ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.
2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.
3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.
4. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1988.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984.
7. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
10. Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – множества натуральных, целых, рациональных, вещественных, комплексных чисел.
$A^T = (a^t_{ij})$ – транспонированная матрица к матрице $A = (a_{ij})$.
$A^H = (a^h_{ij})$ – сопряженная матрица к матрице $A = (a_{ij})$.
$\tilde{A}$ – присоединенная матрица к матрице A.
$\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} \mathcal{A}$ – след матрицы A и оператора $\mathcal{A}$ соответственно.
$\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ – линейная оболочка системы векторов $a_1, \ldots, a_k$.
$\mathcal{L}(V, W)$ – множество всех линейных операторов, действующих из пространства V в пространство W.

Для сокращения используются также стандартные логические символы импликации и кванторы:

запись $A \Longrightarrow B$ читается как "из высказывания A следует высказывание B";

запись $A \Longleftrightarrow B$ означает эквивалентность высказываний A и B и читается как "для A необходимо и достаточно B" или "A выполнено тогда и только тогда, когда выполнено B";

текст в фигурных скобках в записи $A \Rightarrow \{\ldots\} \Rightarrow B$ содержит комментарии к переходу от высказывания A к высказыванию B;

квантор $\forall$ читается как "для любого";

квантор $\exists$ читается как "существует".

Глава I. Матрицы

§1. Понятие матрицы

Терминология и обозначения. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. *Матрицей размера* $m \times n$ называется совокупность mn чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. При этом сами числа называются *элементами* матрицы.

В первых главах мы будем рассматривать лишь вещественные матрицы, т.е. матрицы с вещественными элементами. В дальнейшем (§43) мы убедимся в том, что все изложенные свойства остаются справедливыми и в общем случае матриц над произвольным полем.

Матрицу обозначают прописными латинскими буквами, при этом саму таблицу заключают в скобки (либо круглые, либо квадратные, либо двойные вертикальные):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы обозначают строчными латинскими буквами, снабженными двумя индексами: a_{ij} – элемент матрицы, расположенный в i-й строке и j-м столбце (в позиции (i, j)). В этих обозначениях матрица размера $m \times n$ в общем виде может быть записана следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Приведем ряд других обозначений, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем:
$\mathbb{R}^{m\times n}$ – множество всех вещественных матриц размера $m \times n$;
$A = (a_{ij})$ – матрица A с элементами a_{ij} в позиции (i, j);
$\{A\}_{ij}$ – элемент матрицы A в позиции (i, j);
$A_{m\times n}$ – матрица A размера $m \times n$.

Элементы a_{ij}, где $i = j$, называются *диагональными*, а элементы a_{ij}, где $i \neq j$, – *внедиагональными*. Совокупность диагональных элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}$, где $k = \min(m, n)$, называется *главной диагональю* матрицы, а совокупность элементов a_{1n}, $a_{2,n-1}$, … – ее *побочной диагональю*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается символом O. Отметим, что для каждого размера $m\times n$ существует своя нулевая матрица.

Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей n-го порядка*. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее

Замечание 1. Свойства 4 и 5 часто объединяют, называя их *свойством линейности определителя* относительно строк и столбцов.

Свойство 6. *При перестановке местами двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак.*

Доказательство. Пусть в матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ переставляются i-й и j-й столбцы и B – результат этой перестановки:

$$A = [a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n], \quad B = [a_1 \ldots a_j \ldots a_i \ldots a_n].$$

Очевидно, что определители матриц A и B состоят из одних и тех же членов. Сравним их знаки. Члену $a_{\alpha_1 1} \ldots a_{\alpha_i i} \ldots a_{\alpha_j j} \ldots a_{\alpha_n n}$ в $|A|$ соответствует перестановка $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n$, а в $|B|$ – перестановка $\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$. Эти перестановки отличаются друг от друга одной транспозицией, т.е. имеют разную четность. Отсюда следует, что все члены $|A|$ входят в $|B|$ с обратным знаком. Это означает, что $|A| = -|B|$. ■

Замечание 2. Отметим, что свойство 6 относится к случаю, когда переставляются строки (столбцы) с разными номерами.

Свойство 7. *Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки (столбца), равен нулю.*

Утверждение вытекает из свойства 6: достаточно в матрице поменять местами одинаковые строки, тогда $|A| = -|A| = 0$. ■

Свойство 8. *Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то определитель матрицы равен нулю.*

Утверждение вытекает из свойства линейности определителя и свойства 7. ■

Свойство 9. *Если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк (столбцов), то ее определитель не изменится.*

Утверждение вытекает из свойств 5 и 8. ■

Миноры и алгебраические дополнения. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq \min(m, n)$. Выберем в матрице A произвольные k строк и k столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ соответственно. Элементы матрицы A, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется *минором* k-го порядка матрицы A, расположенным в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Для обозначения миноров приняты символы $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, $M\binom{i_1 i_2 \ldots i_k}{j_1 j_2 \ldots j_k}$, M_k, M. Итак,

$$M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица n-го порядка и $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ – ее минор. Если вычеркнуть в матрице A строки и столбцы, в которых расположен заданный минор, то оставшиеся элемен-

ты матрицы A образуют квадратную матрицу $(n - k)$-го порядка. Определитель этой матрицы называется *дополнительным минором к минору* $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. Дополнительный минор обозначается символами $\overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, $\overline{M}$, M^σ. Очевидно, что исходный минор является дополнительным к своему дополнительному минору. Дополнительный минор к минору $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, взятый со знаком $(-1)^{\sum_{p=1}^k (i_p + j_p)}$, называется *алгебраическим дополнением* к минору $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ и обозначается символом $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. Итак,

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = (-1)^{i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k} \overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}.$$

Теорема 4.5 (теорема Лапласа). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n - 1$. Пусть в матрице A выбраны произвольные k строк (или столбцов). Тогда определитель матрицы A равен сумме всевозможных произведений миноров k-го порядка, расположенных в выбранных строках (соответственно столбцах), на их алгебраические дополнения.*

Доказательство. Пусть выбраны строки с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Следует доказать, что

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_k)} M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}, \tag{4.6}$$

где суммирование ведется по всевозможным значениям $j_1, j_2, \ldots, j_k$ $(1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n)$.

Для доказательства рассмотрим подробнее правую часть требуемого равенства (4.6). Минор $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, как определитель k-го порядка, представляет собой сумму произведений k элементов матрицы A. Точно так же и алгебраическое дополнение $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ является суммой произведений $n - k$ элементов матрицы A. Значит, произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, а следовательно, и вся правая часть (4.6) представляет собой сумму произведений n элементов матрицы A. Обозначим эту сумму через S и покажем, что она совпадает с $\det A$ как с суммой (4.3) членов определителя с соответствующими знаками.

1. Сначала покажем, что произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ представляет собой некоторую сумму членов $\det A$, причем с теми же знаками, с какими они входят в $\det A$.

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline M^{1,2,\ldots,k}_{1,2,\ldots,k} & \\ \hline & A^{1,2,\ldots,k}_{1,2,\ldots,k} \\ \hline \end{array}$$

Рис. 1

а) В простейшем случае, когда минор $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ находится в левом верхнем углу матрицы A (рис. 1), дополнительный минор будет занимать правый нижний угол, при этом он будет совпадать с алгебраическим дополнением, так как $(-1)^{(1+2+\ldots+k)+(1+2+\ldots+k)} = 1$.

где A_{ij} – клетка, расположенная в i-й клеточной строке и в j-м клеточном столбце. Квадратная клеточная матрица $A = (A_{ij})$ с квадратными клетками на главной диагонали называется *квазидиагональной*, если $A_{ij} = O$ при $i \neq j$, и *квазитреугольной*, если $A_{ij} = O$ при $i > j$ (или $i < j$).

Как будет видно из дальнейшего, блочные матрицы по многим характеристикам близки к числовым матрицам (см., например, с. 17, свойство 1). Это продуктивно используется в вычислительной математике для обработки большого объема информации.

§2. Операции над матрицами

Равенство матриц. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Обозначение: $A = B$.

Линейные операции. *Суммой* матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n}.$$

Обозначение: $C = A + B$.

Матрица $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *противоположной* к матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Теорема 2.1. *Операция сложения матриц обладает следующими свойствами: $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$*
1) $A + B = B + A$ (сложение матриц коммутативно);
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (сложение матриц ассоциативно);
3) $A + O = O + A = A$;
4) $A + (-A) = -A + A = O$.

Доказательство. Эти свойства непосредственно вытекают из определения и доказываются по единой схеме. Докажем свойство 2. Матрицы $(A + B) + C$ и $A + (B + C)$ имеют одинаковый размер $m \times n$, при этом их элементы, расположенные в одинаковых позициях, равны, так как $\{(A + B) + C\}_{ij} = \{A + B\}_{ij} + \{C\}_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = \{A\}_{ij} + \{B + C\}_{ij} = \{A + (B + C)\}_{ij}$. ■

Разностью матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такая, что $A = B + X$.

Обозначение: $X = A - B$. Очевидно, что для любых матриц $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует единственная разность $A - B$, при этом

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij}).$$

Произведением матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n}.$$

Обозначение: $C = \alpha A$.

Теорема 2.2. *Операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами: $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*
1) $1 \cdot A = A$;
2) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (умножение матрицы на число дистрибутивно относительно сложения матриц);
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (умножение матрицы на число дистрибутивно относительно сложения чисел);
5) $-A = (-1)A$.

Все эти свойства непосредственно вытекают из определения и проверяются по той же схеме, что и свойство 2 из теоремы 2.1. ■

Итак, на множестве $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех вещественных матриц одинакового размера $m \times n$ любые две матрицы можно сложить и любую матрицу можно умножить на вещественное число. При этом результаты выполнения этих операций также будут матрицами из $\mathbb{R}^{m\times n}$. Обратим внимание на эту особенность множества $\mathbb{R}^{m\times n}$, так как в дальнейшем мы неоднократно будем сталкиваться с множествами, наделенными операциями сложения и умножения на число, которые обладают свойствами, сформулированными в теоремах 2.1 и 2.2.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число позволяют однозначно определить матрицу $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i$, называемую *линейной комбинацией матриц* $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *с коэффициентами* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Умножение матриц. *Произведением матриц* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}, \quad i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, k}.$$

Обозначение: $C = AB$.

Уже из определения следует, что произведение матриц зависит от порядка сомножителей; произведение AB определено лишь в том случае, когда размеры матриц A и B согласованы специальным образом: число столбцов левой матрицы должно совпадать с числом строк правой. Это означает, что оба произведения AB и BA определены тогда и только тогда, когда A и B имеют размеры $m\times n$ и $n\times m$ соответственно. При этом размеры матриц AB и BA совпадают лишь при $m = n$. Следовательно, равенство $AB = BA$ возможно лишь для квадратных матриц одинакового порядка. Однако и в этом случае произведение матриц, вообще говоря, может зависеть от порядка сомножителей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными* или *коммутирующими*. Очевидно, что на множестве $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{array}{|cccc|} \hline \boxed{A_{11}} & & & \\ & \boxed{A_{22}} & & \\ & & \boxed{A_{33}} & \\ & O & \ddots & \\ & & & \boxed{A_{mm}} \\ \hline \end{array}$$

Рис. 2

столбцов матрицы A, образующих ее первый клеточный столбец.

В этих столбцах все миноры k-го порядка, кроме $|A_{11}|$, заведомо равны нулю, а алгебраическое дополнение к минору $|A_{11}|$ совпадает с дополнительным минором. Согласно теореме Лапласа отсюда имеем, что $|A| = |A_{11}| \cdot |\tilde{A}|$, где $\tilde{A}$ – тоже квазитреугольная матрица, но уже $(m - 1)$-го порядка, начинающаяся с клетки A_{22}.

Поступая точно так же еще $(m - 1)$ раз, получим, что

$$|A| = |A_{11}| \cdot |A_{22}| \cdot \ldots \cdot |A_{mm}|. \tag{4.11}$$

Аналогично получается равенство (4.11) и для нижней квазитреугольной матрицы. ■

Теорема 4.7. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – квадратные матрицы n-го порядка. Рассмотрим матрицу C вида

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & & & O & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & & & & \\ \hline -1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right].$$

С одной стороны, C – квазитреугольная матрица, поэтому согласно (4.11)

$$|C| = |A| \cdot |B|. \tag{4.12}$$

С другой стороны, не меняя определителя матрицы C, преобразуем ее так, чтобы клетка A стала нулевой. Сначала аннулируем первую строку матрицы A, для чего прибавим к первой строке матрицы C ее $(n + 1)$-ю, $(n + 2)$-ю, …, $2n$-ю строки, умноженные на $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ соответственно. В результате этих преобразований $\det C$ остается без изменения, первые n элементов первой строки матрицы C станут нулевыми, а вторые n элементов заполнятся элементами первой строки матрицы AB. Теперь в новой матрице выполним аналогичные преобразования второй строки: ко второй строке матрицы C прибавим ее $(n + 1)$-ю, $(n + 2)$-ю, …, $2n$-ю строки,

умноженные на $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ соответственно. После этих преобразований определитель матрицы C не изменится, первые n элементов второй строки матрицы C станут нулевыми, а вторые n элементов заполнятся элементами второй строки матрицы AB. Проделав аналогичные преобразования с третьей, …, n-й строками матрицы C, получим матрицу

$$C_1 = \left[\begin{array}{c|c} O & AB \\ \hline -I & B \end{array}\right],$$

определитель которой равен определителю матрицы C. Переставив в матрице C_1 первый и $(n + 1)$-й столбцы, второй и $(n + 2)$-й столбцы, …, n-й и $2n$-й столбцы, получим квазитреугольную матрицу

$$C_2 = \left[\begin{array}{c|c} AB & O \\ \hline B & -I \end{array}\right],$$

определитель которой отличается от определителя матрицы C_1 множителем $(-1)^n$. Таким образом, $|C| = |C_1| = (-1)^n |C_2| = |AB|$. Отсюда и из (4.12) получаем, что

$$|AB| = |A| \cdot |B|. \quad ■ \tag{4.13}$$

Вычисление определителя. Многие задачи линейной алгебры связаны с проблемой вычисления определителя.

Было бы весьма затруднительным вычислять определитель исходя из его определения, т.е. вычисляя непосредственно все $n!$ членов и определяя их знаки. Для этого нужно выполнить $n!n$ операций умножения (без учета менее трудоемкой операции сложения чисел). Так, для $n = 100$ число умножений превосходит 10^{153} – с этим не в состоянии справиться даже самые мощные современные компьютеры. Теорема Лапласа позволяет упростить проблему вычисления определителя, сводя ее к вычислению определителей более низких порядков. Однако, как видно из (4.11), (4.12), этот подход существенно эффективен лишь для матриц с большим числом нулевых элементов, сгруппированных специальным образом.

Среди различных методов вычисления определителя особое место в приложениях занимает *метод Гаусса*.

Метод Гаусса применяется для решения широкого класса матричных задач. Идея этого метода проста и естественна. Она состоит в том, что:

- выделяется тип матрицы, для которой задача решается достаточно просто;
- выделяется тип преобразований, которые либо не изменяют решений задачи, либо изменяют их контролируемым образом;
- произвольная матрица выделенными преобразованиями приводится к выделенному типу, тем самым задача общего вида сводится к более простой.

В применении к задаче вычисления определителя эта схема выглядит следующим образом:

– определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов (свойство 1);

4. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, то

$$AB = [\, Ab_1 \;\; Ab_2 \;\; \ldots \;\; Ab_k \,], \qquad AB = \begin{bmatrix} a'_1 B \\ a'_2 B \\ \vdots \\ a'_m B \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

т.е. *столбцы произведения AB суть линейные комбинации столбцов матрицы A, а строки – линейные комбинации строк B.*

§3. Элементарные преобразования матриц

Приведение матрицы к ступенчатой форме. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются преобразования следующих типов:

1) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;
2) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;
3) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой ее строки (соответственно столбца), умноженной на любое число.

Теорема 3.1 (об основном процессе). *Произвольная ненулевая матрица конечным числом элементарных преобразований только строк первого и третьего типов может быть приведена к верхней ступенчатой форме.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \neq O$. Процесс приведения этой матрицы к верхней ступенчатой форме состоит в общем случае из $k = \min(m, n)$ шагов. Иногда, как это будет видно ниже, он обрывается раньше, давая нужный результат.

Первый шаг. а) Так как $A \neq O$, то в ней должен быть хотя бы один ненулевой столбец. Пусть k_1 – номер *первого* из них. В k_1-м столбце существует хотя бы один ненулевой элемент a_{ik_1}. Если $a_{1k_1} \neq 0$, то переходим к п. "б". Если же $a_{1k_1} = 0$, то, поменяв местами 1-ю и i-ю строки (т.е. выполнив элементарное преобразование *строк* первого типа), получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1k_1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2k_1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{mk_1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

в которой $a_{1k_1} \neq 0$. Хотя при таком переходе элементы матрицы A могли измениться, мы оставили прежние обозначения с тем, чтобы акцентировать внимание лишь на тактической стороне процесса.

б) Элемент a_{1k_1} назовем *ведущим (главным)* элементом первого шага. С его помощью аннулируем все расположенные под ним элементы k_1-го столбца. Для этого из всех строк, начиная со второй, вычтем первую строку, умноженную на a_{2k_1}/a_{1k_1}, a_{3k_1}/a_{1k_1}, …,

a_{mk_1}/a_{1k_1} соответственно (т.е. выполним элементарные преобразования *строк* третьего типа).

После выполнения первого шага матрица A переходит в матрицу

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & a_{1k_1} & a_{1,k_1+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{2,k_1+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{m,k_1+1} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right],$$

в которой *первая* строка является *первой* строкой строящейся верхней ступенчатой матрицы. Если при этом все строки, начиная со второй, стали нулевыми, то весь процесс заканчивается, так как матрица уже приведена к верхней ступенчатой форме. Если же в этих строках есть хотя бы один ненулевой элемент, т.е. если матрица

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{2,k_1+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,k_1+1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \neq O,$$

то переходим ко второму шагу.

Второй шаг. Второй шаг аналогичен первому. Он состоит в применении к матрице A_1 процедуры описанного выше первого шага. При этом можно считать, что выполняются элементарные преобразования строк всей матрицы A, так как нулевые элементы этих строк, расположенные в первых k_1 столбцах, при элементарных преобразованиях строк не изменяются. В результате *второго* шага уже и *вторая* строка матрицы A станет *второй* строкой строящейся верхней ступенчатой матрицы.

Переход к следующему шагу аналогичен уже известному переходу от первого шага ко второму. Повторяя описанные преобразования на следующих шагах, самое большее через $k = \min(m, n)$ шагов мы получим требуемый результат. Отметим, что ведущим элементом i-го шага является первый ненулевой элемент i-й строки, т.е. a_{ik_i}.

Описанный здесь процесс будем называть *основным процессом* приведения матрицы к ступенчатой форме. ■

Замечания к основному процессу. 1. Основной процесс с незначительной модификацией может быть использован и для приведения матрицы к верхней трапециевидной форме. Для этого нужно привлечь еще и элементарные преобразования столбцов: переставить в ступенчатой матрице столбцы так, чтобы k_i-й столбец оказался на i-м месте. Итак, произвольная ненулевая матрица элементарными преобразованиями строк и перестановками столбцов может быть приведена к верхней трапециевидной форме.

2. Квадратная матрица с помощью основного процесса приводится к треугольной форме.

3. Если в основном процессе поменять ролями строки и столбцы, то матрица A приведется к нижней ступенчатой (трапециевидной) форме.

4. В ручных вычислениях во избежание больших чисел целесообразно в основном процессе использовать элементарные преобразования строк второго типа: сокращать все элементы на общий множитель.

5. Во избежание дробных чисел в ручных вычислениях удобно также в качестве ведущего элемента выбирать элемент, равный 1. Если такого элемента нет, то, как правило, его можно получить, используя элементарные преобразования строк и перестановки столбцов.

6. Идеи основного процесса используются во многих компьютерных алгоритмах вычислительной алгебры. Выбор ведущего элемента здесь представляет собой особую проблему, так как от этого зависит точность вычислений. Исследование

Некоторые свойства обратной матрицы.
1. $I^{-1} = I$, так как $I \cdot I = I$.
2. $|A^{-1}| = 1/|A|$, так как $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$.
3. $(A^{-1})^{-1} = A$, так как $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, так как $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$.
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, так как $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$.

Вычисление обратной матрицы.

Соотношение (5.3) дает явный вид обратной матрицы. Оно полезно в теоретических исследованиях и совершенно неэффективно для практического вычисления (разве что для матриц второго порядка) вследствие большого объема требуемых вычислений. В самом деле, для получения обратной матрицы к матрице n-го порядка согласно (5.3) требуется вычислить n^2 определителей $(n - 1)$-го порядка и один определитель n-го порядка. В вычислительной математике используются различные дополнительные приемы вычисления обратной матрицы, которые по объему вычислений равносильны вычислению всего лишь двух определителей n-го порядка. Опишем один из них.

Теорема 5.4. *Произвольная невырожденная матрица элементарными преобразованиями только строк (только столбцов) приводится к единичной матрице.*

Доказательство. Рассмотрим строчный вариант теоремы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\det A \neq 0$. Применим к ней основной процесс (теорема 3.1). Так как A – квадратная матрица, то окончательная ступенчатая матрица будет треугольной. Ввиду невырожденности исходной матрицы она также будет невырожденной и ее диагональные элементы будут отличны от нуля. Поделив каждую *строку* на ее диагональный элемент, т.е. выполнив элементарные преобразования строк, получим треугольную матрицу вида

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Если представить процесс приведения матрицы к верхней ступенчатой форме как преобразование матрицы "слева направо" (в таком порядке аннулируются столбцы), то теперь будем выполнять аналогичные преобразования "справа налево". На первом шаге с помощью последней строки аннулируем все наддиагональные элементы последнего столбца, вычитая из первых $(n - 1)$ строк последнюю строку, умноженную на $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{n-1,n}$ соответственно. На втором шаге из первых $(n - 2)$ строк вычитаем $(n - 1)$-ю строку, умноженную на $a_{1,n-1}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n-2,n-1}$ соответственно. Выполняя аналогичные преобразования, через $(n - 1)$ шагов получим единичную матрицу. Отметим, что на каждом шаге изменяются элементы только одного аннулируемого столбца. Если в доказательстве поменять ролями строки и столбцы, то получим утверждение столбцового варианта теоремы. ■

Доказанная теорема может быть переформулирована в терминах матриц элементарных преобразований (теорема 3.2). Для строчно-

го варианта: *существуют матрицы элементарных преобразований $L_1, L_2, \ldots, L_k$ такие, что $L_k L_{k-1} \ldots L_2 L_1 A = I$.* Отсюда в силу теоремы 5.3 следует, что $A^{-1} = L_k L_{k-1} \ldots L_2 L_1$ или $A^{-1} = L_k L_{k-1} \ldots L_2 L_1 I$.

Это означает, что *для получения обратной матрицы достаточно к строкам единичной матрицы I применить те преобразования, которые приводят матрицу A к единичной матрице.* Для этого удобно составить расширенную матрицу $[A|I]$ и над строками этой матрицы выполнить те преобразования, которые матрицу A приводят к единичной; тогда на месте матрицы I окажется обратная матрица A^{-1}. Итак,

$$\boxed{A \mid I} \xmapsto{\text{преобразования строк}} \boxed{I \mid A^{-1}}. \tag{5.4}$$

Аналогично в столбцовом варианте

$$\begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline I \\ \hline \end{array} \xmapsto{\text{преобразования столбцов}} \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline A^{-1} \\ \hline \end{array}. \tag{5.5}$$

Этот метод вычисления обратной матрицы называется *методом Жордана* или *методом Гаусса–Жордана*.

Замечание. Если в расширенных матрицах (5.4) и (5.5) на место единичной матрицы I поставить матрицу B, то вместо матрицы A^{-1} получим в первом случае матрицу $A^{-1}B$, а во втором – BA^{-1}:

$$\boxed{A \mid B} \xmapsto{\text{преобразования строк}} \boxed{I \mid A^{-1}B}, \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array} \xmapsto{\text{преобразования столбцов}} \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline BA^{-1} \\ \hline \end{array},$$

так как $A^{-1}B = L_k L_{k-1} \ldots L_2 L_1 B$, $\quad BA^{-1} = BL_1 L_2 \ldots L_k$.

$$\ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \qquad \longmapsto \qquad \ldots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \ldots$$

(здесь многоточия заменяют числа, которые не затрагивались при транспозиции). Очевидно, что в обеих перестановках числа, оставшиеся на местах, составляют одни и те же инверсии друг с другом и с α_i, α_{i+1}. Если числа α_i и α_{i+1} раньше составляли инверсию, то в новой перестановке она пропадает; если же они не составляли инверсию, то теперь появится одна новая инверсия. Таким образом, общее число инверсий в новой перестановке отличается от старой на единицу, т.е. четность при такой транспозиции меняется.

2. Пусть теперь между переставляемыми числами α_i и α_j расположено k чисел, т.е.

$$\ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}, \alpha_j \ldots \qquad \longmapsto \qquad \ldots, \alpha_j, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}, \alpha_i \ldots$$

Новую перестановку можно получить из старой, последовательно меняя местами соседние числа: α_i поменять местами $(k + 1)$ раз с соседними числами $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_{i+k}, \alpha_j$, а затем α_j поменять местами k раз с числами $\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+1}$. При этом четность перестановки изменится $2k + 1$ раз. Следовательно, и при такой транспозиции четность перестановки меняется. ■

Теорема 4.3. *Все $n!$ перестановок из n чисел могут быть упорядочены так, чтобы каждая последующая отличалась от предыдущей на одну транспозицию, причем начинать это упорядочение можно с любой перестановки.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Для $n = 2$ утверждение теоремы легко проверить: $(1, 2), (2, 1)$ и $(2, 1), (1, 2)$.

Пусть утверждение теоремы верно для $n - 1$ чисел. Докажем его для n чисел. Пусть первая перестановка имеет вид $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

а) Сначала упорядочим все перестановки, начинающиеся с α_1. Таких перестановок $(n-1)!$, и по индуктивному предположению они могут быть упорядочены нужным образом, начиная с перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, так как это сводится к упорядочению перестановок из $n - 1$ чисел, начиная с $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

б) Далее в последней перестановке из этого списка сделаем одну транспозицию, поменяв местами числа α_1 и α_2. И снова упорядочим все перестановки, начинающиеся с α_2, и т.д. ■

Следствие 1. *При $n \geq 2$ число четных перестановок равно числу нечетных.* Действительно, после упорядочения в списке всех перестановок четные и нечетные перестановки будут чередоваться, а так как $n!$ четно при $n \geq 2$, то количества четных и нечетных перестановок совпадают и равны $n!/2$.

Следствие 2. *От каждой перестановки из n чисел можно перейти к любой другой перестановке из этих же чисел при помощи конечного числа транспозиций.*

Теорема 4.4. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – перестановка из первых n натуральных чисел с числом инверсий s, то после преобразования ее в натуральную перестановку индексные номера $1, 2, \ldots, n$ образуют новую перестановку с тем же числом инверсий s.*

Доказательство. Рассмотрим в перестановке

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n \tag{4.1}$$

любые ее два числа α_i и α_j.

Числа α_i и α_j образуют либо инверсию $(\alpha_i > \alpha_j, i < j)$, либо порядок $(\alpha_i < \alpha_j, i < j)$. После преобразования перестановки (4.1) в натуральную числа α_i и α_j будут располагаться следующим образом:

$1, 2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$ в случае инверсии,
$1, 2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n$ в случае порядка,

причем в обоих случаях $i < j$. Это означает, что числа α_i и α_j в перестановке (4.1) и их индексы i и j в перестановке индексных номеров одновременно образуют либо инверсию, либо порядок. Следовательно, обе эти перестановки имеют одинаковое число инверсий s. ■

Построение определителя n-го порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица n-го порядка. Рассмотрим произведение элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}. \tag{4.2}$$

Заметим, что в этом произведении сомножители упорядочены в порядке возрастания номеров строк, при этом номера столбцов α_1, α_2, …, α_n образуют перестановку из чисел $1, 2, \ldots, n$, так как $\alpha_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Произведений вида (4.2) в матрице A столько, сколько существует перестановок $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из n чисел, т.е. $n!$.

Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ *n-го порядка* называется сумма всевозможных произведений $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем если сомножители в этом произведении упорядочены в порядке возрастания номеров строк, то оно берется со знаком $(-1)^{\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$.

Для обозначения определителя приняты символы $|A|$, $\det A$. Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{\sigma(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \tag{4.3}$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Каждое произведение в сумме (4.3) называется *членом определителя*, а число $(-1)^{\sigma(\alpha)}$ – его *знаком*.

Из свойств перестановки следует, что число всевозможных членов определителя n-го порядка равно $n!$ и что при $n \geq 2$ число положительных членов равно числу отрицательных и равно $n!/2$.

Равенство $x = y$ и неравенство $x < y$ действительных чисел, равенство матриц $A = B$, равенство множеств $X = Y$ и пр. – все это примеры бинарных отношений. В самом деле, рассмотрим один из них – отношение "$<$" на множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел. Пара чисел $x, y \in \mathbb{R}$, для которой $x < y$, является элементом $\mathbb{R}^2$.

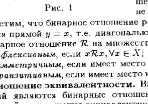


Рис. 1

Множество всех таких пар образует подмножество $\mathcal{R}$ декартова квадрата $\mathbb{R}^2$ – на рис. 1 они изображаются точками плоскости $\mathbb{R}^2$, которые лежат выше прямой $y = x$. Задание этого множества $\mathcal{R}$ определяет бинарное отношение на множестве действительных чисел, а отношение $x\mathcal{R}y$ (т.е. $(x, y) \in \mathcal{R}$) есть не что иное, как $x < y$.

Заметим, что бинарное отношение равенства вещественных чисел задается прямой $y = x$, т.е. диагональю декартова квадрата $\mathbb{R}^2$.

Бинарное отношение $\mathcal{R}$ на множестве X называется:

- *рефлексивным*, если $x\mathcal{R}x, \forall x \in X$;
- *симметричным*, если имеет место импликация $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- *транзитивным*, если имеет место импликация $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Отношение эквивалентности. Важным классом бинарных отношений являются бинарные отношения, описывающие свойство "схожести", – отношения эквивалентности.

Бинарное отношение $\mathcal{E}$ на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если пара элементов $x, y \in X$ связана отношением эквивалентности, то говорят, что x и y *эквивалентны*, и обозначают символом $x \sim y$. В конкретных случаях вместо этого символа могут быть использованы и другие, например $x = y$, $x \equiv y$.

Отношения эквивалентности играют важную роль в математических исследованиях. Назвав два элемента эквивалентными, мы игнорируем те различия между ними, которые не существенны в рассматриваемой задаче. В каждой конкретной задаче мы различаем или не различаем элементы лишь в отношении тех их свойств, которыми интересуемся в данный момент. Известное правило равенства обыкновенных дробей ($p_1/q_1 = p_2/q_2$, если $p_1 q_2 = q_1 p_2$) является отношением эквивалентности. Назвав дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$ равными, мы игнорируем их несовпадение как дробей и считаем, что они определяют одно и то же рациональное число. Уже этот простейший пример подсказывает, что эквивалентные элементы множества целесообразно объединять в один объект.

Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\mathcal{E}$ и $a \in X$. Множество всевозможных элементов $x \in X$, эквивалентных a, называется *классом эквивалентности, порожденным элементом a*. Обозначение: $\operatorname{cl}(a)$. Итак, $\operatorname{cl}(a) = \{x \in X | x \sim a\}$. Любой элемент класса эквивалентности называется *представителем класса*.

Теорема 7.1. *Класс эквивалентности порождается лю-*

бым своим представителем, т.е. если $b \in \operatorname{cl}(a)$, то $\operatorname{cl}(b) = \operatorname{cl}(a)$.

Для доказательства равенства этих множеств достаточно показать двустороннее вложение (6.1) их друг в друга. Действительно,

$$c \in \operatorname{cl}(b) \Rightarrow c \sim b, \text{ но } b \sim a \Rightarrow c \sim a \Rightarrow c \in \operatorname{cl}(a),$$
$$c \in \operatorname{cl}(a) \Rightarrow c \sim a, \text{ но } a \sim b \Rightarrow c \sim b \Rightarrow c \in \operatorname{cl}(b). \quad ■$$

Теорема 7.2. *Два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.*

Действительно, любые два класса $\operatorname{cl}(a)$ и $\operatorname{cl}(b)$ либо не пересекаются, либо имеют хотя бы один общий элемент. Но в последнем случае они совпадают, так как если $c \in \operatorname{cl}(a)$, $c \in \operatorname{cl}(b)$, то в силу теоремы 7.1 $\operatorname{cl}(a) = \operatorname{cl}(b)$. ■

Из теоремы 7.2 и очевидного факта, что любой элемент множества содержится в одном из классов эквивалентности ($a \in \operatorname{cl}(a)$), следует, что все множество разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности. Множество всех классов эквивалентности называется *фактор-множеством множества X по отношению эквивалентности $\mathcal{E}$* и обозначается символом $X|\mathcal{E}$.

Как уже отмечалось выше, одни и те же элементы множества, эквивалентные при одном отношении эквивалентности, могут оказаться неэквивалентными при другом. Все зависит от задачи, а в разных задачах мы можем интересоваться различными свойствами одних и тех же элементов. Проиллюстрируем это на примерах различных отношений эквивалентности на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Примеры. 1. Положим $m \sim n$, если $m = n$. Это тривиальный пример отношения эквивалентности, сводящегося к простому совпадению. Очевидно, что $\operatorname{cl}(m) = \{m\}$ и $\mathbb{Z}|\mathcal{E} = \mathbb{Z}$.

2. Положим $m \sim n$, если m и n имеют одинаковую четность. Нетрудно проверить, что это бинарное отношение является отношением эквивалентности. Очевидно, что при таком отношении эквивалентности все множество $\mathbb{Z}$ разбивается на два класса эквивалентности: $C_0 = \operatorname{cl}(0) = \{2k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ – множество всех четных чисел и $C_1 = \operatorname{cl}(1) = \{2k + 1 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ – множество всех нечетных чисел. Итак, $\mathbb{Z}|\mathcal{E} = \{C_0, C_1\}$.

Такое разбиение множества целых чисел на классы нам знакомо из обыденной жизни, например деление множества домов улицы на четную и нечетную сторону.

3. Пусть $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Два целых числа m и n называются *сравнимыми по модулю p*, если при делении на p они дают одинаковые остатки, т.е. если $m - n = pk$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Обозначение: $m \equiv n(\operatorname{mod} p)$. Итак,

$$m \equiv n(\operatorname{mod} p) \iff m - n = pk, k \in \mathbb{Z}. \tag{7.1}$$

Положим $m \sim n$, если $m \equiv n(\operatorname{mod} p)$. Нетрудно проверить, что бинарное отношение (7.1) является отношением эквивалентности. Найдем классы эквивалентности. Пусть m при делении на p дает в остатке r. Очевидно, $0 \leq r \leq p - 1$. Тогда $\operatorname{cl}(m) = \{n = pk + r \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ – множество всех целых чисел n, дающих при делении

Возьмем произвольный член минора $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$: $(-1)^{\sigma(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{k\alpha_k}$ и произвольный член дополнительного к нему минора:

$$(-1)^{\sigma(\beta)} a_{k+1,\beta_{k+1}} a_{k+2,\beta_{k+2}} \dots a_{n\beta_n}.$$

Тогда произведение $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} A^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ есть сумма произведений вида

$$(-1)^{\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{k\alpha_k} a_{k+1,\beta_{k+1}} \dots a_{n\beta_n}.$$

В этом произведении все сомножители стоят в разных строках и разных столбцах матрицы A, следовательно, оно будет членом $\det A$. Знак этого члена равен $(-1)^{\sigma(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_{k+1},\dots,\beta_n)}$, но $\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$, так как никакое α_i ни с каким β_j не образует инверсий: все $\alpha_i \le k$, а все $\beta_j > k$. Таким образом, произведение $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} A^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ представляет собой некоторую сумму членов $\det A$, причем с теми же знаками, с какими они входят в $\det A$.

б) Общий случай минора $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ сводится к рассмотренному следующим образом. Будем переставлять i_1-ю строку матрицы A последовательно со всеми предыдущими до тех пор, пока она не займет место первой строки. Затем точно так же будем переставлять i_2-ю, $\dots$, i_k-ю строки до тех пор, пока они не займут места второй, $\dots$, k-й строк соответственно. Аналогично переставляются j_1-й, j_2-й, $\dots$, j_k-й столбцы до тех пор, пока они не займут места первого, второго, $\dots$, k-го столбцов. При этом всего будет выполнено

$$\begin{aligned}(i_1 - 1) + \ldots + (i_k - k) + (j_1 - 1) + \ldots + (j_k - k) = \\ = (i_1 + \ldots + i_k) + (j_1 + \ldots + j_k) - 2(1 + \ldots + k)\end{aligned} \qquad (4.7)$$

перестановок строк и столбцов матрицы A. В результате этих перестановок матрица A преобразуется в матрицу B, в которой рассматриваемый минор $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ матрицы A займет левый верхний угол. Так как при указанных преобразованиях взаимное расположение строк и столбцов дополнительного минора не изменилось, то дополнительный минор к минору $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ в матрице A остается дополнительным к нему и в матрице B. Из п. "а" следует, что произведение $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} \overline{M}^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ является суммой членов $\det B$ с теми же знаками, с какими они входят в $\det B$. Но, согласно свойству 6 определителя и (4.7), $\det A = (-1)^{(i_1+\dots+i_k)+(j_1+\dots+j_k)} \det B$. Следовательно, слагаемые произведения $(-1)^{(i_1+\dots+i_k)+(j_1+\dots+j_k)} M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} \overline{M}^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ входят в $\det A$ со своими знаками.

2. Из доказанного в п. 1 следует, что вся сумма S представляет собой некоторую сумму членов $\det A$ со своими знаками.

3. Покажем теперь, что в сумму S входят все члены $\det A$. Пусть

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \qquad (4.8)$$

– произвольный член $\det A$. В этом произведении соберем отдельно сомножители, расположенные в строках с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$:

$$a_{i_1\alpha_{i_1}} a_{i_2\alpha_{i_2}} \dots a_{i_k\alpha_{i_k}}. \qquad (4.9)$$

Они расположены в различных столбцах с номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$. Эти номера однозначно определяются заданием члена (4.8). Обозначим через M минор k-го порядка матрицы A, расположенный в строках с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцах с номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$. Тогда произведение (4.9) будет членом этого минора, а произведение остальных сомножителей (4.8), не вошедших в (4.9), – членом дополнительного минора $\overline{M}$ к минору M. Итак, любой член определителя матрицы A может быть получен умножением определенного этим членом минора M на дополнительный к нему минор $\overline{M}$. Из доказанного в п. 1 следует, что при умножении минора M на его алгебраическое дополнение получится член (4.8) с его знаком.

4. Осталось доказать, что каждый член $\det A$ входит в сумму S ровно один раз и что других слагаемых в этой сумме нет. Для этого достаточно показать, что количество слагаемых в сумме S равно $n!$. Действительно, минор $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ состоит из $k!$ слагаемых, алгебраическое дополнение к нему – из $(n-k)!$ слагаемых. Значит, произведение $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} A^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ состоит из $k!(n-k)!$ членов определителя матрицы A. Таких произведений в сумме S столько, сколько существует миноров k-го порядка в строках $i_1, i_2, \dots, i_k$, т.е. столько, сколько существует способов выбрать k столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$ из n столбцов матрицы A, или C_n^k. Таким образом, количество слагаемых в сумме S равно $C_n^k k!(n-k)! = n!$. ■

Разложение определителя по строке (столбцу). Если в теореме Лапласа выбрать $k = 1$ и строку (столбец) с номером i, то минорами первого порядка, расположенными в i-й строке (столбце), будут сами элементы a_{ij} (a_{ji}). Обозначив через A_{ij} алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}, получим из теоремы Лапласа, что

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (\text{или} \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} A_{ji}). \qquad (4.10)$$

Представление определителя (4.10) называется *разложением определителя по i-й строке* (соответственно *по i-му столбцу*). Итак, *определитель матрицы равен сумме всех произведений элементов произвольной ее строки (столбца) на свои алгебраические дополнения.*

Определитель квазитреугольной матрицы.

Теорема 4.6. *Определитель квазитреугольной матрицы равен произведению определителей диагональных клеток.*

Доказательство. Пусть A – верхняя квазитреугольная матрица m-го порядка (рис. 2). Применим теорему Лапласа к группе из k

внедиагональные элементы равны нулю. Обозначение: $\mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны между собой, называется *скалярной*. Скалярная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, называется *единичной (тождественной)* и обозначается символами I или E. Отметим, что для каждого порядка n существует своя единичная матрица. Число $\mathrm{tr}\, A = a_{11} + \ldots + a_{nn}$ называется *следом* матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Матрица размера $1 \times n$ называется *строчной матрицей, или матрицей-строкой, или вектор-строкой*. Матрица размера $m \times 1$ называется *столбцовой матрицей, или матрицей-столбцом, или вектор-столбцом*.

Компактная форма записи матрицы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Обозначим i-ю строку и i-й столбец матрицы A символами a'_i и a_i:

$$a'_i = [\, a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \dots \;\; a_{in} \,] \quad \text{и} \quad a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}.$$

В этих обозначениях матрица A может быть записана более компактно:

$$A = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad A = [\, a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_n \,]. \qquad (1.1)$$

Такой формой записи мы нередко будем пользоваться, причем не только лаконичности ради.

Матрицы специального вида. Квадратная матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *верхней (правой) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, и *нижней (левой) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$. Общий вид треугольных матриц:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \; L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1.2)$$

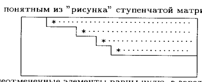
Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *верхней (правой) ступенчатой*, если она обладает следующими свойствами:

1) если i-я строка нулевая, то $(i+1)$-я строка также нулевая;

2) если первые ненулевые элементы i-й и $(i+1)$-й строк расположены в столбцах с номерами k_i и k_{i+1}, то $k_i < k_{i+1}$.

Эти свойства означают, что все нулевые строки являются последними и что все элементы, расположенные слева и под первым ненулевым элементом каждой строки, равны нулю. Происхождение названия

становится понятным из "рисунка" ступенчатой матрицы:



(здесь все неотмеченные элементы равны нулю, а заведомо ненулевые элементы помечены знаком $*$).

Если в определении верхней ступенчатой матрицы поменять ролями строки и столбцы, то получим определение *нижней (левой) ступенчатой* матрицы.

Ступенчатая матрица, у которой $k_i = i$, называется *трапециевидной*. Общий вид трапециевидных матриц:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (1.3)$$

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \dots & a_{r+1,r} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $a_{ii} \ne 0$ при $i = \overline{1, r}$.

До сих пор мы рассматривали матрицы, элементами которых служат числа. Так в основном будет и впредь. Одно из немногих в этом отношении исключений составляют матрицы, элементами которых являются также матрицы. Остановимся на этом более подробно.

Разобьем матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ системой горизонтальных и вертикальных линий на клетки (блоки). *Клеточной (блочной) матрицей* называется матрица, элементами которой служат эти клетки. Общий вид клеточной матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sk} \end{bmatrix},$$

– элементарные преобразования матрицы либо не изменяют определителя (свойство 9), либо изменяют (свойства 4 и 6), но так, что эти изменения можно легко восстановить;

– произвольная квадратная матрица элементарными преобразованиями приводится к треугольной форме (теорема 3.1).

Метод Гаусса вычисления определителя состоит в приведении матрицы элементарными преобразованиями к треугольному виду, вычислении определителя получившейся треугольной матрицы и восстановлении исходного определителя, если использовались элементарные преобразования типов 1 и 2 (§3).

Замечание 3. В методе Гаусса вычисления определителя можно использовать элементарные преобразования как строк, так и столбцов.

Замечание 4. Для вычисления определителя n-го порядка по методу Гаусса требуется выполнить $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ операций умножения двух чисел. Теперь для $n = 100$ определитель может быть вычислен быстрее чем за одну секунду на компьютере с быстродействием 10^6 арифметических операций в секунду.

§5. Обратная матрица

Условие обратимости. Матрица A^{-1} называется *обратной к матрице* A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Матрица A, для которой существует обратная матрица, называется *обратимой*.

Из определения следует, что обратимой может быть лишь квадратная матрица, так как равенство $AA^{-1} = A^{-1}A$ возможно лишь для квадратных матриц A и A^{-1} одинакового порядка. Но не каждая квадратная матрица обратима. Так, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ при умножении справа на любую матрицу дает матрицу с нулевой первой строкой, т.е. ни для какой матрицы B произведение AB не может совпадать с единичной матрицей I. Выясним, какие свойства матрицы обеспечивают ее обратимость.

Квадратная матрица A называется *вырожденной (особенной)*, если $|A| = 0$, и *невырожденной (неособенной)*, если $|A| \ne 0$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Матрица

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (5.1)$$

составленная из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A, называется *присоединенной (взаимной)* к матрице A.

Теорема 5.1 (о фальшивом разложении определителя). *Сумма произведений элементов одной строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения к элементам другой ее строки (соответственно столбца) равна нулю.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Покажем, что для любых ее двух строк i, j, где $i \ne j$,

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0. \qquad (5.2)$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу B, которая отличается от A только j-й строкой: на месте j-й строки в B стоит i-я строка A.

С одной стороны, $\det B = 0$ (§4, свойство 7). С другой стороны, $\det B = \sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{js}$, так как в разложении $\det B$ по j-й строке алгебраические дополнения к элементам j-й строки матрицы B получаются вычеркиванием j-й строки и поэтому совпадают с алгебраическими дополнениями A_{js} к элементам j-й строки матрицы A. Отсюда следует (5.2). Аналогично доказывается столбцовый вариант теоремы. ■

Доказанную теорему иногда называют теоремой о "чужих" алгебраических дополнениях. Напомним, что в этой терминологии умножение на "свои" алгебраические дополнения дает разложение (4.10) определителя по строке (столбцу соответственно).

Теорема 5.2 (критерий обратимости). *Матрица обратима тогда и только тогда, когда она не вырождена.*

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица A обратима. Тогда существует обратная матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = I$. Взяв определители от обеих частей этого равенства, согласно (4.13) получим, что $|A| \cdot |A^{-1}| = |I|$, т.е. $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. Следовательно, $|A| \ne 0$.

Достаточность. Пусть $|A| \ne 0$. Покажем, что матрица $\frac{1}{|A|}\widehat{A}$ является обратной к матрице A. В самом деле, из разложения определителя по строке (столбцу) и теоремы 5.1 имеем, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = |A|I$. Следовательно, $A\frac{1}{|A|}\widehat{A} = \frac{1}{|A|}\widehat{A}A = I$, т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widehat{A}. \quad ■ \qquad (5.3)$$

Теорема 5.3 (о единственности обратной матрицы). *Если A – квадратная матрица и $AB = I$ (или $BA = I$), то $B = A^{-1}$.*

Доказательство. Из равенства $AB = I$ следует, что B – квадратная матрица и, согласно (4.13), A не вырождена. Следовательно, A обратима и для нее существует обратная матрица A^{-1}. Тогда $A^{-1} = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$. Таким образом, $B = A^{-1}$. Аналогично рассматривается случай, когда $BA = I$. ■

Доказанная теорема устанавливает свойство единственности обратной матрицы, и, более того, из нее следует, что для квадратной матрицы A одного из равенств $AA^{-1} = I$ или $A^{-1}A = I$ достаточно, чтобы матрица A^{-1} была обратной к матрице A.

1) нулевая и единичная матрицы перестановочны с любой другой матрицей;

2) любые две диагональные матрицы перестановочны.

Теорема 2.3. *Операция умножения матриц обладает следующими свойствами:*

1) $(AB)C = A(BC)$ (свойство ассоциативности),

2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

3) $A(B+C) = AB+BC$, $(A+B)C = AC+BC$ (свойство дистрибутивности),

выполненными для любых матриц A, B, C, для которых левые части равенств имеют смысл.

Доказательство. Эти свойства проверяются непосредственно. Остановимся подробнее на свойстве 1. Так как произведение $(AB)C$ имеет смысл, то размеры матриц A, B и C согласованы соответствующим образом. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k\times p}$. Тогда и произведение $A(BC)$ имеет смысл, при этом размеры обеих матриц $(AB)C$ и $A(BC)$ совпадают. Проверим совпадение элементов этих матриц, расположенных в одинаковых позициях. Обозначим $AB = U = (u_{ij})$, $BC = V = (v_{ij})$, $(AB)C = S = (s_{ij})$, $A(BC) = T = (t_{ij})$. Тогда для любых $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, p}$

$$s_{ij} = \textstyle\sum_{q=1}^{k} u_{iq} c_{qj} = \sum_{q=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rq}\right) c_{qj},$$

$$t_{ij} = \textstyle\sum_{r=1}^{n} a_{ir} v_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \left(\sum_{q=1}^{k} b_{rq} c_{qj}\right).$$

Числа c_{qj} в первой двойной сумме (a_{ir} – во второй) не зависят от индекса суммирования r (соответственно q), т.е. являются общими множителями слагаемых внутренней суммы. Следовательно, c_{qj} (соответственно a_{ir}) можно внести под знак суммирования, так что

$$s_{ij} = \textstyle\sum_{q=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rq} c_{qj}\right) = \sum_{q=1}^{k} \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rq} c_{qj},$$

$$t_{ij} = \textstyle\sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{k} a_{ir} b_{rq} c_{qj}\right) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=1}^{k} a_{ir} b_{rq} c_{qj}.$$

Отсюда и из свойств двойной суммы следует, что $s_{ij} = t_{ij}$. ■

Транспонирование матрицы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Матрица $A^T = (a^t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ называется *транспонированной* к матрице A, если

$$a^t_{ij} = a_{ji}, \quad i = \overline{1, n}, \; j = \overline{1, m}.$$

Для обозначения транспонированной матрицы используются также символы A^t и A'.

Переход от матрицы A к A^T называется *транспонированием матрицы* A. Заметим, что при транспонировании матрицы A ее строки становятся столбцами A^T с теми же номерами, а столбцы – строками. Другими словами, транспонирование – это вращение матрицы в пространстве на 180° вокруг главной диагонали.

Теорема 2.4. *Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:*

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

3) $(AB)^T = B^T A^T$,

4) $(A^T)^T = A$,

выполненными для всех матриц A, B, для которых имеют смысл левые части равенств.

Доказательство. Проверим свойство 3, остальные непосредственно вытекают из определения. Положим $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, произведение AB при этом имеет смысл. Нетрудно проверить, что произведение $B^T A^T$ также имеет смысл, при этом размеры матриц $(AB)^T$ и $B^T A^T$ совпадают. Элементы этих матриц, стоящие в одинаковых позициях, равны, так как

$$\{(AB)^T\}_{ij} = \{AB\}_{ji} = \sum_{s=1}^{n} a_{js} b_{si} = \sum_{s=1}^{n} b^t_{is} a^t_{sj} = \{B^T A^T\}_{ij}. \; ■$$

Некоторые свойства операций. Приведем несколько полезных фактов, касающихся операций над матрицами. Доказательство этих свойств предоставляется читателю.

1. Операции сложения, умножения на число и умножения блочных матриц совершаются по тем же правилам, по которым они совершаются с обычными числовыми матрицами:

а) если блочные матрицы $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ имеют одинаковый размер и одинаковым образом разбиты на клетки, то сумме матриц A и B при том же разбиении на клетки отвечает блочная матрица $C = (C_{ij})$ с элементами $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$;

б) произведению αA отвечает блочная матрица $C = (C_{ij})$ с элементами $C_{ij} = \alpha A_{ij}$;

в) если $A = (A_{ij})$ и $B = (B_{ij})$ – блочные матрицы, у которых число столбцов блока A_{is} равно числу строк блока B_{sj} при любых i, s, j, то произведению AB соответствует блочная матрица $C = (C_{ij})$ с элементами

$$C_{ij} = \sum_{s} A_{is} B_{sj}.$$

2. Вектор-столбец $e_i = (0 \dots 0\,1\,0 \dots 0)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ и вектор-строку $e'_i = (0 \dots 0\,1\,0 \dots 0) \in \mathbb{R}^{1\times m}$ (у которых все компоненты равны 0, кроме i-й, равной 1) будем называть *i-м единичным столбцом* и *i-й единичной строкой*. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то в обозначениях (1.1)

$$Ae_i = a_i, \qquad e'_i A = a'_i. \qquad (2.1)$$

3. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $b' = (\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_m)$ и $b = (\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n)^T$ – вектор-строка и вектор-столбец соответственно, то

$$Ab = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \qquad b'A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a'_i. \qquad (2.2)$$

Глава II. Теоретико-множественные понятия

Здесь излагаются первоначальные теоретико-множественные понятия, которые будут использоваться в последующих главах.

§6. Множества

Под *множеством* в математике понимается совокупность объектов, называемых *элементами* множества.

Как правило, множество обозначается прописной буквой какого-либо алфавита, а его элементы – строчными буквами того же или другого алфавита. Для некоторых множеств приняты стандартные обозначения. Так, буквами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множества всех натуральных, целых, рациональных, вещественных чисел. Множества с конечным числом элементов могут быть описаны путем явного перечисления всех их элементов, элементы при этом заключаются в фигурные скобки. Например, $\{0, 1, 2\}$ – множество остатков от деления целых чисел на число 3.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*. Мы будем обозначать его символом $\emptyset$.

Множество S называется *подмножеством* множества X, если имеет место импликация: $x \in S \Rightarrow x \in X$. Обозначение: $S \subset X$. Пустое множество по определению является подмножеством любого множества.

Для задания подмножества $S \subset X$ используется его характеристическое свойство, т.е. свойство, присущее только элементам из S. Например, запись $\{n = 2k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ задает множество всех четных чисел.

Два множества X и Y называются *равными*, если каждое из них является подмножеством другого, т.е.

$$X = Y \iff \begin{cases} X \subset Y, \\ Y \subset X. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Если $S \subset X$, причем $S \ne \emptyset$, $S \ne X$, то S называется *собственным подмножеством* множества X.

Объединением (*суммой* или *соединением*) множеств X и Y называется множество всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X или Y.

Обозначение: $X \cup Y$. Итак, $X \cup Y = \{x \,|\, x \in X \text{ или } x \in Y\}$.

Пересечением множеств X и Y называется множество всех элементов, одновременно принадлежащих как X, так и Y.

Обозначение: $X \cap Y$. Итак, $X \cap Y = \{x \,|\, x \in X, x \in Y\}$.

Разностью множеств X и Y называется множество всех элементов из X, которые не содержатся в Y.

Обозначение: $X \backslash Y$ или $X - Y$. Итак, $X \backslash Y = \{x \,|\, x \in X, x \notin Y\}$.

Если $Y \subset X$, то разность $X \backslash Y$ называется *дополнением* множества Y до множества X. Обозначение: $\overline{Y}$, CY или $\mathbf{C}_X Y$.

Декартовым произведением множеств X и Y называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), в которых $x \in X, y \in Y$.

Обозначение: $X \times Y$. Итак, $X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}$.

Декартово произведение $X \times X$ называется *декартовым квадратом* множества X и обозначается символом X^2. Множество всех пар (x, x), где $x \in X$, называется *диагональю* декартова квадрата множества X.

Примеры. 1. Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел можно рассматривать как декартово произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

2. Множество декартовых координат всех точек плоскости представляет собой декартов квадрат $\mathbb{R}^2$.

3. Если упорядоченную пару (a, b) вещественных чисел изображать точкой плоскости с абсциссой a и ординатой b, то декартовы произведения $X \times Y$ и $Y \times X$ множеств, указанных на рис. 1, изображаются точками соответствующих прямоугольников.

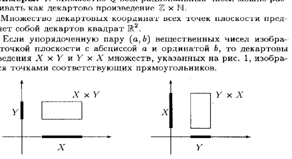


Рис. 1

§7. Эквивалентность

В математике, в логических рассуждениях, а также в обыденной жизни мы сталкиваемся с необходимостью сравнивания двух элементов множества: равенство (и неравенство) двух чисел, равенство матриц, равенство множеств, подобие треугольников, эквивалентность уравнений и т.д. Во всех этих случаях между *двумя* элементами множества определено некоторое отношение, и в каждом случае введено *правило*, по которому устанавливается, находятся ли заданные два элемента в этом отношении или нет. Несмотря на разнообразие этих отношений, оказывается, что с математической точки зрения они являются конкретными проявлениями одного и того же понятия. Введем его.

Бинарное отношение. Говорят, что на множестве X задано *бинарное отношение* $\mathcal{R}$, если указано непустое подмножество $\mathcal{R}$ декартова квадрата этого множества. Если при этом $(x, y) \in \mathcal{R}$, то говорят, что элементы x и y связаны отношением $\mathcal{R}$, и обозначают символом $x\mathcal{R}y$.

4. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, то

$$AB = [\, Ab_1 \;\; Ab_2 \;\; \dots \;\; Ab_k \,], \qquad AB = \begin{bmatrix} a'_1 B \\ a'_2 B \\ \vdots \\ a'_m B \end{bmatrix}, \qquad (2.3)$$

т.е. *столбцы произведения AB суть линейные комбинации столбцов матрицы A, а строки – линейные комбинации строк B.*

§3. Элементарные преобразования матриц

Приведение матрицы к ступенчатой форме. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются преобразования следующих типов:

1) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

2) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой ее строки (соответственно столбца), умноженной на любое число.

Теорема 3.1 (об основном процессе). *Произвольная ненулевая матрица конечным числом элементарных преобразований только строк первого и третьего типов может быть приведена к верхней ступенчатой форме.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \ne O$. Процесс приведения этой матрицы к верхней ступенчатой форме состоит в общем случае из $k = \min(m, n)$ шагов. Иногда, как это будет видно ниже, он обрывается раньше, давая нужный результат.

Первый шаг. а) Так как $A \ne O$, то в ней должен быть хотя бы один ненулевой столбец. Пусть k_1 – номер *первого* из них. В k_1-м столбце существует хотя бы один ненулевой элемент a_{ik_1}. Если $a_{1k_1} \ne 0$, то переходим к п. "б". Если же $a_{1k_1} = 0$, то, поменяв местами 1-ю и i-ю строки (т.е. выполнив элементарное преобразование *строк* первого типа), получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2k_1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mk_1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

в которой $a_{1k_1} \ne 0$. Хотя при таком переходе элементы матрицы A могли измениться, мы оставили прежние обозначения с тем, чтобы акцентировать внимание лишь на тактической стороне процесса.

б) Элемент a_{1k_1} назовем *ведущим (главным)* элементом первого шага. С его помощью аннулируем все расположенные под ним элементы k_1-го столбца. Для этого из всех строк, начиная со второй, вычтем первую строку, умноженную на a_{2k_1}/a_{1k_1}, a_{3k_1}/a_{1k_1}, $\dots$,

a_{mk_1}/a_{1k_1} соответственно (т.е. выполним элементарные преобразования *строк* третьего типа).

После выполнения первого шага матрица A переходит в матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & a_{1,k_1+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,k_1+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m,k_1+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

в которой *первая* строка является *первой* строкой строящейся верхней ступенчатой матрицы. Если при этом все строки, начиная со второй, стали нулевыми, то весь процесс заканчивается, так как матрица уже приведена к верхней ступенчатой форме. Если же в этих строках есть хотя бы один ненулевой элемент, т.е. если матрица

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{2,k_1+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,k_1+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \ne O,$$

то переходим ко второму шагу.

Второй шаг. Второй шаг аналогичен первому. Он состоит в применении к матрице A_1 процедуры описанного выше первого шага. При этом можно считать, что выполняются элементарные преобразования строк всей матрицы A, так как нулевые элементы этих строк, расположенные в первых k_1 столбцах, при элементарных преобразованиях строк не изменяются. В результате *второго* шага уже и *вторая* строка матрицы A станет *второй* строкой строящейся верхней ступенчатой матрицы.

Переход к следующему шагу аналогичен уже известному переходу от первого шага ко второму. Повторяя описанные преобразования на следующих шагах, самое большее через $k = \min(m, n)$ шагов мы получим требуемый результат. Отметим, что ведущим элементом i-го шага является первый ненулевой элемент i-й строки, т.е. a_{ik_i}.

Описанный здесь процесс будем называть *основным процессом* приведения матрицы к ступенчатой форме. ■

Замечания к основному процессу. 1. Основной процесс с незначительной модификацией может быть использован и для приведения матрицы к верхней трапециевидной форме. Для этого нужно привлечь еще и элементарные преобразования столбцов: переставить в ступенчатой матрице столбцы так, чтобы k_i-й столбец оказался на i-м месте. Итак, произвольная ненулевая матрица элементарными преобразованиями строк и перестановками столбцов может быть приведена к верхней трапециевидной форме.

2. Квадратная матрица с помощью основного процесса приводится к треугольной форме.

3. Если в основном процессе поменять ролями строки и столбцы, то матрица A приведется к нижней ступенчатой (трапециевидной) форме.

4. В ручных вычислениях во избежание больших чисел целесообразно в основном процессе использовать элементарные преобразования строк второго типа: сокращать все элементы на общий множитель.

5. Во избежание дробных чисел в ручных вычислениях удобно также в качестве ведущего элемента выбирать элемент, равный 1. Если такого элемента нет, то, как правило, его можно получить, используя элементарные преобразования строк и перестановки столбцов.

6. Идеи основного процесса используются во многих компьютерных алгоритмах вычислительной алгебры. Выбор ведущего элемента здесь представляет собой особую проблему, так как от этого зависит точность вычислений. Исследование

на p остаток r. Так как при делении на p возможно ровно p различных остатков: $0, 1, \dots, p-1$, то количество классов эквивалентности равно p. Обозначения: $C_r = \{n = pk + r \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, где $0 \le r \le p-1$, и $\mathbb{Z}_p$ – фактор-множество множества $\mathbb{Z}$ по отношению эквивалентности (7.1). В этих обозначениях $\mathbb{Z}_p = \{C_0, C_1, \dots, C_{p-1}\}$. Множество $\mathbb{Z}_p$ называют *множеством классов вычетов по модулю p*.

§8. Отображения

Определения, простейшие свойства. Пусть X, Y – два множества. *Отображением* f множества X во множество Y называется закон, посредством которого произвольному элементу $x \in X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $y \in Y$; при этом элемент y называется *образом* элемента x, а элемент x – *прообразом* элемента y. Символически отображение записывается в виде $f : X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$. Запись $y = f(x)$ или $x \mapsto y$ означает, что элемент x при отображении f переходит в элемент y.

Отображение множества X во множество Y называют также *преобразованием множества* X в Y, или *оператором*, действующим из множества X во множество Y, или *функцией*, определенной на X со значениями в Y. Все эти названия употребляются в одинаковом смысле, и их использование диктуется соображениями удобства или желанием подчеркнуть тот или иной аспект. В случае $X = Y$ говорят об *отображении в себя*.

Полным прообразом элемента $y \in Y$ называется множество[1]

$$f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}.$$

Образом отображения f называется множество

$$\mathrm{im}\, f = \{y = f(x) | x \in X\}.$$

Вместо символа $\mathrm{im}\, f$ используется также символ $f(X)$.

Отображение $f : X \to Y$ называется:

• *инъективным*, если из того, что $x_1 \ne x_2$, следует, что $f(x_1) \ne f(x_2)$, или, другими словами, если уравнение

$$f(x) = y \qquad (8.1)$$

при любом $y \in Y$ имеет не более одного решения;

• *сюръективным* или *отображением на*, если $\mathrm{im}\, f = Y$, или, другими словами, если уравнение (8.1) при любом $y \in Y$ имеет хотя бы одно решение;

• *биективным* или *взаимно однозначным*, если оно и инъективно, и сюръективно, или, другими словами, если уравнение (8.1) при любом $y \in Y$ имеет, и притом единственное, решение.

[1] Символ $f^{-1}(y)$ не следует ассоциировать с обратным отображением (8.5), которое может и не существовать.

Примеры. 1. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ – множество всех неотрицательных действительных чисел. Соответствие $a \mapsto |a|$ определяет три различных отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Отображение f не инъективно и не сюръективно, g – не инъективно, но сюръективно, h – биективно.

2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Соответствие $A \mapsto \det A$ определяет отображение $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, не инъективное, но сюръективное.

3. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Соответствие $(a, b) \mapsto a + b$ определяет отображение $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не инъективное, но сюръективное. Таким образом, операцию сложения чисел можно рассматривать как отображение декартова квадрата множества $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем.

4. Пусть X – конечное множество, состоящее из n элементов. Перенумеруем эти элементы и будем считать, что $X = \{1, 2, \dots, n\}$. При биективном отображении f множества X на себя его элементы преобразуются следующим образом: $1 \mapsto \alpha_1$, $2 \mapsto \alpha_2$, $\dots$, $n \mapsto \alpha_n$, где $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $\alpha_i \ne \alpha_j$ при $i \ne j$. Этот закон преобразования элементов принято записывать в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (8.2)$$

или просто в виде

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \qquad (8.3)$$

где $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $\alpha_i \ne \alpha_j$ при $i \ne j$. Биективное отображение множества X на себя называют *подстановкой* этого *множества* (*подстановкой n-го порядка*) и обозначают символом (8.2) или *перестановкой* этого *множества* (*перестановкой n-го порядка*) и обозначают символом (8.3).

Два отображения $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ называются *равными*, если $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$. Обозначение: $f = g$.

Тождественным (единичным) отображением на множестве X называется отображение $e_X : X \to X$, которое переводит каждый элемент $x \in X$ в себя.

Произведение отображений. *Произведением (суперпозицией* или *композицией)* отображений $g : X \to Y$ и $f : Y \to Z$ называется отображение $fg : X \to Z$, определенное правилом

$$fg(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in X. \qquad (8.4)$$

Таким образом, произведение отображений есть последовательное выполнение отображений-сомножителей, причем если символ отображения рассматривать как рецепт для выполнения определенных действий, то символ произведения fg следует читать справа налево.

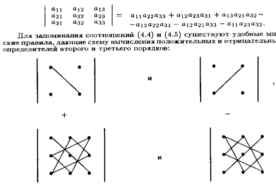
Заметим, что произведение отображений некоммутативно. Даже в случаях, когда оба произведения fg и gf имеют смысл, произведение, вообще говоря, зависит от порядка. В этом легко убедиться на примере, когда $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$, $g(x) = |x|$.

Определение (4.3) для $n = 2$ и $n = 3$ приобретает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (4.4)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Для запоминания соотношений (4.4) и (4.5) существуют удобные мнемонические правила, дающие схему вычисления положительных и отрицательных членов определителей второго и третьего порядков:



соответственно. В этих схемах элементы, входящие в одно произведение, соединены отрезками.

Простейшие свойства определителя. **Свойство 1.** *Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.*

Действительно, если $A = (a_{ij})$ – треугольная (верхняя или нижняя, (1.2)) матрица n-го порядка, то все члены определителя этой матрицы, кроме $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$, заведомо равны нулю. Поэтому

$$|A| = (-1)^{\sigma(1,2,\dots,n)} a_{11}a_{22} \dots a_{nn} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}. \; ■$$

Свойство 2. *Определитель квадратной матрицы не изменяется при ее транспонировании:* $|A| = |A^T|$.

Доказательство. Определитель матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ состоит из членов вида (4.2). Все множители из произведения (4.2) и в матрице A^T находятся в разных строках и разных столбцах. Следовательно, $|A|$ и $|A^T|$ состоят из одних и тех же членов.

Сравним их знаки. Знак произведения (4.2) как члена $|A|$ определяется четностью перестановки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Определим его знак как члена $|A^T|$. Имеем $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} = a^t_{\alpha_1 1}a^t_{\alpha_2 2} \dots a^t_{\alpha_n n}$. Упорядочим во втором произведении сомножители в порядке возрастания номеров строк, т.е. так, чтобы номера строк образовали натуральную перестановку: $a^t_{\alpha_1 1}a^t_{\alpha_2 2} \dots a^t_{\alpha_n n} = a^t_{1\beta_1}a^t_{2\beta_2} \dots a^t_{n\beta_n}$. Знак

произведения (4.2) как члена $|A^T|$ определяется четностью перестановки $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Но эта перестановка совпадает с перестановкой индексных номеров в перестановке α после преобразования ее в натуральную. Согласно теореме 4.4, $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$. Таким образом, $|A|$ и $|A^T|$ являются суммами одинаковых слагаемых, т.е. совпадают. ■

Следствие 3. *В определении (4.3) определителя можно поменять ролями строки и столбцы:*

$$|A| = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\sigma(\alpha)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n},$$

так как эта сумма равна $|A^T|$.

Из доказанного свойства вытекает и более общий вывод: строки и столбцы матрицы равноправны с точки зрения свойств определителя. Это означает, что свойства определителя, касающиеся строк матрицы, справедливы и для ее столбцов. Этим обстоятельством мы будем пользоваться в дальнейшем, ограничиваясь в доказательствах теорем только строчным или только столбцовым вариантом.

Свойство 3. *Если одна из строк (столбцов) матрицы целиком состоит из нулей, то ее определитель равен нулю.*

Утверждение вытекает непосредственно из определения (4.3) определителя, если учесть, что в каждый член определителя входит множителем элемент из нулевой строки. ■

Свойство 4. *При умножении строки (столбца) матрицы на число ее определитель умножается на это число.*

Утверждение также вытекает из определения определителя, если учесть, что в каждое слагаемое суммы (4.3) это число входит множителем ровно один раз и его можно вынести за знак суммы. ■

Заметим, что свойство 4 означает, что общий множитель элементов строки (столбца) матрицы можно выносить за знак определителя.

Свойство 5. *Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде суммы двух слагаемых:*

$$a_{ik} = b_k + c_k, \quad k = \overline{1, n},$$

то определитель матрицы можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ b' + c' \\ \vdots \\ a'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ b' \\ \vdots \\ a'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ c' \\ \vdots \\ a'_n \end{vmatrix},$$

где $b' = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $c' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Утверждение вытекает из определения (4.3), если учесть, что

$$\begin{aligned} & a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} = \\ & = a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2} \dots b_{\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} + a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2} \dots c_{\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}. \; ■ \end{aligned}$$

Аналогичное свойство справедливо для столбцов.

Произведение отображений обладает следующими свойствами.

1. $fe_X = f$; $e_Y f = f$ *для любого отображения* $f : X \to Y$. Проверка этого свойства предоставляется читателю.

2. *Произведение отображений ассоциативно, т.е. если* $h : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $f : Z \to U$, *то* $f(gh) = (fg)h$.

Доказательство. В соответствии с определением равенства отображений нужно просто сравнить значения отображений $f(gh) : X \to U$ и $(fg)h : X \to U$ в произвольной "точке" $x \in X$. Согласно определению (8.4) произведения имеем
$(f(gh))(x) = f((gh)(x)) = f(g(h(x))) = (fg)(h(x)) = ((fg)h)(x)$. ■

3. *Произведение инъективных (сюръективных, биективных) отображений инъективно (соответственно сюръективно, биективно).*

Доказательство. Пусть $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ – инъективные отображения и пусть $x_1 \neq x_2$. Тогда из инъективности g следует, что $g(x_1) \neq g(x_2)$, а из инъективности f следует, что $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$, т.е. $fg(x_1) \neq fg(x_2)$.

Пусть теперь f, g сюръективны. Тогда для любого $z \in Z$ в силу сюръективности f существует $y \in Y$ такой, что $z = f(y)$. Но для этого элемента y в силу сюръективности g существует элемент $x \in X$ такой, что $y = g(x)$. Таким образом, для любого элемента $z \in Z$ существует элемент $x \in X$ такой, что $z = f(g(x))$, т.е. $z = fg(x)$. Биективность вытекает из сюръективности и инъективности. ■

Обратное отображение. Пусть $f : X \to Y$. Отображение $f^{-1} : Y \to X$ называется *обратным* к отображению f, если

$$f^{-1} f = e_X, \quad f f^{-1} = e_Y. \tag{8.5}$$

Заметим, что из этого определения следует, что f - обратное отображение к отображению f^{-1}. Отображение, для которого существует обратное отображение, называется *обратимым*.

Если выполнено одно из равенств (8.5), то f^{-1} называется соответственно *левым* или *правым обратным*.

Теорема 8.1 (критерий обратимости). *Отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно биективно.*

Лемма. *Если* $g : X \to Y$, $f : Y \to X$ *и* $fg = e_X$, *то* g *инъективно, а* f *сюръективно.*

Действительно, если g не инъективно, то существуют элементы $x_1, x_2 \in X$ такие, что $x_1 \neq x_2$, а $g(x_1) = g(x_2)$. Тогда $x_1 = e_X(x_1) = fg(x_1) = f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = fg(x_2) = e_X(x_2) = x_2$. Следовательно, g инъективно. Далее, если x – произвольный элемент X, то $x = e_X(x) = fg(x) = f(g(x)) = f(y)$, где $y = g(x) \in Y$. Это доказывает сюръективность f. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть f обратимо. Тогда из (8.5) и леммы следует, что f инъективно и сюръективно, т.е. f биективно.

Достаточность. Пусть f биективно, тогда для любого $y \in Y$ существует единственный прообраз $x \in X$. Построим отображение $g : Y \to X$, положив $g(y) = x$. Тогда для любого $y \in Y$ имеем $(fg)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$, т.е. $fg = e_Y$, а для любого $x \in X$ имеем $(gf)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$, т.е. $gf = e_X$. Таким образом, $g = f^{-1}$ и f обратимо. ■

Отметим еще два свойства обратимых отображений.

1. *Обратное отображение единственно*, так как если f_1^{-1}, f_2^{-1} – два обратных отображения к отображению $f : X \to Y$, то $f_1^{-1} = f_1^{-1} e_Y = f_1^{-1}(f f_2^{-1}) = (f_1^{-1} f) f_2^{-1} = e_X f_2^{-1} = f_2^{-1}$.

2. *Произведение обратимых отображений обратимо, при этом* $(fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1}$. Действительно, произведение fg обратимо как произведение биективных отображений, при этом $(fg)(g^{-1}f^{-1}) = f(gg^{-1})f^{-1} = ff^{-1} = e_Y$, $(g^{-1}f^{-1})(fg) = g^{-1}(f^{-1}f)g = g^{-1}g = e_X$.

§9. Алгебраические законы

Внутренний закон композиции. *Внутренним законом композиции (алгебраической операцией)* на множестве X называется отображение

$$* : X \times X \to X,$$

т.е. закон, посредством которого любой упорядоченной паре элементов $a, b \in X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $c \in X$. Тот факт, что $(a, b) \mapsto c$, записывается символически в виде $a * b = c$. В конкретных случаях вместо символа $*$ используют символы $+, -, \times, :$ и др.

Примеры. 1. На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ операции сложения и умножения чисел являются алгебраическими операциями, так как любые два натуральных числа можно сложить (и умножить), при этом результатом будет также натуральное число.

На этом же множестве операции вычитания и деления не являются алгебраическими операциями, так как результаты выполнения этих операций не всегда будут натуральными числами.

2. На множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ операции сложения, вычитания, умножения (но не деления) чисел будут алгебраическими операциями.

3. На множестве ненулевых вещественных чисел $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ операции умножения и деления (но не сложения и вычитания) будут алгебраическими операциями.

4. На множестве $\mathbb{R}^{m\times n}$ матриц размера $m \times n$, где $m \neq n$, операции сложения и вычитания (но не умножения) матриц являются алгебраическими операциями.

5. На множестве $\mathbb{R}^{n\times n}$ квадратных матриц n-го порядка операции сложения, вычитания и умножения матриц – алгебраические операции.

Операции над арифметическими векторами вводятся следующим образом: $a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$, $\alpha a = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Нетрудно проверить, что $\mathbb{R}^n$ – вещественное линейное пространство относительно введенных операций.

Замечание 1. Отметим, что $\mathbb{R}^n$ – декартова n-я степень множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

Замечание 2. Иногда из соображений удобства мы будем записывать арифметические векторы в виде столбцов.

Замечание 3. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ совпадает с пространством матриц $\mathbb{R}^{1\times n}$ или $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

4. Пространства многочленов. *Многочленом n-й степени* от одной переменной t с вещественными коэффициентами называется выражение вида $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$, где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n}$, причем $a_n \neq 0$. Число $0 \in \mathbb{R}$ по определению считается многочленом с нулевыми коэффициентами и называется *нулевым многочленом*. Степень нулевого многочлена не определена.

Два многочлена $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ и $g(t) = \sum_{k=0}^m b_k t^k$ называются *равными*, если $n = m$ и $a_k = b_k$, $k = \overline{0, n}$.

Суммой многочленов $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ и $g(t) = \sum_{k=0}^m b_k t^k$ называется многочлен $h(t) = \sum_{k\geq 0} (a_k + b_k) t^k$, где недостающие коэффициенты (a_k или b_k) заменяются нулями. Обозначение: $f(t) + g(t)$.

Произведением многочлена $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ называется многочлен $\alpha f(t) = \sum_{k=0}^n \alpha a_k t^k$.

Нетрудно проверить, что множества M_n всех многочленов степени не выше n и множество M_∞ многочленов всех степеней, пополненные нулевым многочленом, образуют вещественные линейные пространства.

Простейшие свойства линейных пространств. Следующие свойства линейных пространств являются элементарными следствиями из аксиом.

1°. *В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор*, так как если θ_1 и θ_2 – два нулевых вектора, то из аксиомы 3 следует, что $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$.

Замечание 4. Говоря о единственности нулевого вектора, мы не различаем равные векторы. В этом же смысле следует понимать и другие утверждения о единственности.

2°. *Для любого вектора линейного пространства существует единственный противоположный вектор*, так как если b и c – два противоположных вектора к вектору a, то, последовательно применяя аксиомы 3, 4, 2, получим, что $b = b + (a + c) = (b + a) + c = c$.

3°. *В линейном пространстве справедливы равенства*: $0a = \theta$, $\forall a \in V$ *и* $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in V$.

Доказательство. Для доказательства первого равенства достаточно проверить, что $b + 0a = b$, $\forall b \in V$. Это соотношение вытекает из следующей цепочки равенств, основанных на аксиомах 2–7:
$b + 0a = (b + \theta) + 0a = b + ((-a) + a) + 0a = (b + (-a)) + a + 0a =$

$$= (b + (-a)) + 1a + 0a = (b + (-a)) + (1 + 0)a = (b + (-a)) + a = \\ = b + ((-a) + a) = b + \theta = b.$$

Второе равенство доказывается с помощью первого и аксиомы 6: если a – произвольный вектор пространства, то $\alpha\theta = \alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a = \theta$. ■

4°. *В линейном пространстве из равенства* $\alpha a = \theta$ *следует, что либо* $\alpha = 0$, *либо* $a = \theta$.

В самом деле, как следует из свойства 3°, случай $\alpha = 0$ возможен, если $\alpha a = \theta$. В случае когда $\alpha \neq 0$, на основании свойства 3° и аксиом 5, 6 получим

$$a = 1a = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right) a = \frac{1}{\alpha}(\alpha a) = \frac{1}{\alpha}\theta = \theta.$$

5°. *В линейном пространстве для любого вектора a противоположный вектор может быть получен как произведение*

$$-a = (-1)a.$$

Это утверждение вытекает из аксиом 3–5, 7 и свойства 3°, так как

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 - 1)a = 0a = \theta.$$

6°. *Для любой пары векторов a и b линейного пространства существует, и притом единственная, разность* $b - a$.

Доказательство. Вектор $b + (-a)$ является разностью $b - a$ векторов a и b, так как на основании аксиом 1–4 и определения разности имеем

$$a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = \theta + b = b.$$

При этом если c – любая другая разность $b - a$, то из аксиом 2–4 следует, что $c = c + \theta = c + (a + (-a)) = (c + a) + (-a) = b + (-a)$. ■

§14. Линейная зависимость

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – векторы линейного пространства V и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – действительные числа. Вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$ называется *линейной комбинацией векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *с коэффициентами* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Если вектор b является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то говорят, что *вектор b линейно выражается через векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, при этом представление вектора b в виде $b = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$ называют *разложением вектора b по векторам* $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Очевидно, нулевой вектор линейно выражается через любой вектор, так как $\theta = 0a$, $\forall a \in V$. Через нулевой вектор не может выражаться ни один ненулевой вектор, так как $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной*, если среди ее коэффициентов хотя бы один отличен от нуля. Очевидно, тривиальная комбинация любой системы векторов равна нулевому вектору.

Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т.е. если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$,

$= \alpha x$.

Умножение матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ является внешним законом композиции на множестве $\mathbb{R}^{m\times n}$. Умножение чисел в $\mathbb{R}$ можно рассматривать и как внутренний закон композиции, и как внешний.

Внешний закон композиции на множестве X называется *дистрибутивным относительно внутреннего закона композиции* $*$ в X, если

$$\alpha(a * b) = \alpha a * \alpha b, \ \forall \alpha \in P, \forall a, b \in X.$$

Внешний закон композиции на множестве X называется *дистрибутивным относительно внутреннего закона композиции* $*'$ в P, если

$$(\alpha *' \beta)a = \alpha a *' \beta a, \ \forall \alpha, \beta \in P, \forall a \in X.$$

Умножение матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ дистрибутивно как относительно сложения матриц, так и относительно сложения чисел, ибо $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Глава III. Геометрические векторы

В этой главе предполагаются известными из средней школы основные геометрические понятия, такие, как точка, прямая, отрезок, луч, длина отрезка, направление на прямой и т.д.

С математической точки зрения логически безупречным методом введения этих понятий является аксиоматический метод, получивший завершение в трудах Гильберта. Существуют различные версии аксиом евклидовой геометрии. Мы оставим в стороне эти исследования, ограничившись лишь ссылкой на литературу [4, 5] и формулировками основных фактов, на которые мы будем опираться в дальнейшем.

Отрезок $[AB]$ – это множество, состоящее из точек A и B и всех точек прямой (AB), которые лежат между точками A и B. Каждому отрезку $[AB]$ можно поставить в соответствие неотрицательное действительное число $|AB|$, называемое *длиной отрезка* $[AB]$ и удовлетворяющее аксиомам:

1) аксиома тождества:
$|AB| \geq 0$, $\forall A, B$,
$|AB| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$;
2) аксиома симметрии:
$|AB| = |BA|$, $\forall A, B$;
3) неравенство треугольника:
$|AB| \leq |AC| + |CB|$, $\forall A, B, C$,
$|AB| = |AC| + |CB|$ тогда и только тогда, когда точка C лежит на отрезке $[AB]$.

Длина отрезка $[AB]$ называется также *расстоянием* между точками A и B и обозначается символом $\rho(A, B)$.

Любая точка A, лежащая на прямой l, разбивает эту прямую на два *луча* l_+ и l_- с началами в точке A. Эти лучи называются *дополнительными* друг к другу. Точка A принадлежит обоим лучам. Две точки $B \neq A$ и $C \neq A$ прямой l принадлежат одному лучу тогда и только тогда, когда отрезок $[BC]$ не содержит точки A, и принадлежат дополнительным лучам, если точка A является внутренней точкой отрезка $[BC]$. Луч с началом в точке A, на котором лежит точка $B \neq A$, обозначается символом $[AB)$.

Два луча, лежащие на одной прямой, называются *одинаково направленными (сонаправленными)*, если их пересечение есть луч, и *противоположно направленными*, если их пересечение не является лучом.

Всякая прямая l, лежащая в плоскости P, разбивает эту плоскость на две полуплоскости P_+ и P_-, про которые говорят, что они *определяются прямой* l. Прямая l принадлежит каждой из этих полуплоскостей. Две точки $B \notin l$ и $C \notin l$ плоскости P лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой l, тогда и только тогда, когда $[BC] \cap l = \varnothing$.

Два луча $[AB)$ и $[CD)$, лежащие на параллельных несовпадающих прямых, принадлежат некоторой плоскости P. Лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются *одинаково направленными (сонаправленными)*, если они лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой AC, и *противоположно направленными*, если они лежат в разных полуплоскостях. Обозначение: $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$ и $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$ соответственно. Свойство сонаправленности лучей транзитивно.

Пусть P - некоторая плоскость и A, B, O - три ее различные точки, не лежащие на одной прямой. Прямая OA разбивает эту плоскость на две полуплоскости. Точка B расположена в одной из них. Обозначим эту полуплоскость P_+. Аналогично прямая OB разбивает плоскость P на две полуплоскости. Пусть P_- -

2. Пространство многочленов. Многочлены $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы. Это следует из того, что линейная комбинация этих многочленов с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ представляет собой многочлен $\sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$, который равен нулевому многочлену тогда и только тогда, когда $\alpha_k = 0$, $k = \overline{0, n}$.

§15. Геометрический смысл линейной зависимости

Будем рассматривать геометрические векторы на прямой, на плоскости и в пространстве. Выясним, что означает линейная зависимость геометрических векторов. Предварительно докажем несколько чисто геометрических утверждений.

Утверждение **1.** *На прямой (на плоскости и в пространстве) существует ненулевой вектор (соответственно два неколлинеарных и три некомпланарных вектора).*

Доказательство. В случае прямой достаточно взять две несовпадающие точки O и A (рис. 1,а), тогда вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} \neq \mathbf{0}$. На плоскости достаточно взять три точки O, A и B, не лежащие на одной прямой (рис. 1,б), тогда векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ неколлинеарны. В пространстве достаточно взять четыре точки O, A, B, C, не лежащие в одной плоскости (рис. 1,в), тогда векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ некомпланарны. ■

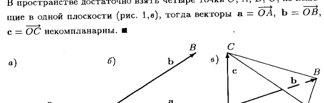


Рис. 1

Утверждение **2.** *На прямой (на плоскости и в пространстве) всякий вектор линейно выражается через любой ненулевой вектор (соответственно любые два неколлинеарных и любые три некомпланарных вектора).*

Доказательство. 1. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – векторы на прямой и $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Отложим их от одной точки O прямой. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ (рис. 2,а). Если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{b} = 0\mathbf{a}$. Если $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то, взяв

$$\alpha = \begin{cases} |\overrightarrow{OB}|/|\overrightarrow{OA}|, & \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}, \\ -|\overrightarrow{OB}|/|\overrightarrow{OA}|, & \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}, \end{cases}$$

согласно определению произведения вектора на число получим, что $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$.

2. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – векторы плоскости и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ неколлинеарны (значит, ни один из них не равен $\mathbf{0}$). Отложим эти векторы от одной точки O плоскости. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 2,б). Если $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{c} = 0\mathbf{a} + 0\mathbf{b}$. Если $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, то проведем из точки C прямые, параллельные прямым OB и OA, до пересечения с прямыми OA и OB соответственно. Пусть точки A_1, B_1 – точки пересечения этих прямых (существование точек пересечения следует из неколлинеарности $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$). Тогда $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$. Отсюда и из первой части утверждения получим, что $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

3. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ – векторы пространства и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарны (значит, попарно неколлинеарны и, тем более, ни один из них не равен $\mathbf{0}$). Отложим эти векторы от одной точки O. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$ (рис. 2,в). Если $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{d} = 0\mathbf{a} + 0\mathbf{b} + 0\mathbf{c}$. Если $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, то проведем из точки D плоскости, параллельные плоскостям OBC, OAC и OAB (это плоскости, так как $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ попарно неколлинеарны), до пересечения с прямыми OA, OB и OC соответственно. Пусть A_1, B_1, C_1 – точки пересечения (существование точек пересечения следует из некомпланарности $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$). Тогда $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$. Отсюда и из первой части утверждения получим, что $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. ■

Рис. 2

Теорема 15.1. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ линейно зависимы, тогда в силу теоремы 14.2 один из них линейно выражается через другой. Пусть $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$. Отсюда и из определения произведения вектора на число следует коллинеарность $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

б) симметричности, так как справедливы импликации

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Rightarrow |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}|, \qquad \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB};$$

в) транзитивности, так как равенство длин (т.е. чисел) и сонаправленность направленных отрезков (т.е. лучей) обладают свойством транзитивности. ■

Прямая l с заданным на ней направлением называется *осью*. *Величиной* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на оси l называется число

$$(\overrightarrow{AB}) = \begin{cases} |\overrightarrow{AB}|, & \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow l, \\ -|\overrightarrow{AB}|, & \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow l. \end{cases} \tag{10.1}$$

Из определения вытекают следующие факты.

1°. Нулевые направленные отрезки, и только они, имеют нулевую величину.

2°. $(\overrightarrow{AB}) = -(\overrightarrow{BA})$.

Лемма Шаля. *При любом расположении точек A, B и C на прямой имеет место равенство*

$$(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB}).$$

Доказательство. Если какие-либо две точки совпадают (например, $A = B$), то утверждение очевидно, так как $(\overrightarrow{AA}) = (\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA})$. Пусть A, B, C – различные точки. Тогда возможны только три варианта расположения этих точек:

1) точка C между точками A и B (рис. 4);

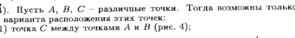


Рис. 4

2) точка A между точками B и C;
3) точка B между точками A и C.

В первом случае, как видно из рис. 4, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$, откуда следует, что $(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB})$. Отсюда во втором случае имеем $(\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC})$ или $(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB})$. Третий случай рассматривается аналогично второму. ■

§11. Свободный вектор

Определение и терминология. Известно (теорема 10.3), что отношение равенства направленных отрезков является отношением эквивалентности на множестве направленных отрезков. Оно разбивает это множество на непересекающиеся классы эквивалентности (§7).

Класс эквивалентности направленных отрезков называется *свободным вектором* или просто *вектором*. Векторы обозначают строчными латинскими буквами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Итак, вектор $\mathbf{a} = \mathrm{cl}(\overrightarrow{AB})$ состоит из всех направленных отрезков, равных $\overrightarrow{AB}$. Так как класс эквивалентности (§7) порождается любым своим представителем, то вектор $\mathbf{a} = \mathrm{cl}(\overrightarrow{AB})$ можно задавать любым направленным отрезком $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, т.е. $\mathbf{a} = \mathrm{cl}(\overrightarrow{CD})$. Если вместо направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ используется направленный отрезок $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, то говорят, что вектор $\mathbf{a}$ отложен от точки C. Символ $\mathbf{a} = \mathrm{cl}(\overrightarrow{AB})$ используется применительно к геометрическому вектору $\mathbf{a}$ только в тех ситуациях, когда подчеркивается отношение этого вектора к классу эквивалентности. Обычно вместо символа $\mathbf{a} = \mathrm{cl}(\overrightarrow{AB})$ используется символ $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, который в зависимости от контекста читается как "вектор $\mathbf{a}$, порожденный направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$" или "вектор $\mathbf{a}$, отложенный от точки A".

Длиной вектора $\mathbf{a}$ (*величиной вектора* $\mathbf{a}$ *на оси*) называется длина (соответственно величина) порождающего его направленного отрезка; векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ называются *коллинеарными* (*компланарными*), если коллинеарны (соответственно компланарны) порождающие их направленные отрезки; векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *одинаково направленными* (*противоположно направленными*), если одинаково (соответственно противоположно) направлены порождающие их направленные отрезки. Очевидно, что эти определения корректны несмотря на произвол в выборе направленных отрезков.

Линейные операции над векторами.

Сложение векторов. Сумма векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется следующим образом. Отложим вектор $\mathbf{a}$ от произвольной точки A, пусть B – конец этого вектора, т.е. $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Затем отложим вектор $\mathbf{b}$ от точки B, пусть $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. *Суммой* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор, порожденный направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$ (рис. 1).

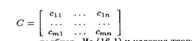


Рис. 1

Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*. Очевидно, что этот же вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ для неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ может быть получен (рис. 2) как диагональ параллелограмма,

Для этого составим вспомогательную матрицу

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ik} \end{bmatrix},$$

полученную окаймлением минора $\underline{M_r}$ i-й строкой и k-м столбцом матрицы A. Очевидно, $|\Delta_i| = 0$, $i = \overline{1, m}$, так как в случае, когда $i \leq r$, матрица Δ_i содержит две одинаковые строки, а в случае, когда $i > r$, $|\Delta_i|$ является минором $(r + 1)$-го порядка матрицы A ранга r. Разложив $|\Delta_i|$ по последней строке, получим $0 = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{ik}M_r$, где $A_1, A_2, \ldots, A_r$, являясь алгебраическими дополнениями к элементам вычеркиваемой строки, не зависят от i. Отсюда, положив $\alpha_s = -A_s/M_r$, $s = \overline{1, r}$, приходим к (16.2). ■

Следствие 1 (*необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя*). *Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо ее строка (столбец) является линейной комбинацией других ее строк (столбцов).*

Доказательство. Достаточность доказана в §4 (свойство 8). Необходимость вытекает из теоремы о базисном миноре, так как из равенства $|A| = 0$ следует, что $\mathrm{rg}\, A < n$ и, значит, в матрице A есть хотя бы одна небазисная строка (столбец), которая является линейной комбинацией других (т.е. базисных) строк (столбцов). ■

Пусть в линейном пространстве даны две системы векторов. Если каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой, то говорят, что *первая система линейно выражается через вторую*. Очевидно, что "линейная выражаемость" обладает свойством транзитивности, т.е. если система векторов $a_1, \ldots, a_k$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_n$, а система векторов $b_1, \ldots, b_n$ – через $c_1, \ldots, c_m$, то $a_1, \ldots, a_k$ линейно выражается через $c_1, \ldots, c_m$.

Теорема 16.2. *Если в линейном пространстве бо́льшая система векторов линейно выражается через меньшую, то большая система линейно зависима* [2].

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_n$ – две системы векторов в линейном пространстве, $m > n$ и $a_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} b_j$, $i = \overline{1, m}$. Тогда в матрице

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

число строк больше числа столбцов. Из (16.1) и условия теоремы следует, что $\mathrm{rg}\, A \leq n < m$. Значит, в матрице C существует хотя бы одна небазисная строка (например, i-я), которая линейно выражается через другие строки. Тогда из свойств операций в пространстве $\mathbb{R}^n$ следует, что вектор a_i линейно выражается через другие векторы

[2] Теорема представляет собой другую формулировку теоремы, известной как "основная теорема о линейной зависимости" [9].

системы $a_1, \ldots, a_m$. Отсюда и из теоремы 14.2 следует линейная зависимость системы векторов $a_1, \ldots, a_m$. ■

Теорема 16.3. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов).*

Доказательство. Пусть $\mathrm{rg}\, A = r$ и $r > 0$ (случай $r = 0$ очевиден). Тогда в матрице A существует r линейно независимых строк (столбцов) – это ее базисные строки (столбцы). При этом любая система из большего числа строк (столбцов) линейно зависима на основании теорем 16.1, 14.2. ■

Следствие 2. $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^T$.

Замечание 1. Теорема 16.3 дает два новых определения ранга матрицы.

Теорема 16.4. *Если все строки (столбцы) матрицы A линейно выражаются через строки (столбцы) матрицы B, то*

$$\mathrm{rg}\, A \leq \mathrm{rg}\, B.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{rg}\, A = r$, $\mathrm{rg}\, B = s$ и пусть $a_1, \ldots, a_r$ и $b_1, \ldots, b_s$ – базисные столбцы матриц A и B. Докажем, что $r \leq s$. Пусть $r > s$, тогда согласно условию теоремы система $a_1, \ldots, a_r$ линейно выражается через систему столбцов матрицы B, которая, в свою очередь, в силу теоремы 16.1 линейно выражается через систему базисных столбцов $b_1, \ldots, b_s$. Отсюда следует, что $a_1, \ldots, a_r$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_s$, причем $r > s$. Из теоремы 16.2 вытекает линейная зависимость $a_1, \ldots, a_r$. Это противоречит тому, что $a_1, \ldots, a_r$ – базисные столбцы. ■

Теорема 16.5. *Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей.*

Доказательство. Пусть $C = AB$. Из (2.3), (2.2) следует, что строки матрицы C линейно выражаются через строки B, а столбцы C – через столбцы A. Отсюда в силу теоремы 16.4 вытекает, что $\mathrm{rg}\, C \leq \mathrm{rg}\, B$, $\mathrm{rg}\, C \leq \mathrm{rg}\, A$. ■

Ранг матрицы и элементарные преобразования.

Теорема 16.6. *Ранг матрицы не изменяется при умножении ее на невырожденную матрицу.*

Доказательство. Пусть $C = AP$, $|P| \neq 0$. Тогда на основании теоремы 16.5 имеем $\mathrm{rg}\, C \leq \mathrm{rg}\, A$. С другой стороны, матрица P обратима (теорема 5.2) и $A = CP^{-1}$. Снова воспользовавшись теоремой 16.5, получим, что $\mathrm{rg}\, A \leq \mathrm{rg}\, C$. Оба этих неравенства говорят о том, что $\mathrm{rg}\, C = \mathrm{rg}\, A$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{rg}\, QA = \mathrm{rg}\, A$, если $|Q| \neq 0$. ■

Теорема 16.7. *Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.*

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 3.2 и невырожденности матриц (3.1) элементарных преобразований ($|P_{ij}| = -1$, $|D_i| = \alpha \neq 0$, $|L_{ij}| = 1$). ■

§12. Векторы на прямой, на плоскости и в пространстве

До сих пор мы рассматривали свободные векторы в пространстве. Мы определили векторы и операции над ними, исходя из направленных отрезков, начала и концы которых – любые точки пространства. Свойства этих операций относились к произвольным векторам пространства.

Можно дать такое же определение вектора и операций над ними, оставаясь в пределах некоторой плоскости или даже прямой. При этом оказывается, что все факты, изложенные в § 10, 11, останутся, по существу, неизменными, незначительное изменение коснется лишь их формулировок: в них добавится уточнение, какое именно множество векторов рассматривается.

В самом деле, пусть V_1, V_2 и V_3 – множества всех векторов на прямой, на плоскости и в пространстве соответственно. Как следует из определения суммы векторов, если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$ (V_2 или V_3), то $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V_1$ (V_2 или V_3 соответственно), т.е. операция сложения векторов не выводит за пределы данной прямой (плоскости или пространства). Значит, операция сложения векторов является алгебраической операцией (или внутренним законом композиции) на каждом из множеств V_1, V_2 или V_3 (§9). Аналогично операция умножения вектора на действительное число является внешним законом композиции на каждом из этих множеств. Если к этому добавить еще, что каждое из них содержит нулевой вектор $\mathbf{0}$ и противоположный вектор $-\mathbf{a}$ к любому своему вектору $\mathbf{a}$, то теоремы 11.1–11.3 можно отнести к каждому из множеств V_1, V_2, V_3. Сформулируем этот итог в виде следующего утверждения.

Утверждение. *Множество* V_n, *где* $n = 1, 2, 3$, *всех векторов на прямой (на плоскости или в пространстве) наделено внутренним законом композиции (называемым сложением) и внешним законом композиции (называемым умножением на число), которые обладают следующими свойствами: для любых* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in V_n$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;
3) $\exists\, \mathbf{0} \in V_n : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in V_n$;
4) $\forall \mathbf{a} \in V_n \ \ \exists\, (-\mathbf{a}) \in V_n : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;
5) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in V_n$;
6) $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$;
7) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$;
8) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$.

Отметим, что, прежде чем сделать этот вывод, мы проверили лишь факт наличия законов композиции и справедливость свойств 3 и 4. Очевидно, остальные свойства не нуждаются в проверке.

К свойствам 1–8 остается добавить, что операция сложения векторов на каждом из множеств V_1, V_2, V_3 обладает обратной операцией,

называемой вычитанием.

Замечание. Свойства 1–8 говорят о том, что множества V_1, V_2, V_3, будучи, вообще говоря, различными, обладают общими свойствами. Такими же свойствами обладает и совсем непохожее на них множество $\mathbb{R}^{m\times n}$ матриц размера $m \times n$ (§2). Очевидно, это относится и к множеству $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, если операцию умножения чисел рассматривать как внешний закон композиции. Уже эти примеры наводят на мысль о целесообразности общего взгляда на эти множества. В следующей главе мы увидим, что рассмотренные в примерах множества – это лишь частные проявления того круга формальных понятий, который составляет основу линейной алгебры и аналитической геометрии.

Теорема 17.1. *Система векторов* $e_1, \ldots, e_n$ *линейного пространства является его базисом тогда и только тогда, когда она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пространства.*

Доказательство. Необходимость. Базис пространства является максимальной линейно независимой системой векторов в этом пространстве, так как любая бо́льшая система векторов линейно выражается через этот базис (т.е. через меньшую систему) и на основании теоремы 16.2 линейно зависима.

Достаточность. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – максимальная линейно независимая система векторов пространства V, тогда для любого вектора $x \in V$ система векторов $e_1, \ldots, e_n, x$ линейно зависима, так как содержит более чем n векторов. Из теоремы 14.6 следует, что вектор x является линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_n$. Следовательно, векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис пространства V. ■

Теорема 17.1 дает другое определение базиса.

Итак, все базисы одного линейного пространства состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых векторов этого пространства. Это означает, что число векторов базиса является характеристикой не столько базиса, сколько самого пространства. Число векторов базиса называется *размерностью* линейного пространства. Размерность нулевого пространства по определению считается равной нулю. Обозначение: $\dim V$. Из теоремы 17.1 следует, что размерность линейного пространства равна максимальному числу линейно независимых векторов этого пространства. Линейное пространство размерности n, где n – целое неотрицательное число, называется n-мерным пространством. Любое n-мерное пространство называется *конечномерным линейным пространством.*

Конечномерными пространствами не исчерпываются все линейные пространства: не во всяком пространстве можно указать максимальное число линейно независимых векторов. Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если для любого $k \in \mathbb{N}$ в нем найдется линейно независимая система из k векторов. Из определения размерности и теоремы 17.1 вытекают следующие утверждения.

Утверждение 1. *В n-мерном пространстве любые n линейно независимых векторов образуют базис.*

Утверждение 2. *В n-мерном пространстве любая система из s векторов, где* $s > n$, *линейно зависима.*

Примеры. 1. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3. Из результатов §15 следует, что $\dim V_n = n$, где $n = 1, 2, 3$.

2. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ единичные векторы (14.6) образуют базис, так как они линейно независимы и, как нетрудно проверить, любой вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ линейно выражается через них: $a = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$. Итак, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

3. Пространство матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$. Рассмотрим матрицы E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{mn}, у которых все элементы равны нулю, кроме одного: в матрице E_{ij} элемент в позиции (i, j) равен единице.

а) Эти матрицы линейно независимы, так как из того, что

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = O,$$

следует, что $a_{ij} = 0$, $\quad i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

б) Любая матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ является линейной комбинацией этих матриц (как видно из п."а"). Следовательно, эти матрицы образуют базис $\mathbb{R}^{m\times n}$ и $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$.

4. Пространство многочленов M_n. Многочлены $1, t, t^2, \ldots, t^n$ образуют базис M_n, так как они линейно независимы (§14), а любой многочлен $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in M_n$ является линейной комбинацией этих многочленов с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Итак, $\dim M_n = n + 1$.

5. Пространство M_∞ многочленов всех степеней (§13, пример 4) бесконечномерно, так как для любого $k \in \mathbb{N}$ можно указать k линейно независимых многочленов: $1, t, t^2, \ldots, t^{k-1}$.

Координаты вектора. Базис играет большую роль в изучении линейного пространства. С его помощью абстрактные векторы можно задавать в виде совокупности чисел, а операции над векторами сводить к операциям над числами.

Теорема 17.2. *Разложение вектора по базису единственно.*

Это утверждение вытекает из теоремы 14.5. ■

Коэффициенты разложения вектора по базису называются *координатами вектора в этом базисе*. Из определения базиса и теоремы 17.2 следует, что каждый вектор имеет координаты, при этом два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

Обозначение. Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства и

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, \tag{17.1}$$

то будем обозначать через x_e вектор-столбец из координат вектора x в этом базисе:

$$x_e = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T. \tag{17.2}$$

Столбец x_e называют *координатным столбцом* вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Положим

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n). \tag{17.3}$$

Символ e будем понимать как обозначение базиса $e_1, \ldots, e_n$ и как матрицу-строку $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. В обозначениях (17.2) и (17.3) разложение (17.1) может быть записано как произведение строки e на столбец x_e:

$$x = e x_e. \tag{17.4}$$

одновременно не равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta, \qquad (14.1)$$

и *линейно независимой*, если нулевому вектору равна только тривиальная линейная комбинация этих векторов, т.е. если из равенства (14.1) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Теорема 14.1. *Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

Доказательство. Линейная зависимость системы из одного вектора a равносильна тому, что $\alpha a = \theta$ при некотором $\alpha \neq 0$, а это, в свою очередь, равносильно (§13, свойства 3, 4) тому, что $a = \theta$. ■

Теорема 14.2. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где $k > 1$, линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через другие.*

Доказательство. Необходимость. Если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависима, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, одновременно не равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_i a_i + \ldots + \alpha_k a_k = \theta. \qquad (14.2)$$

Пусть $\alpha_i \neq 0$. Тогда в силу (14.2) $a_i = \sum_{s \neq i} (-\alpha_s/\alpha_i)\, a_s$. Так как $k > 1$, то для вектора a_i существует хотя бы один "другой" вектор системы.

Достаточность. Пусть $a_i = \sum_{s \neq i} \alpha_s a_s$. Тогда, перенеся правую часть этого равенства в левую, получим нетривиальную линейную комбинацию векторов системы, равную нулевому вектору:

$$-\alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_{i-1} a_{i-1} + 1 a_i - \alpha_{i+1} a_{i+1} - \ldots - \alpha_k a_k = \theta. \ ■$$

Эта теорема дает другое определение линейной зависимости системы векторов, в которой более одного вектора.

Теорема 14.3. *Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать подсистемой системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_k$ ее первые s векторов. Из линейной зависимости $a_1, a_2, \ldots, a_s$ следует, что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = \theta$ для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, среди которых существует $\alpha_i \neq 0$. Тогда $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s + 0a_{s+1} + \ldots + 0a_k = \theta$, причем $\alpha_i \neq 0$. Следовательно, система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_k$ линейно зависима. ■

Теорема 14.4. *Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.*

В самом деле, если бы существовала линейно зависимая подсистема, то на основании теоремы 14.3 вся система была бы линейно зависимой. ■

Теорема 14.5. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима тогда и только тогда, когда любой вектор, являющийся*

линейной комбинацией этих векторов, имеет единственное разложение по этим векторам.

Доказательство. Необходимость доказывается от противного. Пусть существует вектор b, который имеет два различных разложения по векторам $a_1, a_2, \ldots, a_k$: $b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$, $b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i' a_i$, $\exists \alpha_s \neq \alpha_s'$. Вычитая почленно одно равенство из другого, получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, равную нулевому вектору. Отсюда следует линейная зависимость $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Достаточность также доказывается от противного. Пусть система $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависима, тогда

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta \qquad (14.3)$$

для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, среди которых существует $\alpha_s \neq 0$. Но, с другой стороны,

$$0a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_k = \theta. \qquad (14.4)$$

Мы получили два различных разложения (14.3) и (14.4) нулевого вектора θ по векторам $a_1, a_2, \ldots, a_k$. ■

Теорема 14.6. *Если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима, а система $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$.*

Доказательство. Из линейной зависимости системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ следует, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \alpha_0 b = \theta \qquad (14.5)$$

для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_0$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля. Если $\alpha_0 = 0$, то ненулевой коэффициент α_s находится среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$; при этом (14.5) переходит в равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta$, где $\alpha_s \neq 0$, $1 \leq s \leq k$, которое противоречит условию линейной независимости $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Следовательно, $\alpha_0 \neq 0$; отсюда и из (14.5) получаем, что $b = \sum_{i=1}^{k} (-\alpha_i/\alpha_0)\, a_i$. ■

Примеры. 1. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ единичные векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \qquad (14.6)$$

линейно независимы. Это следует из того, что линейная комбинация этих векторов с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ представляет собой арифметический вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, который равен нулевому вектору $\theta = (0, \ldots, 0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется:

• *коммутативной*, если $a * b = b * a$, $\forall a, b \in X$,

• *ассоциативной*, если $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in X$.

Операции сложения и умножения чисел в $\mathbb{R}$ коммутативны и ассоциативны. Сложение матриц, как уже отмечалось в §2, также коммутативно и ассоциативно. Примером некоммутативной, но ассоциативной алгебраической операции могут служить операции умножения матриц в $\mathbb{R}^{n \times n}$ и суперпозиции отображений на множестве всех отображений множества X в себя.

Элемент $e \in X$ называется *нейтральным элементом множества X относительно алгебраической операции $*$*, если $\forall a \in X$:

$$a * e = e * a = a.$$

Примеры. 1. Очевидно, что число $0 \in \mathbb{R}$ является нейтральным элементом относительно операции сложения чисел в $\mathbb{R}$, а матрица $O \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – нейтральным элементом относительно сложения матриц в $\mathbb{R}^{m \times n}$. Операции вычитания чисел и матриц не обладают нейтральными элементами.

2. Также очевидно, что $1 \in \mathbb{R}$ и $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ являются нейтральными элементами относительно операций умножения чисел в $\mathbb{R}$ и матриц в $\mathbb{R}^{n \times n}$ соответственно. Операция умножения на множестве всех четных чисел, являясь алгебраической операцией, не обладает нейтральным элементом.

Теорема 9.1. *Нейтральный элемент единствен.*

Доказательство. Действительно, если e_1 и e_2 – два нейтральных элемента, то $e_1 * e_2 = e_1$, так как e_2 – нейтральный элемент, и $e_1 * e_2 = e_2$, так как e_1 – нейтральный элемент. Значит, $e_1 = e_2$. ■

Пусть $*$ – алгебраическая операция на множестве X, обладающая нейтральным элементом e. Элемент x' называется *симметричным элементом* для элемента $x \in X$, если $x * x' = x' * x = e$.

Примеры. Очевидно, что любое число $a \in \mathbb{R}$ и любая матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обладают симметричным элементом относительно операции сложения – ими будут соответственно противоположное число $-a$ и противоположная матрица $-A$.

Что же касается умножения чисел в $\mathbb{R}$ и умножения матриц в $\mathbb{R}^{n \times n}$, то не каждый элемент обладает симметричным: только ненулевое число $a \in \mathbb{R}$ и невырожденная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ имеют симметричные элементы – ими будут соответственно обратное число a^{-1} и обратная матрица A^{-1} (§5).

Теорема 9.2. *Симметричный элемент относительно ассоциативной алгебраической операции единствен.*

Доказательство. Действительно, если x' и x'' – два симметричных элемента к элементу $x \in X$, то

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''. \quad ■$$

Замечание. В определении нейтрального и симметричного элементов мы считали, что $x * e = e * x = x$ и $x * x' = x' * x = e$. Но можно рассматривать только равенства $x * e = x$ и $x * x' = e$ (или $e * x = x$ и $x' * x = e$) и говорить о *правом*

нейтральном и правом симметричном элементах (или о *левом нейтральном и левом симметричном*). Этим обобщением мы будем иногда пользоваться.

Говорят, что алгебраическая операция $*$ на множестве X обладает *обратной операцией*, если для любых двух элементов $a, b \in X$ уравнения $a * x = b$ и $y * a = b$ имеют единственное решение.

Наличие обратной операции означает существование двух алгебраических операций. Первая ставит в соответствие любой упорядоченной паре элементов $a, b \in X$ однозначно определенный элемент $x \in X$ такой, что $a * x = b$, и называется *правой обратной операцией* к операции $*$, а вторая – элемент $y \in X$ такой, что $y * a = b$, и называется *левой обратной операцией*. Но если алгебраическая операция $*$ коммутативна, то $x = y$ и обе операции совпадают и определяют *обратную операцию* к операции $*$. Очевидно, вычитание чисел в $\mathbb{R}$ и вычитание матриц в $\mathbb{R}^{m \times n}$ – операции, обратные к операции сложения в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Пусть $*_1$ и $*_2$ – две алгебраические операции на множестве X. Алгебраическая операция $*_1$ называется *дистрибутивной справа* относительно алгебраической операции $*_2$, если

$$(a *_2 b) *_1 c = (a *_1 c) *_2 (b *_1 c), \quad \forall a, b, c \in X;$$

дистрибутивной слева, если

$$a *_1 (b *_2 c) = (a *_1 b) *_2 (a *_1 c), \quad \forall a, b, c \in X;$$

и *дистрибутивной*, если она дистрибутивна и справа и слева.

Пример. Умножение чисел в $\mathbb{R}$ (матриц в $\mathbb{R}^{n \times n}$) дистрибутивно относительно сложения в $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^{n \times n}$ соответственно). Но сложение не дистрибутивно относительно умножения.

Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности. Нами уже отмечалось в §7, что, назвав элементы множества эквивалентными, мы ожидаем, что в одной и той же ситуации они должны проявлять себя одинаково. В первую очередь это относится к алгебраическим операциям, в которых они участвуют. Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется *согласованной* с отношением эквивалентности $\sim$ на этом множестве, если из того, что $a_1 \sim a_2, b_1 \sim b_2$, следует, что $a_1 * b_1 \sim a_2 * b_2$, т.е. алгебраическая операция, примененная к эквивалентным элементам, дает эквивалентные результаты. Это заставляет нас при введении тех или иных алгебраических операций проверять выполнение этого требования. Мы не будем останавливаться на этом, а предлагаем читателю самому убедиться в справедливости данного свойства у всех рассматриваемых операций.

Заметим, что в наших рассуждениях, говоря о внутренних законах композиции, мы всюду использовали термин "алгебраическая операция". И это не случайно. Как правило, термин "внутренний закон композиции" используют в тех случаях, когда наряду с внутренним законом композиции рассматривается и внешний закон композиции.

Внешний закон композиции. Пусть X и P – два множества. *Внешним законом композиции на множестве X* называется отображение

$$(\cdot): \quad P \times X \to X,$$

т.е. закон, посредством которого любому элементу $\alpha \in P$ и любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $c \in X$. Тот факт, что $(\alpha, x) \mapsto c$, обозначается символом

Достаточность. Пусть **a** и **b** коллинеарны, т.е. параллельны одной прямой. Будем считать, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ (так как если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то линейная зависимость **a**, **b** следует из теорем 14.1 и 14.3). Отложим **a**, **b** от одной точки. Тогда они окажутся на одной прямой, при этом, согласно утверждению 2, $\mathbf{b} = \alpha\,\mathbf{a}$. В силу теоремы 14.2 отсюда следует линейная зависимость **a**, **b**. ■

Следствие 1. Любые два (значит, и более) вектора прямой линейно зависимы.

Теорема 15.2. *Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы **a**, **b**, **c** линейно зависимы, тогда один из них линейно выражается через другие. Пусть $\mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$. Если **a** и **b** коллинеарны, то **a**, **b**, **c** коллинеарны и, тем более, компланарны. Если **a** и **b** неколлинеарны, то отложим векторы **a**, **b**, **c** от одной точки (рис. 2,*б*). Тогда вектор **c**, являясь диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\alpha\,\mathbf{a}$ и $\beta\,\mathbf{b}$, окажется в той же плоскости, что и **a**, **b**. Значит, **a**, **b**, **c** компланарны.

Достаточность. Пусть **a**, **b**, **c** компланарны, т.е. параллельны одной плоскости. Будем считать, что **a**, **b** неколлинеарны (так как если **a**, **b** коллинеарны, то линейная зависимость **a**, **b**, **c** следует из линейной зависимости подсистемы). Отложим **a**, **b** и **c** от одной точки. Тогда они окажутся в одной плоскости и на основании утверждения 2 будем иметь $\mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$. В силу теоремы 14.2 отсюда следует, что векторы **a**, **b**, **c** линейно зависимы. ■

Следствие 2. Любые три (значит, и более) вектора плоскости линейно зависимы.

Теорема 15.3. *Любые четыре вектора линейно зависимы.*

Доказательство. Будем считать, что в четверке векторов **a**, **b**, **c**, **d** векторы **a**, **b**, **c** некомпланарны (так как если **a**, **b**, **c** компланарны, то линейная зависимость **a**, **b**, **c**, **d** вытекает из линейной зависимости подсистемы). Тогда на основании утверждения 2 будем иметь $\mathbf{d} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c}$. В силу теоремы 14.2 отсюда следует, что векторы **a**, **b**, **c**, **d** линейно зависимы. ■

Итак, понятие линейной зависимости является обобщением понятий коллинеарности и компланарности геометрических векторов.

Трудно не заметить логическое "однообразие" формулировок и доказательств изложенных выше теорем. Мы не старались уходить от повторений, чтобы подчеркнуть, как похожи по своей структуре три различных линейных пространства V_1, V_2 и V_3 – векторов на прямой, на плоскости и в пространстве. Резюмируем полученные результаты. Итак, для $n = 1, 2, 3$ в линейном пространстве V_n

1) существует линейно независимая система из n векторов, а любая система из большего числа векторов линейно зависима;

2) существует линейно независимая система из n векторов, а любой вектор пространства V_n линейно выражается через них;

3) максимальное число линейно независимых векторов равно n.

Мы выделили общие свойства, характерные для различных линейных пространств V_1, V_2 и V_3. Возникает естественный вопрос, не являются ли они общими для всех линейных пространств. Прежде чем ответить на этот вопрос, обратимся вновь к матрицам.

§16. Ранг матрицы

Понятие линейной зависимости векторов тесно связано с понятием матрицы. Если рассматривать строки и столбцы матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ как векторы арифметических пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, то оказывается, что одна из важнейших характеристик матрицы определяется свойством линейной зависимости ее строк и столбцов. В свою очередь, эта характеристика будет удобным аппаратом дальнейшего исследования линейных пространств.

Ранг матрицы и линейная зависимость. *Рангом* ненулевой матрицы называется максимальный порядок ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю. Обозначение: $\mathrm{rg}\,A$, $\mathrm{rang}A$, r_A и др.

Из определения вытекают следующие факты:

1) ранг матрицы не превосходит ее размеров: если $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, то

$$\mathrm{rg}\,A \leq \min(m, n); \qquad (16.1)$$

2) равенство $\mathrm{rg}\,A = r > 0$ равносильно выполнению двух условий:
а) в матрице A существует ненулевой минор r-го порядка,
б) любой минор более высокого порядка равен нулю.

Пусть $\mathrm{rg}\,A = r > 0$. Любой ненулевой минор r-го порядка этой матрицы называется *базисным минором*, а строки и столбцы, в которых расположен базисный минор, – *базисными строками* и *столбцами*.

Разумеется, у матрицы может быть не один базисный минор, но все они имеют один и тот же порядок, равный рангу этой матрицы.

Теорема 16.1 (о базисном миноре). *Базисные строки (столбцы) линейно независимы. Любая строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).*

Доказательство. Докажем столбцовый вариант теоремы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathrm{rg}\,A = r > 0$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что базисный минор M_r находится в левом верхнем углу. Тогда базисными столбцами будут первые r столбцов: $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Линейная независимость базисных столбцов доказывается от противного. В самом деле, пусть это не так. Тогда на основании теоремы 14.2 один из базисных столбцов является линейной комбинацией других базисных столбцов. Но тогда и в миноре M_r один из столбцов будет линейной комбинацией других столбцов и $M_r = 0$. Это противоречит тому, что M_r – базисный минор.

Пусть теперь a_k – произвольный столбец матрицы A. Покажем, что он является линейной комбинацией столбцов $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Будем считать, что $k > r$ (в случае $k \leq r$ утверждение очевидно, так как $a_k = 0a_1 + \ldots + 0a_{k-1} + a_k + 0a_{k+1} + \ldots + 0a_r$). Найдем числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ такие, что $a_k = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s a_s$ или, в поэлементной записи,

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s a_{is}, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (16.2)$$

полуплоскость, в которой лежит точка A. *Выпуклым углом между лучами* $[OA)$ и $[OB)$ называется пересечение множеств P_+ и P_-. Обозначение: $\angle AOB$. Итак, $\angle AOB = P_+ \cap P_-$. Величина выпуклого угла $\angle AOB$ называется *углом между лучами* $[OA)$ и $[OB)$. Обозначение: $\widehat{AOB}$. Очевидно, $0 < \widehat{AOB} < \pi$. По определению угол между сонаправленными лучами равен 0, а между противоположно направленными равен π.

§10. Направленные отрезки

Упорядоченная пара точек (A, B) называется *направленным отрезком* с началом в точке A и концом в точке B. Обозначение: $\overrightarrow{AB}$.

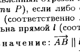


Рис. 1

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ изображается стрелкой, идущей из его начала в его конец (рис. 1). Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называют также *связанным вектором*, а точку A – *точкой* его *приложения*. Если точки A и B различны, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *ненулевым*; если же точки A и B совпадают, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, точнее, $\overrightarrow{AA}$ называется *нулевым* и обозначается символом θ_A.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *параллельным прямой l (плоскости P)*, если либо он нулевой, либо прямая AB совпадает с прямой l (соответственно лежит в плоскости P), либо прямая AB параллельна прямой l (соответственно плоскости P).

Обозначение: $\overrightarrow{AB} \parallel l$, $\overrightarrow{AB} \parallel P$.

Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots, \overrightarrow{A_kB_k}$ называются *коллинеарными* (*компланарными*), если существует прямая (соответственно плоскость), которой параллелен каждый из этих отрезков.

Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка $[AB]$. Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$. Как следует из определения, длина нулевого и только нулевого направленного отрезка равна нулю.

Ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *одинаково направленными* (*сонаправленными*), если лучи $[AB)$ и $[CD)$ имеют одинаковое направление, и *противоположно направленными*, если лучи $[AB)$ и $[CD)$ имеют противоположные направления.

Обозначение: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ соответственно.

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, если середины отрезков $[AD]$ и $[BC]$ совпадают (рис. 2).

Обозначение: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Как следует из определения, нулевой направленный отрезок равен любому другому нулевому и только нулевому направленному отрезку.

Из свойств параллелограмма (рис. 2) следует, что ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, не лежащие на одной прямой, равны тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABDC$ – параллелограмм. Для равных ненулевых отрезков, лежащих на одной прямой, возможен один из четырех вариантов расположения, изображенных на рис. 2.

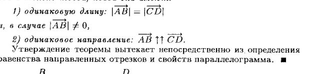


Рис. 2

Теорема 10.1. *Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда они имеют:*

1) одинаковую длину: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

и, в случае $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$,

2) одинаковое направление: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Утверждение теоремы вытекает непосредственно из определения равенства направленных отрезков и свойств параллелограмма. ■

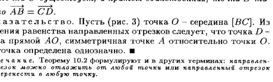


Рис. 3

Теорема 10.2. *Для любого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ и любой точки C существует, и притом единственная, точка D такая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Доказательство. Пусть (рис. 3) точка O – середина $[BC]$. Из определения равенства направленных отрезков следует, что точка D – точка на прямой AO, симметричная точке A относительно точки O. Такая точка определена однозначно. ■

Замечание. Теорему 10.2 формулируют и в других терминах: *направленный отрезок можно отложить от любой точки или направленный отрезок можно перенести в любую точку.*

Теорема 10.3. *Отношение равенства направленных отрезков является отношением эквивалентности на множестве всех направленных отрезков.*

В самом деле, отношение равенства направленных отрезков является бинарным отношением, которое обладает свойствами:

а) рефлексивности (направленный отрезок равен самому себе);

Теорема 16.8. *Ранг матрицы не изменится, если из системы ее строк (столбцов) вычеркнуть или приписать строку (соответственно столбец), которая является линейной комбинацией других строк (соответственно столбцов).*

Доказательство. Рассмотрим вариант теоремы, относящийся к вычеркиванию строки. Прежде чем вычеркивать строку, являющуюся линейной комбинацией других строк, вычтем из нее эту линейную комбинацию. Тогда вычеркиваемая строка станет нулевой, а ранг матрицы согласно теореме 16.7 не изменится. Затем вычеркнем нулевую строку. При этом ранг матрицы останется прежним, так как нулевая строка не влияет на порядок ее ненулевых миноров. Аналогично доказываются другие варианты теоремы. ■

Метод Гаусса вычисления ранга. Теоретическую основу этого метода для решения данной задачи (см. §4) составляют следующие факты:

– ранг верхней (нижней) трапециевидной матрицы равен количеству ненулевых строк (соответственно столбцов);

– элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга (теорема 16.7);

– любая матрица элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к трапециевидной форме (теорема 3.1).

Метод Гаусса вычисления ранга матрицы состоит в приведении этой матрицы элементарными преобразованиями к верхней (нижней) трапециевидной форме и подсчете ее ненулевых строк (столбцов).

Отметим, что метод почти копирует метод Гаусса вычисления определителя, отличие лишь в том, что в данной задаче он реализуется несколько проще, так как никакое элементарное преобразование *не изменяет* ранга матрицы.

Замечание 2. Среди других методов вычисления ранга выделим *метод окаймления миноров.* Минор M_{k+1} $(k+1)$-го порядка называется окаймляющим минор M_k k-го порядка, если M_k получается из M_{k+1} вычеркиванием одной строки и одного столбца. Метод окаймления миноров основан на следующем утверждении (докажите!): *если в матрице A существует ненулевой минор M_r r-го порядка, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то* $\mathrm{rg}\,A = r$. Метод окаймления миноров состоит в поиске такого минора M_r путем перебора. Безусловно, он уступает методу Гаусса из-за большого объема требуемых вычислений, однако в некоторых случаях бывает полезным. Во всяком случае идея окаймления матрицы лежит в основе многих методов вычислительной алгебры.

Эквивалентные матрицы. Две матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называются *эквивалентными*, если существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $A = PBQ$. Обозначение: $A \sim B$.

Теорема 16.9. *Эквивалентность матриц является отношением эквивалентности на множестве матриц $\mathbb{R}^{m \times n}$.*

Доказательство. В самом деле, рефлексивность отношения следует из того, что $A = I_{m \times m} A I_{n \times n}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; симметричность – из того, что если $A = PBQ$, то $B = P^{-1}AQ^{-1}$; транзитивность – из того, что если $A = P_1BQ_1$, $B = P_2CQ_2$, то $A = P_1P_2CQ_2Q_1 = PCQ$, где $P = P_1P_2$, $Q = Q_2Q_1$. ■

Теорема 16.10. *Любая ненулевая матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ранга r эквивалентна матрице $I_r \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вида*

$$I_r = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & & O & \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & & & \\ \hline & & & & 0 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array}\right]$$

(здесь все элементы, кроме первых r диагональных элементов, равных 1, равны 0).

Доказательство. Покажем, что матрица A элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к виду I_r. В самом деле, строчный вариант *основного процесса* (§3) приводит ее к верхней ступенчатой форме. Если к получившейся матрице применить столбцовый вариант основного процесса, то получим диагональную матрицу. Так как элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга, то ровно r первых диагональных элементов этой матрицы отличны от нуля. Поделив каждую из первых r строк на диагональный элемент, получим матрицу I_r. На языке матриц элементарных преобразований это означает, что существуют матрицы элементарных преобразований $Q_1, \ldots, Q_k$ и $P_1, \ldots, P_s$ такие, что $I_r = Q_k \ldots Q_1 A P_1 \ldots P_s$ (теорема 3.2). Положив $Q = Q_k \ldots Q_1$ и $P = P_1 \ldots P_s$, получим, что $I_r = QAP$, где $|Q| \neq 0$, $|P| \neq 0$ в силу невырожденности матриц элементарных преобразований. ■

Теорема 16.11. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.*

Доказательство. Необходимость вытекает из определения и теоремы 16.6. Достаточность следует из теоремы 16.10 и транзитивности отношения эквивалентности. ■

§17. Базис и размерность

Базисом линейного пространства называется упорядоченная линейно независимая система векторов пространства, через которую линейно выражается любой вектор пространства. Согласно этому определению система векторов $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства V образует базис V, если

• $e_1, \ldots, e_n$ линейно независима,

• для любого вектора $x \in V$ существуют числа $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.

Как показано в §15, любой ненулевой вектор является базисом линейного пространства V_1 векторов на прямой, любая пара неколлинеарных векторов – базисом пространства V_2 векторов плоскости, любая тройка некомпланарных векторов – базисом пространства V_3.

построенного на векторах **a** и **b**. Это правило сложения векторов называется *правилом параллелограмма.*

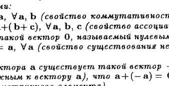


Рис. 2

Теорема 11.1. *Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:*

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *(свойство коммутативности);*

2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *(свойство ассоциативности);*

3) существует такой вектор **0**, *называемый нулевым вектором, что* $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a}$ *(свойство существования нейтрального элемента);*

4) для любого вектора **a** *существует такой вектор* $-\mathbf{a}$ *(называемый противоположным к вектору* **a***), что* $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ *(свойство существования симметричного элемента).*

Доказательство. Коммутативность и ассоциативность сложения в случае неколлинеарных векторов **a**, **b** и **c** проверяются непосредственным построением (рис. 3) векторов левой и правой частей соответствующих равенств. Случай коллинеарности предлагается рассмотреть читателю.

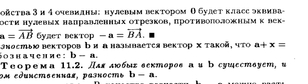


Рис. 3

Свойства 3 и 4 очевидны: нулевым вектором **0** будет класс эквивалентности нулевых направленных отрезков, противоположным к вектору $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ будет вектор $-\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$. ■

Разностью векторов **b** и **a** называется вектор **x** такой, что $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Обозначение: $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Теорема 11.2. *Для любых векторов* **a** *и* **b** *существует, и притом единственная, разность* $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Доказательство. В качестве разности $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ можно взять вектор $\mathbf{b} + (-\mathbf{a})$, так как $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + (-\mathbf{a})) = \mathbf{a} + ((-\mathbf{a}) + \mathbf{b}) =$

$(\mathbf{a} + (-\mathbf{a})) + \mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$. Эта разность единственна, так как если **c** – еще одна разность, то $\mathbf{c} = \mathbf{c} + \mathbf{0} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$. ■

Замечание. Правило параллелограмма сложения неколлинеарных векторов **a** и **b** позволяет построить и разность $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ как другую диагональ параллелограмма (рис. 4).

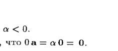


Рис. 4

Умножение вектора на число. *Произведением вектора* **a** *на вещественное число* α называется вектор **b**, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\mathbf{b}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$

и, в случае $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$,

2) $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, если $\alpha > 0$, и $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, если $\alpha < 0$.

Обозначение: $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$. Очевидно, что $0\,\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Теорема 11.3. *Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами: для любых векторов* **a**, **b** *и чисел* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

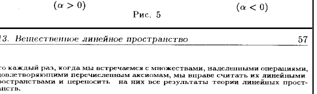
1) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$;

2) $(\alpha\beta)\,\mathbf{a} = \alpha(\beta\,\mathbf{a})$;

3) $(\alpha + \beta)\,\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{a}$ *(свойство дистрибутивности умножения на число относительно сложения чисел);*

4) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\,\mathbf{a} + \alpha\,\mathbf{b}$ *(свойство дистрибутивности умножения на число относительно сложения векторов).*

Доказательство. Свойство 1 очевидно. Свойства 2 и 3 проверяются перебором различных вариантов знаков и абсолютных значений чисел α и β. Свойство 4 вытекает из подобия треугольников (рис. 5). Здесь следует отдельно рассмотреть случай, когда векторы **a** и **b** коллинеарны. ■



$(\alpha > 0)$ $(\alpha < 0)$

Рис. 5

Теорема 17.3. *При сложении векторов их координаты в одном базисе складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

Доказательство. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i$. Тогда из аксиом линейного пространства следует, что $x + y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)e_i$ и $\alpha x = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_ie_i$. Следовательно, $(x + y)_e = x_e + y_e$ и $(\alpha x)_e = \alpha x_e$. ■

Переход к другому базису. Пусть $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – два базиса n-мерного пространства V. Выясним, как меняются координаты вектора при переходе от базиса e к базису f.

Векторы второго базиса, как векторы пространства V, разлагаются по базису e; пусть

$$\begin{aligned} f_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n, \\ f_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n, \\ &\ldots \\ f_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n. \end{aligned} \qquad (17.5)$$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу

$$C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \qquad (17.6)$$

которая называется *матрицей перехода от базиса e к базису f*.

Обозначение: C или $C_{e \to f}$.

Замечание. Соотношения (17.5) в обозначениях (17.3) и (17.6) могут быть записаны компактно в виде

$$f = eC. \qquad (17.7)$$

Теорема 17.4. *Матрица перехода к другому базису не вырождена.*

Доказательство. Пусть $|C| = 0$. Тогда (теорема 16.1, следствие) один из столбцов матрицы C является линейной комбинацией других ее столбцов. В силу свойства линейности координат отсюда следует, что один из векторов $f_1, \ldots, f_n$ линейно выражается через другие векторы этой системы. Это противоречит линейной независимости $f_1, \ldots, f_n$. ■

Теорема 17.5. *Если C – матрица перехода от базиса e к базису f, то C^{-1} – матрица перехода от базиса f к базису e.*

Доказательство. Пусть $f = eC$. Умножив обе части этого равенства на C^{-1}, получим, что $e = fC^{-1}$, откуда в силу (17.7) следует, что C^{-1} – матрица перехода от базиса f к базису e. ■

Теорема 17.6. *Координаты вектора x в базисах e и f связаны между собой соотношением*

$$x_e = Cx_f, \qquad (17.8)$$

где C – матрица перехода от базиса e к базису f.

Доказательство. Из (17.4) и (17.7) имеем, что $x = ex_e$ и $x = fx_f = (eC)x_f = e(Cx_f)$. Отсюда в силу единственности разложения по базису получаем (17.8). ■

§18. Линейное подпространство и линейное многообразие

Линейное подпространство. Непустое подмножество L пространства V называется *линейным подпространством пространства V*, если оно само является линейным пространством относительно законов композиции, действующих в V.

Теорема 18.1. *Непустое подмножество L пространства V является линейным подпространством этого пространства тогда и только тогда, когда имеют место импликации:*

$$\begin{aligned} &a, b \in L &&\Rightarrow \quad a + b \in L; \\ &a \in L, \alpha \in \mathbb{R} &&\Rightarrow \quad \alpha a \in L. \end{aligned} \qquad (18.1)$$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как если L – линейное пространство, то результаты выполнения операций над элементами из L находятся в L.

Достаточность. Соотношения (18.1) говорят о том, что операции сложения и умножения на число являются законами композиции в L. Остается проверить, что они подчиняются всем аксиомам линейного пространства. В действительности же необходимо проверить только аксиомы нуля и противоположного элемента, так как выполнение остальных аксиом очевидно. Возьмем произвольный элемент $a \in L$, тогда $0a = \theta$ и $(-1)a = -a$. Из (18.1) следует, что $\theta \in L$ и $-a \in L$. Итак, L – линейное подпространство пространства V. ■

Свойства (18.1) называют свойствами *замкнутости множества L относительно* указанных *операций.*

Примеры. 1. Каждое линейное пространство обладает двумя подпространствами: нулевым подпространством (состоящим из одного нулевого вектора) и самим пространством. Эти подпространства называются *тривиальными.*

2. Геометрическое пространство V_1 векторов на прямой имеет два тривиальных подпространства. Геометрическое пространство V_2 векторов на плоскости, кроме тривиальных подпространств, имеет бесконечно много нетривиальных: каждое из них является пространством всех векторов, концы которых лежат на прямой, проходящей через начало координат (или если отойти от соглашения об откладывании всех векторов от начала координат, то пространством всех векторов, параллельных некоторой прямой). В геометрическом пространстве V_3 векторов пространства каждая прямая и каждая плоскость, проходящие через начало координат, определяют линейное подпространство.

3. В пространстве многочленов M_n каждое пространство M_k, где $0 \leq k \leq n$, образует линейное подпространство.

Линейное многообразие. Примеры линейных подпространств в геометрических пространствах дают геометрический образ подпространства как прямой или плоскости, проходящей через начало координат. Возникает естественный вопрос, что же будет аналогом других

Глава IV. Введение в теорию линейных пространств

§13. Вещественное линейное пространство

Мы будем рассматривать множества, наделенные двумя законами композиции: внутренним и внешним (§9). Внутренний закон композиции будем называть сложением, а внешний – умножением на вещественное число. Согласно этой терминологии на этих множествах указаны два правила:

• правило, посредством которого любой упорядоченной паре элементов a, b множества ставится в соответствие однозначно определенный элемент $a + b$ из этого же множества, называемый суммой элементов a и b;

• правило, посредством которого любому вещественному числу α и любому элементу a множества ставится в соответствие однозначно определенный элемент αa этого же множества, называемый произведением элемента a на число α.

Непустое множество V называется *вещественным линейным пространством* [1], если на нем заданы два закона композиции:

внутренний закон композиции, подчиненный аксиомам

1) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in V$ (аксиома коммутативности),

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in V$ (аксиома ассоциативности),

3) $\exists\, \theta \in V: a + \theta = a$, $\forall a \in V$,

4) $\forall\, a \in V \ \ \exists\, (-a) \in V$: $a + (-a) = \theta$;

внешний закон композиции, подчиненный аксиомам

5) $1 \cdot a = a$, $\forall a \in V$,

6) $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in V$;

и если оба закона связаны между собой аксиомами

7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in V$ (аксиома дистрибутивности умножения на число относительно сложения чисел),

8) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in V$ (аксиома дистрибутивности умножения на число относительно сложения элементов V).

Линейное пространство называют также *векторным пространством.*

Отметим, что определение линейного пространства не содержит каких-либо конкретных описаний его элементов и операций над ними. Требуется только, чтобы эти операции были определены и подчинялись сформулированным выше восьми аксиомам, называемым *аксиомами линейного пространства*. Это означает,

[1] В гл. XII будут рассматриваться линейные пространства общего вида, когда в операции умножения на число участвуют не только вещественные числа. Забегая вперед, отметим, что все результаты этой главы будут справедливы и в общем случае.

что каждый раз, когда мы встречаемся с множествами, наделенными операциями, удовлетворяющими перечисленным аксиомам, мы вправе считать их линейными пространствами и переносить на них все результаты теории линейных пространств.

Элементы линейного пространства называются *векторами*. Использование этого термина не случайно, геометричность терминологии подчеркивает геометрический характер абстрактных алгебраических понятий, делает их "наглядными" и помогает уяснить, а зачастую и предвидеть не всегда очевидные факты.

Вектор θ называется *нулевым* вектором пространства, а вектор $(-a)$ – *противоположным к вектору a*. Нулевой вектор обозначают также символом **0**.

Разностью векторов b и a линейного пространства V называется вектор $x \in V$ такой, что $a + x = b$. Обозначение: $b - a$.

Примеры. 1. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3. Как следует из §12, множества V_1, V_2, V_3 всех векторов на прямой, на плоскости и в пространстве являются вещественными линейными пространствами относительно введенных в них операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число. Эти пространства будем называть *геометрическими.*

Для изображения геометрических пространств V_1, V_2, V_3 условимся все векторы откладывать от одной фиксированной точки O на прямой (на плоскости и в пространстве соответственно). При таком соглашении каждый свободный вектор будет однозначно определен своим концом. В этом смысле мы будем, говоря о свободном векторе, указывать только его конец. Точку O будем (пока условно) называть началом координат (рис. 1).

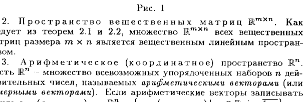


Рис. 1

2. Пространство вещественных матриц $\mathbb{R}^{m \times n}$. Как следует из теорем 2.1 и 2.2, множество $\mathbb{R}^{m \times n}$ всех вещественных матриц размера $m \times n$ является вещественным линейным пространством.

3. Арифметическое (координатное) пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbb{R}^n$ – множество всевозможных упорядоченных наборов n действительных чисел, называемых *арифметическими векторами* (или *n-мерными векторами*). Если арифметические векторы записывать в виде $a = (a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathbb{R}^n = \{a = (a_1, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$.

Два арифметических вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ называются *равными*, если $a_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$.

прямых и плоскостей в произвольном линейном пространстве. Ответим на этот вопрос.

Пусть V – линейное пространство, L – некоторое его подпространство, x_0 – некоторый вектор пространства V. Множество H всевозможных векторов вида $x_0 + x$, где $x \in L$, называется *линейным многообразием* (или *линейным аффинным многообразием*, или *линейным точечным многообразием*) *пространства* V, *полученным сдвигом подпространства* L *на вектор* x_0. Вектор x_0 называется *вектором сдвига*, а подпространство L – *направляющим подпространством* линейного многообразия H.

Обозначение: $H = x_0 + L$. Итак, $x_0 + L = \{x_0 + x | x \in L\}$.

Очевидно, линейное подпространство L является частным случаем линейного многообразия, когда вектор сдвига $x_0 \in L$.

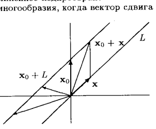


Рис. 1

Пример. Пусть на плоскости V_2 задано некоторое подпространство L, т.е. совокупность всех векторов $\mathbf{x}$, концы которых лежат на прямой, проходящей через начало координат. И пусть $\mathbf{x}_0$ – некоторый фиксированный вектор плоскости (рис. 1). Тогда нетрудно показать, что линейное многообразие $\mathbf{x}_0 + L$ есть множество векторов, концы которых лежат на прямой, полученной из прямой L сдвигом ее на вектор $\mathbf{x}_0$.

Из определения вытекают следующие факты.

1°. *Вектор сдвига x_0 принадлежит линейному многообразию*, так как $x_0 = x_0 + \theta$, $\theta \in L$.

2°. *Разность двух векторов линейного многообразия принадлежит направляющему подпространству*, так как если $z_1 = x_0 + x$, $x \in L$, $z_2 = x_0 + y$, $y \in L$, то $z_1 - z_2 = x - y \in L$.

Теорема 18.2. *Два линейных многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $L_1 = L_2 = L$ и $x_1 - x_2 \in L$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $H_1 = H_2$, тогда $x_1 \in H_2$ и, в силу свойства 2°, $x_1 - x_2 \in L_2$. Покажем, что $L_1 = L_2$. Для произвольного вектора $x \in L_1$ имеем $x_1 + x \in H_1$. Так как $H_1 = H_2$, то существует вектор $y \in L_2$ такой, что $x_1 + x = x_2 + y$. Таким

образом, $x = (x_2 - x_1) + y$, где $x_2 - x_1 \in L_2$, $y \in L_2$. Отсюда следует, что $x \in L_2$ и $L_1 \subset L_2$. Аналогично доказывается, что $L_2 \subset L_1$. Оба вложения говорят о том, что $L_1 = L_2$.

Достаточность. Пусть $L_1 = L_2 = L$ и $x_1 - x_2 \in L$. Тогда для произвольного вектора $z \in H_1$ имеем $z = x_1 + x$, где $x \in L$, или $z = x_2 + (x_1 - x_2) + x$, $x \in L$. Так как $x_1 - x_2 \in L$ и $x \in L$, то $(x_1 - x_2) + x \in L$, следовательно, $z \in H_2$ и $H_1 \subset H_2$. Аналогично получаем, что $H_2 \subset H_1$. Это означает, что $H_1 = H_2$. ■

Следствие 1. Вектором сдвига может быть любой вектор линейного многообразия.

Действительно, если x_1 – произвольный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L$, то $x_1 - x_0 \in L$ и $H = x_1 + L$.

Следствие 2. Линейное многообразие может быть получено сдвигом единственного направляющего подпространства. Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы.

Следствие 2 позволяет переносить некоторые характеристики направляющего подпространства на само линейное многообразие. *Размерностью линейного многообразия* называется размерность его направляющего подпространства. Обозначение: $\dim H$. Линейное многообразие размерности единица называется *прямой в линейном пространстве*, размерности $(n-1)$, где $n = \dim V$, – *гиперплоскостью*, а размерности k, $1 < k < n-1$, – *k-мерной плоскостью*.

Пример. Из определения следует, что прямая на плоскости V_2 и плоскость в пространстве V_3 – гиперплоскости в пространствах V_2 и V_3. Естественно ожидать, что, представляя собой один и тот же объект, они обладают общими свойствами. В этом мы убедимся в последующих главах.

6) произведение ортогональных матриц – ортогональная матрица.

Теорема 24.1. *Матрица $C = (c_{ij})$ является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому тогда и только тогда, когда она ортогональна.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1{}'$, $\mathbf{e}_2{}'$, $\mathbf{e}_3{}'$ – базисы пространства. Из (24.1) следует, что столбцы матрицы перехода C являются координатами векторов $\mathbf{e}_1{}'$, $\mathbf{e}_2{}'$, $\mathbf{e}_3{}'$ в базисе $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Согласно теореме 22.3 отсюда получаем, что $(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j') = \sum_{k=1}^{3} c_{ki}c_{kj}$ тогда и только тогда, когда $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ – ортонормированный базис. Следовательно, условие ортонормированности базиса e' равносильно условию (24.4) ортогональности матрицы C. Аналогично рассматривается случай плоскости или прямой. ■

Преобразование прямоугольной декартовой системы координат на плоскости. Пусть $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{O'; \mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2{}'\}$ – прямоугольные декартовы системы координат на плоскости, т.е. $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ и $e' = (\mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2{}')$ – ортонормированные базисы и матрица перехода $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ортогональна. Согласно (24.4) имеем

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1, \quad c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0, \quad c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1.$$

Из первого равенства следует существование такого φ, что $c_{11} = \cos\varphi$, $c_{21} = \sin\varphi$. Из второго равенства следует, что $c_{12} = k\sin\varphi$, $c_{22} = -k\cos\varphi$. Отсюда и из третьего равенства получим, что $k = \pm 1$.

Итак, ортогональная матрица второго порядка определяется лишь единственным параметром φ, при этом либо

$$C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{либо} \quad C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}. \qquad (24.5)$$

1. Пусть $C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, тогда $|C| = 1$ и

$$\mathbf{e}_1{}' = \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_2{}' = -\sin\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_2.$$

Умножая скалярно обе части этих равенств на $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, получим (рис. 2,*а*), что $(\widehat{\mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_1}) = \varphi$, $(\widehat{\mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $(\widehat{\mathbf{e}_2{}', \mathbf{e}_1}) = \frac{\pi}{2} + \varphi$, $(\widehat{\mathbf{e}_2{}', \mathbf{e}_2}) = \varphi$ (все углы отсчитываются в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$).

Это означает, что базисы e и e' одинаково ориентированы и что система координат $\{O'; \mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2{}'\}$ может быть совмещена с $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ путем переноса начала и поворота на угол φ вокруг начала. При этом формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x = \alpha + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = \beta + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \qquad (24.6)$$

2. Пусть $C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$, тогда $|C| = -1$ и

$$\mathbf{e}_1{}' = \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_2{}' = \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_1 - \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_2.$$

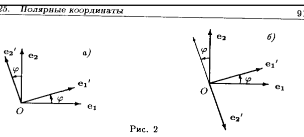


Рис. 2

Поступая аналогично п. 1, получим (рис. 2,*б*), что

$$(\widehat{\mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_1}) = \varphi, \quad (\widehat{\mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2}) = (\widehat{\mathbf{e}_2{}', \mathbf{e}_1}) = \tfrac{\pi}{2} - \varphi, \quad (\widehat{\mathbf{e}_2{}', \mathbf{e}_2}) = \pi - \varphi.$$

В этом случае базисы e и e' противоположно ориентированы и система координат $\{O'; \mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2{}'\}$ не может быть совмещена с $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ путем переноса начала и поворота; после поворота на угол φ нужно выполнить отражение относительно оси $\mathbf{e}_1$ (т.е. изменить направление $\mathbf{e}_2$). При этом формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x = \alpha + x'\cos\varphi + y'\sin\varphi, \\ y = \beta + x'\sin\varphi - y'\cos\varphi. \end{cases}$$

§25. Полярные координаты

Декартовы системы координат – не единственный способ определять положение точки с помощью чисел и тем самым применять числовые расчеты для решения геометрических задач. Для этой цели используются и другие типы координатных систем. Опишем некоторые из них.

Полярные координаты на плоскости. Полярная система координат на плоскости состоит из точки O плоскости и исходящего из нее луча l. Точка O называется *полюсом*, луч l — *полярной осью*. Обозначение: $\{O; l\}$. Задание полярной системы координат позволяет однозначно определить положение любой точки плоскости с помощью двух чисел (рис. 1):

1) расстояния r от точки M до полюса O

и, если $M \neq O$,

2) угла φ между лучом $[OM)$ и полярной осью l (угол отсчитывается от оси l против часовой стрелки).

Число r называется *полярным радиусом* точки M, а угол φ — *полярным углом*. Упорядоченная пара чисел (r, φ) называется *полярными координатами* точки M. Обозначение: $M(r, \varphi)$.

Из определения следует, что:

1) $r \geq 0$ для любой точки M плоскости и $r = 0 \iff M = O$;

Аналогично определяются аффинные системы координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ на плоскости V_2 и $\{O; \mathbf{e}_1\}$ на прямой V_1, а также координаты точки $A(x, y)$ и $A(x)$ соответственно. При этом имеют место очевидные аналоги соотношения (20.1) и обоих замечаний. В дальнейшем все факты будем излагать только в терминах V_3.

Теорема 20.1. *Если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – точки пространства, заданные своими координатами в системе координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, то вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеет координаты $\mathbf{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.*

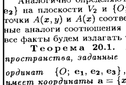


Рис. 1

Доказательство. Действительно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 1) и, следовательно, $\mathbf{a} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. Так как $\mathbf{r}_A = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{r}_B = \{x_2, y_2, z_2\}$, то в силу свойства линейности координат отсюда следует утверждение теоремы. ■

Деление отрезка в данном отношении. Говорят, что точка $M \neq B$ делит отрезок $[AB]$ в отношении λ, если $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ (рис. 2).

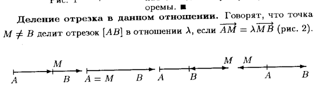


Рис. 2

Обозначение: $(ABM) = \lambda$. Из определения следует, что точка M расположена на прямой AB, при этом (рис. 2):

1) если M – внутренняя точка отрезка $[AB]$, то $\lambda > 0$;

2) если $M = A$, то $\lambda = 0$;

3) если M расположена вне отрезка $[AB]$, то $\lambda < 0$.

Заметим, что других вариантов расположения точки M не может быть и что ни в одном из возможных вариантов λ не равно -1.

Теорема 20.2. *Пусть $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$, $M(\mathbf{r}_3)$ – точки пространства и $(ABM) = \lambda$. Тогда*

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda}. \qquad (20.2)$$

Доказательство. Условие $(ABM) = \lambda$ означает, что $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ или $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)$. Отсюда следует (20.2). ■

Следствие. Соотношение (20.2) в координатной форме имеет следующий вид: для $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $M(x_3, y_3, z_3)$

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \ y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \ z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (20.3)$$

Прямоугольные координаты. Базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, где $n = 1, 2, 3$, называется *ортонормированным*, если векторы базиса

1) имеют единичную длину

и, в случае $n > 1$,

2) попарно перпендикулярны.

Аффинная система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, соответствующая ортонормированному базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, называется *прямоугольной декартовой системой координат.*

§21. Проекции вектора и координаты

Проекции вектора на плоскости. Пусть на плоскости P даны две непараллельные прямые l и L. *Проекцией направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на прямую l параллельно прямой L* называется (рис. 1) направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1, B_1 – проекции точек A и B на прямую l параллельно прямой L. Обозначение: $pr_l^L\overrightarrow{AB}$.

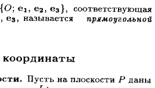


Рис. 1

Теорема 21.1. *Проекции равных направленных отрезков равны.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, покажем, что $pr_l^L\overrightarrow{AB} = pr_l^L\overrightarrow{CD}$. Введем на плоскости систему координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, где O – точка пересечения прямых l и L, $\mathbf{e}_1$ – базис на прямой l, $\mathbf{e}_2$ – базис на прямой L. Пусть точки A, B, C, D имеют координаты $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$. Так как $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то согласно теореме 20.1

$$x_B - x_A = x_D - x_C. \qquad (21.1)$$

Так как точки A_1, B_1, C_1, D_1 имеют координаты $A_1(x_A, 0)$, $B_1(x_B, 0)$, $C_1(x_C, 0)$, $D_1(x_D, 0)$ (§20, замечание 2), то $\mathbf{b} = \overrightarrow{A_1B_1} = \{x_B - x_A, 0\}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{C_1D_1} = \{x_D - x_C, 0\}$. Согласно (21.1) отсюда следует, что $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Это означает, что $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$ порождают один и тот же вектор и поэтому равны. ■

Проекцией вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ на прямую l параллельно прямой L называется вектор, порожденный $pr_l^L\overrightarrow{AB}$. Обозначение: $pr_l^L\mathbf{a}$. Корректность определения вытекает из теоремы 21.1.

Глава VI. Системы линейных алгебраических уравнений

§26. Постановка задачи

Терминология. *Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* называется совокупность соотношений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (26.1)$$

где a_{ij}, b_i $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ – заданные вещественные числа, а $x_1, \dots, x_n$ – неизвестные величины. Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а b_i – *свободными членами.*

Упорядоченная совокупность чисел $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ называется *решением системы*, если при подстановке этих чисел в систему вместо неизвестных $x_1, \dots, x_n$ соответственно каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если не имеет ни одного решения. Система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения.

Исследовать и решить систему – это значит:

• установить, совместна она или несовместна;

• если она совместна, установить, является она определенной или неопределенной, при этом:

– в случае определенной системы найти единственное ее решение;

– в случае неопределенной системы описать множество всех ее решений.

Компактная запись системы. Коэффициенты системы образуют матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, называемую *основной матрицей системы*, свободные члены образуют столбец $b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, называемый *столбцом свободных членов*, а неизвестные – столбец $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, называемый *столбцом неизвестных.* В этих обозначениях система (26.1) может быть записана в виде

$$Ax = b \qquad (26.2)$$

или

$$x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b, \qquad (26.3)$$

где a_i $(i = \overline{1,n})$ – столбцы матрицы A.

В записи (26.3) система уравнений приобретает новый смысл: совместность системы равносильна тому, что столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы A, причем коэффициентами линейной комбинации служат компоненты $x_1, \dots, x_n$ решения.

Эквивалентность систем. Две системы линейных алгебраических уравнений с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

Теорема 26.1. *Умножение обеих частей системы $Ax = b$ слева на невырожденную матрицу приводит ее к эквивалентной системе.*

Доказательство. Пусть $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $|Q| \neq 0$. Рассматриваемые системы имеют вид $Ax = b$ и $QAx = Qb$. Если $c \in \mathbb{R}^n$ – решение первой системы, то $Ac \equiv b$ и, следовательно, $QAc \equiv Qb$, откуда следует, что c – решение второй системы. С другой стороны, если c – решение второй системы, то $QAc \equiv Qb$. Умножив обе части этого тождества слева на Q^{-1}, получаем тождество $Ac \equiv b$, откуда следует, что c – решение первой системы. ■

§27. Системы с квадратной невырожденной матрицей

Прежде чем рассматривать системы общего вида, исследуем простейший класс систем (26.2), когда число уравнений совпадает с числом неизвестных и $|A| \neq 0$.

Теорема 27.1. *Система линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.*

Доказательство. В силу невырожденности матрицы A для нее существует обратная матрица A^{-1}. Непосредственной проверкой легко установить, что вектор

$$x = A^{-1}b \qquad (27.1)$$

является решением системы (26.2). Это решение единственно, так как если y – другое решение системы (26.2), то $Ax \equiv Ay$. Умножив обе части этого тождества слева на A^{-1}, получим, что $x = y$. ■

Правило Крамера. Решение (27.1) может быть записано покомпонентно, если воспользоваться явным выражением (5.3) для обратной матрицы. Действительно, $x = \frac{1}{|A|}\widehat{A}b$ или, в соответствии с (5.1),

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + a_{ni}b_n}{|A|}, \quad i = \overline{1,n}.$$

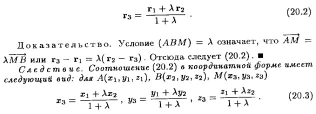


Рис. 1

Теорема 22.1. *Если $\mathbf{a} \neq 0$, то для любого вектора $\mathbf{b}$*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|(pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}). \qquad (22.2)$$

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно для $\mathbf{b} = 0$ и $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \pi/2$. Пусть $\mathbf{b} \neq 0$ и $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \neq \pi/2$. Тогда (рис. 1)

$$|pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}| = |\mathbf{b}| \cdot |\cos\varphi| = \begin{cases} |\mathbf{b}|\cos\varphi, & pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}, \\ -|\mathbf{b}|\cos\varphi, & pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $(pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\cos\varphi$ и, тем самым, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|(pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b})$. Вторая часть соотношения (22.2) вытекает из первой, так как $pr_{\mathbf{a}}\, pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. ■

Теорема 22.2. *Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$*

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$;

2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$;

3) $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

4) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$, *причем*

$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{a} = 0$.

Доказательство. Свойства 1 и 4 очевидны. Докажем свойство 2. Имеем $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|(pr_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})) = \{$согласно теореме 21.3$\} = |\mathbf{c}|(pr_{\mathbf{c}}\mathbf{a}) + |\mathbf{c}|(pr_{\mathbf{c}}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$. Аналогично проверяется свойство 3. ■

Следствие 1. Из свойств 1–3 следует, что скалярное произведение линейно и по второму множителю:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Скалярное произведение в координатах. Свойство линейности скалярного произведения позволяет перемножать линейные комбинации векторов (т.е. находить их скалярное произведение):

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{a}_i, \sum_{j=1}^{m}\beta_j\mathbf{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j). \qquad (22.3)$$

Это, в частности, означает, что скалярное произведение векторов может быть вычислено по их координатам, если известна "таблица умножения" базисных векторов. Возможность подобного вычисления

скалярного произведения векторов позволяет определить по координатам длину вектора и угол между векторами, так как $|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$, $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})/(|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|)$.

Задача вычисления скалярного произведения векторов по их координатам существенно упрощается, если рассматривается ортонормированный базис. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *ортогональными*, если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Из определения следует, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда либо один из них нулевой, либо они перпендикулярны. В терминах ортогональности векторов ортонормированность базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, где $n = 1, 2, 3$, означает, что

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \qquad (22.4)$$

Теорема 22.3. *Скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ равно сумме попарных произведений координат*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\beta_i \qquad (22.5)$$

тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – ортонормированный базис.

Доказательство. Необходимость вытекает из (22.3) и (22.4).

Достаточность. Соотношения (22.4) вытекают из (22.5), если учесть, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеют координаты $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ соответственно. ■

Следствие 2. Если векторы $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\mathbf{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}; \ \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \qquad (22.6)$$

Следствие 3. В прямоугольной декартовой системе координат расстояние $\rho(A, B)$ между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ равно

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Это равенство следует из того, что $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$ и $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

§23. Векторное и смешанное произведения

Ориентация в вещественном линейном пространстве. В §19 при рассмотрении оси, определенной ненулевым вектором e, мы фактически ввели ориентацию на прямой, назвав положительным то направление, которое совпадает

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}c_{r,r+1} - \ldots - a_{rn}c_n \end{cases} \qquad (***)$$

с квадратной невырожденной (согласно (28.2)) матрицей. Эта система имеет (§27) единственное решение $c_1, \dots, c_r$. Очевидно, что совокупность $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ является решением системы $(**)$.

Теорема 28.3. *Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя значения главных неизвестных из системы $(***)$, можно получить все решения системы $(**)$.*

Доказательство. Пусть $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ – произвольное решение системы $(**)$. Покажем, что оно может быть получено указанным путем. Возьмем числа $c_{r+1}, \dots, c_n$ в качестве значений для свободных неизвестных $x_{r+1}, \dots, x_n$ и будем вычислять значения главных неизвестных, решая систему $(***)$. Так как $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ – решение системы $(**)$, то $(c_1, \dots, c_r)$ – решение системы $(***)$. Но система $(***)$ имеет единственное решение, следовательно, в качестве значений главных неизвестных мы можем получить только числа $(c_1, \dots, c_r)$. ■

Итак, мы нашли правило, которое позволяет получить любое решение системы $(**)$, а следовательно, и произвольной системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема 28.4. *Система алгебраических уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = n$.*

Доказательство теоремы фактически содержится в описанном выше правиле для получения решения системы. Действительно, если $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = n$, то, как указано выше, система имеет единственное решение. Если же $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B < n$, то среди неизвестных будет хотя бы одно свободное неизвестное. Придавая ему произвольные значения, получим бесконечно много решений системы. ■

Общее решение системы. Как указывалось в §26, решить систему – значит описать множество всех ее решений. В случае определенной системы для этого достаточно найти то единственное решение, которым она обладает. В случае же неопределенной системы необходимо найти способ, позволяющий описать бесконечное множество ее решений. Один из таких способов состоит в следующем.

Решим систему (28.3) относительно главных неизвестных:

$$\begin{matrix} x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n), \end{matrix} \qquad (28.4)$$

где $f_1, \dots, f_r$ – некоторые однозначно (в силу теоремы 27.1) определяемые из (28.3) функции.

Соотношения (28.4) при произвольных $x_{r+1}, \dots, x_n$ описывают множество всех решений системы и называются *общим решением системы*.

стемы. В отличие от общего, конкретное решение $x = (c_1, \dots, c_n)^T$, где c_i, $i = \overline{1,n}$, – известные числа, называется *частным решением.*

Однородные системы. Система линейных алгебраических уравнений с нулевой правой частью называется *однородной.*

Все результаты общей теории справедливы и для этого частного случая, однако здесь имеет место некоторая специфика, на которой мы остановимся подробнее. Из теоремы Кронекера–Капелли следует, что однородная система

$$Ax = 0 \qquad (28.5)$$

всегда совместна, так как ранг расширенной матрицы $[A|0]$, очевидно, равен рангу матрицы A. Впрочем, это видно и непосредственно: однородная система заведомо имеет решение $(0, \dots, 0)^T$, называемое *тривиальным.* Согласно общей теории для однородных систем имеют место следующие теоремы.

Теорема 28.5. *Однородная система (28.5) с n неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg} A < n$.*

Утверждение теоремы следует из теоремы 28.4, так как наличие нетривиального решения для однородной системы равносильно ее неопределенности. ■

Теорема 28.6. *Однородная система (28.5) с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.*

§29. Метод Гаусса исследования и решения систем

В соответствии с общими принципами метода Гаусса решения матричных задач (§4) укажем тип простейших систем линейных уравнений, тип эквивалентных преобразований системы, а также покажем, что произвольная система линейных алгебраических уравнений указанными преобразованиями приводится к указанному типу.

Системы с трапециевидной матрицей. Пусть система

$$Ax = b \qquad (29.1)$$

– система с верхней трапециевидной матрицей A. Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \ldots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m \end{array}\right], \qquad (29.2)$$

а) $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = S_{\mathbf{ab}}$, где $S_{\mathbf{ab}}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

б) вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, определяемой векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Теорема 23.3. *Векторное произведение антикоммутативно, т.е.* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, тогда $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$, $[\mathbf{b}, \mathbf{a}] \neq 0$, при этом $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |[\mathbf{b}, \mathbf{a}]| = S_{\mathbf{ab}}$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ перпендикулярны плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Значит, либо $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$, либо $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$. Но вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{a}] \neq [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, так как тройка векторов $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ – правая (по определению векторного произведения) и, следовательно, тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ – левая (см. замечание 1). ■

Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{c}$. Обозначение: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Итак, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$.

Теорема 23.4 (критерий компланарности). *Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны. Будем считать, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны и $\mathbf{c} \neq 0$ (в каждом из этих случаев, очевидно, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$). Тогда $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ параллельны плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, причем $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \perp \pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Следовательно, $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = 0$.

Достаточность. Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. Тогда либо $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = 0$, либо $|\mathbf{c}| = 0$, либо $\cos\varphi = 0$, где φ – угол между векторами $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $\mathbf{c}$. Это означает, что либо $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, либо $\mathbf{c} = 0$, либо $\mathbf{c}$ параллелен плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Во всех этих случаях $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. ■

Теорема 23.5. *Смешанное произведение некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно по абсолютной величине объему V параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Причем*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ – правая тройка;} \\ -V, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ – левая тройка.} \end{cases}$$

Доказательство. Из некомпланарности векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ следует, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны и $\mathbf{c} \neq 0$.

Отложим векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ от одной точки O (рис. 3), получим параллелепипед, ребрами которого являются эти векторы. Обозначим через h высоту параллелепипеда, опущенную из конца вектора $\mathbf{c}$. Тогда $V = S_{\mathbf{ab}}h$. Отсюда и из замечания 2 следует, что

$$V = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| \cdot |\mathbf{c}| \cdot |\cos\varphi| = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|. \qquad (23.1)$$

Знак $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ определяется только знаком $\cos\varphi$, но $\cos\varphi > 0$ тогда и только тогда, когда векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $\mathbf{c}$ направлены в одну сторону от плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. тогда и только тогда, когда тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – правая. В силу (23.1) отсюда следует утверждение теоремы. ■

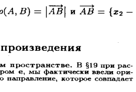


Рис. 3

Теорема 23.6. *Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$*

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]). \qquad (23.2)$$

Доказательство. Утверждение очевидно для компланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (в силу теоремы 23.4). Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – не компланарны. Тогда тройки $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ одинаково ориентированы (см. замечание 1). Так как $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})$, то из теоремы 23.5 следует (23.2). ■

Следствие 1. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ &= -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}). \end{aligned} \qquad (23.3)$$

Следствие 2. Смешанное произведение линейно по каждому из сомножителей. Это утверждение вытекает из (23.3) и линейности скалярного произведения. ■

Теорема 23.7. *Векторное произведение линейно по каждому из сомножителей.*

Доказательство. В силу теоремы 23.3 достаточно показать, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ имеют место равенства $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Пусть $\mathbf{d} = [\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Тогда $(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$. Из линейности смешанного произведения следует, что $(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = 0$. Это доказывает первое из требуемых равенств. Второе равенство доказывается аналогично. ■

Векторное и смешанное произведения в прямоугольных координатах. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – ортонормированный базис пространства и пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – правая тройка.

1. Найдем координаты векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, если векторы $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ заданы своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Согласно теоремам 23.2 и 23.7 имеем $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3] = a_1b_2[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] +$

метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений по объему вычислений равносилен вычислению одного определителя (см. §27, замечание).

Замечание 2. В основе метода Гаусса вычисления определителя, вычисления ранга матрицы и решения системы линейных алгебраических уравнений лежит один и тот же алгоритм – основной процесс приведения матрицы к ступенчатой форме. Однако, как отмечалось в §4, 16, 29, реализация этого алгоритма для каждой из этих задач имеет свою специфику. Наиболее "свободно" он реализуется для задачи вычисления ранга матрицы, так как любые элементарные преобразования и строк, и столбцов матрицы не изменяют ее ранга. В задаче вычисления определителя по-прежнему допускаются преобразования как строк, так и столбцов, но уже необходимо следить за изменением определителя, если в преобразованиях участвовали перестановки строк (или столбцов) или умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$. Аккуратнее следует относиться к задаче решения систем уравнений, где допускаются преобразования *только строк расширенной матрицы и перестановки столбцов только основной матрицы.*

§30. Геометрические свойства решений системы

Рассмотрим свойства решений системы линейных уравнений с точки зрения теории линейного пространства.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \qquad (30.1)$$

с матрицей $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Каждое решение этой системы можно рассматривать как вектор арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Совокупность всех решений системы (30.1) образует некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Выясним, какими свойствами оно обладает.

Линейное подпространство решений однородной системы.

Теорема 30.1. *Множество всех решений однородной системы $Ax = 0$ с n неизвестными является линейным подпространством арифметического пространства $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Обозначим $L = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$. Легко проверить, что если $x \in L$, $y \in L$, то $x + y \in L$, и, кроме того, если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha x \in L$. В силу теоремы 18.1 отсюда следует, что L – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. ■

Эта теорема позволяет "нарисовать" множество решений однородной системы, так как геометрическим образом линейного подпространства являются (§18) прямая и плоскость, проходящие через начало координат.

Произвольный базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений.* Понятно, что фундаментальная система решений существует лишь в том случае, когда однородная система уравнений имеет нетривиальное решение. При этом система уравнений может обладать многими фундаментальными системами решений. Однако все эти системы состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых решений однородной системы. Определим это число.

Теорема 30.2. *Размерность пространства решений однородной системы $Ax = 0$ с n неизвестными равна $n - r$, где $r = \operatorname{rg} A$.*

Доказательство. Построим фундаментальную систему решений. Для этого воспользуемся аппаратом свободных неизвестных. Пусть $x_1, \dots, x_r$ – главные неизвестные. Придадим свободным неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_n$ следующие $n - r$ наборов решений: $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, …, $(0, 0, \dots, 1)$. Для каждого из этих наборов найдем соответствующие значения главных неизвестных. Тем самым найдем $n - r$ решений системы:

$$\begin{matrix} e_1 & = & (c_{11}, & c_{12}, & \dots, & c_{1r}, & 1, 0, \dots, 0)^T, \\ e_2 & = & (c_{21}, & c_{22}, & \dots, & c_{2r}, & 0, 1, \dots, 0)^T, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{n-r} & = & (c_{n-r,1}, & c_{n-r,2}, & \dots, & c_{n-r,r}, & 0, 0, \dots, 1)^T. \end{matrix} \qquad (30.2)$$

Решения $e_1, \dots, e_{n-r}$ обладают следующими свойствами.

1. Решения $e_1, \dots, e_{n-r}$ линейно независимы, так как матрица

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1r} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2r} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-r,1} & c_{n-r,2} & \ldots & c_{n-r,r} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right]$$

имеет ранг, равный $n - r$ (ибо содержит минор $(n-r)$-го порядка, отличный от нуля), а ранг матрицы согласно теореме 16.3 равен максимальному числу линейно независимых строк.

2. Любое решение $x = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)^T$ является линейной комбинацией $e_1, \dots, e_{n-r}$, и, более того,

$$x = x_{r+1}e_1 + \ldots + x_ne_{n-r}. \qquad (30.3)$$

Действительно, обозначим $y = x - x_{r+1}e_1 - \ldots - x_ne_{n-r}$. Пусть $y = (y_1, \dots, y_n)^T$. Очевидно, что y – решение системы. Найдем его, пользуясь общей теорией решения систем: придадим свободным неизвестным значения $y_{r+1}, \dots, y_n$. Пользуясь соотношением (30.2), легко показать, что $y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$. Следовательно, укороченная система будет однородной системой, имеющей единственное и, очевидно, тривиальное решение $y_1 = \ldots = y_r = 0$. Таким образом, $y = 0$. Отсюда вытекает (30.3). Из свойств 1 и 2 следует, что $e_1, \dots, e_{n-r}$ – фундаментальная система решений. ■

Построенная фундаментальная система решений называется *нормальной фундаментальной системой решений.* Общий принцип построения фундаментальной системы решений следует из теоремы 30.2: так как размерность пространства решений однородной системы равна $n - r$, то для построения фундаментальной системы решений достаточно найти любые $n - r$ линейно независимых решений (§ 17, утверждение 1). Для этого достаточно свободным неизвестным придать $n - r$ линейно независимых наборов значений, т.е. наборов вида

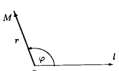


Рис. 1

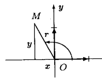


Рис. 2

2) $0 \le \varphi < 2\pi$ для любой точки плоскости, кроме полюса, и для полюса угол φ не определен;

3) любая точка плоскости, отличная от полюса, имеет полярные координаты, при этом две точки плоскости совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их полярные координаты.

С каждой полярной системой координат связана некоторая прямоугольная декартова система координат. В этой системе (рис. 2) начало совпадает с полюсом, положительная полуось абсцисс – с полярной осью, положительная полуось ординат получается вращением полярной оси на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Полученную таким образом систему координат Oxy называют ***системой координат, определенной полярной системой координат*** $\{O; l\}$. Очевидно, что такое соответствие между полярными и прямоугольными системами координат биективно.

Как легко видеть из рис. 2, прямоугольные координаты (x, y) точки M и ее полярные координаты (r, φ) связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{25.1}$$

Полярные координаты в пространстве. Обобщением полярной системы координат в пространстве являются цилиндрические и сферические системы координат.

Пусть в пространстве задана плоскость π и перпендикулярная к ней ось Oz. Пусть O – точка пересечения оси Oz и плоскости π.

И та и другая система координат состоят из полярной системы координат $\{O; l\}$ плоскости π и оси Oz. Обозначение: $\{O; l; z\}$. Точка O называется ***полюсом***, ось l – ***полярной осью***, ось Oz – ***зенитной осью***.

Цилиндрическими координатами точки M, не лежащей на зенитной оси, называются упорядоченная тройка чисел (r, φ, z), где (r, φ) – полярные координаты ортогональной проекции P точки M на плоскость π, z – координата на зенитной оси ортогональной проекции Q точки M на зенитную ось (рис. 3). Для точек зенитной оси $r = 0$ и φ не определен.

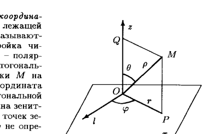


Рис. 3

Сферическими координатами точки M, не лежащей на зенитной оси, называется (рис. 3) упорядоченная тройка чисел (ρ, φ, θ), где ρ – расстояние от точки M до полюса O, θ – угол между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительной полуосью Oz (отсчитываемый от $\overrightarrow{OM}$ против часовой стрелки, если смотреть из полярной оси), φ – полярный угол точки P. При этом φ называется долготой точки M, θ – широтой, ρ – радиусом. Долгота не определена для всех точек зенитной оси, широта не определена для полюса.

Глава V. Векторная алгебра

Рассмотрим линейные пространства V_1, V_2, V_3 векторов на прямой, на плоскости и в пространстве. В §15, 17 было доказано, что:

- $\dim V_1 = 1$, а любой ненулевой вектор $\mathbf{e}_1$ является базисом V_1,
- $\dim V_2 = 2$, а любая пара неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ является базисом V_2,
- $\dim V_3 = 3$, а любая тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ является базисом V_3.

При доказательстве теорем §15 практически показано, как находятся координаты векторов в этих пространствах. Вернемся к этому вопросу.

§19. Координаты вектора

1. Пусть $\mathbf{e}_1$ – базис V_1 и $\mathbf{a}$ – произвольный вектор из V_1. Отложив эти векторы от одной точки O прямой V_1 (§15, рис. 2,*а*), так что $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OE}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA_1}$, получим, что $\mathbf{a} = x\,\mathbf{e}_1$, где

$$x = \begin{cases} |\overrightarrow{OA_1}|/|\overrightarrow{OE_1}|, & \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{e}_1, \\ -|\overrightarrow{OA_1}|/|\overrightarrow{OE_2}|, & \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{e}_1. \end{cases} \tag{19.1}$$

Введем на прямой V_1 направление: пусть положительное направление на прямой совпадает с направлением базисного вектора $\mathbf{e}_1$. Тогда согласно (19.1) и (10.1) получим

$$x = \frac{(\overrightarrow{OA_1})}{|\mathbf{e}_1|} = \frac{(\mathbf{a})}{|\mathbf{e}_1|}. \tag{19.2}$$

Ось, положительное направление которой совпадает с направлением вектора $\mathbf{e}$, будем называть ***осью, определенной вектором*** $\mathbf{e}$.

2. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – базис V_2 и $\mathbf{a}$ – произвольный вектор из V_2. Отложив эти векторы от одной точки O плоскости V_2 (§15, рис. 2,*б*), так что $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, и введя направления на прямых OE_1 и OE_2, совпадающие с направлениями базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, получим в соответствии с (19.2), что $\mathbf{a} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$,

$$x = \frac{(\overrightarrow{OA_1})}{|\mathbf{e}_1|}, \quad y = \frac{(\overrightarrow{OA_2})}{|\mathbf{e}_2|}, \tag{19.3}$$

где A_1, A_2 – проекции точки A на прямые OE_1 и OE_2 параллельно соответственно прямым OE_2 и OE_1.

3. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – базис V_3 и $\mathbf{a}$ – произвольный вектор из V_3. Поступая аналогично (§15, рис. 2,*в*), получим $\mathbf{a} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$,

$$x = \frac{(\overrightarrow{OA_1})}{|\mathbf{e}_1|}, \quad y = \frac{(\overrightarrow{OA_2})}{|\mathbf{e}_2|}, \quad z = \frac{(\overrightarrow{OA_3})}{|\mathbf{e}_3|}, \tag{19.4}$$

где A_1, A_2, A_3 – проекции точки A на прямые OE_1, OE_2 и OE_3, параллельные соответственно плоскостям OE_2E_3, OE_1E_3 и OE_1E_2.

§20. Координаты точки

Аффинная система координат. Пусть в пространстве V_3 (на плоскости V_2 или на прямой V_1) зафиксирована некоторая точка O, называемая ***полюсом***. Для любой точки A вектор $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$ называется ***радиус-вектором точки A относительно полюса O***. Задание точки ее радиус-вектором определяет, очевидно, биективное отображение. Тот факт, что точка A имеет радиус-вектор $\mathbf{r}$, обозначают символом $A(\mathbf{r})$.

Если в пространстве V_3 зафиксированы точка O и базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то говорят, что в пространстве задана ***аффинная система координат*** (или ***общая декартова система координат***) $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Точка O называется ***началом координат***; оси, проходящие через начало координат и определенные векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, называются ***осями координат*** и обозначаются Ox (ось абсцисс), Oy (ось ординат), Oz (ось аппликат) соответственно. Плоскость, определяемая осями координат Ox и Oy (Ox и Oz, Oy и Oz), называется ***координатной плоскостью*** Oxy (Oxz, Oyz соответственно). В этой терминологии аффинная система координат обозначается также символом $Oxyz$.

Координатами точки A в аффинной системе координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ называются координаты радиус-вектора $\mathbf{r}_A$ этой точки в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Тот факт, что точка A имеет координаты x, y, z, обозначают символом $A(x, y, z)$. Итак,

$$\mathbf{r}_A = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3 \iff A(x, y, z). \tag{20.1}$$

Замечание 1. Из определения следует, что любая точка A пространства в заданной системе координат имеет координаты, причем точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ совпадают тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

Замечание 2. Координаты точки $A(x, y, z)$ определяются соотношениями (19.4). При этом, как легко видеть, проекции A_1, A_2, A_3 точки A имеют координаты $A_1(x, 0, 0)$, $A_2(0, y, 0)$, $A_3(0, 0, z)$.

Эти соотношения в свете свойств определителя означают, что

$$x_i = |A_i|/|A|, \quad i = \overline{1, n}, \tag{27.2}$$

где A_i получается из матрицы A заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы (27.2) называются ***правилом Крамера***.

Замечание. Правило Крамера дает решение системы в явном виде и в некотором смысле носит алгоритмический характер. Однако правило Крамера полезно лишь в теоретических исследованиях и противопоказано для практического использования в приложениях. В самом деле, для решения систем n-го порядка по правилу Крамера требуется вычислить $(n+1)$ определителей n-го порядка, тогда как большинство современных методов решения систем по объему вычислений равносильны вычислению одного определителя. В § 29 мы приведем описание одного из таких методов – метода Гаусса.

Продолжим теоретическое исследование систем, так как вопрос о решении систем с прямоугольной матрицей или квадратной, но вырожденной матрицей остается открытым.

§28. Системы общего вида

Совместность системы. Пусть теперь

$$Ax = b \tag{28.1}$$

– система общего вида и $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Исследование системы следует начать с вопроса о ее совместности. Для этой цели составим матрицу B, приписав к матрице A столбец свободных членов:

$$B = [A|b].$$

Матрица B называется ***расширенной матрицей*** системы (28.1).

Теорема 28.1 (теорема Кронекера–Капелли). *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система (28.1) совместна. Тогда из (26.3) следует, что существуют числа $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ такие, что $b = x_1a_1 + \ldots + x_na_n$. Следовательно, столбец b является линейной комбинацией столбцов $a_1, \ldots, a_n$ матрицы A. Из теоремы 16.8 следует, что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

Достаточность. Пусть $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$. Возьмем в матрице A какой-нибудь базисный минор. Так как $\operatorname{rg} B = r$, то он же будет базисным минором и матрицы B. Тогда согласно теореме 16.1 о базисном миноре последний столбец матрицы B будет линейной комбинацией базисных столбцов, т.е. столбцов матрицы A. Следовательно, столбец свободных членов системы является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Это означает совместность системы. ■

Схема исследования совместной системы. Теорема Кронекера–Капелли устанавливает совместность системы. Перейдем к исследованию совместной системы. Итак, пусть система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r + a_{m,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{$*$}$$

совместна и $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что базисный минор матрицы A находится в левом верхнем углу, так что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \ne 0. \tag{28.2}$$

Рассмотрим укороченную систему из первых r уравнений системы $(*)$, т.е. из уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{$**$}$$

Теорема 28.2. *Укороченная система эквивалентна исходной системе:* $(*) \sim (**)$.

Доказательство. Обе системы содержат одинаковое число неизвестных. Очевидно, что любое решение системы $(*)$ является решением системы $(**)$. Покажем, что верно и обратное. Действительно, в расширенной матрице B системы $(*)$ первые r строк являются базисными. Следовательно, все остальные строки согласно теореме о базисном миноре будут линейными комбинациями этих строк. Это означает, что каждое уравнение системы $(*)$, начиная с $(r+1)$-го, будет линейной комбинацией (т.е. следствием) первых r уравнений этой системы. Отсюда вытекает, что каждое решение первых r уравнений системы $(*)$ обращает в тождества все последующие уравнения этой системы. ■

Итак, задача исследования системы $(*)$ упрощена, теперь достаточно изучить укороченную систему $(**)$. Перейдем к этой задаче.

Если $r = n$, то система $(**)$ имеет единственное решение как система с квадратной невырожденной матрицей (§27).

Пусть $r < n$. Неизвестные $x_1, \ldots, x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор, назовем ***главными***, а остальные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – ***свободными***.

Запишем систему $(**)$ в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r,r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{28.3}$$

Придав свободным неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ произвольные значения $c_{r+1}, \ldots, c_n$, получим систему уравнений относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_r$:

Теорема 21.2. *Проекция вектора на прямую l параллельно прямой L обладает свойством линейности:*

1) $pr_l^L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = pr_l^L\,\mathbf{a} + pr_l^L\,\mathbf{b}$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$,

2) $pr_l^L(\alpha\,\mathbf{a}) = \alpha \cdot pr_l^L\,\mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, рассмотренном выше, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ имеют координаты $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$. Тогда $pr_l^L\,\mathbf{a} = \{a_1, 0\}$, $pr_l^L\,\mathbf{b} = \{b_1, 0\}$ и в силу линейности координат $pr_l^L\,\mathbf{a} + pr_l^L\,\mathbf{b} = \{a_1 + b_1, 0\}$. С другой стороны, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}$ и $pr_l^L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \{a_1 + b_1, 0\}$. Следовательно, $pr_l^L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = pr_l^L\,\mathbf{a} + pr_l^L\,\mathbf{b}$. Аналогично доказывается второе условие линейности. ■

Замечание 1. Формулы (19.3) для координат вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ плоскости V_2 могут быть записаны в терминах проекций вектора на ось в виде

$$x = \frac{(pr_x\,\mathbf{a})}{|\mathbf{e}_1|}, \qquad y = \frac{(pr_y\,\mathbf{a})}{|\mathbf{e}_2|}, \tag{21.2}$$

где $pr_x\,\mathbf{a}$ и $pr_y\,\mathbf{a}$ – проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси, определенные векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно (т.е. оси координат Ox и Oy), параллельно другой оси (т.е. оси Oy и Ox соответственно).

Проекции вектора в пространстве. Пусть в пространстве заданы плоскость π и непараллельная ей прямая l. ***Проекцией направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на прямую l (на плоскость π) параллельно плоскости π*** (соответственно ***прямой l***) называется (рис. 2) направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ ($\overrightarrow{A_2B_2}$), где A_1 и B_1 (A_2 и B_2) – проекции точек A и B на прямую l (плоскость π) параллельно плоскости π (прямой l). Обозначение: $pr_l^\pi \overrightarrow{AB}$, $pr_\pi^l \overrightarrow{AB}$.

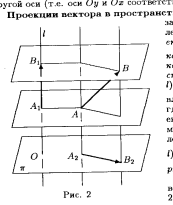


Рис. 2

Для обеих проекций справедливо утверждение теоремы 21.1: ***проекции равных направленных отрезков равны***. Доказательство утверждения для проекций в пространстве отличается от доказательства теоремы 21.1 только тем, что система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ состоит из точки O пересечения прямой l с плоскостью π, базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ плоскости π и базиса $\mathbf{e}_3$ прямой l.

Проекцией вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ на прямую l (плоскость π) параллельно плоскости π (прямой l) называется вектор, порожденный $pr_l^\pi \overrightarrow{AB}$ ($pr_\pi^l \overrightarrow{AB}$). Обозначение: $pr_l^\pi\,\mathbf{a}$, $pr_\pi^l\,\mathbf{a}$. *Обе проекции вектора обладают свойством линейности.* Доказательство этого факта повторяет доказательство теоремы 21.2 с той лишь разницей, что рассматривается система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, упомянутая выше.

Замечание 2. Формулы (19.4) для координат вектора $\mathbf{a} \in V_3$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ могут быть записаны в терминах проекций вектора на ось в виде

$$x = \frac{(pr_x\,\mathbf{a})}{|\mathbf{e}_1|}, \qquad y = \frac{(pr_y\,\mathbf{a})}{|\mathbf{e}_2|}, \qquad z = \frac{(pr_z\,\mathbf{a})}{|\mathbf{e}_3|}, \tag{21.3}$$

где $pr_x\,\mathbf{a}$, $pr_y\,\mathbf{a}$, $pr_z\,\mathbf{a}$ – проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси, определенные базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (т.е. оси координат Ox, Oy, Oz), параллельно координатным плоскостям Oyz, Oxz, Oxy соответственно.

Теорема 21.3. *На плоскости (в пространстве) величина проекции вектора на ось параллельно прямой (соответственно плоскости) обладает свойством линейности.*

Утверждение теоремы следует из того, что величины рассматриваемых проекций пропорциональны координатам (согласно (21.2) и (21.3)), которые обладают свойством линейности (теорема 17.3). ■

Ортогональные проекции. Мы определили три различные проекции вектора. Во всех трех случаях, если $l \perp L$ или $l \perp \pi$, проекции вектора называются ***ортогональными проекциями***.

§22. Скалярное произведение

Определение и основные факты. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – ненулевые векторы. Отложим их от одной точки O. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. ***Углом между векторами*** $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется наименьший угол между лучами $[OA)$ и $[OB)$. Обозначение: $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$. Корректность определения очевидна. Из определения следует, что $0 \le (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \le \pi$.

Скалярным произведением ненулевых ***векторов*** $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ нулевой, то скалярное произведение этих векторов по определению считается равным нулю. Обозначение: $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Итак, для ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \tag{22.1}$$

Обозначим через $pr_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на ось, определенную вектором $\mathbf{a} \ne \mathbf{0}$ (рис. 1).

где $a_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1, r}$.

Мы не случайно выбрали системы с верхней трапециевидной матрицей. Для таких систем чрезвычайно просто устанавливается совместность и достаточно просто находится решение.

Теорема 29.1. *Система* (29.1) *с верхней трапециевидной матрицей совместна тогда и только тогда, когда $b_k = 0$ при $k > r$.*

Доказательство. Действительно, ранг трапециевидной матрицы A равен числу ненулевых строк, так как минор r-го порядка, расположенный в левом верхнем углу, отличен от нуля, а все миноры более высокого порядка содержат нулевые строки и поэтому равны нулю. Ранг расширенной матрицы (29.2) равен r тогда и только тогда, когда $b_k = 0$, $k = \overline{r+1, n}$, так как наличие хотя бы одного ненулевого элемента b_i, где $r < i \le m$, означает наличие ненулевого минора $(r+1)$-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2r} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & b_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_i \end{vmatrix}.$$

Отсюда на основании теоремы Кронекера–Капелли следует утверждение теоремы. ■

Итак, совместность системы с верхней трапециевидной матрицей устанавливается чисто "визуально".

Пусть теперь система (29.1) совместна. Реализация всех пунктов общей теории исследования и решения совместной системы (§28) для системы (29.1) также проста.

1°. В качестве базисного минора матрицы A всегда можно взять минор, расположенный в левом верхнем углу.

2°. Укороченная система состоит из первых r уравнений.

3°. Если $r = n$, то система (29.1) станет системой с треугольной матрицей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + \ldots + a_{1r}x_r = b_1, \\ \qquad\quad a_{22} + \ldots + a_{2r}x_r = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{rr}x_r = b_r, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение (§27); найти его не представляет труда: решая последовательно уравнения системы снизу вверх, мы каждый раз будем иметь дело с уравнением, содержащим только одно неизвестное.

4°. Если $r < n$, то неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ будут свободными и система относительно главных неизвестных будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{29.3}$$

Общее и частное решения исходной системы находятся из системы (29.3) с треугольной матрицей.

Элементарные преобразования системы уравнений. ***Элементарными преобразованиями системы уравнений*** называются преобразования следующих типов:

1) перестановка местами двух уравнений системы;

2) умножение какого-либо уравнения системы на число $\alpha \ne 0$;

3) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на любое число β.

Теорема 29.2. *Элементарные преобразования системы линейных алгебраических уравнений приводят ее к эквивалентной системе.*

Доказательство. Элементарные преобразования системы уравнений означают элементарные преобразования строк расширенной матрицы B, которые, как известно (§3), равносильны умножению матрицы B слева на матрицы элементарных преобразований. Это, в свою очередь, согласно трактовке (2.3) операции умножения матриц равносильно умножению слева обеих частей системы уравнений на невырожденные матрицы элементарных преобразований, что приводит к эквивалентной системе (теорема 26.1). ■

Замечание 1. Рассматриваемые в теореме преобразования относятся *только к строкам* расширенной матрицы. Очевидно, что элементарные преобразования столбцов расширенной матрицы, вообще говоря, лишены смысла. Однако можно рассматривать элементарные преобразования столбцов основной матрицы A, в частности перестановки ее столбцов, которые означают перенумерацию неизвестных системы.

Приведение системы общего вида к системе с верхней трапециевидной матрицей. Как следует из теоремы 3.1 (и замечания 1 к ней), матрица A системы уравнений (28.1) общего вида элементарными преобразованиями строк и перестановками столбцов приводится к верхней трапециевидной форме (1.3). Если используемые при этом элементарные преобразования строк матрицы A применить к строкам всей расширенной матрицы B, то на основании теоремы 29.2 (и замечания к ней) мы придем к системе с верхней трапециевидной матрицей, решения которой отличаются от решений исходной системы только нумерацией неизвестных. *Метод Гаусса* исследования и решения системы уравнений состоит в приведении ее к системе с верхней трапециевидной матрицей с последующим исследованием и решением получившейся системы. При этом, если в процессе преобразования использовались перестановки столбцов основной матрицы A, то в полученных решениях необходимо восстановить исходную нумерацию неизвестных.

Процесс приведения системы к системе с трапециевидной матрицей называется ***прямым ходом*** метода Гаусса, а процесс решения системы с треугольной матрицей – ***обратным ходом***.

По объему вычислений обратный ход оказывается несущественным в методе Гаусса, так как он требует выполнения $O(n^2)$ операций умножения, тогда как для прямого хода требуется выполнить $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ умножений (§4). Таким образом,

с направлением вектора $\mathbf{e}$. Прежде чем вводить определение ориентации, общее для прямой, плоскости и пространства, снова обратимся к прямой. Каждый ненулевой вектор $\mathbf{e}$ прямой образует базис, и переход от одного базиса к другому осуществляется умножением этого вектора на ненулевое число. Так как это число либо положительно, либо отрицательно, то все базисы на прямой разбиваются ровно на два класса: базисные векторы одного класса имеют одинаковое направление, а любые два базисных вектора разных классов имеют противоположное направление. Тот факт, что базисные векторы относятся к одному классу, на алгебраическом языке означает, что они отличаются *положительным множителем*. Именно этим мы и воспользуемся для определения ориентации.

Два базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ линейного пространства V называются ***одинаково ориентированными***, если матрица перехода $C_{e\to e'}$ имеет положительный определитель, и ***противоположно ориентированными*** – в противном случае.

Замечание 1. Из определения и из свойств определителя следует, что два базиса, получающиеся друг из друга

– перестановкой двух их векторов или

– умножением какого-либо вектора на отрицательное число,

противоположно ориентированы.

Теорема 23.1. *Отношение одинаковой ориентированности является отношением эквивалентности на множестве всех базисов пространства V.*

Доказательство. Действительно, рефлексивность отношения следует из того, что переход от базиса к самому себе осуществляется с помощью единичной матрицы, симметричность – из теоремы 17.5 и очевидного факта: $|C^{-1}| \cdot |C| > 0$, транзитивность – из того, что если $e' = eC$, $e'' = e'D$, то $e'' = e(CD)$, при этом $|CD| = |C| \cdot |D| > 0$. ■

Так как определитель матрицы перехода от одного базиса к другому либо положителен, либо отрицателен, то множество всех базисов пространства разбивается отношением одинаковой ориентированности ровно на два непересекающихся класса (класса эквивалентности) так, что всякий базис принадлежит одному и только одному классу, два базиса одного класса одинаково ориентированы, а любые два базиса из разных классов противоположно ориентированы.

Один из классов называют классом ***правых*** (или ***положительно ориентированных***) ***базисов***, а другой – ***левых*** (***отрицательно ориентированных***). Каждый из этих двух классов называется ***ориентацией пространства***. Вещественное линейное пространство с выбранной на нем ориентацией называется ***ориентированным пространством***. Так как класс эквивалентности порождается любым своим представителем, то для того, чтобы ориентировать линейное пространство, достаточно задать один какой-нибудь базис пространства и объявить положительно ориентированными все одноименные с ним базисы.

Класс правых базисов на плоскости V_2 и в пространстве V_3 обычно выбирают следующим образом:

– упорядоченную пару неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ плоскости называют ***правой*** (***положительно ориентированной***), если кратчайший поворот (рис. 1) от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ выполняется против часовой стрелки, и ***левой*** (***отрицательно ориентированной***) – в противном случае (начала векторов считаются совмещенными);

– упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ пространства называют ***правой*** (***положительно ориентированной***), если из конца вектора $\mathbf{e}_3$ (рис. 2) кратчайший поворот от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ виден против часовой стрелки, и ***левой*** (***отрицательно ориентированной***) – в противном случае (начала векторов тройки считаются совмещенными).

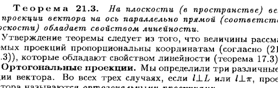


Рис. 1

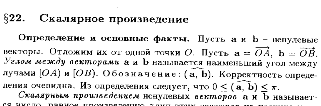


Рис. 2

Практически задание ориентации в геометрических пространствах означает задание направления движения на прямой (слева направо или наоборот), направления вращения на плоскости (против часовой стрелки или наоборот) или винта в пространстве (правого или левого).

Определения, основные факты. Пусть в пространстве V_3 выбрана ориентация. Базисы, задающие эту ориентацию, назовем правыми (положительными).

Векторным произведением ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$ такой, что:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$,

2) $\mathbf{c}$ ортогонален каждому из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

и если $\mathbf{c} \ne \mathbf{0}$, то

3) $\mathbf{c}$ направлен так, что упорядоченная тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – правая.

Если один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ нулевой, то векторное произведение считается равным $\mathbf{0}$. Обозначение: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Теорема 23.2 (критерий коллинеарности). *Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Доказательство. Действительно, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{a} = 0$, либо $\mathbf{b} = 0$, либо $\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$; это равносильно тому, что $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = 0$, т.е. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$. ■

Замечание 2. Из теоремы 23.2 следует, что определение векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ для коллинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заканчивается требованием 1. Если же $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, то условия 1 и 2 означают, что:

$(c_{1,r+1}, \ldots, c_{1n}), \ldots, (c_{n-r,r+1}, \ldots, c_{n-r,n})$, для которых

$$\begin{vmatrix} c_{1,r+1} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-r,r+1} & \ldots & c_{n-r,n} \end{vmatrix} \ne 0. \tag{30.4}$$

Если для каждого из этих наборов найти соответствующие значения главных неизвестных, то получим $n - r$ решений системы:

$$\begin{aligned} e_1 &= (c_{11}, \ \ldots, \ c_{1r}, \ c_{1,r+1}, \ \ldots, \ c_{1n})^T, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ e_{n-r} &= (c_{n-r,1}, \ \ldots, \ c_{n-r,r}, \ c_{n-r,r+1}, \ \ldots, \ c_{n-r,n})^T, \end{aligned}$$

линейно независимых вследствие (30.4).

Общее решение однородной системы. Фундаментальная система решений $e_1, \ldots, e_{n-r}$ однородной системы линейных уравнений позволяет записать любое решение системы в общем виде:

$$x = \alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_{n-r}e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}. \tag{30.5}$$

Представление (30.5) решения называется ***общим решением однородной системы*** уравнений ***через фундаментальную систему решений*** (в отличие от общего решения (28.4) через свободные неизвестные).

Линейное многообразие решений неоднородной системы. Пусть

$$Ax = b \tag{30.6}$$

– неоднородная система линейных алгебраических уравнений. Однородная система

$$Ax = 0, \tag{30.7}$$

полученная из системы (30.6) заменой свободных членов нулями, называется ***приведенной однородной*** системой для системы (30.6).

Между решениями обеих систем существует тесная связь. Легко проверить следующие факты.

1°. *Сумма решений неоднородной и приведенной однородной систем является решением неоднородной системы.*

2°. *Разность двух решений неоднородной системы является решением приведенной однородной системы.*

Теорема 30.3. *Множество всех решений неоднородной системы является линейным многообразием, полученным сдвигом подпространства решений приведенной однородной системы на частное решение неоднородной системы.*

Доказательство. Пусть H – множество всех решений неоднородной системы (30.6), c – частное его решение и L – множество всех решений приведенной системы (30.7). Покажем, что $H = c + L$. Действительно, если $z \in H$, то $z = c + (z - c) = c + x$, где $x = z - c$. Так как $x \in L$ (как разность двух решений системы (30.6)), то $z \in c + L$

и, следовательно, $H \subset c + L$. С другой стороны, если $z \in c + L$, то $z = c + x$, $x \in L$. Значит, $z \in H$ как сумма решений неоднородной и приведенной систем. Следовательно, $c + L \subset H$ и $H = c + L$. ■

Общее решение неоднородной системы. Итак, найдя одно (частное) решение неоднородной системы и прибавляя его к каждому решению приведенной системы, можно получить все решения неоднородной системы. В силу (30.5) это позволяет записать решение неоднородной системы в общем виде следующим образом:

$$z = c + \alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_{n-r}e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}, \tag{30.8}$$

где c – частное решение (30.6), а $e_1, \ldots, e_{n-r}$ – фундаментальная система решений (30.7). Представление (30.8) решения называется ***общим решением неоднородной*** системы уравнений ***через фундаментальную систему решений***. Итак, общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения приведенной однородной системы.

Замечание. В соответствии с теоремой 30.3 геометрическим образом множества всех решений неоднородной системы уравнений служат прямая и плоскость, не проходящие через начало координат (§18).

$a_1b_3[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] + a_2b_1[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] + a_2b_3[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + a_3b_1[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + a_3b_2[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2]$.

Отсюда в силу теоремы 23.3 следует, что

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2].$$

Пусть $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$. Тогда, применяя (22.4), теоремы 23.3–23.5 и замечание 1 (§23), получаем, что $x = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{e}_1) =$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогично $y = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$, $z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Итак,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3, \tag{23.4}$$

или, в условной записи в виде мнемонического определителя,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{23.5}$$

(имеется в виду разложение этого определителя по первой строке).

2. Из (23.4) и (22.5) непосредственно находится и смешанное произведение векторов $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, заданных своими координатами в ортонормированном базисе:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{23.6}$$

Замечание 3. Если исходный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ отрицательно ориентирован, то $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -1$ (теорема 23.5) и, следовательно, в соотношениях (23.4) – (23.6) следует поменять знаки на противоположные:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \right),$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

§24. Преобразование координат

Преобразование аффинной системы координат. Пусть в пространстве даны две аффинные (общие декартовы) системы координат: $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O'; \mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2{}', \mathbf{e}_3{}'\}$. Первую из них будем называть "старой" системой координат, а вторую – "новой". Пусть

известно положение новой системы координат относительно старой: $O'(\alpha, \beta, \gamma)$ и $C = (c_{ij})$ – матрица перехода от базиса e к базису e', т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1{}' &= c_{11}\,\mathbf{e}_1 + c_{21}\,\mathbf{e}_2 + c_{31}\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2{}' &= c_{12}\,\mathbf{e}_1 + c_{22}\,\mathbf{e}_2 + c_{32}\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3{}' &= c_{13}\,\mathbf{e}_1 + c_{23}\,\mathbf{e}_2 + c_{33}\,\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{24.1}$$

Пусть M – произвольная точка пространства. Исследуем, как изменяются ее координаты при переходе к новой системе координат. Обозначим через (x, y, z) и (x', y', z') координаты точки M в старой и новой системах координат, а через $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ – радиус-векторы точки M относительно полюсов O и O' соответственно; через $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор точки O' относительно полюса O. Тогда по определению координат точки

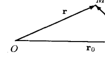


Рис. 1

$$\mathbf{r}_e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}'_{e'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{r}_0)_e = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Равенство $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ означает (рис. 1), что $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$. Перейдя в этом векторном равенстве к равенству координат в базисе e, получаем с учетом (17.8), что

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x &= \alpha + c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y &= \beta + c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z &= \gamma + c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'. \end{aligned} \tag{24.2}$$

Соотношения (24.2) называются ***формулами преобразования координат***. Эти формулы выражают старые координаты точки через новые.

Ортогональная матрица. Вещественная матрица C называется ***ортогональной***, если

$$CC^T = C^TC = I. \tag{24.3}$$

Из определения следует, что:

1) C – квадратная матрица;

2) $C^{-1} = C^T$;

3) C^{-1} – ортогональная матрица;

4) $|C| = \pm 1$;

5) матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ортогональна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \ne j \end{cases} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \ne j; \end{cases} \tag{24.4}$$

Глава VII. Алгебраические линии и поверхности первого порядка

§31. Понятие об уравнениях линии и поверхности

Пусть Oxy и $Oxyz$ – аффинные системы координат на плоскости и в пространстве. Уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{31.1}$$

соответственно

$$F(x, y, z) = 0, \tag{31.2}$$

называется *уравнением линии $\mathcal{L}$ на плоскости* (*поверхности π в пространстве*) в заданной системе координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек линии $\mathcal{L}$ (поверхности π), и только они. Очевидно, что два уравнения в заданной системе координат определяют одну и ту же линию (поверхность) тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

Алгебраическим одночленом относительно переменных x, y (соответственно x, y, z) с вещественным коэффициентом λ называется выражение

$$\lambda x^p y^q \qquad (\lambda x^p y^q z^r), \tag{31.3}$$

где p, q, r – целые неотрицательные числа. Если $\lambda \neq 0$, то число $p + q$ $(p + q + r)$ называется *степенью одночлена*. *Алгебраическим многочленом* относительно переменных x, y (x, y, z) с вещественными коэффициентами называется конечная сумма алгебраических одночленов (31.3). Наибольшая степень одночленов, входящих в многочлен, называется *степенью многочлена*.

Линия на плоскости (поверхность в пространстве) называется *алгебраической*, если в некоторой аффинной системе координат она определяется уравнением (31.1) (соответственно (31.2)), где $F(x, y)$ (соответственно $F(x, y, z)$) – алгебраический многочлен от переменных x, y (x, y, z) с вещественными коэффициентами. Степень многочлена $F(x, y)$ (соответственно $F(x, y, z)$) называется *порядком линии* (*поверхности*).

Корректность этого определения вытекает из следующей теоремы.

Теорема 31.1 (об инвариантности порядка). *При переходе от одной аффинной системы координат к другой алгебраическая линия (поверхность) остается алгебраической и порядок ее не изменяется.*

Доказательство проведем для линии. Пусть на плоскости в аффинной системе координат Oxy линия $\mathcal{L}$ определяется уравнением (31.1), где $F(x, y)$ – алгебраический многочлен степени n. При переходе к новой системе координат $O'x'y'$ уравнение (31.1) преобразуется в уравнение $F'(x', y') = 0$. Покажем, что $F'(x', y')$ – тоже алгебраический многочлен и его степень $n' = n$. Для этого в каждый одночлен $\lambda x^p y^q$ многочлена $F(x, y)$ вместо x и y подставим их выражения через x', y' согласно формулам преобразования координат (§24). Тогда $\lambda x^p y^q = \lambda(c_{11}x' + c_{12}y' + \alpha)^p(c_{21}x' + c_{22}y' + \beta)^q$. Следовательно, одночлен $\lambda x^p y^q$ преобразуется в алгебраический многочлен от переменных x', y', степень которого не превосходит $p + q$. При этом многочлен $F(x, y)$ преобразуется в алгебраический многочлен $F'(x', y')$, степень которого $n' \leq n$. Если в этих рассуждениях поменять ролями системы координат, то получим, что $n \leq n'$, т.е. $n' = n$. ■

§32. Уравнения прямой на плоскости, плоскости в пространстве

Этот и несколько следующих параграфов посвящены прямой на плоскости и плоскости в пространстве. Мы будем изучать их одновременно, так как у них много общего. И это понятно, ведь и прямая на плоскости, и плоскость в пространстве представляют собой один и тот же объект в линейном пространстве, называемый гиперплоскостью (§18). В тех случаях, когда сходные теоремы имеют, по существу, одинаковые доказательства, мы будем доказывать только одну из них.

В этом параграфе рассматриваются различные типы уравнений прямой на плоскости (плоскости в пространстве), каждый тип уравнения определяется тем геометрическим заданием, которое однозначно определяет прямую (плоскость).

Канонические уравнения. Ненулевой вектор, коллинеарный прямой, называется ее *направляющим вектором*. Из аксиом геометрии следует, что через любую точку проходит единственная прямая с заданным направляющим вектором.

Пусть прямая l с направляющим вектором $\mathbf{a}$ проходит через точку M_0. Очевидно, точка M лежит на прямой l (рис. 1) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, т.е. линейно зависимы (§15). С учетом условия $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ это равносильно тому, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ линейно

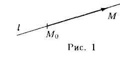


Рис. 1

Доказательство. Действительно, прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ компланарны, т.е. линейно зависимы (теорема 15.2). Согласно теореме 14.2 это равносильно тому, что один из них линейно выражается через другие. В силу линейности координат то же относится и к их координатам, что означает (§16, следствие 1) равенство нулю определителя, строками которого являются эти координаты. ■

Замечание 3. В прямоугольной декартовой системе координат условие (36.9) может быть получено из критерия компланарности векторов $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ (теорема 23.4 и соотношение (23.6)).

Теорема 36.3. *Прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 1, \tag{36.10}$$

параллельны и не совпадают тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 1, \quad \operatorname{rg}\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 2, \tag{36.11}$$

пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 2. \tag{36.12}$$

Доказательство. Условие (36.10) равносильно тому, что векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ коллинеарны; условие (36.11) – тому, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ коллинеарны, а векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ компланарны, но не коллинеарны; условие (36.12) – тому, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ коллинеарны, а векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ компланарны. Отсюда следует утверждение теоремы. ■

Взаимное расположение прямой и плоскости. Пусть в пространстве в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$ заданы плоскость

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$$

и прямая

$$l: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a},$$

где $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$.

Теорема 36.4. *Прямая l лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} Am + Bn + Ck = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \end{cases}$$

прямая l параллельна плоскости π, но не лежит в ней тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} Am + Bn + Ck = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0; \end{cases}$$

прямая l пересекает плоскость π тогда и только тогда, когда

$$Am + Bn + Ck \neq 0.$$

Утверждение теоремы следует из критерия (32.13) параллельности вектора $\mathbf{a}$ и плоскости π.

Прямая в пространстве в прямоугольной декартовой системе координат. Пусть $Oxyz$ – прямоугольная декартова система координат пространства. 1. Углом между двумя прямыми в пространстве называется любой из углов между параллельными им прямыми, проходящими через какую-либо точку пространства. Таким образом, две прямые в пространстве образуют между собой два различных (если они не перпендикулярны) угла, в сумме равные π. Очевидно, что угол между направляющими векторами прямых равен одному из этих углов. Следовательно, угол φ между прямыми l_i: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + t\,\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2$, совпадающий с углом между их направляющими векторами $\mathbf{a}_i = \{m_i, n_i, k_i\}$, вычисляется согласно (22.6) по формуле

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + k_1k_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}.$$

2. Углом между прямой и плоскостью (если они не перпендикулярны) называется меньший из углов между этой прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. Если же прямая и плоскости перпендикулярны, то угол между ними считается равным $\pi/2$. Угол φ между прямой l: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}$ и плоскостью π: $Ax + By + Cz + D = 0$ находится как дополнительный к углу между направляющим вектором прямой $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$ и вектором нормали к плоскости $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ и вычисляется согласно (22.6) по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

3. Расстояние $\rho(M_1, l)$ от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямой l: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}$ находится как высота h (рис. 1) параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$, площадь и основание которого известны (§23):

$$\rho(M_1, l) = \frac{|[\mathbf{a}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0]|}{|\mathbf{a}|}.$$

Соотношения (23.5), (22.6) позволяют вычислить $\rho(M_1, l)$ по прямоугольным координатам.

Уравнения (32.6), (32.7) называются *параметрическими уравнениями прямой* на плоскости в векторной и координатной формах.

Аналогично условие (32.4) может быть записано в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\,\mathbf{p}_1 + v\,\mathbf{p}_2, \quad u, v \in \mathbb{R}, \tag{32.8}$$

или, в координатной форме, в системе координат $Oxyz$

$$\begin{cases} x = x_0 + um_1 + vm_2, \\ y = y_0 + un_1 + vn_2, \\ z = z_0 + uk_1 + vk_2, \quad u, v \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{32.9}$$

Уравнения (32.8), (32.9) называются *параметрическими уравнениями плоскости* в векторной и координатной формах.

Общие уравнения.

Теорема 32.3. *Линия на плоскости является прямой тогда и только тогда, когда она является алгебраической линией первого порядка.*

Доказательство. Необходимость. Пусть l – прямая на плоскости, проходящая через точку M_0 и параллельная ненулевому вектору $\mathbf{a}$. Пусть Oxy – произвольная аффинная система координат и $\mathbf{a} = \{m, n\}$, $M_0(x_0, y_0)$. Тогда прямая l описывается каноническим уравнением (32.2) или, что то же самое, уравнением $n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0$, которое, если положить $A = n$, $B = -m$, $C = -nx_0 + my_0$, может быть записано в виде

$$Ax + By + C = 0. \tag{32.10}$$

Так как вектор $\mathbf{a} = \{m, n\} \neq \mathbf{0}$, то по крайней мере один из коэффициентов A или B отличен от нуля. Поэтому левая часть уравнения (32.10) представляет собой алгебраический многочлен первой степени. Следовательно, любая прямая на плоскости является алгебраической линией первого порядка.

Достаточность. Пусть в аффинной системе координат Oxy линия l определяется уравнением (32.10). Это уравнение имеет частное решение $x_0 = -\dfrac{AC}{A^2 + B^2}$, $y_0 = -\dfrac{BC}{A^2 + B^2}$, ибо $Ax_0 + By_0 + C \equiv 0$.

Вычитая последнее равенство из (32.10), получим, что $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ или, что то же самое,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0.$$

В силу теоремы 32.1 это уравнение определяет прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$, с направляющим вектором $\mathbf{a} = \{-B, A\}$. ■

Уравнение (32.10) называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ называется *вектором нормали к прямой относительно уравнения* (32.10).

Теорема 32.4. *Поверхность в пространстве является плоскостью тогда и только тогда, когда она является алгебраической поверхностью первого порядка.*

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 32.3 с той лишь разницей, что уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \text{где} \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \tag{32.11}$$

$$x_0 = -\frac{AD}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad y_0 = -\frac{BD}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad z_0 = -\frac{CD}{A^2 + B^2 + C^2},$$

а уравнение (32.11) может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0, \quad \text{если} \quad A \neq 0$$

(случаи $B \neq 0$ и $C \neq 0$ рассматриваются аналогично). ■

Уравнение (32.11) называется *общим уравнением плоскости* в пространстве. Вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ называется *вектором нормали к плоскости относительно уравнения* (32.11).

Общее уравнение прямой (плоскости) называется *полным*, если все коэффициенты A, B, C (соответственно A, B, C, D) отличны от нуля.

Теорема 32.5. *В аффинной системе координат Oxy на плоскости ($Oxyz$ в пространстве) вектор $\mathbf{a} = \{m, n\}$ (соответственно $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$) параллелен прямой (плоскости), заданной общим уравнением* (32.10) *(соответственно* (32.11)*), тогда и только тогда, когда*

$$Am + Bn = 0, \tag{32.12}$$

(соответственно

$$Am + Bn + Ck = 0). \tag{32.13}$$

Доказательство (для прямой). Как следует из доказательства теоремы 32.3, вектор $\mathbf{b} = \{-B, A\}$ является направляющим вектором прямой. Это означает, что вектор $\mathbf{a}$ параллелен этой прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}$ коллинеарен $\mathbf{b}$, т.е. когда $\begin{vmatrix} m & n \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$ или, что то же самое, $Am + Bn = 0$. ■

Замечание 2. Левые части условий (32.12), (32.13) можно рассматривать как скалярные произведения вектора нормали $\mathbf{n}$ и вектора $\mathbf{a}$ в ортонормированном базисе. Таким образом, в *прямоугольной декартовой системе координат вектор нормали $\mathbf{n} = \{A, B\}$ к прямой* (32.10) *(соответственно $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ к плоскости* (32.11)*) перпендикулярен этой прямой (плоскости).*

Уравнения в отрезках. Полные уравнения (32.10) и (32.11) прямой на плоскости и плоскости в пространстве могут быть записаны

Из аксиом группы и свойств алгебраической операции (§9) вытекают следующие факты.

1°. *В любой группе существует, и притом единственный, нейтральный элемент.*

2°. *В любой группе для каждого элемента существует, и притом единственный, симметричный элемент.*

Аксиомы группы можно несколько ослабить. Убедимся в этом. Пусть G – множество, наделенное алгебраической операцией. Элемент $e_n \in G$, такой, что $ae_n = a$ для любого $a \in G$, назовем *правой единицей* множества G, а элемент $a_n^{-1} \in G$, такой, что $aa_n^{-1} = e_n$, – *правым обратным к элементу* a.

Теорема 37.1. *Множество G с ассоциативной алгебраической операцией является группой, если оно обладает правой единицей e_n и по отношению к ней каждый элемент $a \in G$ обладает правым обратным.*

Доказательство. Пусть a – произвольный элемент множества G и a_n^{-1} – правый обратный к нему элемент. Тогда $aa_n^{-1} = e_n = e_ne_n = e_n(aa_n^{-1}) = (e_na)a_n^{-1}$, т.е. $aa_n^{-1} = (e_na)a_n^{-1}$. Умножив обе части последнего равенства справа на правый обратный элемент к элементу a_n^{-1}, получим, что $a = e_na$. Таким образом, правая единица к элементу G оказывается и левой единицей, т.е. просто единицей e множества G.

Покажем теперь, что правый обратный элемент к элементу a является и левым обратным, т.е. $a_n^{-1}a = e$. Действительно, $ea_n^{-1} = a_n^{-1}e = a_n^{-1}(aa_n^{-1}) = (a_n^{-1}a)a_n^{-1}$, т.е. $ea_n^{-1} = (a_n^{-1}a)a_n^{-1}$. Умножив обе части последнего равенства справа на правый обратный элемент к элементу a_n^{-1}, получим $e = a_n^{-1}a$. ■

Следствие. В группе любая правая единица является левой и той единственной единицей, которой эта группа обладает, а любой правый обратный элемент к элементу a группы является левым и тем единственным обратным, которым обладает элемент a.

Теорема 37.2. *Множество G с ассоциативной алгебраической операцией является группой тогда и только тогда, когда эта операция обладает обратной.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G – группа; покажем, что уравнения

$$ax = b, \tag{37.1}$$

$$ya = b \tag{37.2}$$

имеют единственное решение для любых $a, b \in G$. Действительно, элемент $x = a^{-1}b$ является решением уравнения (37.1), так как $ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b$. Это решение единственно, так как если x' – любое другое решение (37.1), то $ax' = ax$ и $a^{-1}(ax') = a^{-1}(ax)$. Следовательно, $x' = x$. Аналогично доказывается утверждение, касающееся уравнения (37.2).

Достаточность. Пусть теперь уравнения (37.1), (37.2) при любых $a, b \in G$ имеют единственное решение. Покажем, что G – группа. Для этого покажем, что выполнены все условия теоремы 37.1.

Действительно, возьмем произвольный элемент $a \in G$. Уравнение $ax = a$ имеет единственное решение. Очевидно, оно играет роль правой единицы для элемента a. Обозначим его e_n^a. Для любого другого элемента $b \in G$ существует элемент $y \in G$ такой, что $b = ya$ (т.е. y – решение (37.2)). Тогда $b = ya = y(ae_n^a) = (ya)e_n^a = be_n^a$. Следовательно, $be_n^a = b$, $\forall b \in G$, и $e_n^a = e_n$ – правая единица множества G. Далее, уравнение $ax = e_n$ имеет решение, которое, очевидно, является правым обратным к элементу a по отношению к e_n. Отсюда в силу теоремы 37.1 следует, что G – группа. ■

Замечание. Попутно доказано еще одно свойство группы: *в группе любая правая (левая) единица для одного элемента является общей правой (соответственно левой) единицей.*

Итак, групповая операция обладает обратной операцией. В аддитивной группе обратная операция называется *вычитанием (справа и слева)*, а элементы $x = b + (-a)$ и $y = (-a) + b$ – *разностью (правосторонней и левосторонней* соответственно). В абелевой группе обе разности совпадают и обозначаются единым символом $b - a$.

§38. Подгруппа

Определение. Подмножество H группы G называется *подгруппой* группы G, если оно само является группой относительно алгебраической операции в G.

Примеры. 1. Простейшими подгруппами любой группы являются ее единичный элемент и сама группа. Эти подгруппы называют *тривиальными*.

2. Множество четных чисел – подгруппа аддитивной группы целых чисел.

3. Множество чисел, кратных p, где $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, – подгруппа аддитивной группы целых чисел.

4. Множество рациональных чисел, отличных от нуля, – подгруппа мультипликативной группы ненулевых действительных чисел.

5. Множество квадратных матриц n-го порядка, определители которых равны единице, – подгруппа мультипликативной группы невырожденных матриц n-го порядка.

Теорема 38.1. *Подмножество H группы G является подгруппой этой группы тогда и только тогда, когда имеют место следующие импликации:*

1) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$;
2) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

Доказательство. Необходимость очевидна, она вытекает из того, что H – группа.

Теорема 33.1. *Прямые l_1 и l_2 на плоскости совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{33.6}$$

параллельны и не совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \tag{33.7}$$

пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \tag{33.8}$$

Доказательство. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{33.9}$$

относительно неизвестных x, y. Для этой системы матрицы A и B из (33.3) являются основной и расширенной матрицами соответственно.

Согласно (33.5) эта система совместна только в двух случаях: когда $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1$ и $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$. В случае когда $\operatorname{rg} A = 1$, а $\operatorname{rg} B = 2$, система несовместна. В первом случае решения системы образуют одномерное линейное многообразие (§30), а во втором – нульмерное, т.е. система имеет единственное решение. Перейдем к прямым l_1 и l_2. Совпадение прямых l_1 и l_2 означает, что решения системы (33.9) образуют одномерное линейное многообразие, т.е. что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1$ или, что то же самое, $\operatorname{rg} B = 1$. Это условие равносильно (33.6) в силу теоремы о базисном миноре. Параллельность прямых l_1 и l_2 (и их несовпадение) означает, что система (33.9) несовместна, т.е. что $\operatorname{rg} A = 1$, $\operatorname{rg} B = 2$. Это условие равносильно (33.7). Пересекаемость прямых l_1 и l_2 означает, что система (33.9) имеет единственное решение, т.е. что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$ или, что то же самое, $\operatorname{rg} A = 2$. Это условие равносильно (33.8). ■

Теорема 33.2. *Плоскости π_1 и π_2 совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

параллельны и не совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 не пропорциональны.

Доказательство теоремы представляет собой естественный аналог доказательства теоремы 33.1 и не содержит принципиальных отличий. Отметим лишь, что в случае, когда $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1$, решения системы образуют двумерное линейное многообразие (т.е. плоскости π_1 и π_2 совпадают), а в случае, когда $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$, решения системы образуют одномерное линейное многообразие (т.е. плоскости пересекаются по прямой). ■

Замечание. Теоремам 33.1 и 33.2 можно дать единую формулировку в терминах матриц (33.3) и (33.4): *прямые l_1 и l_2 (плоскости π_1 и π_2)*

совпадают $\iff \operatorname{rg} B = 1$;
параллельны и не совпадают $\iff \operatorname{rg} A = 1, \operatorname{rg} B = 2$;
пересекаются $\iff \operatorname{rg} A = 2$.

Пучок прямых (плоскостей). Множество всех прямых плоскости, проходящих через данную точку M_0, называется *пучком прямых* с центром в точке M_0. Обозначение: $\pi(M_0)$. Пусть l_1 и l_2 – две несовпадающие прямые пучка $\pi(M_0)$, заданные уравнениями (33.1) в некоторой аффинной системе координат Oxy. Положим $F_i(x, y) = A_ix + B_iy + C_i$, где $i = 1, 2$.

Теорема 33.3. *Прямая принадлежит пучку $\pi(M_0)$ тогда и только тогда, когда она определяется уравнением*

$$\alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y) = 0 \tag{33.10}$$

при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, одновременно не равных нулю.

Доказательство. Достаточность очевидна, так как уравнение (33.10) является в силу (33.8) уравнением первой степени и определяет прямую. Она проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, поскольку $F_1(x_0, y_0) = 0$ и $F_2(x_0, y_0) = 0$.

Необходимость. Пусть прямая $l \in \pi(M_0)$. Возьмем на этой прямой точку $M_1(x_1, y_1)$, отличную от точки $M_0(x_0, y_0)$. Положим $\alpha = A_2x_1 + B_2y_1 + C_2$, $\beta = -(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)$. Поскольку точка M_1 не может одновременно лежать на l_1 и l_2 (ибо прямые l_1 и l_2 не совпадают), то по крайней мере одно из чисел α или β отлично от нуля. Тогда уравнение $\alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y) = 0$ согласно условию (33.8) является уравнением первой степени и определяет прямую. Очевидно, она проходит через точки M_0 (так как прямые l_1, l_2 проходят через M_0) и M_1 (согласно выбору α, β). Следовательно, эта прямая совпадает с l. ■

Итак, любая прямая пучка $\pi(M_0)$ определяется двумя пересекающимися прямыми l_1 и l_2 этого пучка. Каждая пара чисел α, β, где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, определяет единственную прямую пучка. Уравнение (33.10) называется *уравнением пучка прямых*, проходящих через точку пересечения прямых (33.1).

2. Группа из двух элементов $G = \{e, a\}$ определяется таблицей

	e	a
e	e	a
a	a	e

Здесь $aa \neq a$, так как иначе элемент a будет единицей для a, т.е. (§37, замечание) общей и единственной единицей e. Поэтому $aa = e$.

3. Группа из трех элементов $G = \{e, a, b\}$ определяется таблицей

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Здесь, рассуждая так же, как в примере 2, получаем, что $ab \neq a$, $ab \neq b$, $ba \neq a$, $ba \neq b$. Следовательно, $ab = e = ba$. Аналогично $aa \neq a$, $aa \neq e$ (так как единственным обратным элементу a, как выяснено выше, является элемент b). Следовательно, $aa = b$. Аналогично $bb = a$. Заметим, что все три группы абелевы.

Теорема 39.1 (теорема Лагранжа). *Во всякой конечной группе порядок ее подгруппы является делителем порядка самой группы.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{card} G = n$, $\operatorname{card} H = k$. Рассмотрим левостороннее разложение группы G по подгруппе H. Оно состоит из всех левых смежных классов aH, где $a \in G$. Каждый класс aH состоит из всех элементов ah, где $h \in H$. Все элементы ah различны (так как если $ah_1 = ah_2$, то $a^{-1}ah_1 = a^{-1}ah_2$ и, значит, $h_1 = h_2$), поэтому каждый класс aH состоит ровно из k элементов. Общее число смежных классов aH равно $m \leq n$. Таким образом, количество всех элементов группы G равно mk, т.е. $n = mk$. ■

§40. Нормальный делитель

Подгруппа H группы G называется *нормальным делителем*, если для любого элемента $a \in H$

$$aH = Ha, \tag{40.1}$$

т.е. если любой левый (правый) смежный класс одновременно является правым (левым) смежным классом.

Очевидно, что в абелевой группе любая подгруппа является нормальным делителем. Тривиальные подгруппы в любой группе также являются нормальными делителями: оба разложения по единичной подгруппе совпадают с разложением группы на отдельные элементы, оба разложения по самой группе состоят из одного класса – это сама

группа. Укажем критерий нормального делителя для произвольной группы.

Элементы a и b группы G называются *сопряженными*, если существует элемент $c \in G$ такой, что $a = c^{-1}bc$.

Теорема 40.1. *Подгруппа H группы G является нормальным делителем тогда и только тогда, когда она вместе с каждым элементом содержит все сопряженные с ним элементы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть H – нормальный делитель, тогда согласно (40.1) $Hc \subset cH$ для любого элемента $c \in G$. Это означает, что для любого элемента $h \in H$ существует $h_1 \in H$ такой, что $hc = ch_1$, т.е. $c^{-1}hc = h_1 \in H$.

Достаточность. Возьмем произвольные элементы $h \in H$, $c \in G$. Тогда $c^{-1}hc \in H$ и $chc^{-1} \in H$. Это означает, что существуют элементы $h_1, h_2 \in H$ такие, что $c^{-1}hc = h_1$, $chc^{-1} = h_2$, или $hc = ch_1$, $ch = h_2c$. Значит, $Hc \subset cH$ и $cH \subset Hc$, т.е. $cH = Hc$. ■

Примером нормального делителя в неабелевой группе является подгруппа матриц с определителем, равным единице, мультипликативной группы невырожденных матриц n-го порядка, так как для элементов этой подгруппы выполнено условие теоремы 40.1: если $|A| = 1$, то $|C^{-1}AC| = |A| = 1$ для любой невырожденной матрицы C.

Теорема 40.2. *Смежные классы по нормальному делителю образуют группу относительно умножения подмножеств группы.*

Доказательство. Покажем, что произведение смежных классов по нормальному делителю является смежным классом. Действительно, $(aH)(bH) = \{$ в силу ассоциативности произведения $\} = a(Hb)H = \{$ так как H – нормальный делитель $\} = a(bH)H = ab(HH) = abH$. Итак,

$$(aH)(bH) = (ab)H, \tag{40.2}$$

значит, умножение подмножеств группы является алгебраической операцией на множестве смежных классов по нормальному делителю. Ассоциативность этого умножения уже известна (§38). Нейтральным элементом служит сама подгруппа H, так как $(aH)H = (aH)(eH) = (ae)H = aH$, $\forall a \in G$. Обратным элементом к классу aH является класс $a^{-1}H$, так как $(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$. ■

Группа смежных классов группы G по нормальному делителю H называется *фактор-группой группы G по подгруппе H*.

Обозначение: $G|H$.

Группа вычетов по модулю p. Вернемся к смежным классам аддитивной группы целых чисел по подгруппе H чисел, кратных p. Как следует из §38 (пример 2 в таблице), фактор-группа $\mathbb{Z}|H$ состоит ровно из p классов и совпадает с множеством $\mathbb{Z}_p$ классов вычетов по модулю p (§7, пример 3). Алгебраическую операцию в $\mathbb{Z}_p$ (т.е. произведение смежных классов) будем называть сложением, придерживаясь названия исходной операции в группе целых чисел. Согласно (40.2) суммой смежных классов $C_m + C_n$ является класс, который содержит сумму чисел $m + n$:

§35. Прямая на плоскости (плоскость в пространстве) в прямоугольной декартовой системе координат

Рассматривается прямоугольная декартова система координат Oxy на плоскости ($Oxyz$ в пространстве), определяемая ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ соответственно). Известно (§32, замечание 2), что вектор нормали $\mathbf{n} = \{A, B\}$ (соответственно $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$) перпендикулярен прямой l, заданной уравнением (32.10) (соответственно плоскости π, заданной уравнением (32.11)).

Расстояние от точки до прямой (до плоскости).

Теорема 35.1. *В прямоугольной декартовой системе координат Oxy расстояние $\rho(M_0, l)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой* (32.10) *определяется формулой*

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{35.1}$$

Доказательство. Пусть $M_0 \notin l$ (для точек $M_0 \in l$ равенство (35.1) очевидно). Опустим из точки M_0 перпендикуляр на прямую l, пусть $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра. Тогда $\overrightarrow{M_1M_0} = \alpha\,\mathbf{n}$ и

$$\rho(M_0, l) = |\overrightarrow{M_1M_0}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{n}| = |\alpha|\sqrt{A^2 + B^2}. \tag{35.2}$$

Найдем α. Так как $x_0 = x_1 + \alpha A$, $y_0 = y_1 + \alpha B$, то $Ax_0 + By_0 + C = Ax_1 + By_1 + C + \alpha(A^2 + B^2) = \alpha(A^2 + B^2)$. Отсюда $\alpha = (Ax_0 + By_0 + C)/(A^2 + B^2)$. Подставив это значение α в (35.2), получим (35.1). ■

Теорема 35.2. *В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости* (32.11) *определяется формулой*

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между прямыми (между плоскостями). Пусть прямые l_1 и l_2 (плоскости π_1 и π_2) заданы уравнениями (33.1) (соответственно (33.2)).

Вообще говоря, две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 (плоскости π_1 и π_2) образуют два угла, в сумме равные π. Достаточно определить один их них. Так как векторы нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ перпендикулярны прямым (плоскостям), то угол $\varphi = (\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})$ совпадает с одним из углов между прямыми l_1 и l_2 (между плоскостями π_1 и π_2). Итак, согласно (22.6) *угол φ между прямыми* (33.1), *совпадающий с углом между их нормалями, определяется формулой*

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

угол φ между плоскостями (33.2), *совпадающий с углом между их нормалями, определяется формулой*

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, *прямые l_1 и l_2 (плоскости π_1 и π_2) перпендикулярны тогда и только тогда, когда*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0).$$

§36. Прямая в пространстве

Уравнения прямой. 1. Векторное уравнение (32.6) прямой на плоскости остается справедливым и для прямой в пространстве, так как и в пространстве прямая однозначно определяется точкой и направляющим вектором. Итак (§32), если в пространстве зафиксирован полюс O, то уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, с направляющим вектором $\mathbf{a}$ имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{36.1}$$

Пусть в аффинной системе координат точка M_0 имеет координаты (x_0, y_0, z_0), а вектор $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$. Тогда уравнение (36.1) может быть записано в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tk, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{36.2}$$

Уравнения (36.1), (36.2) называются *параметрическими уравнениями прямой* в пространстве в векторной и координатной формах соответственно.

2. Уравнение (36.1), означающее коллинеарность векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$, может быть записано и в терминах пропорциональности координат векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}. \tag{36.3}$$

Уравнения (36.3) называются *каноническими уравнениями прямой* в пространстве.

Так же как и для канонического уравнения (32.3) прямой на плоскости, уравнения (36.3) говорят лишь о пропорциональности координат векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$. Если, например, $m = 0$, то уравнения (36.3) переходят в уравнения

6) $(a + b)c = ab + bc$, $a(b + c) = ab + ac$.

Кольцо называется *коммутативным*, если умножение в нем коммутативно, кольцо называется *кольцом с единицей*, если операция умножения обладает нейтральным элементом. Из аксиом кольца следует, что кольцо является аддитивной абелевой группой.

Очевидно, множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ образуют коммутативные кольца с единицей относительно обычных операций сложения и умножения чисел; множество всех четных чисел – коммутативное кольцо без единицы; множество $\mathbb{R}^{n \times n}$ вещественных квадратных матриц n-го порядка – некоммутативное кольцо с единицей относительно известных операций сложения и умножения матриц.

Отметим простейшие свойства кольца, все они опираются на свойства множеств с одной ассоциативной операцией, и в частности на свойства группы.

1°. *Кольцо обладает всеми свойствами аддитивной абелевой группы;* в частности, в кольце:

а) существует, и притом единственный, нулевой элемент 0;

б) для каждого элемента a существует, и притом единственный, противоположный элемент $-a$;

в) для любых элементов $a, b \in K$ существует, и притом единственное, решение уравнения $x + a = b$; это решение называется *разностью* элементов b и a и обозначается символом $b - a$. Итак, $b - a = b + (-a)$.

2°. *В кольце умножение дистрибутивно относительно вычитания*, т.е. $a(b - c) = ab - ac$, $(a - b)c = ac - bc$, $\forall a, b, c \in K$.

Это следует из того, что $b = (b - c) + c$ и $ab = a(b - c) + ac$.

3°. *В кольце для любого элемента a:* $a0 = 0a = 0$.

Это следует из дистрибутивности умножения относительно вычитания: $a0 = a(b - b) = ab - ab = 0$.

4°. *В кольце для любых элементов a, b:* $(-a)b = a(-b) = -ab$.

Это следует из того, что $ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = 0$.

Следствие. $(-a)(-b) = ab$, $\forall a, b \in K$.

5°. *В кольце с единицей для любого элемента a:*

$$(-1)a = a(-1) = -a.$$

Это следует из того, что $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$.

6°. *В кольце с единицей, содержащем не менее двух элементов:*

$$1 \neq 0.$$

Действительно, если $0 = 1$, то существует $a \in K$: $a \neq 0$, $a \neq 1$. Тогда из равенства $0 = 1$ следует, что $0a = 1a$, т.е. $0 = a$, но $a \neq 0$.

7°. *В кольце с единицей множество обратимых (по умножению) элементов образует мультипликативную группу.*

Это следует из того, что произведение обратимых элементов обратимо, т.е. умножение в кольце является алгебраической операцией на этом множестве.

Делители нуля. В кольце, как мы отмечали выше, алгебраические операции сложения, вычитания и умножения обладают свойства-

ми привычных нам операций над числами. Однако кольцо обладает и специфическим свойством, которого нет в числовых множествах. Так, для чисел из равенства $ab = 0$ следует, что одно из чисел a или b равно нулю. В кольце это может и не выполняться. Например, в кольце матриц второго порядка существуют ненулевые матрицы, произведение которых равно нулю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ненулевые элементы a и b кольца называются *делителями нуля*, если $ab = 0$. При этом элемент a называется *левым* делителем нуля, а элемент b – *правым*.

Кольцо вычетов. Рассмотрим аддитивную группу $\mathbb{Z}_p = \{C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}\}$ вычетов по модулю p (§40). Напомним, что сложение на $\mathbb{Z}_p$ определено правилом (40.3), т.е. $C_m + C_n$ – это класс, в который входит число $m + n$. Известно, что $\mathbb{Z}_p$ – группа относительно так введенной операции сложения (§40). Отметим, что это абелева группа, так как числа $m + n$ и $n + m$ входят в один и тот же класс. Отметим также, что нулем этой группы является класс C_0 чисел, кратных p, а противоположным к классу C_m – класс

$$-C_m = \begin{cases} C_0, & m = 0, \\ C_{p-m}, & m > 0. \end{cases}$$

Определим на $\mathbb{Z}_p$ операцию умножения. Положим

$$C_mC_n = C_r, \quad \text{где} \quad r \equiv mn \pmod{p},$$

т.е. C_mC_n – это класс, в который входит число mn. Эта операция обладает следующими свойствами:

1) $C_mC_n = C_nC_m$, так как C_mC_n – класс, в который входит nm, а $mn = nm$;

2) $(C_mC_n)C_k = C_m(C_nC_k)$, так как оба произведения представляют собой один и тот же класс, в который входит число $(mn)k = m(nk)$;

3) *существует единица* C_1, так как $C_mC_1 = C_1C_m = C_m$;

4) $(C_m + C_n)C_k = C_mC_k + C_nC_k$, так как оба произведения представляют собой класс, в который входит число $(m + n)k = mk + nk$;

5) *если p – составное число, то в кольце $\mathbb{Z}_p$ есть делители нуля*, так как если $p = mn$, где $1 < m < p$, $1 < n < p$, то $C_m, C_n \in \mathbb{Z}_p$ и $C_mC_n = C_0$.

Таким образом, $\mathbb{Z}_p$ – конечное коммутативное кольцо с единицей, которое имеет делители нуля, если p – составное число. Оно называется *кольцом вычетов по модулю p*.

§43. Поле

Определение, простейшие свойства. *Полем* называется коммутативное кольцо с единицей, содержащее не менее двух элементов, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный элемент. Из определения вытекают следующие свойства поля.

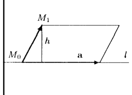


Рис. 1

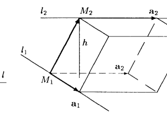


Рис. 2

4. *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* l_i: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + t\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2$, называется расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат прямые l_1 и l_2. Это расстояние $\rho(l_1, l_2)$ находится как высота параллелепипеда (рис. 2), построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, объем и площадь основания которого известны (§23):

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}.$$

Соотношения (23.6), (22.6) позволяют вычислить $\rho(l_1, l_2)$ по прямоугольным координатам.

Глава VIII. Элементы общей алгебры

В этой главе изучаются фундаментальные для всей алгебры понятия группы, кольца и поля. Они дают возможность с общих позиций взглянуть на рассмотренные в предыдущих главах понятия и факты и ввести, кроме того, новые.

§37. Группа

Множество G с заданной на нем алгебраической операцией $*$ называется *группой*, если:

1) операция ассоциативна: $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in G$;

2) операция обладает нейтральным элементом $e \in G$: $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$;

3) для любого элемента $a \in G$ существует симметричный элемент $a' \in G : a * a' = a' * a = e$.

Обозначение: G или $\langle G, * \rangle$. Условия 1–3 называются ***аксиомами группы***. Группа с коммутативной операцией называется ***коммутативной*** или ***абелевой***.

О терминологии. Обычно групповую операцию $*$ обозначают специальными символами, чаще всего символами $\cdot$ или $+$, называя $a \cdot b$ (или просто ab) произведением, а $a + b$ – суммой элементов $a, b \in G$. В первом случае нейтральный элемент называют *единицей* (обозначение: 1), симметричный элемент – *обратным* (обозначение: a^{-1}), а саму группу G – *мультипликативной*. Во втором случае нейтральный элемент называют *нулем* (обозначение: 0), симметричный – *противоположным* (обозначение: $-a$), а группу G – *аддитивной*. Если относительно групповой операции нет никаких оговорок, то обычно используют терминологию мультипликативной группы.

Как следует из определения, группа – это абстракция множества, наделенного одной алгебраической операцией. Большинство изученных нами множеств являются конкретными проявлениями этого понятия, т.е. представляют собой группы. Действительно:

а) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$; $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$; $\langle \mathbb{R}, + \rangle$; $\langle V_n, + \rangle$, где $n = 1, 2, 3$; $\langle \mathbb{R}^{m \times n}, + \rangle$; любое линейное пространство V – это аддитивные абелевы группы;

б) $\langle \mathbb{Q} \backslash 0, \cdot \rangle$; $\langle \mathbb{R} \backslash 0, \cdot \rangle$ – мультипликативные абелевы группы;

в) $\langle \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | \det A \neq 0\}, \cdot \rangle$; $\langle \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | \det A = 1\}, \cdot \rangle$ – мультипликативные неабелевы группы;

г) множество $S(X)$ всех биективных отображений $f : X \to X$ – мультипликативная неабелева группа; в частности, если X – конечное множество из n элементов (т.е. $S(X)$ – множество перестановок n-го порядка (§8)), то эта группа называется ***симметрической группой n-го порядка*** и обозначается S_n.

выражается через вектор $\mathbf{a}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\,\mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (32.1)$$

Таким образом, условию (32.1) удовлетворяют все точки M прямой l, и только они.

Теорема 32.1. *На плоскости в аффинной системе координат Oxy уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, с направляющим вектором $\mathbf{a} = \{m, n\}$ имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} = 0 \qquad (32.2)$$

или

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (32.3)$$

Доказательство. Пусть точка M имеет координаты (x, y), тогда $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$. Условие (32.1) в силу линейности координат означает, что в определителе (32.2) первая строка линейно выражается через вторую, а это равносильно равенству (32.2). Итак, уравнению (32.2) удовлетворяют координаты (x, y) всех точек прямой l, и только они. Равенство нулю определителя второго порядка равносильно пропорциональности его строк, т.е. условию (32.3). ■

Замечание 1. Уравнение (32.3) означает лишь пропорциональность и в случае, когда $m = 0$ или $n = 0$, равносильно уравнению $x - x_0 = 0$ или $y - y_0 = 0$ соответственно.

Уравнения (32.2), (32.3) называются ***каноническими уравнениями прямой на плоскости.***

Следствие 1. *Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Это следует из того, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ является направляющим вектором прямой.

Без принципиальных изменений может быть получено аналогичное уравнение плоскости в пространстве. Два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости, называются ее ***направляющими векторами.*** Из аксиом геометрии следует, что через любую точку проходит единственная плоскость с заданными направляющими векторами.

Пусть плоскость π с направляющими векторами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ проходит через точку M_0. Очевидно, точка M лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда (рис. 2) векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ компланарны, т.е. линейно зависимы (§15).

Рис. 2

С учетом условия неколлинеарности векторов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ это равносильно тому, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ линейно выражается через $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$:

$$\overrightarrow{M_0M} = u\,\mathbf{p}_1 + v\,\mathbf{p}_2, \quad u, v \in \mathbb{R}. \qquad (32.4)$$

Теорема 32.2. *В пространстве в аффинной системе координат $Oxyz$ уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с направляющими векторами $\mathbf{p}_1 = \{m_1, n_1, k_1\}$ и $\mathbf{p}_2 = \{m_2, n_2, k_2\}$ имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (32.5)$$

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 32.1.

Уравнение (32.5) называется ***каноническим уравнением плоскости.***

Следствие 2. *Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой, имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Параметрические уравнения. Этот тип уравнений представляет собой другую форму записи условий (32.1) и (32.4). Пусть $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ – радиус-векторы точек M и M_0 относительно полюса O. Тогда $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и условие (32.1) может быть записано в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (32.6)$$

или, в координатной форме, в системе координат Oxy

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad (32.7)$$

Достаточность. Из первого условия следует, что алгебраическая операция в G является алгебраической операцией и в H. Что же касается аксиом, то необходимо проверить только аксиому единицы. Пусть $a \in H$, тогда, согласно условиям 1 и 2, $a^{-1} \in H$ и $aa^{-1} = e \in H$. ■

Произведение подмножеств группы. Пусть G – группа, M и N – два ее подмножества. *Произведением MN этих подмножеств* называется множество всевозможных произведений mn, где $m \in M$, $n \in N$. Итак, $MN = \{mn | m \in M, n \in N\}$. Очевидно, что имеет место свойство ассоциативности: $(MN)K = M(NK)$, так как оба этих произведения состоят из элементов $(mn)k = m(nk)$, где $m \in M$, $n \in N$, $k \in K$.

Если одно из подмножеств состоит только из одного элемента, например $M = \{m\}$, то произведение MN обозначается символом mN, а произведние NM – символом Nm, т.е. в этом контексте нет необходимости отличать элемент от состоящего из одного этого элемента множества.

Замечание. Термин "произведение", используемый здесь, весьма условен, он соответствует терминологии мультипликативной группы, принятой в теории групп. В аддитивной группе, очевидно, MN состоит из сумм $m + n$ элементов подмножеств M и N и обозначается в зависимости от контекста символом $M + N$.

Смежные классы. Пусть H – подгруппа группы G, a – элемент группы G. Множество aH называется *левым смежным классом* группы G по подгруппе H, *порожденным элементом a*, а множество Ha – *правым смежным классом*. Из определения вытекают следующие простейшие свойства смежных классов.

1°. $a \in aH$, $a \in Ha$, так как подгруппа H содержит единицу.

2°. *Смежный класс состоит из элементов группы, причем любой элемент группы входит в какой-нибудь смежный класс* (в силу свойства 1°).

3°. *Подгруппа H является одним из смежных классов* (как левых, так и правых), поскольку $H = eH = He$.

4°. *В абелевой группе $aH = Ha$, $\forall a \in G$.*

Таблица 1 содержит примеры смежных классов.

Теорема 38.2. *Смежный класс порождается любым своим элементом.*

Доказательство. Надо показать, что если $g \in aH$, то $aH = gH$. Пусть $g = ah_1$, $h_1 \in H$. Тогда для любого элемента $h \in H$ имеем $ah = (ah_1)(h_1^{-1}h) = gh_2$, где $h_2 = h_1^{-1}h \in H$ в силу теоремы 38.1. Значит, $aH \subset gH$. В то же время $gh = a(h_1h) = ah_2$, где $h_2 = h_1h_2 \in H$. Следовательно, $gH \subset aH$, и с учетом вложения в другую сторону получаем требуемое равенство. Доказательство проведено для левого смежного класса, но очевидно, что оно может быть использовано и для правого. ■

Теорема 38.3. *Любые два левых (правых) смежных класса либо совпадают, либо не пересекаются.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 38.2, так как если два смежных класса aH и bH имеют общий элемент g, то $aH = bH = gH$. ■

Таблица 1

G	H	aH
$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$	$H = \{2k \| k \in \mathbb{Z}\}$	$mH = Hm = \{m + 2k \| k \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} \| n \equiv m (\mathrm{mod}\, 2)\}$. Итак, аддитивная группа целых чисел разбивается на два смежных класса по подгруппе четных чисел: это классы всех четных и всех нечетных чисел
$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$	Пусть $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. $H = \{pk \| k \in \mathbb{Z}\}$	$mH = Hm = \{n \in \mathbb{Z} \| n \equiv m (\mathrm{mod}\, p)\}$ (см. (7.1)). Итак, аддитивная группа целых чисел разбивается на p смежных классов по подгруппе H чисел, кратных p: $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$, где C_r – класс вычетов по модулю p
$\langle \mathbb{R}^n, + \rangle$	Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. $H = \{x \in \mathbb{R}^n \| Ax = 0\}$	Положим $Aa = b$. Тогда $aH = Ha = \{a + x \| Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \| Ax = b\}$. Итак, смежный класс аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ по подгруппе решений однородной системы $Ax = 0$, порожденный элементом a, представляет собой множество всех решений неоднородной системы $Ax = b$, частным решением которой является a
$\langle V, + \rangle$, где V – линейное пространство	Пусть L – линейное подпространство V, $H = L$	Пусть $x_0 \in V$. Тогда $x_0H = Hx_0 = \{x_0 + x \| x \in L\}$ – линейное многообразие $x_0 + H$

Итак, вся группа разбивается на непересекающиеся левые (правые) смежные классы по подгруппе H. Это разбиение называется *левосторонним (соответственно правосторонним) разложением группы G по подгруппе H.*

§39. Конечная группа

Группа, состоящая из конечного числа элементов, называется *конечной группой.* Число элементов конечной группы называется ее *порядком* и обозначается символом $\mathrm{card}\, G$. Очевидно, алгебраическая операция в конечной группе может быть представлена "таблицей умножения" ее элементов. Этим мы воспользуемся в следующих примерах.

1. Группа из одного элемента состоит только из единицы: $G = \{e\}$, при этом алгебраическая операция определяется таблицей

	e
e	e

в следующем виде:

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Полагая $a = -C/A$, $b = -C/B$ (для прямой) и $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$ (для плоскости), получим эквивалентные уравнения

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

называемые ***уравнениями*** прямой и соответственно плоскости ***в отрезках.*** Числа a, b, c в этих уравнениях имеют простой геометрический смысл (рис. 3): они равны величинам отрезков, которые отсекает прямая (плоскость) на осях координат.

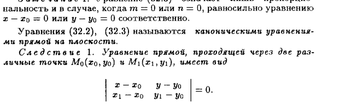


Рис. 3

Векторные уравнения. 1. Параметрическое уравнение (32.6) представляет собой векторное уравнение прямой на плоскости через направляющий вектор.

Аналогично параметрическое уравнение (32.8) представляет собой векторное уравнение плоскости в пространстве через направляющие векторы. Оно порождает другие формы векторных уравнений плоскости. В самом деле, это уравнение означает компланарность векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, что согласно критерию компланарности (теорема 23.4) равносильно равенству

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 0 \qquad (32.14)$$

или, в силу линейности смешанного произведения,

$$(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = D, \qquad (32.15)$$

где D – константа, равная $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$.

Уравнения (32.14), (32.15) представляют собой векторные уравнения плоскости через смешанное произведение.

2. Из аксиом геометрии следует, что на плоскости (в пространстве) через заданную точку проходит единственная прямая (соответственно плоскость), перпендикулярная заданному вектору.

Теорема 32.6. *Уравнение прямой на плоскости (плоскости в пространстве), проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n}$, имеет вид*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \qquad (32.16)$$

или, что то же самое,

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D, \qquad (32.17)$$

где D – константа, равная $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из того, что точка $M(\mathbf{r})$ лежит на прямой (на плоскости) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{n}$ ортогональны. ■

Уравнения (32.16), (32.17) представляют собой векторные уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве через нормали.

§33. Взаимное расположение прямых на плоскости (плоскостей в пространстве)

Взаимное расположение двух прямых (плоскостей). Пусть на плоскости (в пространстве) две прямые (две плоскости) заданы общими уравнениями в аффинной системе координат Oxy ($Oxyz$):

$$l_i : A_ix + B_iy + C_i = 0, \quad A_i^2 + B_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2, \qquad (33.1)$$

и соответственно

$$\pi_i : A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \quad A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2. \qquad (33.2)$$

Составим матрицы из коэффициентов этих уравнений:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \qquad (33.3)$$

для прямых и

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} \qquad (33.4)$$

для плоскостей. Очевидно, что в обоих случаях $1 \leq \mathrm{rg}\, A \leq 2$, $1 \leq \mathrm{rg}\, B \leq 2$, $\mathrm{rg}\, A \leq \mathrm{rg}\, B$. Следовательно, для рангов матриц A и B возможны только следующие три набора значений:

rg A	rg B
1	2
1	1
2	2

(33.5)

$$C_m + C_n = C_r, \quad \text{где } r \equiv (m + n)(\mathrm{mod}\, p). \qquad (40.3)$$

Итак, $\mathbb{Z}_p$ – аддитивная группа вычетов по модулю p.

§41. Морфизмы групп

Изоморфизм. Уже примеры конечных групп (§39) приводят к естественному выводу, что все группы (например, третьего порядка) обнаруживают большое сходство: алгебраические операции в них описываются одной и той же таблицей умножения. Общий подход к различению или, напротив, к отождествлению групп предлагает понятие изоморфизма.

Две группы G_1 и G_2 с операциями $*_1$ и $*_2$ называют *изоморфными*, если существует биективное отображение $f : G_1 \to G_2$, которое сохраняет групповую операцию, т.е. $f(a *_1 b) = f(a) *_2 f(b)$, $\forall a, b \in G_1$. Обозначение: $G_1 \cong G_2$. Само отображение f при этом называют *изоморфизмом.*

Примеры. 1. Аддитивные группы целых чисел и четных чисел изоморфны, так как отображение $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, есть изоморфизм.

2. Мультипликативная группа положительных вещественных чисел и аддитивная группа всех вещественных чисел изоморфны. В качестве изоморфного отображения f можно взять $f(a) = \ln a$. Известное свойство логарифма $\ln ab = \ln a + \ln b$ как раз моделирует условие изоморфизма.

Отметим простейшие свойства изоморфизма.

1°. *Отношение изоморфизма является отношением эквивалентности на множестве всех групп.*

Действительно, рефлексивность следует из того, что тождественное отображение является изоморфизмом; симметричность – из того, что если f – изоморфизм, то f^{-1} (которое существует в силу биективности f) тоже является изоморфизмом, так как $f^{-1}(a' *_2 b') = \{a' = f(a), b' = f(b)$ в силу сюръективности $f\} = f^{-1}(f(a) *_2 f(b)) = \{$ибо f – изоморфизм $\} = f^{-1}f(a *_1 b) = a *_1 b = f^{-1}(a') *_1 f^{-1}(b')$; транзитивность – из того, что суперпозиция изоморфизмов, как легко проверить, также является изоморфизмом.

2°. *В изоморфных группах G_1 и G_2 образ (и прообраз) единицы является единицей.*

Действительно, если $a *_1 e = e *_1 a = a$, то $f(a) *_2 f(e) = f(e) *_2 f(a) = f(a)$. Отсюда с учетом того, что элементами $f(a)$ исчерпывается вся группа G_2 (в силу сюръективности f), следует, что $f(e) = e'$ – единица в G_2. Следовательно, образом единицы e является единица e'. Значит, и прообразом единицы e' является e и, в силу инъективности f, только e.

3°. *В изоморфных группах G_1 и G_2 образ (и прообраз) обратного элемента является обратным элементом, т.е. $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.*

Доказательство этого факта аналогично доказательству 2°, оно опирается на определение обратного элемента.

Изоморфное отображение группы G на себя называется *автоморфизмом.* Несложная проверка показывает, что множество всех автоморфизмов группы образует группу относительно суперпозиции отображений.

Гомоморфизм. Две группы G_1 и G_2 с операциями $*_1$ и $*_2$ называют *гомоморфными*, если существует отображение $\varphi : G_1 \to G_2$, сохраняющее групповую операцию. Само отображение φ называется *гомоморфизмом.*

Отметим простейшие свойства гомоморфизма. В гомоморфных группах

1) *образом единицы является единица, т.е.* $\varphi(e) = e'$, где e и e' – единицы групп G_1 и G_2;

2) *образом обратного элемента является обратный элемент к образу:* $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

Доказательства этих свойств повторяют доказательства аналогичных свойств изоморфизма. Отметим лишь, что к гомоморфизму относятся только первые части свойств изоморфизма.

Пусть φ – гомоморфизм группы G_1 на группу G_2. Множество $\ker \varphi = \{a \in G_1 | \varphi(a) = e'\}$ называется *ядром гомоморфизма φ.*

Теорема 41.1. *Нормальные делители группы, и только они, являются ядрами гомоморфизмов этой группы.*

Доказательство. Достаточность. Ядро гомоморфизма φ группы G_1 является подгруппой группы G_1, так как для него выполнены оба условия теоремы 38.1:

1) если $h_1, h_2 \in \ker \varphi$, то $\varphi(h_1 *_1 h_2) = \varphi(h_1) *_2 \varphi(h_2) = e' *_2 e' = e'$, т.е. $h_1 *_1 h_2 \in \ker \varphi$;

2) если $h \in \ker \varphi$, то $\varphi(h) = e'$ и, значит, $\varphi(h^{-1}) = (e')^{-1} = e'$, т.е. $h^{-1} \in \ker \varphi$.

Эта подгруппа является нормальным делителем, так как для нее выполнено условие теоремы 40.1: если $h \in \ker \varphi$ и $c \in G$, то $\varphi(c^{-1} *_1 h *_1 c) = \varphi(c^{-1}) *_2 \varphi(h) *_2 \varphi(c) = \varphi(c^{-1}) *_2 \varphi(c) = \varphi(c^{-1} *_1 c) = \varphi(e) = e'$, т.е. $c^{-1} *_1 h *_1 c \in \ker \varphi$.

Необходимость. Пусть H – подгруппа группы G с операцией $\cdot$, покажем, что существует некоторая группа G' и некоторый гомоморфизм $\varphi : G \to G'$, ядром которого является подгруппа H. В качестве группы G' возьмем фактор-группу $G|H$ группы G по нормальному делителю H. В качестве гомоморфизма возьмем отображение $\varphi : G \to G|H$, которое каждому элементу $a \in G$ ставит в соответствие смежный класс aH, так что $\varphi(a) = aH$. Отображение φ является гомоморфизмом, так как $\varphi(ab) = (ab)H = \{$ согласно (40.2) $\} = (aH)(bH) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\forall a, b \in G$. ■

Построенное отображение $\varphi : G \to G|H$ называется *естественным гомоморфизмом.*

§42. Кольцо

Определение, простейшие свойства. Перейдем к рассмотрению множеств, наделенных двумя алгебраическими операциями. Будем называть одну из этих операций сложением (и обозначать символом $+$), а другую – умножением (и обозначать символом $\cdot$).

Непустое множество K, наделенное двумя алгебраическими операциями – сложением и умножением, называется ***кольцом***, если эти операции удовлетворяют следующим аксиомам: $\forall a, b, c \in K$

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $\exists 0 \in K : a + 0 = 0 + a$;
4) $\forall a \in K \ \ \exists -a \in K : a + (-a) = (-a) + a = 0$;
5) $(ab)c = a(bc)$;

Множество всех плоскостей пространства, проходящих через прямую l, называется *пучком плоскостей* с осью l. Обозначение: $\pi(l)$. Пусть π_1 и π_2 – две пересекающиеся плоскости пучка $\pi(l)$, заданные уравнениями (33.2) в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$. Положим $F_i(x, y, z) = A_ix + B_iy + C_iz + D_i$, где $i = 1, 2$.

Теорема 33.4. *Плоскость принадлежит пучку $\pi(l)$ тогда и только тогда, когда она определяется уравнением*

$$\alpha F_1(x, y, z) + \beta F_2(x, y, z) = 0 \qquad (33.11)$$

при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, одновременно не равных нулю.

Доказательство теоремы, по существу, повторяет доказательство теоремы 33.3. Отметим лишь, что в данном случае точка M_1 – любая точка плоскости, не лежащая на оси l. ■

Уравнение (33.11) называется ***уравнением пучка плоскостей***, проходящих через прямую пересечения плоскостей (33.2).

§34. Полуплоскости и полупространства

Из аксиом геометрии следует, что каждая прямая l на плоскости разбивает эту плоскость на две полуплоскости, при этом точки M_1 и M_2, не лежащие на прямой l, принадлежат одной полуплоскости, если отрезок $[M_1M_2]$ не имеет общих точек с прямой l, в противном случае они принадлежат разным полуплоскостям. Выясним, как этот геометрический факт описывается в аналитической форме.

Пусть прямая l в аффинной системе координат Oxy определяется уравнением

$$Ax + By + C = 0. \qquad (34.1)$$

Теорема 34.1. *Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ принадлежат разным полуплоскостям относительно прямой l тогда и только тогда, когда*

$$(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0. \qquad (34.2)$$

Доказательство. Предварительно заметим, что точка $M_0(x_0, y_0)$ является внутренней точкой отрезка $[M_1M_2]$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1M_0} = t\overrightarrow{M_0M_2}$, где $0 < t < 1$, т.е.

$$x_0 = x_1 + tx_2, \ y_0 = y_1 + ty_2, \quad 0 < t < 1.$$

Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ принадлежат разным полуплоскостям тогда и только тогда, когда существует точка $M_0(x_0, y_0)$, общая для прямой l и отрезка $[M_1M_2]$, причем точка M_0 является внутренней точкой отрезка $[M_1M_2]$, т.е.

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ x_0 = x_1 + tx_2, \ y_0 = y_1 + ty_2, \quad 0 < t < 1. \end{cases}$$

С учетом очевидного тождества $C = tC + (1 - t)C$ получим, что точки M_1, M_2 принадлежат разным полуплоскостям тогда и только тогда, когда существует число t такое, что

$$t(Ax_1 + By_1 + C) + (1 - t)(Ax_2 + By_2 + C) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

или, в обозначениях $Ax_1 + By_1 + C = F_1$, $Ax_2 + By_2 + C = F_2$,

$$(1 - t)F_1 + tF_2 = 0, \quad 0 < t < 1.$$

Это равносильно тому, что $F_1F_2 < 0$. ■

Итак, для координат (x, y) всех точек одной полуплоскости выполняется неравенство $Ax + By + C > 0$, а другой – неравенство $Ax + By + C < 0$. Полуплоскость, для точек $M(x, y)$ которой $Ax + By + C > 0$, называется ***положительной полуплоскостью*** относительно уравнения (34.1) прямой l и обозначается символом π_+, а полуплоскость, для точек которой $Ax + By + C < 0$, – ***отрицательной полуплоскостью*** и обозначается π_-.

Теорема 34.2. *Вектор нормали $\mathbf{n} = \{A, B\}$ к прямой l: $Ax + By + C = 0$, отложенный от любой точки прямой, направлен в сторону положительной полуплоскости.*

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка прямой l. Отложим вектор $\mathbf{n}$ от точки M_0, пусть конец вектора $\mathbf{n}$ совпадает с точкой $M_1(x_1, y_1)$. Тогда $\mathbf{n} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\} = \{A, B\}$ и, следовательно, $x_1 = A + x_0$, $y_1 = B + y_0$. Подставив координаты x_1, y_1 точки M_1 в левую часть уравнения прямой l, получаем, что $Ax_1 + By_1 + C = A^2 + B^2 + Ax_0 + By_0 + C = A^2 + B^2 > 0$, так как $Ax_0 + By_0 + C = 0$ и $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. ■

Аналогичные факты имеют место и в пространстве. Плоскость

$$\pi : \quad Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (34.3)$$

разбивает пространство на два полупространства.

Теорема 34.3. *Точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ принадлежат разным полупространствам относительно плоскости π тогда и только тогда, когда*

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0.$$

Доказательство теоремы принципиально не отличается от доказательства теоремы 34.1. ■

Полупространство, для точек $M(x, y, z)$ которого $Ax + By + Cz + D > 0$, называется ***положительным полупространством*** относительно уравнения (34.3) плоскости π, а полупространство, для точек которого $Ax + By + Cz + D < 0$, – ***отрицательным полупространством.***

Теорема 34.4. *Вектор нормали $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ к плоскости π: $Ax + By + Cz + D = 0$, отложенный от любой точки плоскости, направлен в сторону положительного полупространства.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 34.2. ■

1°. *Поле обладает всеми свойствами кольца.*

2°. *В поле нет делителей нуля*, так как если $ab = 0$, $a \neq 0$, то $a^{-1}(ab) = b = 0$.

Следствие. Умножение является алгебраической операцией на множестве всех ненулевых элементов поля.

3°. *В поле P множество всех ненулевых элементов образует мультипликативную коммутативную группу*, и поэтому в поле:

а) *существует, и притом единственная, единица, причем* $1 \neq 0$;

б) *для любого элемента $a \neq 0$ существует, и притом единственный, обратный элемент*;

в) *для любых $a, b \in P$, $a \neq 0$, уравнение $ax = b$ имеет единственное решение, при этом $x = a^{-1}b = ba^{-1}$*; этот элемент называется *частным от деления b на a* и обозначается символом $\dfrac{b}{a}$ или b/a.

4°. *В поле сохраняются все обычные правила обращения с дробями:*

а) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, так как равенство $b^{-1}a = cd^{-1}$ равносильно равенству $b(b^{-1}a)d = b(cd^{-1})d$, т.е. $ad = bc$;

б) $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$, $\quad \dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$;

в) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$.

Правила "б","в" доказываются так же, как и "а".

Тем самым все правила и формулы элементарной алгебры полностью сохраняются в любом поле, так как в их основе лежат одни и те же свойства операций сложения, вычитания, умножения и деления.

Элементы поля называют ***числами.*** Очевидно, множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел и $\mathbb{R}$ всех действительных чисел являются полями.

Характеристика поля. Существуют поля, в которых некоторое целое кратное 1, т.е. $n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n}$, равно нулю. Наименьшее натуральное число n, обладающее этим свойством, называется ***характеристикой поля.*** Если указанное свойство не имеет места ни для какого натурального числа n, то говорят, что такое поле имеет характеристику 0. Очевидно, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ – поля характеристики 0.

Теорема 43.1. *Характеристикой поля может быть либо 0, либо простое число.*

Доказательство. Пусть n – характеристика поля и n – составное число, т.е. $n = mk$, где $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $m < n$, $k < n$. Тогда в силу дистрибутивности

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{m}\underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{k} = 0.$$

Так как в поле нет делителей нуля, то отсюда следует, что либо

$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m} = 0$, либо $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k} = 0$, т.е. n – не наименьшее натуральное число, обладающее указанным свойством. ■

Поле вычетов. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_p$ не будет полем, если p составное, так как в этом случае в кольце $\mathbb{Z}_p$ есть делители нуля (§42).

Теорема 43.2. *Если p – простое число и $p \geq 2$, то $\mathbb{Z}_p$ – поле характеристики p.*

Доказательство. Покажем, что $\mathbb{Z}_p$ – поле. Так как $\mathbb{Z}_p$ – коммутативное кольцо с единицей (§42), то достаточно показать, что для любого элемента $C_m \in \mathbb{Z}_p$, $m \neq 0$, существует обратный элемент. Для этого рассмотрим все возможные произведения C_mC_k, где $k = \overline{0, p-1}$. Этих произведений ровно p (т.е. столько же, сколько элементов в $\mathbb{Z}_p$), и все они различны, так как из того, что $C_mC_k = C_mC_n$, $k \neq n$, следует, что $mk \equiv mn (\mathrm{mod}\, p)$ или что $mk - mn$ делится нацело на p. Следовательно, $m(k - n)$ делится на p, причем $0 < m < p$, $0 < k - n < p$. Это означает, что p – составное число. Таким образом, произведения C_mC_k ($k = \overline{0, p-1}$) по одному разу пробегают все множество $\mathbb{Z}_p$ и, значит, одно из них совпадает с C_1. Итак, для любого класса C_m, где $m \neq 0$, существует класс C_k такой, что $C_mC_k = C_1$. Следовательно, $\mathbb{Z}_p$ – поле. Характеристика этого поля равна p, так как $\underbrace{C_1 + C_1 + \ldots + C_1}_{p} = C_0$, $\underbrace{C_1 + C_1 + \ldots + C_1}_{m} = C_m \neq C_0$ при $m < p$. ■

Замечание. До сих пор при изучении алгебраических объектов мы предполагали, что в их основе лежат вещественные числа: вещественные матрицы, вещественные линейные пространства, вещественные системы линейных алгебраических уравнений, многочлены с вещественными коэффициентами. Все факты, касающиеся этих объектов, остаются справедливыми, если вместо поля вещественных чисел рассматривать любое поле. Это легко проверить, так как доказательства всех фактов опирались лишь на свойства алгебраических операций в поле.

Впредь вместо термина "вещественная матрица" будем употреблять термин "матрица над полем P", так же как и термины "линейное пространство над полем P", "система линейных алгебраических уравнений над полем P", "многочлен над полем P".

$$x - x_0 = 0, \quad \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}.$$

Если же $m = 0$, $n = 0$, то уравнения (36.3) переходят в уравнения

$$x - x_0 = 0, \quad y - y_0 = 0,$$

т.е. прямая является линией пересечения плоскостей $x - x_0 = 0$ и $y - y_0 = 0$.

3. Для прямой, проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, легко получить уравнения (36.1)–(36.3), так как в качестве направляющего вектора может быть взят вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$.

4. Векторное уравнение (36.1) порождает и другие формы векторных уравнений прямой в пространстве. В самом деле, это уравнение означает коллинеарность векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$, что согласно критерию коллинеарности (теорема 23.2) равносильно равенству

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0} \qquad (36.4)$$

или, в силу линейности векторного произведения,

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}, \quad \text{где } \mathbf{M} = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]. \qquad (36.5)$$

Заметим, что уравнения (36.4) и (36.5) лишены смысла для прямой на плоскости; по своей структуре они близки к уравнениям (32.14) и (32.15) плоскости в пространстве.

5. Каждая прямая может быть представлена как пересечение двух плоскостей. Практически уравнения (36.3) задают прямую именно таким образом, так как они эквивалентны системе из двух линейных уравнений, каждое из которых определяет плоскость. Дадим общую формулировку этого факта. В аффинной системе координат $Oxyz$ прямая l, являющаяся линией пересечения плоскостей

$$\pi_i : A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \qquad i = 1, 2,$$

определяется системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (36.6)$$

где

$$\mathrm{rg} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 2. \qquad (36.7)$$

Условие (36.7) означает, что плоскости π_1 и π_2 пересекаются (§33, замечание). Систему (36.6) называют ***общими уравнениями*** прямой в пространстве.

Важно уметь переходить от одного типа уравнения прямой к другому. Переход от каждого из уравнений (36.1)–(36.5) к любому другому очевиден. Для перехода от (36.6) к (36.1)–(36.5) необходимо найти точку M_0 и направляющий вектор $\mathbf{a}$. Координаты точки M_0 можно найти как частное решение системы (36.6). Найдем вектор $\mathbf{a}$.

Теорема 36.1. *Если в аффинной системе координат $Oxyz$ прямая l задана общими уравнениями* (36.6), *то вектор*

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \qquad (36.8)$$

является направляющим вектором этой прямой.

Доказательство. Отметим прежде всего, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ в силу условия (36.7). Далее, вектор $\mathbf{a}$ параллелен плоскостям π_1 и π_2, так как разложения определителей

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

по первой строке совпадают с условиями (32.13) параллельности вектора $\mathbf{a}$ плоскостям π_1 и π_2. Итак, ненулевой вектор $\mathbf{a}$ параллелен каждой из плоскостей π_1 и π_2. Следовательно, он является направляющим вектором линии их пересечения. ■

Замечание 1. Для запоминания координат вектора $\mathbf{a}$ может быть использован мнемонический определитель

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – базис, соответствующий системе координат $Oxyz$. Разложение этого определителя по первой строке совпадает с разложением вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Замечание 2. Теорема 36.1 относится к аффинной системе координат. Очевидно, что в прямоугольной декартовой системе координат, соответствующей ортонормированному базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, вектор (36.8) может быть получен как векторное произведение $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к плоскостям π_1 и π_2.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Пусть каждая из прямых l_i, $i = 1, 2$, задана точкой $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и направляющим вектором $\mathbf{a}_i = \{m_i, n_i, k_i\}$ в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$. Положим $\mathbf{b} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Теорема 36.2. *Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (36.9)$$

Глава IX. **Комплексные числа**

В этой главе рассматривается новая система чисел, которая является расширением поля действительных чисел. Подобно известной из элементарной алгебры цепочке расширений $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, каждое звено которой связано с необходимостью решения той или иной задачи, расширение действительных чисел связано с проблемой решения квадратных уравнений. Мы расширим поле действительных чисел так, чтобы любое квадратное уравнение, в частности простейшее из них $x^2+1=0$, имело решение. Прежде чем вводить эти числа, отметим, что при каждом известном расширении "старые" числа становились частью "новых", т.е. отождествлялись с некоторым классом новых чисел. Например, натуральное число 5 отождествлялось с целым числом $+5$, или с рациональным числом $\frac{5}{1}$, или с действительным числом $4,9999\ldots$

§44. Поле комплексных чисел

Понятие комплексного числа. *Комплексными числами* называются упорядоченные пары (a,b) вещественных чисел, для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления с вещественными числами вводятся согласно следующим правилам (аксиомам):

1) $(a,b)=(c,d) \iff a=c,\ b=d$;
2) $(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$;
3) $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$;
4) пара $(a,0)$ отождествляется с действительным числом a.

Обозначения: $z=(a,b)$, $\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел.

Замечание 1. В первых трех аксиомах речь идет об определении разных понятий, поэтому их сопоставление не может привести к каким-либо противоречиям. В несколько другом положении находится аксиома 4. Дело в том, что понятия равенства, суммы и произведения для вещественных чисел уже имеют определенный смысл и они *не должны противоречить* правилам 1 – 3. Но, как нетрудно проверить, правила 1 – 3 для вещественных чисел, как пар специального вида, совпадают с обычными правилами равенства, сложения и умножения вещественных чисел (проверьте!).

Теорема 44.1. *Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел является полем.*

Доказательство. Действительно, сложение и умножение являются алгебраическими операциями на множестве $\mathbb{C}$, при этом непосредственной проверкой легко установить, что они подчиняются

всем аксиомам поля. Отметим лишь, что $0=(0,0)$; $1=(1,0)$; $-z=(-a,-b)$; $z^{-1}=(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$, если $z=(a,b)\neq 0$. ■

Следствие 1. *Для любой пары комплексных чисел $z_1=(a,b)$, $z_2=(c,d)$ существует, и притом единственная, разность $z_1-z_2=(a-c,b-d)$.*

Следствие 2. *Для любой пары комплексных чисел $z_1=(a,b)$, $z_2=(c,d)\neq 0$ существует, и притом единственное, частное*

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Алгебраическая форма комплексного числа. Введем обозначение: $i=(0,1)$. Из аксиом 1 – 4 непосредственно вытекают следующие свойства комплексных чисел.

1°. $i^2=-1$, так как $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

2°. Любое комплексное число $z=(a,b)$ может быть записано в виде

$$z=a+bi, \tag{44.1}$$

так как $z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)$.

Форма (44.1) записи комплексного числа $z=(a,b)$ называется ***алгебраической формой числа*** z, при этом число a называется ***действительной частью*** комплексного числа $z=a+bi$ и обозначается символом $\operatorname{Re} z$, а b – ***мнимой частью*** и обозначается $\operatorname{Im} z$. Подчеркнем, что $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$. Для вещественных чисел мнимая часть равна нулю. Комплексные числа, у которых действительная часть равна нулю, называются *чисто мнимыми*. Очевидно, два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда отдельно равны их действительные и мнимые части.

Комплексное число $\overline{z}=a-bi$ называется ***сопряженным*** к числу $z=a+bi$.

Теорема 44.2. *Операция сопряжения комплексного числа обладает следующими свойствами:*

1) $\overline{\overline{z}}=z$;
2) $z=\overline{z} \iff z\in\mathbb{R}$;
3) $\overline{z}+z=2a$, $\forall z=a+bi$;
4) $\overline{z}z=a^2+b^2$, $\forall z=a+bi$;
5) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$; $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$; $\overline{(z_1/z_2)}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$, $z_2\neq 0$.

Все свойства проверяются непосредственно исходя из определения. ■

Замечание 2. Для комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, операции сложения, вычитания, умножения и деления производятся по обычным правилам выполнения этих операций над двучленами $a+bi$ с учетом того, что $i^2=-1$, и последующим приведением подобных членов (т.е. отдельно группируются вещественные числа и чисто мнимые). Особенно это удобно для умножения чисел: если $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, то $z_1z_2=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci-bd=$

$|z_n|\le R$. Последовательность z_n оказалась ограниченной, и из нее согласно лемме 5 можно выделить сходящуюся подпоследовательность $z_{n_k}\to z_0$. Тогда в силу непрерывности $|f(z)|$ (лемма 3)

$$\lim_{k\to\infty}|f(z_{n_k})|=|f(z_0)|. \tag{49.3}$$

С другой стороны, из (49.2) и определения нижней грани имеем $m\le |f(z_{n_k})|\le m+\frac{1}{n_k}$, поэтому

$$\lim_{k\to\infty}|f(z_{n_k})|=m. \tag{49.4}$$

Сопоставление (49.3) и (49.4) приводит к требуемому равенству

$$|f(z_0)|=m. ■$$

Лемма 7 (лемма Даламбера). *Если $f(z)$ – многочлен степени $n\ge 1$ и $f(z_0)\neq 0$, то найдется число z_1 такое, что $|f(z_1)|<|f(z_0)|$.*

Доказательство. Разложим многочлен $f(z)$ по степеням $z-z_0$:

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n. \tag{49.5}$$

Очевидно, что $c_0=f(z_0)\neq 0$. Пусть c_k – первый ненулевой коэффициент в (49.5) после c_0 (такой коэффициент имеется, так как $f(z)$ не константа). Тогда

$$f(z)=c_0+c_k(z-z_0)^k+c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots+c_n(z-z_0)^n=c_0\Big(1+$$
$$+\tfrac{c_k}{c_0}(z-z_0)^k+\tfrac{c_k}{c_0}(z-z_0)^k\big(\tfrac{c_{k+1}}{c_k}(z-z_0)+\ldots+\tfrac{c_n}{c_k}(z-z_0)^{n-k}\big)\Big)=$$
$$=c_0\Big(1+\frac{c_k}{c_0}(z-z_0)^k+\frac{c_k}{c_0}(z-z_0)^kg(z-z_0)\Big), \tag{49.6}$$

где $g(z-z_0)=\dfrac{c_{k+1}}{c_k}(z-z_0)+\ldots+\dfrac{c_n}{c_k}(z-z_0)^{n-k}$ – многочлен от $z-z_0$ с нулевым свободным членом. По лемме 1 для $\varepsilon=1/2$ найдется такое δ, что если $|z-z_0|<\delta$, то

$$|g(z-z_0)|<1/2. \tag{49.7}$$

Оценим правую часть (49.6). Пусть $\dfrac{c_k}{c_0}=R(\cos\theta+i\sin\theta)$, $z-z_0=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Выберем r так, чтобы $Rr^k<1$. Для этого нужно взять $r<\sqrt[k]{1/R}$. Далее положим $\theta+k\varphi=\pi$, т.е. возьмем $\varphi=(\pi-\theta)/k$. При таком выборе $\dfrac{c_k}{c_0}(z-z_0)^k=-Rr^k$. Теперь положим $z_1=z_0+r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ при $r<\min(\delta,\sqrt[k]{1/R})$ и $\varphi=(\pi-\theta)/k$.

Тогда из (49.6) следует, что $f(z_1)=c_0\left(1-Rr^k-Rr^kg(z_1-z_0)\right)$, и тем самым

$$|f(z_1)|=|c_0|\left|1-Rr^k-Rr^kg(z_1-z_0)\right|\le$$
$$\le|c_0|\left(|1-Rr^k|+Rr^k|g(z_1-z_0)|\right)\le\{\text{в силу выбора } r \text{ и } (49.7)\}\le$$
$$\le|c_0|\left(1-Rr^k+Rr^k/2\right)=|c_0|\left(1-Rr^k/2\right)<|c_0|=|f(z_0)|. ■$$

Доказательство основной теоремы. Пусть $f(z)$ – произвольный многочлен над полем $\mathbb{C}$ от комплексной переменной z степени $n\ge 1$. Согласно лемме 6 множество всевозможных значений $|f(z)|$ имеет точную нижнюю грань m, которая достигается в некоторой точке z_0, так что $|f(z_0)|=m$. Тогда $f(z_0)=0$, так как в противном случае, если $|f(z_0)|\neq 0$, то согласно лемме 7 найдется точка z_1, для которой $|f(z_1)|<|f(z_0)|=\inf|f(z)|$, что невозможно. Таким образом, z_0 – корень $f(z)$ и поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел алгебраически замкнуто. ■

§50. Каноническое разложение многочлена над полем комплексных чисел

Теорема 50.1. *Для любого многочлена $f(z)=\sum_{k=0}^n a_kz^k\in\mathbb{C}[z]$ степени $n\ge 1$ существуют числа $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{C}$ такие, что*

$$f(z)=a_n(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_n). \tag{50.1}$$

Это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство. Из алгебраической замкнутости поля $\mathbb{C}$ следует существование корня $c_1\in\mathbb{C}$ многочлена $f(z)$. Тогда в кольце $\mathbb{C}[z]$ многочлен $f(z)$ делится (теорема 49.1) на многочлен $z-c_1$, так что $f(z)=(z-c_1)f_1(z)$, где $f_1(z)\in\mathbb{C}[z]$, $\deg f_1=n-1$. Если $n-1\ge 1$, то к многочлену $f_1(z)$ также применима основная теорема алгебры и, следовательно, $f(z)=(z-c_1)(z-c_2)f_2(z)$, где $f_2(z)\in\mathbb{C}[z]$, $\deg f_2=n-2$, $c_2\in\mathbb{C}$. Применив эти рассуждения n раз, найдем числа $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{C}$ такие, что

$$f(z)=(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_n)f_n, \tag{50.2}$$

где $\deg f_n=0$ и, следовательно, f_n – константа. Сравнив коэффициенты при z^n в обеих частях равенства (50.2), получим, что $f_n=a_n$. Тем самым доказано существование разложения (50.1).

Докажем его единственность. Пусть существует другое разложение:

$$f(z)=a_n(z-d_1)(z-d_2)\ldots(z-d_n). \tag{50.3}$$

Каждое число c_i из первого разложения встречается среди чисел $d_1,\ldots,d_n$ второго разложения, так как в противном случае для $c_i\neq$

2°. $|z|$ совпадает с полярным радиусом точки M, изображающей это число на комплексной плоскости (рис. 1).

3°. $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$.

4°. Модуль вещественного числа совпадает с абсолютным значением этого числа.

Аргументом комплексного числа $z\neq 0$ называется угол φ между положительным направлением оси абсцисс и радиус-вектором точки M (рис. 1), отсчитываемый от оси абсцисс в любом направлении, при этом положительным считается направление против часовой стрелки. Обозначение: $\arg z$. Из определения вытекают следующие факты.

1°. $\arg z$ не определен для $z=0$, а для $z\neq 0$ определен с точностью до слагаемого, кратного 2π, так как при одном и том же r углы, отличающиеся на слагаемое $2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$, определяют одну и ту же точку комплексной плоскости, т.е. одно и то же комплексное число.

2°. $\arg z$ отличается от полярного угла точки M тем, что $\arg z$ имеет бесконечно много значений.

3°. Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |z_1|=|z_2| \quad \text{и, если} \quad |z_1|\neq 0, \\ \arg z_1=\arg z_2+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{45.1}$$

Теорема 45.1. *Любое комплексное число $z\neq 0$ может быть записано в виде*

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{45.2}$$

где $r=|z|$, $\varphi=\arg z$.

Доказательство. Пусть $z=a+bi$. Тогда из соотношений (25.1), связывающих прямоугольные координаты с полярными, следует, что $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$ и $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. ■

Форма (45.2) записи комплексного числа называется ***тригонометрической формой*** этого числа.

Теорема 45.2. *Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 имеют место неравенства*

$$||z_1|-|z_2||\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|. \tag{45.3}$$

Доказательство. Неравенства (45.3) вытекают из правила параллелограмма сложения и вычитания комплексных чисел (§44) и неравенств треугольника (рис. 2: $\triangle OM_2M_3$, $\triangle OM_1M_2$). Это обоснование относится к случаю, когда точки O, M_1, M_2 не лежат на одной прямой (очевидно, при этом неравенства (45.3) будут строгими). Если же точки O, M_1, M_2 лежат на одной прямой, то несложный перебор вариантов расположения этих точек приводит к неравенствам (45.3), которые в некоторых из этих вариантов могут обратиться в равенства. ■

Неравенства (45.3) называют ***неравенствами треугольника на комплексной плоскости.*** Отметим, что теорема 45.2 относится только к модулям; для самих комплексных чисел неравенство не определено.

Теорема 45.3. *При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются; при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:*

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \quad \arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2; \tag{45.4}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2, \quad z_2\neq 0. \tag{45.5}$$

Доказательство. Пусть $z_k=r_k(\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k)$, где $k=1,2$. Тогда $z_1z_2=r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2))=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$. Отсюда следует (45.4). Если $z_2\neq 0$, то $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}\,\dfrac{\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$. Отсюда следует (45.5). ■

Замечание 1. Если один из сомножителей в (45.4) или z_1 в (45.5) равен нулю, то теорема относится только к модулям.

Замечание 2. Соотношения (45.4) переносятся и на любое число сомножителей (достаточно применить метод математической индукции).

§46. Возведение в степень и извлечение корня

Пусть $n\in\mathbb{Z}$ и $z\in\mathbb{C}$. Число z^n, определенное равенствами $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n}$ при $n\in\mathbb{N}$; $z^n=1$ при $n=0$ (в этом случае предполагается, что $z\neq 0$); $z^n=1/z^m$ при $m=-n\in\mathbb{N}$, называется ***n-й степенью числа*** z.

Теорема 46.1. *Если $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $n\in\mathbb{Z}$, то*

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{46.1}$$

Доказательство. Для $n\in\mathbb{N}$ равенство (46.1) вытекает из (45.4). Для $n=0$ равенство (46.1) следует из определения: $z^0=1=r^0(\cos 0+i\sin 0)$. Если $n<0$ и $n=-m$, $m\in\mathbb{N}$, то

$$z^n=\frac{1}{z^m}=\frac{1}{r^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)}=r^n(\cos m\varphi-i\sin m\varphi)=$$
$$=r^n(\cos(-m\varphi)+i\sin(-m\varphi))=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). ■$$

Формула (46.1) называется ***формулой Муавра.***

$$f(z)=((z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{n-1}))(z-c_n)=g(z)(z-c_n),$$

где $g(z)=(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{n-1})$ – многочлен степени $n-1$. Пусть $g(z)=b_0+b_1z+\ldots+b_{n-2}z^{n-2}+z^{n-1}$, тогда

$$f(z)=(b_0+b_1z+\ldots+b_{n-2}z^{n-2}+z^{n-1})(z-c_n)=$$
$$=b_0z+b_1z^2+\ldots+b_{n-2}z^{n-1}+z^n-(b_0c_n+b_1c_nz+\ldots+b_{n-2}c_nz^{n-2}+$$
$$+c_nz^{n-1})=-b_0c_n+(b_0-b_1c_n)z+\ldots+(b_{n-k-1}-b_{n-k}c_n)z^{n-k}+\ldots+z^n$$

и $f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{n-k}z^{n-k}+\ldots+z^n$. Сравним коэффициенты при z^{n-k} и учтем, что для коэффициентов b_i , $i=\overline{0,n-2}$, верны соотношения (50.5), т.е. $b_{(n-1)-k}=(-1)^k\sum{}'c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k}$, где суммирование в $\sum{}'$ ведется по всем $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n-1$. Тогда

$$a_{n-k}=b_{n-k-1}-b_{n-k}c_n=b_{(n-1)-k}-b_{(n-1)-(k-1)}c_n=$$
$$=(-1)^k\sum{}'c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k}-(-1)^{k-1}c_n\sum{}'c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_{k-1}}=$$
$$=(-1)^k\left(\sum{}'c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k}+c_n\sum{}'c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_{k-1}}\right)=$$
$$=(-1)^k\sum c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k},$$

где суммирование ведется по всем $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$. ■

Замечание. Все утверждения этого параграфа имеют место в любом алгебраически замкнутом поле.

§51. Многочлены над полем вещественных чисел

Пусть $f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ – многочлен над полем $\mathbb{R}$ степени n, т.е. $a_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{0,n}$, и $a_n\neq 0$. Так как $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, то многочлен $f(x)$ можно рассматривать и как многочлен над полем $\mathbb{C}$. Тогда, как показано в §50, этот многочлен с учетом кратностей имеет n корней (вообще говоря, комплексных).

Теорема 51.1. *Если c – комплексный (и не действительный) корень многочлена $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, то корнем многочлена будет и $\overline{c}$.*

Доказательство. Если c является корнем многочлена $f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$, то $a_0+a_1c+\ldots+a_nc^n=0$. Взяв сопряжение от обеих частей этого равенства, получим с учетом теоремы 44.2 и соотношения $\overline{a}_k=a_k$, $k=\overline{0,n}$, что $a_0+a_1\overline{c}+\ldots+a_n\overline{c}^n=0$. ■

Положим $\varphi(x)=(x-c)(x-\overline{c})=x^2-(c+\overline{c})x+|c|^2$. Очевидно, $\varphi(x)\in\mathbb{R}[x]$.

Теорема 51.2. *Если c – комплексный (но не действительный) корень многочлена $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, то в кольце $\mathbb{R}[x]$ многочлен $f(x)$ делится на $\varphi(x)$.*

Доказательство. Разделим многочлен $f(x)$ на $\varphi(x)$ в кольце $\mathbb{R}[x]$ согласно (48.1), тогда $f(x)=\varphi(x)q(x)+r(x)$, где $q(x),r(x)\in\mathbb{R}[x]$. Это же разложение можно рассматривать как результат деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ в кольце $\mathbb{C}[x]$. Но в кольце $\mathbb{C}[x]$ многочлен $f(x)$ делится нацело на $\varphi(x)$, так как c и $\overline{c}$ являются корнями $f(x)$. Отсюда и

из единственности результата деления (теорема 48.1) следует, что $f(x)=\varphi(x)q(x)$, где $q(x)\in\mathbb{R}[x]$. ■

Теорема 51.3. *Кратности корней c и $\overline{c}$ многочлена с вещественными коэффициентами совпадают.*

Доказательство. Пусть c и $\overline{c}$ – корни многочлена $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ кратностей m и k соответственно. Покажем, что $k\le m$. Пусть $k>m$. Тогда, согласно теореме 51.2, $f(x)=(\varphi(x))^m q(x)$, где $q(x)\in\mathbb{R}[x]$. Но $q(c)=0$, а $q(\overline{c})\neq 0$, что невозможно в силу теоремы 51.1. Значит, $k\le m$. Аналогично можно показать, что $m\le k$. Следовательно, $k=m$. ■

Следствие. Многочлен с вещественными коэффициентами нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень.

Теорема 51.4 (о каноническом разложении многочлена над полем $\mathbb{R}$). *Для любого многочлена $f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k\in\mathbb{R}[x]$ степени $n\ge 1$ существуют числа $c_1,\ldots,c_r\in\mathbb{R}$, где $c_i\neq c_j$ при $i\neq j$; числа $p_1,q_1,\ldots,p_s,q_s\in\mathbb{R}$, где $(p_i,q_i)\neq(p_j,q_j)$ при $i\neq j$; числа $k_1,\ldots,k_r\in\mathbb{N}$ и $l_1,\ldots,l_s\in\mathbb{N}$, где $\sum_{i=1}^r k_i+2\sum_{j=1}^s l_j=n$, такие, что*

$$f(x)=a_n\prod_{i=1}^r(x-c_i)^{k_i}\prod_{j=1}^s(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}. \tag{51.1}$$

Доказательство. Используем каноническое разложение (50.4) многочлена $f(x)$, рассматривая $f(x)$ как многочлен с комплексными коэффициентами:

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}\ldots(x-c_m)^{k_m}, \tag{51.2}$$

где $c_i\neq c_j$ при $i\neq j$ и $k_1+\ldots+k_m=n$. Числа $c_1,\ldots,c_m$ являются комплексными корнями $f(x)$. Среди этих корней могут быть и действительные. Пусть $c_1,\ldots,c_r$ – действительные корни, а $c_{r+1},\ldots,c_m$ – комплексные (не действительные). Тогда среди $c_{r+1},\ldots,c_m$ вместе с каждым корнем c_j находится и сопряженный ему корень $c_i=\overline{c}_j$, причем той же кратности, так что $k_i=k_j=l_j$ и, следовательно, $2l_j=k_i+k_j$. Объединим в (51.2) пару сомножителей:

$$(x-c_j)^{k_j}(x-c_i)^{k_i}=((x-c_j)(x-\overline{c}_j))^{l_j}=(x^2+p_jx+q_j)^{l_j},$$

где $p_j=-(c_j+\overline{c_j})\in\mathbb{R}$, $q_j=c_j\overline{c_j}\in\mathbb{R}$. Тогда

$$(x-c_{r+1})\ldots(x-c_m)=(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

и разложение (51.2) перейдет в (51.1), причем $k_1+\ldots+k_r+2(l_1+\ldots+l_s)=k_1+\ldots+k_r+k_{r+1}+\ldots+k_m=n$. ■

Разложение (51.1) называется ***каноническим разложением многочлена над полем вещественных чисел.***

Замечание. Теорема 50.3 и ее следствия справедливы и для многочленов с вещественными коэффициентами. В этом можно убедиться, если рассматривать их как многочлены с комплексными коэффициентами. Формулы Виета справедливы лишь для тех многочленов из $\mathbb{R}[x]$, которые имеют полный набор действительных корней.

Глава X. **Многочлены над произвольным полем**

В §13, 31 уже упоминались многочлены с вещественными коэффициентами в связи с линейными пространствами и в связи с алгебраическими линиями и поверхностями. В этой главе многочлены будут основным объектом изучения. Начнем с алгебраических (формальных) свойств многочленов без учета того, что многочлен является не только формальным выражением, но также и функцией.

§47. Кольцо многочленов

Пусть P – поле. *Многочленом (полиномом) n-й степени от переменной x над полем P* называется выражение

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n, \tag{47.1}$$

где a_i, $i=\overline{0,n}$, — фиксированные числа из поля P и $a_n\neq 0$. Эти числа называются ***коэффициентами многочлена***, а число a_n — ***старшим коэффициентом.*** Число $0\in P$ по определению считается многочленом с нулевыми коэффициентами и называется ***нулевым многочленом.*** Степень нулевого многочлена не определена.

Многочлен обозначается символом $f(x)$ или $f_n(x)$, степень многочлена $f(x)$ – символом $\deg f$, множество всех многочленов от переменной x над полем P – символом $P[x]$. Итак,

$$f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k\in P[x], \quad \deg f=n.$$

Замечание 1. Выражения $x,x^2,\ldots,x^n$ не несут смысловой нагрузки (пока), они должны восприниматься как символы. Таким образом, на многочлен (47.1) следует смотреть как на некоторое формальное выражение, вполне определяемое набором своих коэффициентов $a_0,a_1,\ldots,a_n$, где $a_n\neq 0$.

Два многочлена $f(x),g(x)\in P[x]$ называются ***равными***, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x.

Обозначение: $f(x)=g(x)$. Из определения следует, что нулевой многочлен равен только нулевому многочлену, а для ненулевых многочленов $f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ и $g(x)=\sum_{k=0}^s b_kx^k$ равенство $f(x)=g(x)$ означает, что

$$\deg f=\deg g=n; \qquad a_i=b_i,\ i=\overline{0,n}. \tag{47.2}$$

Равенство многочленов, определенное здесь, означает тождественное равенство, и мы будем называть его *формальным* в отличие от равенства многочленов как функций. В §49 будет доказана равносильность этих определений равенства.

Введем на множестве $P[x]$ алгебраические операции.

Суммой многочленов $f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ и $g(x)=\sum_{k=0}^s b_kx^k$ называется многочлен

$$h(x)=\sum_{k=0}^{\max(n,s)} c_kx^k, \quad \text{где} \quad c_k=a_k+b_k. \tag{47.3}$$

Здесь недостающие коэффициенты a_k или b_k заменяются нулями. Обозначение: $f(x)+g(x)$.

Из определения вытекают следующие факты.

1°. Для любого многочлена $f(x)\in P[x]$

$$f(x)+0=0+f(x)=f(x). \tag{47.4}$$

2°. Для ненулевых многочленов $f(x)$, $g(x)$, $f(x)+g(x)$

$$\deg(f+g)\le\max(\deg f,\deg g). \tag{47.5}$$

3°. Если $f(x),g(x)\in P[x]$, то $f(x)+g(x)\in P[x]$, т.е. сложение многочленов является алгебраической операцией на множестве $P[x]$.

Произведением многочленов $f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ и $g(x)=\sum_{k=0}^s b_kx^k$ называется многочлен

$$h(x)=\sum_{k=0}^{n+s} c_kx^k, \quad \text{где} \quad c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j,\ k=\overline{0,n+s}. \tag{47.6}$$

Здесь суммирование в $\sum_{i+j=k}a_ib_j$ ведется по всевозможным индексам i и j, для которых $i+j=k$. Обозначение: $f(x)g(x)$.

Из определения вытекают следующие факты.

1°. Произведение ненулевых многочленов не может быть нулевым, при этом

$$\deg fg=\deg f+\deg g. \tag{47.7}$$

2°. Если $f(x),g(x)\in P[x]$, то $f(x)g(x)\in P[x]$, т.е. умножение многочленов является алгебраической операцией на множестве $P[x]$.

3°. Операция умножения многочленов порождает операцию умножения многочлена на число из поля P как частный случай умножения многочленов: если $f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ и $\alpha\in P$, то

$$\alpha f(x)=\sum_{k=0}^n\alpha a_kx^k; \tag{47.8}$$

таким образом, на множестве $P[x]$ определен и внешний закон композиции.

Уравнение (52.2) называется ***каноническим уравнением эллипса.*** В случае когда $a=b$ (т.е. фокусы совпадают), эллипс превращается в окружность радиуса a с центром в точке $O=F_1=F_2$.

Из канонического уравнения вытекают следующие свойства эллипса.

1°. Координатные оси канонической системы координат (рис. 2) являются осями симметрии эллипса, так как вместе с точкой $M(x,y)$ эллипса точки $M_1(-x,y)$ и $M_2(x,-y)$ также принадлежат эллипсу. Начало координат канонической системы координат является центром симметрии эллипса, так как точки $M(x,y)$ и $M_3(-x,-y)$ одновременно принадлежат эллипсу. Начало координат канонической системы координат называется ***центром*** эллипса, числа $2a$ и $2b$ – ***большой*** и ***малой осями*** эллипса, а числа a и b – ***большой*** и ***малой полуосями.***

2°. Все точки эллипса лежат в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=\pm a$ и $y=\pm b$, так как для координат (x,y) точек эллипса $|x|\le a$, $|y|\le b$. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ пересечения эллипса с осями координат называются ***вершинами эллипса.***

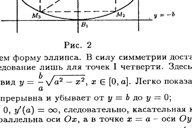


Рис. 2

3°. Исследуем форму эллипса. В силу симметрии достаточно провести это исследование лишь для точек I четверти. Здесь уравнение эллипса имеет вид $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[0,a]$. Легко показать, что:

а) $y(x)$ непрерывна и убывает от $y=b$ до $y=0$;

б) $y'(0)=0$, $y'(a)=\infty$, следовательно, касательная к эллипсу в точке $x=0$ параллельна оси Ox, а в точке $x=a$ – оси Oy;

в) $y''(x)<0$, следовательно, линия выпукла вверх (рис. 2).

Простой *способ построения эллипса* дается определением эллипса: достаточно нить длиной $2a$ закрепить концами в точках F_1 и F_2, натянуть нить карандашом и передвигать карандаш, держа нить натянутой.

Директориальное свойство. Число $\varepsilon=c/a$ называется ***эксцентриситетом эллипса.*** Из определения следует, что $0\le\varepsilon<1$, при

этом

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \quad \text{или} \quad \frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{52.6}$$

и, с учетом (52.4), (52.5),

$$r_1=a+\varepsilon x, \quad r_2=a-\varepsilon x. \tag{52.7}$$

Соотношения (52.6) означают, что чем меньше эксцентриситет, тем эллипс "ближе" к окружности (для окружности $\varepsilon=0$).

Для эллипса, не являющегося окружностью, две прямые d_1 и d_2, заданные в канонической системе координат уравнениями

$$d_1:\ x=-\frac{a}{\varepsilon}, \qquad d_2:\ x=\frac{a}{\varepsilon},$$

называются ***директрисами эллипса*** (рис. 3).

Директриса d_i называется ***соответствующей фокусу*** F_i, $i=1,2$.

Теорема 52.2. *Эллипс, не являющийся окружностью, есть геометрическое место точек M плоскости, для которых отношение расстояния от данной точки F к расстоянию до данной прямой d, не проходящей через эту точку, равно данному положительному числу, меньшему 1, т.е.*

$$\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,d)}=\varepsilon, \quad 0<\varepsilon<1. \tag{52.8}$$

Доказательство. Пусть $\rho(F,d)=m$. Найдем число $a>0$, для которого

$$m=\frac{a}{\varepsilon}-a\varepsilon. \tag{52.9}$$

Очевидно, $a=\dfrac{m\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$. Положим

$$c=a\varepsilon, \quad b^2=a^2(1-\varepsilon^2). \tag{52.10}$$

Введем прямоугольную декартову систему координат Oxy, принимая за ось Ox прямую, проходящую через точку F, перпендикулярную прямой d (рис. 4) и ориентированную от F к d; за начало O – точку на оси Ox, расположенную от точки F на расстоянии c по другую сторону от прямой d; ориентация на оси Oy выбирается произвольно.

В этой системе координат точка F имеет координаты $(c,0)$, а прямая d определяется уравнением $x=a/\varepsilon$, так как $c+m=a\varepsilon+m=a/\varepsilon$ (рис. 4). Условие (52.8) для точки $M(x,y)$ означает, что

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right|\varepsilon.$$

Если $r(x)-r_1(x)\neq 0$, то и $q(x)-q_1(x)\neq 0$, при этом степень правой части равенства (48.3) меньше s (в силу (47.5) и (48.1)), а левой части – не меньше s (в силу (47.7)), что невозможно. Следовательно, $r(x)-r_1(x)=0$, а так как в кольце $P[x]$ нет делителей нуля, то и $q(x)-q_1(x)=0$. Таким образом, $r(x)=r_1(x)$ и $q(x)=q_1(x)$. ■

Заметим, что теорема очень похожа на соответствующую теорему о делимости целых чисел. По аналогии с целыми числами многочлен $q(x)$ называется ***частным*** (или ***неполным частным***) от деления $f(x)$ на $g(x)$, а $r(x)$ – ***остатком*** от этого деления. Если $r(x)=0$, то говорят, что $f(x)$ ***делится*** (или ***нацело делится***) на $g(x)$, при этом $g(x)$ называется ***делителем*** $f(x)$. Очевидно, делителями любого многочлена $f(x)$ будут все многочлены нулевой степени и все многочлены вида $\alpha f(x)$, где $\alpha\neq 0$.

Многочлен $\varphi(x)$ называется ***общим делителем*** многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если он является делителем каждого из них. Очевидно, все многочлены нулевой степени – общие делители любой пары многочленов. Многочлены, не имеющие других общих делителей, кроме многочленов нулевой степени, называются ***взаимно простыми.***

Многочлен $d(x)$ называется ***наибольшим общим делителем*** ненулевых многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если:

1) $d(x)$ – общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$;
2) $d(x)$ делится на любой общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Обозначение: $\mathrm{HOD}(f,g)$. Очевидно, если $d(x)=\mathrm{HOD}(f,g)$, то $\alpha d(x)=\mathrm{HOD}(f,g)$ для любого $\alpha\neq 0$.

Теорема 48.2. *Для любой пары ненулевых многочленов $f(x)$, $g(x)\in P[x]$ существует наибольший общий делитель. Он определен однозначно с точностью до множителя нулевой степени.*

Доказательство. Приведем описание алгоритма построения $\mathrm{HOD}(f,g)$, называемого ***алгоритмом Евклида*** или ***алгоритмом последовательного деления.*** Он состоит в следующем.

Выполним цепочку делений с остатком согласно теореме 48.1:

$$\left\{\begin{array}{rcll} f(x) & = & g(x)q_1(x)+r_1(x), & \deg r_1<\deg g, \\ g(x) & = & r_1(x)q_2(x)+r_2(x), & \deg r_2<\deg r_1, \\ r_1(x) & = & r_2(x)q_3(x)+r_3(x), & \deg r_3<\deg r_2, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ r_{k-3}(x) & = & r_{k-2}(x)q_{k-1}(x)+r_{k-1}(x), & \deg r_{k-1}<\deg r_{k-2}, \\ r_{k-2}(x) & = & r_{k-1}(x)q_k(x)+r_k(x), & \deg r_k<\deg r_{k-1}, \\ r_{k-1}(x) & = & r_k(x)q_{k+1}(x). & \end{array}\right. \tag{48.4}$$

Степени остатков понижаются, поэтому процесс оборвется в тот момент, когда деление выполнится нацело. Пусть $r_k(x)$ – последний отличный от нуля остаток. Покажем, что $r_k(x)=\mathrm{HOD}(f,g)$. Действительно, просмотр равенств (48.4) снизу вверх показывает, что $r_k(x)$ является делителем $r_{k-1}(x)$, $r_{k-2}(x)$, … , $r_1(x)$, $g(x)$, $f(x)$, т.е. общим делителем $f(x)$ и $g(x)$. Просмотр равенств (48.4) сверху вниз

показывает, что все остатки $r_1(x)$, $r_2(x)$, … , $r_k(x)$ делятся на любой общий делитель $f(x)$ и $g(x)$.

Докажем вторую часть теоремы. Положим $d_1(x)=\mathrm{HOD}(f,g)$, $d_2(x)=\mathrm{HOD}(f,g)$. Тогда, согласно определению $\mathrm{HOD}(f,g)$, $d_1(x)=d_2(x)q_1(x)$, $d_2(x)=d_1(x)q_2(x)$ и, с учетом (47.7), $\deg d_1\ge\deg d_2$, $\deg d_2\ge\deg d_1$. Следовательно, $\deg d_1=\deg d_2$ и многочлены $d_1(x)$ и $d_2(x)$ отличаются лишь множителем нулевой степени. ■

§49. Корни многочленов

До сих пор мы рассматривали многочлен как формально-алгебраическое выражение. Однако многочлен $f(x)$ можно рассматривать и как функцию от переменной x. Если $f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ – многочлен над полем P, c – некоторое число из поля P, то число $f(c)=\sum_{k=0}^n a_kc^k$ называется ***значением многочлена $f(x)$ при $x=c$.***

Известно (из теории функций), что две функции называются равными, если их значения равны при всех значениях переменной. Очевидно, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны как многочлены (см. (47.2)), то они равны и как функции. Обратное, однако, потребует дополнительных исследований и будет доказано позже. А пока, забегая вперед, будем иметь в виду, что оба подхода к понятию равенства многочленов совпадают.

То же относится и к операциям над многочленами: сложение и умножение многочленов, определенные в §47, превращаются в сложение и умножение функций, так как если $\varphi(x)=f(x)+g(x)$, $\psi(x)=f(x)g(x)$, то $\varphi(c)=f(c)+g(c)$, $\psi(c)=f(c)g(c)$, $\forall c\in\mathbb{R}$.

Корнем многочлена $f(x)\in P[x]$ называется число $c\in P$ такое, что $f(c)=0$.

Теорема 49.1 (теорема Безу). *Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-c$ равен $f(c)$.*

Доказательство. Разделим согласно теореме 48.1 многочлен $f(x)$ на многочлен $x-c$. Тогда $f(x)=(x-c)q(x)+r(x)$, где $\deg r<\deg(x-c)=1$, так что $r(x)=r$ – константа. Беря значения обеих частей этого равенства при $x=c$, получим, что $r=f(c)$. ■

Следствие. Число $c\in P$ является корнем многочлена $f(x)\in P[x]$ тогда и только тогда, когда многочлен $f(x)$ делится на $x-c$ в кольце $P[x]$.

Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$. До сих пор все поля были равноправны. Однако в вопросе существования корней многочлена это далеко не так. Поле P называется ***алгебраически замкнутым***, если любой многочлен $f(x)\in P[x]$ степени $n\ge 1$ обладает в P хотя бы одним корнем. Очевидно, что поле действительных чисел $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым, так как многочлен x^2+1 не имеет действительных корней.

4°. Исследуем форму гиперболы. В силу симметрии достаточно провести это исследование лишь в I четверти. Здесь уравнение гиперболы имеет вид $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x\ge a$. Легко проверить, что (рис. 1):

а) $y(x)$ непрерывна и возрастает на $[a,+\infty)$, при этом $y(a)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=+\infty$;

б) $y'(a)=\infty$, так что касательная к гиперболе в точке $x=a$ параллельна оси Oy;

в) $y''(x)<0$, следовательно, линия выпукла вверх;

г) если l – прямая, заданная уравнением $y=\frac{b}{a}x$, то для всех точек $M(x,y)$ гиперболы $\lim\limits_{x\to+\infty}\rho(M,l)=0$, так как

$$\rho(M,l)=\frac{|bx/a-y|}{\sqrt{1+b^2/a^2}}=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|bx-b\sqrt{x^2-a^2}|}{\sqrt{a^2+b^2}}=$$
$$=\frac{a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}(x+\sqrt{x^2-a^2})}\to 0 \quad \text{при } x\to+\infty.$$

Итак, все точки гиперболы с ростом x сколь угодно близко приближаются к прямым

$$l_1:\ y=-\tfrac{b}{a}x \quad \text{и} \quad l_2:\ y=\tfrac{b}{a}x,$$

не пересекая их. Прямые l_1, l_2 называются ***асимптотами гиперболы.***

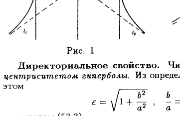


Рис. 1

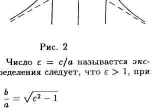


Рис. 2

Директориальное свойство. Число $\varepsilon=c/a$ называется ***эксцентриситетом гиперболы.*** Из определения следует, что $\varepsilon>1$, при этом

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}, \quad \frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$$

и, с учетом (53.3),

$$\begin{cases} r_1=-(\varepsilon x+a), \\ r_2=-(\varepsilon x-a) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r_1=\varepsilon x+a, \\ r_2=\varepsilon x-a \end{cases}$$

для левой и правой ветвей гиперболы соответственно.

Прямые d_1 и d_2, заданные в канонической системе координат уравнениями

$$d_1:\ x=-\frac{a}{\varepsilon}, \qquad d_2:\ x=\frac{a}{\varepsilon},$$

называются ***директрисами гиперболы*** (рис. 2).

Директриса d_i называется ***соответствующей*** фокусу F_i, $i=1,2$.

Теорема 53.2. *Гипербола есть геометрическое место точек M плоскости, для которых отношение расстояния от данной точки F к расстоянию до данной прямой d, не проходящей через эту точку, равно данному числу $\varepsilon>1$, т.е.*

$$\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,d)}=\varepsilon, \quad \varepsilon>1.$$

Доказательство. Так же как и в случае эллипса (теорема 52.2), для данных точки F, прямой d и числа $\varepsilon>1$ строится гипербола, для которой точка F является фокусом, прямая d – соответствующей директрисой, число ε – эксцентриситетом. Если $m=\rho(F,d)$, то полуоси гиперболы определяются соотношениями

$$m=a\varepsilon-\frac{a}{\varepsilon}, \quad c=a\varepsilon \tag{53.4}$$

или $a=\dfrac{m\varepsilon}{\varepsilon^2-1}$, $c=a\varepsilon$, $b^2=a^2(\varepsilon^2-1)$. Использование тех же преобразований, что и при доказательстве теоремы 52.2, завершает доказательство. ■

§54. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние от некоторой фиксированной точки F плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой d, не проходящей через точку F. Точка F называется ***фокусом параболы***, прямая d – ее ***директрисой.*** Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называется ***фокальным параметром*** параболы и обозначается через p. ***Эксцентриситет параболы*** по определению считается равным 1.

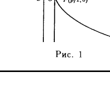


Рис. 1

d_j, $j = \overline{1,n}$, из (50.1) получим, что $f(c_i) = 0$, а из (50.3) – что $f(c_i) \neq 0$. Аналогично каждое число d_j встречается в первом разложении.

Покажем теперь, что если $c_i = d_j$, то c_i встречается в (50.1) столько же раз, сколько d_j в (50.3). Пусть c_i равно d_j и встречается в (50.1) k раз, а в (50.3) – m раз и пусть $k > m$. Положим $(z - c_i)^m = \varphi(z)$. Тогда

$$\varphi(z)(z-c_i)^{k-m} \prod_{c_s \neq c_i} (z - c_s) = \varphi(z) \prod_{d_s \neq d_j} (z - d_s),$$

откуда следует, что

$$\varphi(z)\left((z-c_i)^{k-m} \prod_{c_s \neq c_i} (z - c_s) - \prod_{d_s \neq d_j} (z - d_s)\right) = 0.$$

Так как в кольце $\mathbb{C}[z]$ нет делителей нуля и $\varphi(z) \neq 0$, то

$$(z-c_i)^{k-m} \prod_{c_s \neq c_i} (z - c_s) = \prod_{d_s \neq d_j} (z - d_s).$$

Положив в этом равенстве $z = c_i$, придем к противоречию. Итак, $k \leq m$. Аналогично показывается, что $m \leq k$. Значит, $k = m$. ■

Теорема 50.2 (о каноническом разложении многочлена над полем $\mathbb{C}$). *Для любого многочлена $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ степени $n \geq 1$ существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, где $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$, и числа $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, такие, что*

$$f(z) = a_n(z-c_1)^{k_1}(z-c_2)^{k_2}\ldots(z-c_m)^{k_m}. \qquad (50.4)$$

Это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство. Рассмотрим разложение (50.1) для многочлена $f(z)$. Среди чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ могут быть одинаковые. Будем считать, что $c_1, c_2, \ldots, c_m$ различны, а каждое из $c_{m+1}, \ldots, c_n$ равно одному из $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Объединив одинаковые сомножители в этом разложении, получим

$$f(z) = a_n(z-c_1)^{k_1}(z-c_2)^{k_2}\ldots(z-c_m)^{k_m},$$

где $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$ по построению, а $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, так как $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ – это число всех сомножителей в (50.1). Единственность разложения следует из теоремы 50.1. ■

Разложение (50.4) называется *каноническим разложением многочлена над полем комплексных чисел.*

Заметим, что числа c_i, $i = \overline{1,m}$, в каноническом разложении (50.4) являются корнями многочлена $f(z)$ (так как $f(c_i) = 0$, $i = \overline{1,m}$) и других корней этот многочлен не имеет (так как $f(\alpha) \neq 0$ для любого

числа $\alpha \neq c_i$, $i = \overline{1,m}$). Число k_i в каноническом разложении многочлена называется *кратностью корня* c_i. Если $k_i = 1$, то корень c_i называется *простым*, если $k_i > 1$ – *кратным*.

Следствие 1. *Любой многочлен $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Замечание. Это утверждение применимо и к многочлену нулевой степени, неприменимо лишь к нулевому многочлену, для которого любое число $z \in \mathbb{C}$ является корнем.

Вернемся к вопросу о равносильности двух определений равенства многочленов, о котором шла речь в начале §49.

Теорема 50.3. *Если два многочлена $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$, степени которых не превосходят $n \geq 1$, имеют равные значения при более чем n различных значениях переменной, то они равны.*

Доказательство. Действительно, многочлен $h(z) = f(z) - g(z) \in \mathbb{C}[z]$ имеет более n различных корней. Но $\deg h \leq n$, поэтому $h(z) = 0$. ■

Следствие 2. *Два многочлена $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$ равны тогда и только тогда, когда совпадают их значения при всех значениях переменной z.*

Следствие 3. *Многочлен $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени $n \geq 1$ однозначно определяется своими значениями в $n+1$ различных точках.*

Нетрудно показать, что если многочлен $f(z)$ в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, где $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, принимает значения $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_{n+1})$, то

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\alpha_i) \frac{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{i-1})(z-\alpha_{i+1})\ldots(z-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_{n+1})}.$$

Этот многочлен называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

Теорема 50.4 (формулы Виета). *Если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – корни многочлена $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, то*

$$\begin{aligned} a_{n-1}/a_n &= -(c_1 + c_2 + \ldots + c_n), \\ a_{n-2}/a_n &= +(c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_1c_n + c_2c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-k}/a_n &= (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0/a_n &= (-1)^n c_1c_2\ldots c_n. \end{aligned} \qquad (50.5)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a_n = 1$, так как многочлены $f(z)$ и $(1/a_n)f(z)$ имеют одинаковые корни. Применим индукцию по n. Для $n = 2$ формулы (50.5) являются известными из элементарной алгебры формулами Виета. Пусть для многочленов $(n-1)$-й степени формулы (50.5) имеют место, докажем их для многочлена $f(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$. Согласно (50.1)

$(ac-bd) + (ad+bc)i$. Для деления чисел удобно числитель и знаменатель дроби z_1/z_2 предварительно умножить на $\overline{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{z_2\overline{z_2}} = \left\{z_2\overline{z_2} = c^2 + d^2 \neq 0\right\} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i.$$

Комплексная плоскость. Пусть на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат. Поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = a+bi$ точку M (рис. 1) этой плоскости с координатами (a,b). Очевидно, что это соответствие взаимно однозначно. Вещественные числа изображаются точками оси абсцисс; на оси ординат располагаются изображения чисто мнимых чисел. Началу координат соответствует число ноль; сопряженные комплексные числа изображаются точками, симметричными относительно оси абсцисс (рис.1).

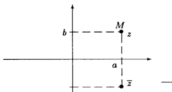


Рис. 1

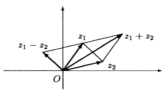


Рис. 2

Плоскость, точками которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, ее ось абсцисс – *вещественной осью*, ось ординат – *мнимой осью* (в соответствии с наименованием чисел, изображения которых лежат на этих осях).

Простое геометрическое истолкование получают на комплексной плоскости операции сложения и вычитания комплексных чисел. Так как каждая точка $M(a,b)$ плоскости связана с ее радиус-вектором $\mathbf{r} = \{a,b\}$, то комплексное число $z = a+bi$ можно изображать на комплексной плоскости радиус-вектором точки $M(a,b)$. При сложении (вычитании) комплексных чисел $z_1 = a+bi$ и $z_2 = c+di$ складываются (вычитаются) координаты радиус-векторов $\mathbf{r}_1\{a,b\}$ и $\mathbf{r}_2\{c,d\}$ точек, изображающих эти числа. Поэтому сложение (вычитание) комплексных чисел равносильно сложению (вычитанию) радиус-векторов (рис. 2) и может быть выполнено по правилу параллелограмма (§11).

Геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел станет ясным из другой формы комплексного числа.

Сопряженная матрица. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ – матрица размера $m \times n$ над полем комплексных чисел. Матрица $A^H = (a^h_{ij})$ размера $n \times m$ называется *сопряженной* к матрице A, если

$$a^h_{ij} = \overline{a_{ji}}, \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$$

Очевидно, что $A^H = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$, где $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$.

Из определения и теоремы 44.2 вытекают следующие свойства сопряженной матрицы:

1) $(A+B)^H = A^H + B^H$,
2) $(\alpha A)^H = \overline{\alpha}A^H$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,
3) $(AB)^H = B^H A^H$,
4) $(A^H)^H = A$,
5) $\det A^H = \overline{\det A}$,
6) $\operatorname{rg} A^H = \operatorname{rg} A$,

выполненные для всех матриц, для которых определены левые части равенств.

§45. Тригонометрическая форма комплексного числа

Алгебраическая форма комплексного числа $z = a+bi$ связана с декартовыми координатами точки $M(a,b)$, изображающей это число на комплексной плоскости. Однако положение точки на плоскости однозначно определяется и ее полярными координатами (§25): расстоянием r от этой точки до начала координат и углом φ между положительным направлением оси абсцисс и радиус-вектором точки $M(a,b)$ (рис. 1). В соответствии с этим вводятся следующие характеристики комплексного числа.

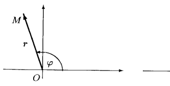


Рис. 1

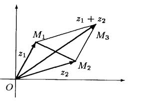


Рис. 2

Модулем комплексного числа $z = a+bi$ называется число $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Обозначение: $|z|$. Из определения вытекают следующие факты.

1°. $|z|$ – действительное неотрицательное число, причем

$$|z| = 0 \iff z = 0.$$

Глава XI. Алгебраические линии второго порядка на плоскости

§52. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек M плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек F_1 и F_2 плоскости есть постоянное число, большее, чем расстояние между F_1 и F_2. Это число мы обозначим через $2a$. Точки F_1, F_2 называются *фокусами эллипса*, расстояние между ними называется *фокусным расстоянием* и обозначается через $2c$. Числа $r_1 = \rho(M,F_1)$ и $r_2 = \rho(M,F_2)$ называются *фокальными радиусами* точки M.

Из определения эллипса следует, что точка M плоскости является точкой эллипса тогда и только тогда, когда

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad a > c. \qquad (52.1)$$

Каноническое уравнение. Запишем условие (52.1) в координатной форме. Для этого введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy, приняв за начало O середину отрезка F_1F_2, за ось Ox – прямую F_1F_2, ориентированную от F_1 к F_2; ориентацию на оси Oy выбираем произвольно (рис. 1). Эта система координат называется *канонической системой координат* (для данного эллипса).

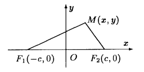


Рис. 1

Фокусы F_1 и F_2 в канонической системе координат имеют координаты $(-c,0)$ и $(c,0)$ соответственно.

Теорема 52.1. *Уравнение эллипса в канонической системе координат имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0. \qquad (52.2)$$

Доказательство. Пусть $M(x,y)$ – точка эллипса (52.1). Тогда условие (52.1) может быть записано через координаты точек F_1, F_2, M в виде

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a, \quad a > c.$$

После переноса одного слагаемого в правую часть и возведения в квадрат получим

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

или, после очевидных преобразований,

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx.$$

Еще раз возведем в квадрат: $a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$ или $x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$, где $a^2 - c^2 > 0$.

Разделив обе части уравнения на $a^2(a^2-c^2)$, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1, \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, $a \geq b > 0$. Таким образом, любая точка $M(x,y)$ эллипса удовлетворяет уравнению (52.2). Обратное, вообще говоря, не очевидно, так как при переходе от (52.1) к (52.2) мы дважды возводили в квадрат обе части уравнений и поэтому на линии, определяемой уравнением (52.2), могут быть и "лишние" точки. Покажем, что уравнению (52.2) отвечают только точки эллипса (52.1). Пусть точка $M(x,y)$ удовлетворяет уравнению (52.2), тогда

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad \text{и} \quad |x| \leq a. \qquad (52.3)$$

Найдем фокальные радиусы точки M. Имеем

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{x^2(a^2-b^2)}{a^2} + 2cx + c^2 + b^2} = \sqrt{\frac{x^2c^2}{a^2} + 2cx + a^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{xc}{a} + a\right)^2} = \left|\frac{xc}{a} + a\right| = a + \frac{cx}{a},$$

так как $\frac{|cx|}{a} \leq \frac{ca}{a} = c < a$ в силу (52.3). Итак,

$$r_1 = a + \frac{cx}{a}. \qquad (52.4)$$

Аналогично доказывается, что

$$r_2 = a - \frac{cx}{a}. \qquad (52.5)$$

Из (52.4) и (52.5) следует, что $r_1 + r_2 = 2a$. ■

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Корнем n-й степени из комплексного числа z* называется число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\alpha^n = z$.

Очевидно, что для $z = 0$ существует единственный корень n-й степени, равный нулю (так как $\alpha^n = 0 \Leftrightarrow |\alpha|^n = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$).

Теорема 46.2. *Для ненулевого числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ существует ровно n различных корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n-й степени:*

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \ k = \overline{0, n-1}. \qquad (46.2)$$

Доказательство. Пусть α – корень n-й степени из числа z и $\alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Тогда $\alpha^n = z$ или, в силу (46.1), $\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Согласно (45.1) это означает, что

$$\rho^n = r, \qquad n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\rho > 0$, $r > 0$, то существует единственный положительный корень n-й степени ρ из положительного числа r – это арифметический корень $\rho = \sqrt[n]{r}$. Таким образом, число $\alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ является корнем n-й степени из числа z тогда и только тогда, когда

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \theta = \frac{\varphi+2\pi k}{n}, \ k \in \mathbb{Z},$$

т.е. числа $\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, и только они, являются корнями n-й степени из числа z. Числа α_k для $k = \overline{0,n-1}$ различны, так как их аргументы отличаются самое большее на $\frac{2\pi(n-1)}{n} < 2\pi$. Числа α_k при $k \geq n$ совпадают с одним из корней $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, так как если $k = nq + r$, $0 \leq r \leq n-1$, то

$$\frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi nq + 2\pi r}{n} = \frac{\varphi+2\pi r}{n} + 2\pi q, \ q \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $\alpha_k = \alpha_r$. ■

Геометрическая интерпретация корней. На комплексной плоскости все корни n-й степени из ненулевого числа z расположены на окружности радиуса $\rho = \sqrt[n]{|z|}$ и делят эту окружность на n равных частей (так как $\arg\alpha_k = \arg\alpha_{k-1} + 2\pi/n$).

В частности, все корни n-й степени из единицы имеют вид

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0,n-1}. \qquad (46.3)$$

Они расположены на единичной окружности и делят ее на n равных частей, начиная с $\varepsilon_0 = 1$. При этом действительных корней

может быть либо два, если n четно (ε_0 и $\varepsilon_{n/2}$), либо один, если n нечетно (ε_0). В любом случае недействительных корней четное число, они расположены симметрично относительно действительной оси, т.е. попарно сопряжены.

Теорема 46.3. *Все корни n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$ получаются умножением одного из этих корней на все корни n-й степени из единицы.*

Доказательство. Пусть α_k, $k = \overline{0,n-1}$, – корни n-й степени из $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, определяемые равенством (46.2). Тогда, согласно (45.4) и (46.3), $\alpha_k\varepsilon_0 = \alpha_k$, $\alpha_k\varepsilon_1 = \alpha_{k+1}, \ldots$, $\alpha_k\varepsilon_{n-k} = \alpha_0, \ldots$, $\alpha_k\varepsilon_{n-1} = \alpha_{k-1}$. ■

Теореме 46.3 можно придать и другой смысл. Действительно, нетрудно проверить, что все корни n-й степени из единицы образуют мультипликативную группу. Тогда смежный класс мультипликативной группы ненулевых комплексных чисел по подгруппе $H = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$ корней n-й степени из единицы, порожденный корнем α_k, состоит из произведений $\alpha_k\varepsilon_m$, где $m = \overline{0,n-1}$. Но $(\alpha_k\varepsilon_m)^n = \alpha_k^n\varepsilon_m^n = z \cdot 1 = z$. Таким образом, *все корни n-й степени из числа z образуют смежный класс мультипликативной группы ненулевых комплексных чисел по подгруппе корней n-й степени из единицы, порожденный одним из корней n-й степени из z.*

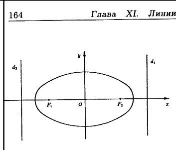


Рис. 3

Рис. 4

Возведя обе части в квадрат, получим равносильное уравнение

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2\varepsilon^2 - 2xa\varepsilon + a^2,$$

которое с учетом того, что $c = a\varepsilon$, может быть записано в виде

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2(1-\varepsilon^2).$$

Поделив обе части этого уравнения на правую часть, приходим в обозначениях (52.10) к каноническому уравнению эллипса, эквивалентному (52.8):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$

Итак, точка $M(x,y)$ принадлежит геометрическому месту точек (52.8) тогда и только тогда, когда она является точкой эллипса, для которого данная точка F является фокусом, прямая d – соответствующей директрисой, а число ε – эксцентриситетом. Отметим, что доказательство теоремы как раз и состоит в построении этого эллипса. Его полуоси a и b определены равенствами (52.9), (52.10). ■

§53. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек M плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний от двух фиксированных точек F_1 и F_2 плоскости есть постоянное число, меньшее, чем расстояние между F_1 и F_2. Это число мы обозначим через $2a$. Точки F_1, F_2 называются *фокусами* гиперболы, расстояние между ними называется *фокальным расстоянием* и обозначается $2c$. Согласно определению $a < c$. Числа $r_i = \rho(M,F_i)$, $i = 1,2$, называются *фокальными радиусами* точки M.

Из определения гиперболы следует, что точка M плоскости является точкой гиперболы тогда и только тогда, когда

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad a < c. \qquad (53.1)$$

Каноническое уравнение. Запишем условие (53.1) в координатной форме. Поступая так же, как и в случае эллипса, построим каноническую систему координат Oxy для гиперболы (53.1).

Теорема 53.1. *Уравнение гиперболы в канонической системе координат имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (53.2)$$

Доказательство. Если $M(x,y)$ – точка гиперболы (53.1), то

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a, \quad a < c,$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a, \quad a < c.$$

Используя те же преобразования, что и для эллипса, придем к уравнению

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2), \quad a^2 - c^2 < 0,$$

или, в обозначениях $-b^2 = a^2 - c^2$, к уравнению (53.2).

Таким образом, любая точка $M(x,y)$ гиперболы удовлетворяет уравнению (53.2). Обратное доказывается так же, как и для эллипса. Здесь $|x| \geq a$, поэтому

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{cx}{a} + a, \\ r_2 = \dfrac{cx}{a} - a, \end{array}\right. \text{если } x \geq a, \quad \left\{\begin{array}{l} r_1 = -\left(\dfrac{cx}{a} + a\right), \\ r_2 = -\left(\dfrac{cx}{a} - a\right), \end{array}\right. \text{если } x \leq -a. \qquad (53.3)$$

Таким образом, в обоих случаях $|r_1 - r_2| = 2a$. ■

Уравнение (53.2) называется *каноническим уравнением гиперболы.* Отметим простейшие свойства гиперболы, вытекающие из канонического уравнения.

1°. Как и в случае эллипса, координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – центром симметрии. Ось Ox пересекает гиперболу в точках $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ и называется *вещественной осью гиперболы.* Ось Oy не пересекает гиперболу и называется *мнимой осью.* Начало координат называется *центром гиперболы*, числа $a > 0$, $b > 0$ – *вещественной* и *мнимой полуосями гиперболы.*

2°. Все точки гиперболы лежат вне полосы, определяемой прямыми $x = \pm a$, так как $|x| \geq a$ (рис. 1). Это означает, что гипербола состоит из двух отдельных частей, называемых *ветвями гиперболы.*

3°. Все точки гиперболы лежат в тех вертикальных углах, образованных прямыми $y = \pm\frac{b}{a}x$, которые содержат вещественную ось, так как для точек $M(x,y)$ гиперболы $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, т.е. $|y| \leq \frac{b}{a}|x|$.

Теорема 47.1. *Множество $P[x]$ всех многочленов над полем P является коммутативным кольцом с единицей и без делителей нуля.*

Доказательство. Проверим все аксиомы кольца (§42). Прежде всего отметим, что $P[x]$ – аддитивная абелева группа: коммутативность и ассоциативность сложения очевидны (в силу (47.3)), нулем является нулевой многочлен (как отмечено в (47.4)), противоположным к многочлену $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$, как легко проверить, является многочлен $-f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-a_k)x^k$. Коммутативность умножения следует из определения. Докажем ассоциативность умножения. Пусть $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$, $g_s(x) = \sum_{k=0}^{s} b_kx^k$, $h_p(x) = \sum_{k=0}^{p} c_kx^k$. Обозначим через α_k, β_k, γ_k и δ_k коэффициенты при x^k у многочленов $f(x)g(x)$, $g(x)h(x)$, $(f(x)g(x))h(x)$ и $f(x)(g(x)h(x))$ соответственно. Тогда в силу (47.6)

$$\gamma_k = \sum_{i+j=k} \alpha_ic_j = \sum_{i+j=k}\left(\sum_{r+t=i} a_rb_t\right)c_j = \sum_{r+t+j=k} a_rb_tc_j,$$

$$\delta_k = \sum_{r+i=k} a_r\beta_i = \sum_{r+i=k} a_r\left(\sum_{t+j=i} b_tc_j\right) = \sum_{r+t+j=k} a_rb_tc_j,$$

т.е. $\gamma_k = \delta_k$. Отсюда, если учесть, что $\deg(fg)h = \deg f(gh) = n+s+p$, следует равенство $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$.

Роль единицы при умножении многочленов играет число 1, рассматриваемое как многочлен нулевой степени.

Справедливость аксиомы дистрибутивности вытекает из равенства $\sum_{i+j=k}(a_i+b_i)c_j = \sum_{i+j=k} a_ic_j + \sum_{i+j=k} b_ic_j$, так как левая часть этого равенства является коэффициентом при x^k в многочлене $(f(x)+g(x))h(x)$, а правая часть – коэффициентом при той же степени x в многочлене $f(x)h(x) + g(x)h(x)$.

Наконец, из (47.7) следует, что в $P[x]$ нет делителей нуля. ■

Следствие. Множество $P[x]$ является линейным пространством над полем P. Это следует из того, что любое кольцо по сложению – абелева группа; что же касается внешнего закона композиции (47.8), то его дистрибутивность относительно сложения является частным проявлением общего закона дистрибутивности в кольце $P[x]$, а справедливость других аксиом умножения на число очевидна.

Замечание 2. Произведение (47.6) многочленов $f(x)$ и $g(x)$ может быть получено обычным для элементарной алгебры перемножением двух сумм $(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_sx^s)$ с последующей группировкой одночленов одинаковой степени. Это следует из общего закона дистрибутивности и из того, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ можно рассматривать как суммы многочленов.

Замечание 3. Кольцо $P[x]$ не является полем, так как не всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ обладает обратным многочленом $f^{-1}(x)$. Действительно, равенство $f(x)f^{-1}(x) = 1$ с учетом (47.7) означает, что *многочлены нулевой степени, и только они, обладают обратными.*

§48. Деление многочленов

Кольцо $P[x]$ всех многочленов над полем P по своим свойствам близко к кольцу $\mathbb{Z}$ всех целых чисел. Эта аналогия проявляется и в том, что для многочленов, как и для целых чисел, имеют место понятия деления нацело, деления с остатком, делителя, наибольшего общего делителя и др.

Теорема 48.1. *Для любых двух многочленов $f(x), g(x) \in P[x]$, где $g(x) \neq 0$, существует, и притом единственная, пара многочленов $q(x), r(x) \in P[x]$ такая, что:*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \qquad\qquad (48.1)$$
где либо $r(x) = 0$, *либо* $\deg r < \deg g$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Будем считать, что $f(x) \neq 0$, так как в противном случае можно положить $q(x) = 0$, $r(x) = 0$. Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{s} b_kx^k$, $\deg f = n$, $\deg g = s$. Без ограничения общности считаем, что $n \geq s$, так как в противном случае можно взять $q(x) = 0$ и $r(x) = f(x)$. Применим метод математической индукции по степени n многочлена $f(x)$, считая $g(x)$ фиксированным.

1. Пусть $n = 0$. Тогда $s = 0$ и $q(x) = a_0b_0^{-1}$, $r(x) = 0$.

2. Пусть теперь теорема верна для любого многочлена степени меньшей n. Докажем ее для многочлена $f(x)$ степени $n \geq s$. Воспроизведем первый шаг известного из элементарной алгебры алгоритма деления многочленов с действительными коэффициентами, т.е. построим одночлен $\frac{a_n}{b_s}x^{n-s}$ и составим разность

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_s}x^{n-s}g(x). \qquad (48.2)$$

Либо многочлен $f_1(x)$ равен 0, либо $\deg f_1 < n$. В первом случае можно положить $q(x) = \frac{a_n}{b_s}x^{n-s}$, $r(x) = 0$. Во втором случае для многочлена $f_1(x)$ по индуктивному предположению найдутся многочлены $q_1(x)$ и $r(x)$ такие, что $f_1(x) = g(x)q_1(x) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r < \deg g$. Тогда, согласно (48.2), $f(x) = \frac{a_n}{b_s}x^{n-s}g(x) + g(x)q_1(x) + r(x)$. Положив $q(x) = \frac{a_n}{b_s}x^{n-s} + q_1(x)$, приходим к паре многочленов $q(x), r(x) \in P[x]$, удовлетворяющей условиям (48.1).

Остается доказать единственность. Пусть существует еще одна пара многочленов $q_1(x), r_1(x) \in P[x]$, удовлетворяющая условиям (48.1). Тогда $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ и $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, т.е.

$$g(x)(q(x) - q_1(x)) = r(x) - r_1(x). \qquad (48.3)$$

Каноническое уравнение. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy, принимая за ось Ox прямую, проходящую через точку F перпендикулярно прямой d, ориентированную от прямой d к точке F, за начало O – середину отрезка FD, где D – точка пересечения оси Ox с прямой d; ориентацию на оси Oy выбираем произвольно (рис. 1). Эта система координат называется *канонической системой координат* для данной параболы.

Теорема 54.1. *Уравнение параболы в канонической системе координат имеет вид*

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \qquad (54.1)$$

Доказательство. В канонической системе координат Oxy фокус F имеет координаты $(p/2, 0)$, директриса d определяется уравнением $x = -p/2$. Точка $M(x,y)$ является точкой параболы тогда и только тогда, когда $\rho(M,F) = \rho(M,d)$, или, что то же самое,

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Возведя в квадрат обе части уравнения, получим равносильное уравнение $x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4$ или уравнение (54.1). ■

Уравнение (54.1) называется *каноническим уравнением параболы.*

Следующие свойства параболы (рис. 1) непосредственно вытекают из канонического уравнения.

1°. Ось Ox канонической системы координат является осью симметрии параболы. Она называется *осью параболы.* Начало координат лежит на параболе и называется *вершиной параболы.*

2°. Все точки параболы расположены в правой полуплоскости от оси Oy, так как $x \geq 0$.

3°. Исследуем форму параболы. В силу симметрии достаточно рассмотреть I четверть. Здесь уравнение параболы имеет вид

$$y = \sqrt{2px}, \ x \geq 0.$$

Легко проверить, что:

а) $y(x)$ непрерывна и возрастает на $[0, +\infty)$, причем $y(0) = 0$ и $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$;

б) $y'(0) = \infty$, так что касательная к параболе в точке $x = 0$ параллельна оси Oy;

в) $y''(0) < 0$, следовательно, парабола выпукла вверх (рис. 1).

Замечание. Определение параболы, по существу, означает ее директориальное свойство

$$\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,d)} = \varepsilon, \qquad (54.2)$$

где F – фокус, d – директриса, ε – эксцентриситет, которое, как мы видели в §52, 53, имеет место для эллипсов и гипербол. Отличие лишь

в том, что для эллипсов $0 < \varepsilon < 1$, для парабол $\varepsilon = 1$, для гипербол $\varepsilon > 1$. Итак, если на плоскости даны прямая d и не принадлежащая ей точка F, то геометрическое место точек M плоскости, удовлетворяющих условию (54.2), является либо эллипсом (если $0 < \varepsilon < 1$), либо параболой (если $\varepsilon = 1$), либо гиперболой (если $\varepsilon > 1$).

Эти линии обладают целым рядом других свойств, имеющих "родственные" формулировки.

§55. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе

Будем считать, что эллипс, гипербола и парабола заданы своими каноническими уравнениями (52.2), (53.2), (54.1). Найдем уравнения касательных к этим линиям.

Теорема 55.1. *В канонической системе координат уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе в точке (x_0, y_0) линии имеют вид*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \qquad (55.1)$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \qquad (55.2)$$

$$yy_0 = p(x + x_0) \qquad (55.3)$$

соответственно.

Доказательство. Все три уравнения выводятся по одной схеме. Приведем ее для эллипса. Воспользуемся известным из курса математического анализа [7] уравнением касательной в неособой точке (x_0, y_0) линии, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$. Это уравнение имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y - y_0) = 0, \qquad (55.4)$$

где $F'_x(x_0,y_0)$, $F'_y(x_0,y_0)$ – частные производные функции $F(x,y)$ в точке (x_0,y_0). Для эллипса (52.2) уравнение касательной в точке (x_0,y_0) этого эллипса имеет согласно (55.4) вид

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

или, с учетом того, что $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, вид (55.1). ■

Теорема 49.2 (основная теорема алгебры). *Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел алгебраически замкнуто.*

Эта теорема называется "основной" по традиции, установившейся с тех времен, когда проблема решения алгебраических уравнений была главной проблемой в алгебре (впервые теорема доказана Гауссом в 1799 г. для частного случая). Теперь она относится к числу рядовых утверждений, хотя и очень важных. Во всяком случае, на ней основана вся дальнейшая теория многочленов. И тем не менее эта теорема не является чисто алгебраической. Все ее доказательства (а их после Гаусса найдено довольно много) в той или иной мере опираются на другие разделы математики. Мы приведем одно из них, наиболее алгебраическое из доступных нам. Для этого потребуются дополнительные понятия и факты.

В приводимых ниже леммах, если не оговаривается особо, $f(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$ – многочлен над полем комплексных чисел от комплексной переменной z.

Лемма 1. *Пусть $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n$ – многочлен с нулевым свободным членом. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех z, для которых $|z| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $|z| < 1$. Тогда в силу (45.4) и (45.3)

$$|f(z)| = |z|\,\left|a_1 + a_2z + \ldots + a_nz^{n-1}\right| \leq |z|\,(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|).$$

Положим $M = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ и возьмем $\delta = \min(1, \varepsilon/M)$. Тогда для всех z, для которых $|z| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z)| \leq |z| \cdot M < \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon$. ■

Комплексная функция $f(z)$ от комплексной переменной z называется *непрерывной в точке* z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех z, для которых $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Лемма 2. *Многочлен $f(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$ есть непрерывная функция во всех точках комплексной плоскости.*

Доказательство. Пусть z_0 – произвольное комплексное число. Разложим многочлен $f(z)$ по степеням $z - z_0$: $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n$. Тогда $c_0 = f(z_0)$, так что $f(z) - f(z_0) = c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n$.

Правая часть представляет собой многочлен от $z - z_0$ с нулевым свободным членом. По лемме 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ для всех z, для которых $|z - z_0| < \delta$. ■

Лемма 3. *Модуль многочлена есть непрерывная функция.*

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 2 и свойств модуля комплексных чисел (45.3): $|f(z) - f(z_0)| \geq ||f(z)| - |f(z_0)||$. ■

Лемма 4. *Если $f(z)$ – многочлен степени $n \geq 1$, то для любого $M > 0$ существует $R > 0$ такое, что для всех z, для которых $|z| > R$, выполняется неравенство $|f(z)| > M$.*

Доказательство. Пусть $f(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$. Запишем его в виде

$$f(z) = a_nz^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}z^{-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}z^{-n}\right) = a_nz^n\left(1 + g(z^{-1})\right), \qquad (49.1)$$

где $g(z^{-1})$ – многочлен от z^{-1} с нулевым свободным членом. В силу леммы 1 для $\varepsilon = 1/2$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|z^{-1}| < \delta$ имеет место неравенство $|g(z^{-1})| < 1/2$. Модуль a_nz^n может быть сделан сколь угодно большим, именно при $|z| > \sqrt[n]{2M/|a_n|}$ будет $|a_nz^n| > 2M$. Возьмем $R = \max\left(\sqrt[n]{2M/|a_n|}, \frac{1}{\delta}\right)$. Тогда если $|z| > R$, то $|z^{-1}| < \delta$ и $|z| > \sqrt[n]{2M/|a_n|}$, так что согласно (49.1)

$$|f(z)| = |a_nz^n|\,\left|1 + g(z^{-1})\right| \geq |a_nz^n|\,\left|1 - |g(z^{-1})|\right| > 2M(1 - \tfrac{1}{2}) = M. \ ■$$

Число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется *пределом последовательности* $z_n = x_n + iy_n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N такое, что $|z_n - z_0| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Обозначение: $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Очевидно, что сходимость последовательности комплексных чисел z_n равносильна сходимости двух последовательностей действительных чисел: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Последовательность z_n называется *ограниченной*, если существует число $R > 0$ такое, что $|z_n| \leq R$.

Лемма 5. *Из любой ограниченной последовательности z_n можно выделить сходящуюся последовательность.*

Доказательство. Пусть $z_n = x_n + iy_n$ и $|z_n| \leq R$, тогда $|x_n| \leq R$, так что x_n – ограниченная последовательность действительных чисел. Из нее согласно теореме Больцано–Вейерштрасса [7] можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0$. Рассмотрим соответствующую подпоследовательность мнимых частей y_{n_k}. Она ограничена, и из нее также можно выделить сходящуюся подпоследовательность $y_{n_{k_m}} \to y_0$. Тогда соответствующая подпоследовательность $z_{n_{k_m}}$ сходится к $z_0 = x_0 + iy_0$. ■

Лемма 6. *Точная нижняя грань модуля многочлена достигается, т.е. существует число z_0 такое, что $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ при всех комплексных z.*

Доказательство. Рассмотрим множество всевозможных значений модуля многочлена $f(z)$. Так как $|f(z)| \geq 0$, то это множество ограничено снизу и, следовательно, имеет точную нижнюю грань. Обозначим ее через m. Тогда для любого натурального числа n можно найти комплексное число z_n такое, что

$$|f(z_n)| \leq m + \frac{1}{n}. \qquad (49.2)$$

Воспользуемся леммой 4: для $M = m+1$ найдем R такое, что при $|z| > R$ будет $|f(z)| > M \geq m + \frac{1}{n}$. Отсюда и из (49.2) следует, что

§56. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

Здесь речь идет о биссекториальных свойствах касательных к этим линиям.

Теорема 56.1. *Касательная к эллипсу в произвольной точке M_0 эллипса есть биссектриса внешнего угла M_0 треугольника $F_1F_2M_0$, где F_1, F_2 – фокусы эллипса.*

Доказательство. Рассмотрим касательную (55.1) к эллипсу (52.2) в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 1).

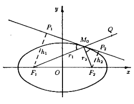


Рис. 1

Фокусы $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ расположены по одну сторону от касательной, так как в (34.2), с учетом условий $0 \leq \varepsilon < 1$ и $|x_0| \leq a$, имеем

$$\frac{-cx_0}{a^2} - 1 = -\frac{\varepsilon x_0}{a} - 1 = -\frac{\varepsilon x_0 + a}{a} < 0,$$
$$\frac{cx_0}{a^2} - 1 = \frac{\varepsilon x_0}{a} - 1 = \frac{\varepsilon x_0 - a}{a} < 0.$$

Обозначим через P_1 и P_2 основания перпендикуляров, опущенных из фокусов эллипса на касательную. Утверждение теоремы будет доказано, если мы покажем, что $\angle F_2M_0P_2 = \angle P_2M_0Q$ или, что то же самое, $\angle F_1M_0P_1 = \angle F_2M_0P_2$ (рис. 1). Пусть h_1, h_2 – расстояния от фокусов до касательной. Тогда

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{-(cx_0/a^2) - 1}{(cx_0/a^2) - 1} = \frac{a + \varepsilon x_0}{a - \varepsilon x_0} = \frac{r_1}{r_2},$$

следовательно, $\triangle F_2M_0P_2 \sim \triangle F_1M_0P_1$ (так как оба они прямоугольные), поэтому $\angle F_1M_0P_1 = \angle F_2M_0P_2$. ■

Доказанной теореме можно дать следующую оптическую интерпретацию: если поместить в один из фокусов источник света, то лучи после отражения от эллипса соберутся в другом фокусе, так как световой луч отразится от эллипса как от касательной, проведенной к эллипсу в точке падения луча.

Теорема 56.2. *Касательная к гиперболе в произвольной ее точке является биссектрисой внутреннего угла M_0 треугольника $F_1F_2M_0$, где F_1, F_2 – фокусы гиперболы.*

Доказательство. Эта теорема доказывается точно так же, как и предыдущая. Отметим лишь одно отличие (не затрагивая очевидные): фокусы F_1 и F_2 расположены по разные стороны от любой касательной (рис. 2). ■

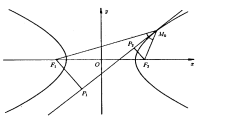


Рис. 2

Теореме 56.2 можно дать оптическое истолкование, аналогичное тому, которое было дано для эллипса.

Теорема 56.3. *Касательная к параболе есть биссектриса угла между фокальным радиусом M_0F точки касания M_0 и перпендикуляром M_0D, опущенным из точки M_0 на директрису.*

Доказательство. Из уравнения (55.3) касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ этой параболы следует, что точка A (рис. 3) пересечения касательной с осью Ox имеет кординаты $(-x_0, 0)$. Следовательно, $AO = x_0$ и $AF = AO + OF = x_0 + p/2$. С другой стороны, $M_0F = M_0D = M_0C + CD = x_0 + p/2$. Таким образом, $AF = M_0F$ и, значит, $\angle FAM_0 = \angle AM_0F$. Но $\angle FAM_0 = \angle DM_0A$, следовательно, $\angle DM_0A = \angle AM_0F$. ■

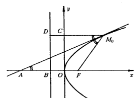


Рис. 3

Эта теорема имеет следующее оптическое истолкование: если в фокусе параболического зеркала поместить источник света, то лучи, отразившись от зеркала, образуют пучок параллельных лучей. Это свойство используется в конструкции зеркальных прожекторов.

Тогда уравнение (58.1) примет вид

$$a_{11}x'^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0. \tag{59.18}$$

Если $a'_{22} \neq 0$, то, положив

$$y' = y + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}, \tag{59.19}$$

приводим уравнение (59.18) к уравнению

$$a_{11}x'^2 + a'_{22}y^2 + a''_{33} = 0, \quad a_{11}a'_{22} \neq 0, \tag{59.20}$$

которое является приведенным уравнением типа I. Преобразования координат (59.17), (59.19) определяют переход к новому базису с помощью матрицы перехода

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и переноса начала. Согласно теоремам 58.2 и 58.3 знаки инвариантов I_2, K_3 в уравнениях (58.1) и (59.20) совпадают.

Если в уравнении (59.18) $a'_{22} = 0$, то:

а) в случае когда $a'_{23} = 0$, уравнение (59.18) является приведенным уравнением типа III;

б) в случае когда $a'_{23} \neq 0$, положив

$$y' = y + \frac{a'_{33}}{2a'_{23}},$$

приводим уравнение (59.18) к уравнению

$$a_{11}x'^2 + 2a'_{13}y' = 0, \quad a_{11}a'_{13} \neq 0,$$

которое является приведенным уравнением типа II.

2. Пусть в общем уравнении (58.1) $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$. Поступая так же, как и в п.1 (с точностью до названия переменных), освобождаемся от слагаемого $2a_{12}xy$ и линейной части (если это возможно) и приходим к приведенным уравнениям, не изменив знаков инвариантов I_2, K_3.

3. Пусть в общем уравнении (58.1) $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$. Тогда $a_{12} \neq 0$. Положив

$$x = x' + y', \quad y = x' - y', \tag{59.21}$$

сводим этот случай к уже рассмотренным. Отметим, что преобразования координат (59.21) отвечают переходу к новому базису с матрицей перехода $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Так как приведенные уравнения (58.11) определяются лишь знаком инвариантов I_2, K_3, то в результате выполненных преобразований

общее уравнение (58.1) приведется к одному и только одному из уравнений (58.11). С помощью метода Лагранжа легко устанавливается тип линии, однако не может быть получено каноническое уравнение.

группа слагаемых $2a_{13}x + 2a_{23}y$ – ***линейной частью***, a_{33} – ***свободным членом***.

Рассмотренные в предыдущих параграфах эллипс, гипербола и парабола, очевидно, представляют собой алгебраические линии второго порядка. Естественно поставить вопрос, какие еще линии являются линиями второго порядка. Чтобы ответить на него, нужно найти такую систему координат, в которой уравнение (58.1) принимает наиболее простой вид (как это было в случае эллипса, гиперболы и параболы). Поиском такой системы координат мы и займемся.

Компактная запись общего уравнения. Положим

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Матрица A называется ***матрицей квадратичной части***. В этих обозначениях уравнение (58.1) может быть записано в компактной форме:

$$X^TAX + 2b^TX + a_{33} = 0, \quad A = A^T, \ A \neq O. \tag{58.2}$$

В этом нетрудно убедиться, выполнив все умножения в левой части (58.2). Введем новую матрицу

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{21} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^T & a_{33} \end{array}\right].$$

Числа $I_1 = \operatorname{tr} A$, $I_2 = |A|$, $K_3 = |B|$ называются ***инвариантами линии второго порядка***, число $K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ – ***полуинвариантом***. Далее нам потребуется несколько дополнительных понятий, относящихся к матрицам.

Характеристический многочлен. *Характеристическим многочленом* матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется функция $f(\lambda)$, определенная равенством

$$f(\lambda) = |A - \lambda I|. \tag{58.3}$$

Легко проверить, что:

а) если $n = 2$, то $f(\lambda) = (-\lambda)^2 + a_1(-\lambda) + a_0$, где

$$a_1 = \operatorname{tr} A, \quad a_0 = |A|; \tag{58.4}$$

б) если $n = 3$, то $f(\lambda) = (-\lambda)^3 + a_2(-\lambda)^2 + a_1(-\lambda) + a_0$, где

$$a_2 = \operatorname{tr} A, \quad a_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad a_0 = |A|. \tag{58.5}$$

Главным минором матрицы называется минор, расположенный в строках и столбцах с одинаковыми номерами. Нетрудно заметить (см.

(58.4), (58.5)), что коэффициенты характеристического многочлена связаны с главными минорами матрицы: если $n = 2$, то a_1 – сумма главных миноров первого порядка, a_0 – единственный главный минор второго порядка; если $n = 3$, то a_2, a_1, a_0 – суммы главных миноров первого, второго, третьего порядков соответственно.

Матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называются ***подобными***, если существует невырожденная матрица Q такая, что

$$A = Q^{-1}BQ. \tag{58.6}$$

Теорема 58.1. *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

Доказательство. Действительно, если $A = Q^{-1}BQ$, то $|A - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - Q^{-1}\lambda IQ| = |Q^{-1}(B - \lambda I)Q| = |B - \lambda I|$. Таким образом, при любом значении λ характеристические многочлены матриц A и B принимают одинаковые значения и, следовательно, совпадают. ■

Следствие. У подобных матриц второго порядка совпадают следы и определители. У подобных матриц третьего порядка совпадают следы, суммы главных миноров второго порядка и определители.

Преобразования общего уравнения. Пусть исходная аффинная система координат Oxy соответствует началу O и базису $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Переход к новой системе координат $O'x'y'$ означает (§24) перенос начала в точку $O'(\alpha, \beta)$ и преобразование базиса $eQ = e'$ с матрицей перехода Q. При этом старые координаты $X = (x, y)^T$ связаны с новыми $X' = (x', y')^T$ формулами преобразования координат:

1) $X = a + X'$, где $a = (\alpha, \beta)^T$, в случае переноса начала;

2) $X = QX'$ в случае преобразования базиса.

Исследуем особенности преобразования уравнения линии в каждом из этих случаев. Пусть линия $\mathcal{L}$ в системе координат Oxy задана своим общим уравнением (58.2).

Теорема 58.2. *При переходе к новому базису $e' = eQ$ общее уравнение (58.2) преобразуется в уравнение*

$$X'^TA'X' + 2b'^TX' + a_{33} = 0, \tag{58.7}$$

где $A' = Q^TAQ$, $b' = Q^Tb$, при этом:

1) знаки инвариантов I_2, K_3 не изменяются;

2) в случае когда e и e' – ортонормированные базисы, инварианты I_1, I_2, K_3 и полуинвариант K_2 не изменяются.

Доказательство. Подставим в уравнение (58.2) вместо старых координат X их выражения через новые координаты X': $X = QX'$. Тогда в новой системе координат $Ox'y'$ линия $\mathcal{L}$ определяется уравнением

$$X'^TQ^TAQX' + 2b^TQX' + a_{33} = 0$$

т.е. Q – ортогональная матрица. Согласно теореме 58.2 при переходе к системе координат $\{O; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ матрица квадратичной части A преобразуется в матрицу

$$A' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

при этом

$$a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi - a_{12}\sin^2\varphi + a_{12}\cos^2\varphi + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi =$$
$$= a_{12}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\sin 2\varphi.$$

Если $\operatorname{ctg} 2\varphi = (a_{11} - a_{22})/(2a_{12})$, то $a'_{12} = 0$. Следовательно, при повороте осей на такой угол φ квадратичная часть уравнения преобразуется в сумму квадратов и уравнение (58.1) в новой системе координат $Ox'y'$ будет иметь вид

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \tag{58.12}$$

При этом в силу теоремы 58.2 инварианты I_1, I_2, K_3 и полуинвариант K_2 останутся прежними.

Метод, использованный здесь, называется *методом вращений*.

Шаг 2 (перенос начала). Дальнейшее упрощение уравнения (58.12) основано на том, что если в нем содержится ненулевой квадрат какой-либо переменной, то переносом начала можно освободиться от этой переменной в первой степени. Действительно, если $a'_{11} \neq 0$, то

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{13}x' = a'_{11}\left(x'^2 + \frac{2a'_{13}}{a'_{11}}x'\right) =$$
$$= a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 - \frac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} = \left\{x'' = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right\} = a'_{11}x''^2 - \frac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}}.$$

Таким образом, если $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$, то переносом начала

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}, \quad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}$$

уравнение (58.12) преобразуется в уравнение

$$a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_{33} = 0, \quad a'_{11}a'_{22} \neq 0,$$

где $a'_{33} = a_{33} - \dfrac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} - \dfrac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}}$, т.е. в уравнение типа I.

Пусть один из коэффициентов a'_{11} и a'_{22} равен нулю. Если $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$, то переносом начала

$$x'' = x', \quad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}$$

уравнение (58.12) преобразуется в уравнение

$$a'_{22}y''^2 + 2a'_{13}x'' + a'_{33} = 0, \quad a'_{22} \neq 0, \tag{58.13}$$

где $a'_{33} = a_{33} - {a'_{23}}^2/a'_{22}$.

Случай, когда $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} = 0$, сводится к предыдущему переименованием переменных

$$x'' = y', \quad y'' = x', \tag{58.14}$$

что соответствует переходу к новому базису с матрицей перехода $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Нетрудно проверить, что Q – ортогональная матрица, поэтому числа I_1, I_2, K_3, K_2 при таком переходе не изменяются. Очевидно, что новая система координат получена поворотом осей с последующим отражением одной из осей относительно другой.

Итак, дальнейшее преобразование общего уравнения (58.1) сводится к преобразованию уравнения (58.13).

Если в этом уравнении $a'_{13} = 0$, то уравнение (58.13) относится к уравнению типа III.

Если же $a'_{13} \neq 0$, то $2a'_{13}x'' + a'_{33} = 2a'_{13}(x'' + a'_{33}/(2a'_{13}))$ и переносом начала

$$x''' = x'' + a'_{33}(2a'_{13}), \quad y''' = y''$$

уравнение (58.13) приводится к уравнению

$$a'_{22}y'''^2 + 2a'_{13}x''' = 0, \quad a'_{22}a'_{13} \neq 0,$$

которое относится к типу II.

Отметим, что все промежуточные и окончательная системы координат оставались прямоугольными, так как преобразования базиса с помощью ортогональной матрицы перехода сохраняют свойство ортонормированности (§24). Итак, переходом к новой прямоугольной системе координат общее уравнение (58.1) приводится к одному из трех указанных типов уравнений.

Перейдем к вопросу о единственности. Для этого найдем инварианты I_2, K_3 для каждого из уравнений (58.11). Имеем для уравнения типа I

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}; \tag{58.15}$$

для уравнения типа II

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{58.16}$$

3. Если $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $a_0 = 0$, т.е.

$$I_2 > 0, \quad K_3 = 0, \tag{59.5}$$

то уравнение (59.1) эквивалентно уравнению 3, где $a^2 = |\lambda_1|^{-1}$, $b^2 = |\lambda_2|^{-1}$.

Ясно, что только начало координат удовлетворяет этому уравнению. Принято говорить о нем как об уравнении ***пары мнимых пересекающихся прямых*** (или ***вырожденного эллипса***).

4. Если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $a_0 \neq 0$, т.е.

$$I_2 < 0, \quad K_3 \neq 0, \tag{59.6}$$

то уравнение (59.1) эквивалентно уравнению 4. Это известное нам каноническое уравнение ***гиперболы***.

5. Если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $a_0 = 0$, т.е.

$$I_2 < 0, \quad K_3 = 0, \tag{59.7}$$

то уравнение (59.1) эквивалентно уравнению 5. Оно определяет ***пару пересекающихся прямых*** $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Рассмотренные линии образуют первую группу линий второго порядка на плоскости. Ими исчерпываются все линии, которые определяются приведенными уравнениями типа I, т.е. случаем, когда $I_2 \neq 0$.

6. Если $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$, то уравнение (59.1) преобразуется в приведенное уравнение типа II:

$$\lambda_2y^2 + 2b_0x = 0, \tag{59.8}$$

где $\lambda_2b_0 \neq 0$. Для этого уравнения согласно (58.16)

$$I_1 = \lambda_2, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = -\lambda_2b_0^2 \neq 0. \tag{59.9}$$

Уравнение (59.8) эквивалентно уравнению

$$y^2 = 2px,$$

где $p = -b_0/\lambda_2$. В этом уравнении можно считать, что $p > 0$, так как в противном случае достаточно выполнить отражение оси Ox относительно оси Oy: $x' = -x$, $y' = y$, что соответствует переходу к новому базису с матрицей перехода $Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, которая в силу ортогональности приводит к ортонормированному базису и не меняет инвариантов. Итак, мы получили известное каноническое уравнение 6, известное нам как каноническое уравнение ***параболы***.

Если $I_2 = 0$, $K_3 = 0$, то уравнение (59.1) преобразуется в приведенное уравнение типа III:

$$\lambda_2y^2 + c_0 = 0, \tag{59.10}$$

где $\lambda_2 \neq 0$. Для этого уравнения согласно (58.17)

$$I_1 = \lambda_2, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_2 = \lambda_2c_0. \tag{59.11}$$

Линии этой группы определяются полуинвариантом K_2. Как следует из теоремы 58.2, преобразования базиса с помощью ортогональной матрицы перехода не изменяют K_2.

Лемма. *Если $I_2 = K_3 = 0$, то полуинвариант K_2 не изменяется при параллельном переносе.*

Доказательство. Не изменяя числа K_2, преобразуем общее уравнение (58.1) в уравнение (58.12), в котором $a'_{12} = 0$. Для этого уравнения

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{bmatrix}.$$

Так как $I_2 = 0$, то $a'_{11}a'_{22} = 0$. Поэтому одно из чисел a'_{11} или a'_{22} равно нулю. Не изменяя инвариантов, можно считать (см. обсуждение (58.14)), что $a'_{11} = 0$. Тогда

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Но $K_3 = 0$, поэтому $a'_{13} = 0$ и уравнение (58.12) имеет вид

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0, \tag{59.12}$$

при этом

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad K_2 = K'_2 = a'_{22}a_{33} - a'^2_{23}. \tag{59.13}$$

При параллельном переносе $x' = x'' + \alpha$, $y' = y'' + \beta$ уравнение (59.12) преобразуется в уравнение

$$a'_{22}y''^2 + 2(\beta a'_{22} + a'_{23})y'' + 2\beta a'_{23} + a_{33} = 0,$$

для которого

$$B'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & \beta a'_{22} + a'_{23} \\ 0 & \beta a'_{22} + a'_{23} & a_{33} + a'_{22}\beta^2 + 2a'_{23}\beta \end{bmatrix},$$

$$K''_2 = a'_{22}(a_{33} + a'_{22}\beta^2 + 2a'_{23}\beta) - (\beta a'_{22} + a'_{23})^2 = a'_{22}a_{33} - a'^2_{23}.$$

Из (59.13) следует, что $K''_2 = K_2$. Лемма доказана.

Вернемся к уравнению (59.10). Отметим, что согласно лемме полуинварианты K_2 в уравнениях (58.1) и (59.10) совпадают.

§57. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Пусть $\mathcal{L}$ – какая-нибудь из трех линий: эллипс, гипербола или парабола, заданная своим каноническим уравнением.

Введем полярную систему координат, приняв за полюс фокус F линии (для эллипса F – левый фокус, для правой ветви гиперболы F – правый фокус, а для левой ветви – левый фокус), полярную ось направим в положительную сторону оси Ox канонической системы координат Oxy во всех случаях, кроме левой ветви гиперболы, а в этом случае – в отрицательную сторону оси Ox (рис. 1).

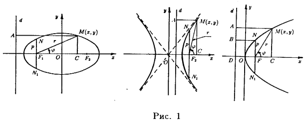


Рис. 1

Тогда для любой точки M плоскости ее полярный радиус r совпадает с фокальным радиусом $\rho(M,F)$. Согласно директориальному свойству линии $\mathcal{L}$ точка $M(x,y)$ принадлежит $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{r}{\rho(M,d)}=\varepsilon, \tag{57.1}$$

где ε – эксцентриситет линии $\mathcal{L}$. Пусть $\rho(F,d)=m$, тогда $\rho(M,d)=MA=r\cos\varphi+m$ и уравнение (57.1) линии может быть записано в виде

$$r=(r\cos\varphi+m)\varepsilon$$

или

$$r=\frac{m\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \tag{57.2}$$

Для параболы $\varepsilon=1$, $m=p$, где p – фокальный параметр параболы. Следовательно, в выбранной полярной системе координат парабола определяется уравнением

$$r=\frac{p}{1-\cos\varphi}. \tag{57.3}$$

Для эллипса и гиперболы число $p=b^2/a$ называется *фокальным параметром.* Из (52.9) и (53.4) следует, что число $m\varepsilon$ в (57.2) совпа-

дает с фокальным параметром p, так как

$$m\varepsilon=a-a\varepsilon^2=a\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{ab^2}{a^2}=\frac{b^2}{a}=p \quad \text{для эллипса и}$$

$$m\varepsilon=a\varepsilon^2-a=a\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)=\frac{ab^2}{a^2}=\frac{b^2}{a}=p \quad \text{для гиперболы.}$$

Это позволяет записать уравнение (57.2) в виде

$$\cdot-\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \tag{57.4}$$

где p – фокальный параметр линии, а ε – ее эксцентриситет . Поскольку для параболы $\varepsilon=1$, то уравнение (57.4) совпадает с уравнением (57.3) параболы. Таким образом, эллипс, гипербола и парабола описываются в полярной системе координат единым уравнением (57.4).

Замечание. Проведем из фокуса F (рис. 1) прямую, перпендикулярную оси Ox. Эта прямая пересечет линию $\mathcal{L}$ в двух точках N и N_1. Для точки N, как и для любой точки $\mathcal{L}$, справедливо соотношение (57.1), так что

$$\frac{\rho(N,F)}{\rho(N,d)}=\varepsilon.$$

Но $\rho(N,d)=\rho(F,d)=m$, следовательно, $\rho(N,F)=m\varepsilon=p$. Таким образом, фокальный параметр линии $\mathcal{L}$ совпадает с половиной длины хорды NN_1.

§58. Общее уравнение линии второго порядка

Пусть Oxy – аффинная система координат на плоскости. Алгебраическая линия второго порядка определяется уравнением

$$F(x,y)=0,$$

где $F(x,y)$ – алгебраический многочлен второй степени от переменных x, y с вещественными коэффициентами (§31). Этот многочлен принято записывать в виде

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33},$$

где $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0$. В соответствии с этим алгебраическая линия второго порядка определяется уравнением

$$\begin{gathered}a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,\\ a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0.\end{gathered} \tag{58.1}$$

Уравнение (58.1) называется *общим уравнением алгебраической линии второго порядка на плоскости.* Группа слагаемых $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ (т.е. одночленов второй степени) называется *квадратичной частью* уравнения (58.1) (или *группой старших членов*),

или

$$X'^T(Q^TAQ)X'+2(Q^Tb)^TX'+a_{33}=0.$$

Это означает, что в новом уравнении квадратичная часть определяется матрицей

$$A'=Q^TAQ, \tag{58.8}$$

а линейная часть – столбцом $b'=Q^Tb$. Таким образом, общее уравнение (58.2) линии $\mathcal{L}$ преобразуется в (58.7).

Докажем п.1. Из (58.8) следует, что $|A'|=|Q^TAQ|=|A|\cdot|Q|^2$, т.е. $I_2'=I_2|Q|^2$, где $|Q|\neq 0$. Следовательно, $\operatorname{sgn} I_2'=\operatorname{sgn} I_2$. Далее, если

$$\widetilde{Q}=\begin{array}{|c|c|}\hline Q & O\\ \hline O & 1\\ \hline\end{array}\,,\ \text{то}\ \widetilde{Q}^T=\begin{array}{|c|c|}\hline Q^T & O\\ \hline O & 1\\ \hline\end{array}\ \text{ и }\ |\widetilde{Q}|=|\widetilde{Q}^T|=|Q|.$$

Матрица B', соответствующая уравнению (58.7), имеет вид

$$B'=\begin{array}{|c|c|}\hline A' & b'\\ \hline b'^T & a_{33}\\ \hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline Q^TAQ & Q^Tb\\ \hline b^TQ & a_{33}\\ \hline\end{array}=\widetilde{Q}^TB\widetilde{Q}.$$

Следовательно, $|B'|=|B|\cdot|\widetilde{Q}|^2=|B|\cdot|Q|^2$ и $K_3'=K_3|Q|^2$. Таким образом, $\operatorname{sgn} K_3'=\operatorname{sgn} K_3$.

Докажем п.2. Если оба базиса e и e' ортонормированы, то матрица перехода Q будет ортогональной матрицей (§24) и $Q^T=Q^{-1}$. При этом матрица $\widetilde{Q}$ также будет ортогональной, ибо $\widetilde{Q}^T\widetilde{Q}=\widetilde{Q}\widetilde{Q}^T=I$, и, следовательно, $\widetilde{Q}^T=\widetilde{Q}^{-1}$. Таким образом, $A'=Q^{-1}AQ$ и $B'=\widetilde{Q}^{-1}B\widetilde{Q}$, т.е. пары матриц A' и A, B' и B подобны. Отсюда и из теоремы 58.1 (и ее следствия) вытекает, что числа $I_1=\operatorname{tr}A$, $I_2=|A|$, $K_3=|B|$, $K_2=a_1-I_2$ (где a_1 – сумма главных миноров второго порядка матрицы B) при переходе к новому базису не изменяются. ■

Замечание. Отметим, что при переходе к новому базису свободный член не изменяется.

Теорема 58.3. *При переносе начала координат в точку $O'(\alpha,\beta)$ общее уравнение* (58.2) *преобразуется в уравнение*

$$X'^TAX'+2b'^TX'+a_{33}'=0, \tag{58.9}$$

где $b'=b+Aa$, $a_{33}'=a^TAa+2b^Ta+a_{33}$, $a=(\alpha,\beta)^T$, при этом инварианты I_1, I_2, K_3 не изменяются.

Доказательство. Подставим в уравнение (58.2) $X=X'+a$. Тогда $(X'^T+a^T)A(X'+a)+2b^T(X'+a)+a_{33}=0$, или

$$X'^TAX'+X'^TAa+a^TAX'+a^TAa+2b^TX'+2b^Ta+a_{33}=0. \tag{58.10}$$

Заметим, что произведение X'^TAa есть вещественное число и его можно заменить результатом транспонирования, так что $X'^TAa=(X'^TAa)^T=a^TA^TX'=(Aa)^TX'$. Так как $A=A^T$, то $a^TAX'=$

$a^TA^TX'=(Aa)^TX'$. С учетом этих соотношений уравнение (58.10) может быть записано в виде

$$X'^TAX'+2(Aa+b)^TX'+a^TAa+2b^Ta+a_{33}=0.$$

Это означает, что в новом уравнении квадратичная часть остается прежней, линейная часть определяется столбцом $b'=Aa+b$, свободный член a_{33}' равен $a^TAa+2b^Ta+a_{33}$. Таким образом, уравнение (58.2) линии $\mathcal{L}$ преобразуется в (58.9).

Что касается инвариантов, то неизменность I_1, I_2 очевидна, так как матрица квадратичной части A осталась прежней. Докажем, что K_3 не изменяется. Имеем

$$B=\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{array}\right],$$

$$B'=\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\alpha a_{11}+\beta a_{12}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}+\alpha a_{12}+\beta a_{22}\\ \hline a_{13}+\alpha a_{11}+\beta a_{12} & a_{23}+\alpha a_{12}+\beta a_{22} & a_{33}'\end{array}\right],$$

где $a_{33}'=a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2+2a_{13}\alpha+2a_{23}\beta+a_{33}=a_{33}+\alpha a_{13}+\beta a_{23}+\alpha(a_{13}+\alpha a_{11}+\beta a_{12})+\beta(a_{23}+\alpha a_{12}+\beta a_{22})$. Последнее соотношение означает, что матрица B' получена из матрицы B с помощью элементарных преобразований: если к третьей строке матрицы B прибавить линейную комбинацию первых строк с коэффициентами α, β, а затем к третьему столбцу прибавить такую же линейную комбинацию первых столбцов, то получится матрица B'. Следовательно, $K_3'=|B'|=|B|=K_3$. ■

Теорема 58.4. *Общее уравнение линии второго порядка, заданное в прямоугольной декартовой системе координат, переходом к другой прямоугольной декартовой системе координат приводится к одному и только одному из следующих типов уравнений:*

$$\begin{array}{lll}\text{I.} & \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+a_0=0, & \textit{где}\ \ \lambda_1\lambda_2\neq 0;\\ \text{II.} & \lambda_2y^2+2b_0x=0, & \textit{где}\ \ \lambda_2b_0\neq 0;\\ \text{III.} & \lambda_2y^2+c_0=0, & \textit{где}\ \ \lambda_2\neq 0.\end{array} \tag{58.11}$$

Доказательство. Пусть Oxy – прямоугольная декартова система координат и линия $\mathcal{L}$ задана в этой системе координат общим уравнением (58.1).

Шаг 1 (преобразование базиса). **Метод вращений.** Покажем, что если $a_{12}\neq 0$, то поворотом осей можно привести квадратичную часть уравнения (58.1) к сумме квадратов. Действительно, поворот осей на угол φ приводит к новому базису $e'=eQ$ с матрицей перехода (§24) $Q=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$. Очевидно, $Q^TQ=QQ^T=I$,

для уравнения типа III

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & c_0\end{bmatrix}. \tag{58.17}$$

Следовательно,

1) $I_2\neq 0$ для уравнения типа I;
2) $I_2=0$, $K_3\neq 0$ для уравнения типа II;
3) $I_2=0$, $K_3=0$ для уравнения типа III.

Эти условия взаимно исключают друг друга, и так как общее уравнение и уравнения (58.11) имеют одинаковые инварианты I_2, K_3, то общее уравнение (58.1) приводится только к одному из трех указанных типов уравнений. ■

Уравнения (58.11) называются *приведенными уравнениями линии второго порядка.*

Замечание. Особо отметим, что в *прямоугольных* координатах коэффициенты λ_1, λ_2 приведенных уравнений являются инвариантами линии, так как

$$\lambda_1+\lambda_2=I_1,\quad \lambda_1\lambda_2=I_2 \tag{58.18}$$

и, следовательно, λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического многочлена матрицы A

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0. \tag{58.19}$$

§59. Классификация линий второго порядка на плоскости

Канонические уравнения.

Теорема 59.1. *Общее уравнение* (58.1) *линии второго порядка, заданное в прямоугольной декартовой системе координат, определяет одну и только одну из девяти линий, для каждой из которых существует прямоугольная система координат, в которой уравнение этой линии имеет вид:*

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a\geq b>0$, *эллипс;*

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$, *мнимый эллипс;*

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$, *пара мнимых пересекающихся прямых;*

4) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, *гипербола;*

5) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$, *пара пересекающихся прямых;*

6) $y^2=2px$, $p>0$, *парабола;*
7) $y^2=a^2$, $a\neq 0$, *пара параллельных прямых;*
8) $y^2=-a^2$, $a\neq 0$, *пара мнимых параллельных прямых;*
9) $y^2=0$, *пара совпадающих прямых.*

Доказательство. Пусть общее уравнение (58.1) переходом к новой прямоугольной декартовой системе координат преобразовалось в приведенное уравнение. Рассмотрим все возможные при этом варианты.

Если $I_2\neq 0$, то уравнение (58.1) преобразуется в приведенное уравнение типа I:

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+a_0=0, \tag{59.1}$$

где $\lambda_1\lambda_2\neq 0$. Для этого уравнения согласно (58.15)

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2,\quad I_2=\lambda_1\lambda_2,\quad K_3=\lambda_1\lambda_2a_0. \tag{59.2}$$

В зависимости от знаков λ_1, λ_2, a_0 уравнение (59.1) может быть записано по-разному.

1. Если $\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1a_0<0$, т.е.

$$I_2>0,\quad I_1K_3<0, \tag{59.3}$$

то простейшие преобразования приводят уравнение (59.1) к равносильному уравнению $\dfrac{x^2}{-a_0/\lambda_1}+\dfrac{y^2}{-a_0/\lambda_2}=1$ или $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $a^2=-\dfrac{a_0}{\lambda_1}$, $b^2=-\dfrac{a_0}{\lambda_2}$. В этом уравнении можно считать, что $a\geq b>0$, так как в противном случае достаточно переименовать переменные, как это было сделано в (58.14). Мы получили уравнение 1, известное нам как каноническое уравнение *эллипса.*

2. Если $\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1a_0>0$, т.е.

$$I_2>0,\quad I_1K_3>0, \tag{59.4}$$

то, поступая аналогично, приходим к уравнению 2.

Ясно, что нет ни одной точки плоскости, удовлетворяющей этому уравнению. Принято говорить о нем как об уравнении *мнимого эллипса.*

7. Если $\lambda_2c_0<0$, т.е.

$$K_2<0, \tag{59.14}$$

то уравнение (59.10) эквивалентно уравнению 7 (где $a^2=-c_0/\lambda_2>0$), которое определяет *пару параллельных прямых*: $y=a$ и $y=-a$.

8. Если $\lambda_2c_0>0$, т.е.

$$K_2>0, \tag{59.15}$$

то уравнение (59.10) эквивалентно уравнению 8 (где $a^2=c_0/\lambda_2>0$). Ясно, что ни одна точка плоскости не удовлетворяет этому уравнению. Принято говорить о нем как об уравнении *пары мнимых параллельных прямых.*

9. Если $c_0=0$, т.е.

$$K_2=0, \tag{59.16}$$

то уравнение (59.10) эквивалентно уравнению 9, которое определяет *пару совпадающих прямых*: $y=0$ и $y=0$.

Условия (59.3)–(59.7), (59.9), (59.11), (59.14)–(59.16) исчерпывают все варианты линий второго порядка на плоскости и взаимно исключают друг друга. Следовательно, общее уравнение (58.1) определяет одну и только одну из девяти перечисленных линий. ■

Для каждой из этих линий найдена прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение линии имеет вид 1–9. Эти уравнения называют *каноническими уравнениями линий второго порядка.*

Линии, для которых $I_2>0$, называются *линиями эллиптического типа*, $I_2<0$ – *гиперболического типа*, $I_2=0$ – *параболического типа.*

Замечание. Если общее уравнение (58.1) линии второго порядка задано в прямоугольной декартовой системе координат, то каноническое уравнение линии может быть найдено по инвариантам, так как согласно (58.18) и (58.19) коэффициенты λ_1, λ_2 приведенных уравнений являются корнями характеристического многочлена матрицы A:

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0.$$

При этом если $\lambda_1\leq\lambda_2$, то в силу (59.2), (59.9), (59.11)

$$a_0=\frac{K_3}{I_2},\quad b_0^2=-\frac{K_3}{I_1},\quad c_0=\frac{K_2}{I_1}.$$

Результаты проведенных исследований сведены в следующую таблицу.

Приведенное уравнение	Номер	Каноническое уравнение линии	Название линии	Признак линии
$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{K_3}{I_2}=0$, $\lambda_1\lambda_2\neq 0$	1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a\geq b>0$	Эллипс	$I_2>0$, $I_1K_3<0$
	2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	Мнимый эллипс	$I_2>0$, $I_1K_3>0$
	3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара мнимых пересекающихся прямых	$I_2>0$, $K_3=0$
	4	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Гипербола	$I_2<0$, $K_3\neq 0$
	5	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара пересекающихся прямых	$I_2<0$, $K_3=0$
$I_1y^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}x=0$, $I_1K_3\neq 0$	6	$y^2=2px$, $p>0$	Парабола	$I_2=0$, $K_3\neq 0$
$I_1y^2+\frac{K_2}{I_1}=0$, $I_1\neq 0$	7	$y^2=a^2$, $a\neq 0$	Пара параллельных прямых	$I_2=0$, $K_3=0$, $K_2<0$
	8	$y^2=-a^2$, $a\neq 0$	Пара мнимых параллельных прямых	$I_2=0$, $K_3=0$, $K_2>0$
	9	$y^2=0$	Пара совпадающих прямых	$I_2=0$, $K_3=0$, $K_2=0$

Метод Лагранжа. Теорема 58.4 о приведенных уравнениях остается справедливой и в аффинной системе координат, так как тип приведенного уравнения определяется только *знаками* инвариантов I_2, K_3, которые в силу теоремы 58.2 сохраняются при преобразованиях аффинной системы координат. Вместо вычисления инвариантов или метода вращений можно использовать *метод выделения полных квадратов* (*метод Лагранжа*), который состоит в следующем.

1. Пусть в общем уравнении (58.1) $a_{11}\neq 0$. Выделим полный квадрат в группе членов, содержащих переменную x:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}x=a_{11}\left(x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y+a_{13}\right)^2-a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}y+a_{13}\right)^2.$$

Положим

$$x'=x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y+a_{13}. \tag{59.17}$$