересующихся математикой старшеклассников, занимающихся по программе образовательных учреждений.

УДК 372.8 373 5

Учебное издание

Незбайло Тиберий Георгиевич

НОВАЯ ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Учебное пособие

Оформление обложки *Е. Н. Гозман*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректор *А. К. Райхчин*

Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3000 — книги и брошюры. Подписано в печать 20.09.07. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6. Тираж 1001—2000 экз. Заказ № .

ООО «КОРОНА-Век».
193318, Санкт-Петербург, ул. Ворошилова, 6.

ISBN 978-5-903383-41-2

9 785903 383429