Экзаменационные вопросы

по курсу "Линейная алгебра"

I курс факультета ВМиК, II семестр

Лектор : ***Панферов В.С.*** (кафедра общей математики ВМиК).

Другие источники:

1. ***Е.В. Шикин***. Линейные пространства и отображения. ВМиК МГУ, 1987.
2. ***Х.Д. Икрамов***. Задачник по линейной алгебре. "Наука",1975.
3. ***И.В. Проскуряков***. Сборник задач по линейной алгебре. "Наука",1984.
4. Finite-dimensional vector spaces. by ***Paul R. Halmos*** / ***П. Халмош***. Конечномерные векторные пространства. М, 1963.
5. ***В.В. Воеводин***. Линейная алгебра. "Наука",1974.

Frequently asked questions

1. Линейное пространство. Определение, основные свойства и примеры. Ранг и база системы векторов.

- **Полем** будем называть произвольное множество P элементов произвольной природы (**скаляров**), с двумя алгебраическими операциями +,* : $P^2 \to P$. При этом должны быть выполнены следующие аксиомы ($\forall a,b,c \in P$) :
- (A1) a+b = b+c; (A2) a+(b+c) = (a+b)+c;
- (A_3) $\exists!\ 0 \in P : \forall a : a+0=a$; (A_4) $\exists!\ (-a) : a+(-a)=0$.
- (свойства A означают, что P - абелева группа по сложению)
- (B_1) ab = ba; (B_2) a(bc) = (ab)c;
- (B_3) $\exists!\ 1 \in P : \forall a : a1=a$; (B_4) $\forall a \neq 0 : \exists!\ (a^{-1}) : a(a^{-1})=1$.
- (C) a(b+c) = ab + bc.
- **Линейным векторным пространством** V(P) над полем P будем называть множество V элементов произвольной природы (**векторов**), с двумя операциями :
- *сложение* векторов + : $V^2 \to V$ и
- *умножение* на скаляр * : PxV $\to$ V. При этом должны быть выполнены следующие аксиомы ($\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V$, $c,d \in P$)
- (A) V - *абелева группа* по сложению.
- (B_1) $c(d\mathbf{x}) = (cd)\,\mathbf{x}$; (B_2) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$;
- (C_1) $c(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = c\mathbf{x}+c\mathbf{y}$; (C_2) $(c+d)\mathbf{x} = c\mathbf{x}+d\mathbf{x}$.
- Если $U \subseteq V(P)$ является векторным пространством над P с определенными V операциями , то U называется (линейным) *подпространством* V.
- Пространства **V**(**R**) и **U**(**C**) над полями вещественных и комплексных чисел называются соответственно **вещественными** и **комплексными** векторными пространствами.
- *Примеры линейных пространств* :
- Множество C[0;1] непрерывных вещественнозначных функций, определенных на сегменте [0;1] (пространство над полем **R**).
- Любое поле P есть линейное пространство над самим собой.
- Множество P_{MxN} прямоугольных MxN - матриц.
- Поле **C** можно рассматривать как линейное пространство над полем **R**.
- *Линейной комбинацией* векторов $X = \{\mathbf{x}_i\}$ с коэффициентами a_i будем называть вектор $\mathbf{x} = \Sigma\,(a_i\mathbf{x}_i)$. Говорят, что **x** линейно выражается через $\mathbf{x}_i$.
- Систему векторов X будем называть *линейно независимой*, если
$$(\Sigma\,(a_i\mathbf{x}_i) = 0) \Leftrightarrow (a_i \equiv 0).$$
- **Базой** системы векторов X будем называть такую ее линейно независимую подсистему $Y \subseteq X$, что все вектора X линейно выражаются через вектора Y.
- **Рангом** системы X будем называть минимальное количество векторов в ее базе.

2. Изоморфизм линейных пространств.

- Линейные пространства V и U над одним полем P называются *изоморфными*, $V \cong U$, если существует *изоморфизм* - биективное отображение $\varphi : V \to U$, такое, что $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ и $\forall \alpha,\beta \in P : \varphi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}) + \beta\varphi(\mathbf{y})$.
- *Утверждение*. Отношение $\cong$ на множестве линейных пространств есть отношение эквивалентности, т.е. (1) $U \cong U$; (2) $V \cong U \Leftrightarrow U \cong V$; (3) $U \cong V,\ V \cong W \Rightarrow U \cong W$.
- *Теорема*. Конечномерные U(P) и V(P) изоморфны $\Leftrightarrow$ dim U = dim V.
- *Утверждение*. Любое n-мерное V(P) изоморфно P^n.

3. Сумма и пересечение линейных подпространств.

- *Линейной оболочкой* системы $X = \{\mathbf{x}_i\} \subseteq V(P)$ будем называть множество $L(X) = \{ \Sigma (a_i\mathbf{x}_i) \mid a_i \in P \}$ всевозможных линейных комбинаций векторов X.
- *Лемма*. Любая линейная оболочка $L(X)$, $X \subseteq V(P)$ является линейным подпространством V. В самом деле, складывая два элемента $x,y \in L(X)$, получаем $z = x+y = \Sigma (a_i\mathbf{x}_i) + \Sigma (b_i\mathbf{x}_i) = \Sigma (a_i+b_i)\mathbf{x}i \in L(X)$. Аналогично $\alpha\mathbf{x} \in L(X)$ для $\forall\alpha\in P$.
- Линейная оболочка L(X) является наименьшим по включению линейным подпространством V, содержащим X.
- *Пример.* Рассмотрим систему функций $X = \{ 1,t,...,t^n, ... \} \subset C[0;1]$. Тогда L(X) есть пространство многочленов над R.
- Пусть U,U’ - подпространства V(P).
- Суммой U и U’ называется $U+U' = \{ \alpha x+\beta y \mid \alpha,\beta\in P,\ x \in U,\ y \in U' \}$.
- Утверждение. Сумма и пересечение линейных подпространств V есть подпространства V.
- Теорема. Если W_1 , W_2 - подпространства V, то $\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)= \dim(W_1)+\dim(W_2)$.
- (1) Случай $W_1\cap W_2 = \{0\}$ тривиален.
- (2) Пусть $e_1 , ... , e_n$ - базис $W_1\cap W_2$. Дополним его векторами $f_1 , ... , f_p$ до базиса W_1 и векторами $g_1 , ... , g_q$ до базиса W_2. Остается показать, что $e_1 , ... , e_n , f_1 , ... , f_p, g_1 , ... , g_q$ - базис в W_1+W_2. В самом деле, пусть $\Sigma\alpha_ie_i + \Sigma\beta_if_i + \Sigma\gamma_ig_i = 0$; тогда $y = \Sigma\alpha_ie_i + \Sigma\beta_if_i = -\Sigma\gamma_ig_i \in W_1\cap W_2$. В силу единственности разложения вектора y из $W_1\cap W_2$ по базису $\{e_i\}$ и линейной независимости $\{f_i\}$ получаем $\beta_i \equiv 0$. Так как система $\{ e_i \} \cup \{g_i \}$ линейно независима, то $\alpha_i \equiv 0$ и $\gamma_i \equiv 0$. Таким образом, система $\{ e_1 , ... , e_n , f_1 , ... , f_p, g_1 , ... , g_q \}$ линейно независима.

4. Прямая сумма линейных подпространств.

- Если W_1 , W_2 - подпространства V и для любого $x \in W_1+W_2$ разложение $x = x_1 + x_2$ единственно, то сумма W_1 и W_2 называется *прямой суммой* : $W_1+W_2 = W_1\oplus W_2$.
- *Теорема*. Если $W_1\cap W_2 = \{0\}$ и $\dim(V)=\dim(W_1)+\dim(W_2)$, то $V = W_1\oplus W_2$.
- (1) Согласно п.4 , $\dim(V)=\dim(W_1)+\dim(W_2)=\dim(W_1+W_2)$. Тогда $V=W_1+W_2$.
- (2) Докажем единственность разложения $x \in V$ на вектора из W_1 и W_2. В самом деле, если бы $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, то $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \in W_1\cap W_2$; т.е. $x_1=y_1$ и $x_2=y_2$.
- Пусть W - подпространство V. W^δ называется *дополнительным* к W , если $V=W\oplus W^\delta$. Дополнительное подпространство определено неоднозначно.
- *Лемма*. Дополнительное пространство всегда существует.
- Достаточно взять базис подпространства W и дополнить его векторами $f_1 , ... , f_p$ до базиса V. Утверждается, что $L(f_1 , ... , f_p)= W^\delta$.

5. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши - Буняковского.

- *Евклидовым* будем называть линейное пространство E, в котором определена операция *скалярного умножения* : (,) : $E^2\rightarrow R$, удовлетворяющая следующим соотношениям :
- $(x,y)=(y,x)$ (симметричность) ;
- $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$; $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$ (линейность);
- $x^2=(x,x)\geq 0$, причем $x^2=0 \Leftrightarrow x = 0$ (положительная определенность).
- Естественное скалярное произведение в R^n : для $\mathbf{x}=(x^1,...,x^n)$ и $\mathbf{y}=(y^1,...,y^n)$ полагаем $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Sigma (\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i)$.
- В любом подпространстве евклидова пространства естественным образом задано скалярное произведение.
- *Унитарным* будем называть комплексное линейное пространство U(C), в котором определена операция скалярного умножения : (,) : $U^2\rightarrow C$, удовлетворяющая следующим соотношениям :
- $(x,y)=(y,x)^*$;
- $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$; $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$ (линейность);
- $x^2=(x,x)\geq 0$, причем $x^2=0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Естественное скалярное произведение в C^n : для $\mathbf{x}=(x^1,...,x^n)$ и $\mathbf{y}=(y^1,...,y^n)$ полагаем $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Sigma (\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i^*)$.
- *Матрицей Грама* системы векторов $X = (x_1, ... , x_n)$ называется матрица, составленная из попарных скалярных произведений этих векторов :

$$\Gamma(X) = [(x_k, x_m)].$$

- *Неравенство Коши-Буняковского*. $(x,y)^2\leq(x,x)(y,y)$. ($\det \Gamma(x,y) \geq 0$)
- Пусть $x \neq 0$. Рассмотрим неравенство $(tx-y,tx-y) \geq 0$, выполняющееся при любых t; запишем это в виде квадратного неравенства относительно t :

$$t^2(x,x)-2t(x,y)+(y,y) \geq 0.$$

- Из неположительности дискриминанта вытекает неравенство Коши-Буняковского.
- *Утверждение*. Равенство имеет место лишь в случае коллинеарных x и y.
- В унитарном пространстве имеет место неравенство Коши-Буняковского в виде

$$|(x,y)|^2\leq(x,x)(y,y).$$

6. Длина и угол. Неравенства треугольника в Евклидовом (и унитарном) пространстве. Тождество параллелограмма и критерий евклидовости нормы

- *Длиной* вектора x называется число $|x| = (x,x)^{1/2}$.
- *Неравенство треугольника* : $|x+y|\leq|x|+|y|$.
- Достаточно записать : $|x+y|^2 = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq (x,x) + 2|(x,y)| + (y,y) \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$ (согласно определению длины и неравенству Коши-Буняковского) $= (|x|+|y|)^2$; извлекая квадратный корень, получаем неравенство треугольника.

- Тождество параллелограмма: $|x+y|^2+|x-y|^2=2(|x|^2+|y|^2)$
- Углом между ненулевыми векторами называется число φ из $[0;2\pi]$, определяемое равенством
$$\cos\varphi = (x,y)/(|x||y|).$$

7. Ортонормированный базис. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.

- Система векторов $X = (x_1, \dots, x_n)$ в евклидовом (унитарном) пространстве называется *ортогональной*, если $(x_k, x_m) = 0$ при $k \neq m$.
- Система векторов X называется *ортонормированной*, если $(x_k, x_m) = \delta_{km}$, или, что то же самое, их матрица Грама единична : $\Gamma(X) = E$.
- *Лемма*. Ортонормированная система векторов линейно независима.
- Достаточно рассмотреть равенство вида $\Sigma\alpha_i x_k = 0$, умножить его скалярно на x_m (m = 1,...,n) и получить, что $\alpha_i \equiv 0$.
- Скалярное произведение векторов $\mathbf{x}=(x^1,\dots,x^n)$ и $\mathbf{y}=(y^1,\dots,y^n)$ в евклидовом пространстве, записанных своими координатами в ортонормированном базисе **e**, равно $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Sigma\ (\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i)$, согласно свойству линейности скалярного произведения по обоим аргументам и поскольку $(e_k, e_m) = \delta_{km}$.
- *Теорема*. В любом n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.
- (1) Доказывается по индукции. Для n = 1 - очевидно.
- (2) В n-мерном пространстве существует какой-то базис $(f_1, \dots, f_{n-1}, f_n)$. Рассмотрим ортонормированный базис $(e_1, \dots ,e_{n-1})$ подпространства $L(f_1, \dots, f_{n-1})$. Построим вектор $g = (f_n - \alpha_1 e_1 - \dots - \alpha_{n-1}e_{n-1})$, где $\alpha_i = (f_n,e_i)$.
- (3) В качестве базиса возьмем $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$, где $e_n = g/|g|$.

8. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.

- *Матрицей Грама* системы $X = (x_1, \dots, x_n)$ называется $\Gamma(X) = [(x_k, x_m)]$.
- Символическая запись $\Gamma(X) = X^T X$, где элементы перемножаются скалярно.
- $\Gamma^T=\Gamma$ (матрица Грама есть симметрическая/эрмитова).
- *Теорема* (критерий линейной зависимости). Система векторов $X = (x_1, \dots, x_n)$ линейно зависима $\Leftrightarrow \det\Gamma(X) = 0$.
- (1) Пусть имеется нетривиальная линейная комбинация векторов X :
$$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0$$
- Умножая это равенство скалярно последовательно на $x_1, \dots, x_n$, получим
$$\Gamma(X)(\alpha_1,\dots,\alpha_n)^T=0$$
- Таким образом матрица Γ(X) вырождена, поскольку система имеет ненулевое решение $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)^T$.
- (2) Обратно, пусть столбцы матрицы Γ(X) линейно зависимы. Тогда один из них, для определенности n-й, линейно выражается через другие :
$$(x_i,x_n) = \alpha_1(x_i,x_1)+\dots+\alpha_{n-1}(x_i,x_{n-1}) \text{ (где } i = 1,..,n)$$
$$\Rightarrow (x_i,g) = 0, \text{ где } g = x_n - \alpha_1x_1 - \dots - \alpha_{n-1}x_{n-1}.$$
- Таким образом, g ортогонален подпространству $L(x_1, \dots, x_n)$. Поскольку $g \in L(x_1, \dots, x_n)$, то $g = 0 \Rightarrow x_n = \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_{n-1}x_{n-1}$, т.е. вектор x_n линейно выражается через $x_1, \dots, x_{n-1}$.

9. Ортогональное дополнение. Разложение вектора на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую.

- *Ортогональным дополнением* множества $X \subseteq E$ называется множество векторов
$$X^\perp=\{y\in E \mid \forall x\in X\ (y,x)=0\ \}.$$
- *Лемма* 1. $X^\perp$ есть линейное подпространство E.
- *Лемма* 2. $X^\perp = (L(X))^\perp$.
- *Лемма* 3. Если W - подпространство E, то $E=W\oplus W^\perp$, т.е. любой вектор однозначно разлагается на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую относительно подпространства.
- Достаточно показать, что обьединяя базисы W и $W^\perp$ получим базис E.
- *Лемма* 4. Если W - подпространство E, то $(W^\perp)^\perp=W$.

10. Ортонормированный базис и унитарные(ортогональные) матрицы

- Матрица $U\in \boldsymbol{C}^{nxn}$ унитарна, если $UU^H=U^HU=I$, матрица $Q\in \boldsymbol{R}^{nxn}$ ортогональна, если $QQ^T=Q^TQ=I$
- Теорема: матрица перехода от ортонормированного базиса e к базису e' евклидова (унитарного) пространства ортогональна (унитарна) ТТТК e' – ортогональный базис

11. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. QR-разложение матрицы

- *Процесс ортогонализации* есть решение вопроса о построении ортонормированной системы векторов при заданной линейно независимой системе. Каждый шаг процесса аналогичен шагу (2) в доказательстве предыдущей теоремы.
- *AL=Q (L – верхняя треугольная матрица - как произведение верх. тр. матриц)* => A=QR (Q-ортогональная(унитарная) матрица, $R=L^{-1}$ – верхняя треугольная)

12. Линейные многообразия в евклидовом (и унитарном) пространстве. Гиперплоскость.

- *Теорема*. Любое линейное многобразие H определяется системой уравнений вида $(a_i , y) = \alpha_i$, т.е. $H = \{y \mid (a_i , y) = \alpha_i\}$, где $a_1,\dots,a_m$ - линейно-независимая система векторов, а α_i - действительные числа.
- Достаточно для H=b+W (W - подпространство) в качестве $a_1,\dots,a_m$ взять базис подпространства $W^\perp$, а в качестве α_i числа (a_i , b).

13. Линейные операторы. Определение и основные свойства. Матрица линейного оператора.

- Пусть V и W - произвольные линейные пространства над полем **P**. Отображение A : V→W, такое, что $\forall$**x,y**$\in$V и $\forall\alpha,\beta\in$P : A(α**x**+β**y**) = αA(**x**) + βA(**y**) называется *линейным отображением* (оператором) действующим из V в W.
- Если W = P, то отображение называется *линейной формой.*
- *Примеры* : (0) Тождественный оператор E(x)=x; (1) оператор дифференцирования в пространстве многочленов; (2) проекторы на подпространство; (3) операторы поворота и симметрии.
- *Лемма 1*. Линейное отображение переводит линейно зависиимые системы векторов в линейно зависимые.
- Пусть вектора $\{x_i\}$ линейно зависимы. Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию $\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n=0$. Подействовав на это равенство линейного отображением A, получим, что образы векторов также линейно зависимы : $\alpha_1Ax_1+...+\alpha_nAx_n=0$.
- *Лемма 2*. Образ линейного отображения A : V→W является линейным подпространством W.
- *Рангом* линейного отображения называется размерность его образа : rang(A)=dim(im A).
- *Утверждение*. Согласно лемме 1, Rang(A) ≤ dim(V).
- *Теорема*. Линейное отображение A : V→W однозначно определяется образами базиса V.
- Пусть $e_1,...,e_n$ - базис V отображением A переводится в систему векторов $f_1,...,f_n$. Применим к вектору $x = \Sigma x^ie_i$ линейное отображение : $Ax=A(\Sigma x^ie_i)= \Sigma x^iA(e_i)= \Sigma x^if_i$.
- Матрица, столбцами которой являются образы базисных векторов $f_1,...,f_n$ (записанные в базисе $g_1,...,g_m$ пространства W : $f_k = \Sigma f_k^ig_i$) называется матрицей A(e,g) оператора A в паре базисов e,g : $A(e,g) = [f_k^i]$.
- *Утверждение*. Линейное отображение A : V→W однозначно определяется своей матрицей в некоторой паре базисов.
- *Утверждение*. Ранг матрицы A(e,g) линейного отображения не зависит от выбора базисов e,g и равен рангу линейного отображения A.
- Пусть A: V→V - линейный оператор и $e_1,...,e_n$ - базис V. Матрицей $A(e) = A_e$ оператора A в базисе e называется квадратная матрица, столбцами которой являются образы векторов $e_1,...,e_n$, записанные в том же базисе.
- Линейный оператор однозначно определен матрицей в произвольном базисе.
- Лемма. Матрица суммы операторов есть сумма матриц этих операторов в одном и том же базисе : $(A+B)_e=A_e+B_e$.

14. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.

- *Теорема 1*. Пусть e и g=eS - базисы V, A:V→V - линейный оператор. Тогда матрицы A в этих базисах связаны следующими соотношениями :
$$A(e)=SA(g)S^{-1}, \ A(g)=S^{-1}A(e)S.$$
- Воспользуемся формулами преобразования координат
$$x(e)=S[x(g)] \text{ и } x(g)=S^{-1}[x(e)].$$
- Пусть y = Ax. Тогда $y(e)=A(e)x(e)=A(e)Sx(g)$; $y(g)=S^{-1}y(e)= [S^{-1}A(e)S]x(g)$. Следовательно, матрица A в базисе g есть $A(g)=S^{-1}A(e)S$.
- Лемма. Определитель матрицы оператора не зависит от базиса (инвариантен).
- Доказательство. $\det[A(g)]=\det[S^{-1}A(e)S]=\det[A(e)]$.
- *Определителем оператора* называется определитель его матрицы в произвольном базисе : det A = det[A(e)].
- Матрицы $A,B\in P_{NxK}$ *эквивалентны*, если существуют две квадратные невырожденные матрицы $S\in P_{KxK},T\in P_{NxN}$, что B=SAT.
- *Утверждение*. Две матрицы одного и того же линейного отображения A:V→W в разных парах базисов V и Wэквивалентны. Обратно, две эквивалентные матрицы являются матрицами некоторого линейного отображения A:V→W в некторорых парах базисов f,e и f',e'.
- *Теорема 2*. $A,B\in P_{NxK}$ эквивалентны ⇔ rang(A)=rang(B).
- В частности, две квадратные матрицы $A,B\in P_{NxN}$ *подобны*, если существует невырожденная (преобразующая) матрица T, такая, что $B=T^{-1}AT$.
- *Утверждение*. Две подобные матрицы имеют один и тот же ранг, один и тот же след и один и тот же определитель.

15. Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц. 22. Произведение линейных операторов и его матрица.

- *Лемма*. Матрица произведения (композиции) операторов есть произведение матриц этих операторов в произвольном базисе e.
- Пусть A,B $\in$ GL(V). C=BA - произведение операторов. Пусть x - произвольный вектор из V, y = A(x), z = B(y)=C(x). Запишем x, y и z в базисе e : y(e)=A(e)x(e) , z(e)=B(e)y(e)=[B(e)A(e)]x(e). В силу произвольности x матрица произведения BA в базисе e есть C(e)=B(e)A(e).
- *Теорема*. Пространство линейных операторов *GL*(V), действующих в n-мерном линейном пространстве V(P), изоморфно пространству квадратных (n x n)-матриц с элементами из P.
- Достаточно фиксировать в V произвольный базис , построить отображение Ψ, ставящее произвольному оператору в соответствие его матрицу в этом базисе; показать, что Ψ линейно, иньективно и сюрьективно.
- *Следствие*. $\dim GL(V)=n^2$.

16. Образ и ядро линейного оператора.

- *Утверждение*. Образ линейного оператора A : V→V является линейным подпространством V.
- *Рангом* линейного отображения называется размерность его образа : rang(A)=dim(im A).
- *Ядром* (kernel) A называется множество векторов, переводимых в ноль действием A : Ker A={y$\in$V|Ay=0}.

- Утверждение. Ax=Ay $\Leftrightarrow$ (x-y)$\in$Ker A.
- *Дефектом* A называется размерность его ядра : defect(A)=dim(Ker A).
- *Утверждение*. Ядро линейного оператора A : V$\to$V является линейным подпространством V.
- *Теорема*. defect(A)+rang(A)=dim(V).
- Обозначим U=ker A и рассмотрим фактор-пространство V/U. Покажем, что V/U$\cong$(im A), построив следующий изоморфизм φ : φ(x+U)=Ax. Таким образом, dim(V)=dim(U)+dim(V/U)=defect(A)+rang(A).
- Будем обозначать N_i=Ker(A^i), T_i=Im(A^i).
- *Утверждение*. Для ядер N_i и образов T_i справедливы следующие строгие вложения :

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_q = N_{q+1} = \ldots;$$
$$T_1 \supset T_2 \supset \ldots \supset T_q = T_{q+1} = \ldots,$$

- где q$\leq$n.

17. Линейные формы (функционалы). Сопряженное пространство. Специальное представление линейной формы в Евклидовом (и унитарном) пространстве.

- *Линейной формой* на V(P) называется линейное отображение A:V$\to$P.
- *Лемма 1.* Любая линейная форма однозначно определена набором чисел из P - ее значений на базисных векторах V.
- Все линейные формы на V(P) образуют линейное пространство V^*, которое называется сопряженным к V пространством.
- *Теорема 1.* Конечномерное пространство V(P) изоморфно сопряженному пространству V^*.
- Пусть dim(V)=n. Тогда, согласно лемме 1, линейная форма однозначно определена набором из n чисел $\Rightarrow$ dim(V^*)=n.
- *Теорема 2*. Пусть V - конечномерное евклидово пространство. Любая линейная форма в V представима в виде скалярного произведения A(x)=(x,y), где y$\in$V.
- Рассмотрим $e_1,\ldots,e_n$ - ортонормированный базис V. Возьмем вектор y с компонентами y^i=A(e_i). Для $\forall$x$\in$V : A(x) = A($\Sigma\, x^i e_i$) = Σx^i A(e_i) = $\Sigma x^i\, y^i$ = (x,y).
- Обратно, любое отображение вида A(x)=(x,y) есть линейная форма.

18. Обратный оператор. Критерий обратимости.

- *Обратным* к линейному оператору A называется оператор A^{-1} , такой, что

$$A^{-1}A= AA^{-1}=E.$$

- Если обратный A^{-1} существует, то A называется *обратимым*.
- *Теорема* (критерий обратимости). A обратим $\Leftrightarrow$ Ker A = {0} $\Leftrightarrow$ A взаимно-однозначен.

19. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Основные свойства.

- Пусть V - линейное пространство над P и A$\in$*GL*(V). Ненулевой вектор x$\in$V называется *собственным вектором* V, соответствующим *собственному значению* $\lambda\in$P, если Ax=λx.
- A вырожден $\Leftrightarrow$ A имеет собственное значение 0.
- *Теорема*. Система X = (x_1, ... , x_n) собственных векторов A, отвечающих различным собственным значениям $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, линейно независима.
- Доказывается индукцией по числу векторов. Для n=1 утверждение очевидно.
- Предположим, что система из (n-1) векторов (x_1, ... , x_{n-1}) линейно независима. Будем доказывать, что и система из n векторов линейно независима. От противного : пусть Σ ($a_i\mathbf{x}_i$) = 0 $\Rightarrow$ Σ ($a_i\,\lambda_i\mathbf{x}_i$) = 0.
- Умножая первое равенство на λ_n и вычитая из второго, получим

$$a_1(\lambda_1-\lambda_n)x_1+\ldots+a_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_1=0\,,$$

- что противоречит линейной независимости системы (x_1, ... , x_{n-1}), поскольку $\lambda_i\neq\lambda_n$.
- *Утверждение*. Число различных собственных значений A не превосходит размерности пространства.
- *Утверждение*. A и (A-λ_0E) имеют одни и те же собственные вектора.
- *Лемма*. Если λ - собственное значение A , то λ^2 - собственное значение A^2 (с тем же собственным вектором). Если λ и μ - собственные значения A и B с собственным вектором x, то (λ+μ) - собственное значение A+B (с тем же собственным вектором x).
- *Утверждение*. Если λ - собственное значение A и Q(t)$\in$P[t] - многочлен, то Q(λ) - собственное значение Q(A) (с тем же собственным вектором).
- *Лемма*. Если A невырожден, то A^{-1} и A имеют одни и те же собственные векторы. При это собственные значения A^{-1} имеют вид $\mu_i=1/\lambda_i$, где λ_i - собственные значения A.
- A:V$\to$V называется оператором *простой структуры*, если он имеет n=dim(V) линейно независимых собственных векторов. Такие и только такие операторы имеют *диагональную форму*, т.е. матрицу оператора, в которой по диагонали стоят собственные значения, а все остальные элементы нулевые
- *Собственным подпространством*, соответствующим собственному значению $\lambda\in$P оператора A:V$\to$V, называется множество векторов W(λ)={x$\in$V|Ax=λx}. W(λ) есть инвариантное относительно A.
- Геометрической кратностью собственного значения λ называется dim W(λ).
- Алгебраической кратностью λ называется кратность корня λ в характеристическом уравнении det(A-λE).
- *Теорема*. Геометрическая кратность не превосходит алгебраической.
- Достаточно показать, что если λ - собственное значение, то

$$\chi(t)=\det(A-tE)=(t-\lambda)^l\varphi(t)= (t-\lambda)^k\psi(t),$$

- где l и k - соответственно геометрическая и алгебраическая кратности λ, и $\psi(t)$ не имеет корня λ в силу определения алгебраической кратности. Отсюда $l \le k$.

20. Характеристический многочлен линейного оператора. Условие существования собственных векторов линейного оператора.

- Пусть V - линейное пространство над P и $A \in GL(V)$. *Характеристическим многочленом A называется многочлен* $\chi(\lambda)=\det(A-\lambda E)$.
- *Теорема*. $\lambda \in P$ есть собственное значение A $\Leftrightarrow \chi(\lambda)=0$, т.е. λ есть корень характеристического многочлена.
- Доказательство. $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda E)x=0 \Leftrightarrow \ker(A-\lambda E)\neq\{0\} \Leftrightarrow \det(A-\lambda E)=0$.
- *Теорема 1*. Любой оператор A: $U(C)\to U$, действующий в комплексном линейном пространстве, имеет по крайней мере одно собственное значение.
- *Утверждение*. A нильпотентен $\Leftrightarrow$ все собственные значения A равны 0.

21. Инвариантные подпространства. Индуцированный оператор. Сужение оператора

- Подпространство $W \subseteq V$ называется *инвариантным* относительно линейного оператора A, если $AW \subseteq W$, т.е. образы векторов W лежат в W.
- Примеры : V,{0},Ker A,im A.
- Лемма. Если W_1 и W_2 - инвариантные подпространства, то $(W_1 \cap W_2)$ и (W_1+W_2) - также инвариантные подпространства.
- Если W - инвариантное относительно A подпространство, то на нем возможно определение *индуцированного* оператора $B=A|_W : W\to W$ следующим простым образом : $B(x)=A(x)$.
- *Утверждение*. Если V разлагается в прямую сумму N инвариантных относительно A подпространств W_i , а базис e построен обьединением базисов W_i , то матрица A(e) имеет блочно-диагональный вид с N клетками вида $B_i(e)$, где B_i есть оператор A, индуцированный на пространстве W_i .

22. Инвариантные подпространства минимальной размерности.

- Любой оператор $A:V\to V$, действующий в комплексном пространстве U(C), имеет по крайней мере одно собственное значение λ, а значит и одномерное инвариантное относительно A собственное подпространство $L(\lambda)$.
- *Теорема*. Любой оператор $A:V\to V$, действующий в вещественном пространстве U(R), имеет по крайней мере одно инвариантное подпространство, размерность которого не превышает 2.
- (1) Если A имеет собственное значение λ, то, аналогично комплексному случаю, имеется собственное подпространство $L(\lambda)$.
- (2) Пусть $\lambda=a+ib$ - комплексный корень характеристического многочлена $\chi(t)$. Построим двумерное инвариантное пространство. Для этого найдем ненулевое решение комплексной однородной системы уравнений :
$$(A-(a+ib)E)(\xi+i\eta)=0$$
- (здесь A - матрица оператора в фиксированном базисе e и E - единичная матрица). Ненулевое решение $(\xi+i\eta)\in C^n$ существует, так как определитель системы $\chi(a+ib)=0$. Разделяя действительную и мнимую части, получим :
$$A\xi=a\xi-b\eta;\ A\eta=b\xi+a\eta.$$
- (3) По столбцам координат ξ и η в базисе e восстановим ненулевые векторы x и y. Можем записать аналогичные соотношения для x и y :
$$Ax=ax-by;\ Ay=bx+ay.$$
- (4) Очевидно, что пространство L(x,y) инвариантно относительно A.

23. Треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве. Теорема Шура

- *Теорема 1*. Любой оператор A, действующий в n-мерном комплексном линейном пространстве V, имеет по крайней мере одно инвариантное подпространство размерности (n-1).
- Достаточно рассмотреть любое (n-1)-мерное подпространство, включающее $T(\lambda)=\mathrm{im}(A-\lambda E)$, где λ - собственное значение A.
- *Теорема 2*. Любой оператор $A:V\to V$, где V - n-мерное комплексное пространство, имеет семейство вложенных инвариантных пространств L_p размерностей p=0,1,...,n-1,n : $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n$.
- Существование L_0 и L_n очевидно. L_{m-1} существует по теореме 1. Рассмотрим на нем индуцированный оператор A, получим $L_{n-2} \subset L_{n-1}$, и т.д.
- С помощью инвариантных подпространств, полученных в теореме 2, базис, в котором матрица A имеет *треугольную форму*. Возьмем в качестве базисных вектора $e_p \in L_p \backslash L_{p-1}$, p=0,1,...,n-1,n.
- Таким образом, всякая комплексная матрица подобна некоторой треугольной матрице.

Теорема 3 (Теорема Шура). Для любого оператора в унитарном пространстве существует ортонормированный базис, в котором его матрица имеет треугольную форму

24. Теорема о прямой сумме нильпотентного и обратимого операторов. Корневые подпространства

- Пусть $V=L\oplus M$, т.е. для любого x существует единственное разложение x=y+z, где $y\in L$, $z\in M$; пусть на L и M заданы линейные операторы B и C. Прямой суммой этих операторов называется оператор $A=B\oplus C : V\to V$, определяемый следующим образом : Ax=By+Cz.
- *Утверждение*. $\chi_A(t)= \chi_B(t)\chi_C(t)$

- *Теорема*. Для любого оператор $A:V\rightarrow V$, где V - n-мерное линейное пространство, существует разложение $V=N\oplus T$, где $N=Ker(A^q)$ и $T=Im(A^q)$, где $q\le n$; A разлагается в прямую сумму нильпотентного $A|_N$ и невырожденного $A|_T$ операторов. При этом dim(N) есть геометрическая кратность собственного значения 0.
- По свойству ядер и образов (*See also*: 23) найдется $q\le n$: $N=N_q=N_{q+1}=\ldots$; и $T=T_q=T_{q+1}=\ldots$. При этом на T оператор A невырожден, поскольку AT=T. На N оператор A невырожден, поскольку $Ker(A|_N)=N$. Очевидно, $T\cap N=\{0\}$, $dim(T)+dim(N)=dim(V)\Rightarrow V=N\oplus T$.
- *Утверждение*. Такое разложение единственно.
- Достаточно показать, что если на T' оператор невырожден, то $T'\subseteq T$; а если на N' оператор нильпотентен, то $N'\subseteq N$.
- Пусть A имеет r различных собственных значений λ_i и характеристический многочлен A представлен в виде $\chi(t)=\Pi\chi_i(t)$, где $\chi_i(t)$ имеет единственный корень λ_i. Получаемые с помощью теоремы о расщеплении подпространства V_i называют *корневыми подпространствами* A, соответствующими собственным значениям λ_i.
- Рассмотрим корневое подпространство $R=R(\lambda)$, соответствующее корню λ кратности k. По определению, $R=Ker((A-\lambda E)^k)^q$. Но поскольку размерности $N_p=Ker((A-\lambda E)^p)$ монотонно возрастают до стабилизации на R, a dim R=k, то $R=Ker((A-\lambda E)^k)$.
- Вектора корневого подпространства $R(\lambda)$ называют *корневыми векторами*, соответствующими собственному значению λ. *Высотой* корневого вектора x называют min m : $(A-\lambda E)^m x=0$. Очевидно, высота x не превосходит k - кратности λ. Множество $H_t(\lambda)$ корневых векторов из $R(\lambda)$, высота которых не превосходит t, образует подпространство $R(\lambda)$.

25. Расщепление линейного оператора.

- *Лемма*. Если собственное значение λ оператора A является корнем многочлена $\varphi(t)$, то все собственные вектора A, соответствующие λ, лежат в Ker $\varphi(A)$. Если собственное значение λ оператора A не является корнем многочлена $\varphi(t)$, то все собственные вектора A, соответствующие λ, лежат в Im $\varphi(A)$.
- (1) Пусть собственный вектор x соответствует корню λ. Тогда x есть собственный и для $\varphi(A)$, но соответствует собственному значению $\varphi(\lambda)\Rightarrow\varphi(A)x=\varphi(\lambda)x=0\Rightarrow x\in Ker\,\varphi(A)$.
- (2) Пусть теперь $\varphi(\lambda)\ne0\Rightarrow\varphi(A)x=\varphi(\lambda)x\Rightarrow x=\varphi(A)((1/\varphi(\lambda))x)\Rightarrow x\in Im\,\varphi(A)$.
- *Теорема 1*. Пусть характеристический многочлен оператора $A:V\rightarrow V$ представлен в виде $\chi(t)=\varphi(t)\psi(t)$, где НОД$(\varphi,\psi)=1$, т.е. $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ не имеют общих корней. Тогда оператор A единственным образом разлагается в прямую сумму операторов B и C, имеющих соответственно характеристические многочлены $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.
- (1) Будем раскладывать A в прямую сумму с помощью многочлена $\varphi(t)$. Рассмотрим $\Phi_i=Ker(\varphi(A))^i$ и $\Psi_i=Im(\varphi(A))^i$. Согласно свойствам операторного многочлена, эти пространства инвариантны относительно A. Найдется q : $N=\Phi_q=\Phi_{q+1}$, $T=\Psi_q=\Psi_{q+1}$. Очевидно, что $T\cap N=\{0\}$, $dim(T)+dim(N)=dim(V)\Rightarrow V=N\oplus T$. Обозначим $B=A|_N$, $C=A|_T$.
- (2) Согласно лемме, все собственные вектора A, т.е. корни $\chi(t)$ лежат либо в N либо в T; причем в N лежат только собственные вектора, соответствующие корням $\varphi(t)$, а в T лежат все остальные, т.е. соответствующие корням $\psi(t)$. Поэтому $\chi_B(t)=\varphi(t)$ и $\chi_C(t)=\psi(t)$.
- *Теорема 2*. Пусть характеристический многочлен оператора $A:V\rightarrow V$ представлен в виде $\chi(t)=\Pi\chi_i(t)$, где $\chi_i(t)$ не имеют общих корней. Тогда $V=\oplus V_i$ и оператор A единственным образом разлагается в прямую сумму индуцированных операторов $A_i=A|V_i$, имеющих характеристические многочлены $\chi_i(t)$.
- Доказывается по индукции с помощью теоремы 1.
- Доказательство см.: Шикин Е.В., стр. 87 или: Воеводин В.В., стр. 253.

26. Жорданов базис и Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.

- *Жордановой клеткой* $J_k(\lambda)$ называется двухдиагональная матрица kxk, в которой по диагонали стоят λ, а над диагональю - 1.
- *Теорема*. В любом корневом подпространстве $R(\lambda)$ существует *канонический базис*, в котором матрица индуцированного оператора имеет канонический вид, т.е. состоит из нескольких жордановых клеток $J_k(\lambda)$, расположенных по диагонали.
-

27. Подобные матрицы. Критерий подобия.

- See also : 19.

28. Теорема Гамильтона - Кэли.

- *Теорема*. Любой оператор аннулируется своим характеристическим многочленом.
- Пусть $A:V\rightarrow V$ и $\chi(t)$ - его характеристический многочлен. Покажем, что $\chi(A)=0$. Возьмем вектор x из корневого подпространства $R=Ker((A-\lambda E)^k)$, где k - кратность корня λ. Поскольку $\chi(A)$ содержит множитель $(A-\lambda E)^k$ и множители коммутируют, то $\chi(A)x=0$ на любом корневом подпространстве. Поскольку V разлагается в прямую сумму корневых подпространств, то $\chi(A)x=0$ на всем пространстве V.

29. Вещественный аналог жордановой формы

30. Сопряженный оператор. Существование и единственность сопряженного оператора.

- Пусть заданы унитарные пространства V и W и $A:V\rightarrow W$ - линейное отображение. Отображение $A^*:W\rightarrow V$ называется сопряженным к A, если для $\forall x\in V,\forall y\in W$ выполняется равенство:

$$(Ax,y)=(x, A^*y).$$

- *Утверждение*. Сопряженное отображение всегда существует и единственно.
- (1) Выберем в W ортонормированный базис e. Любой вектор из W представим в виде $x=\Sigma(x,e_i)e_i$.
- (2) Если сопряженное отображение существует, то
$$A^*y=\Sigma(A^*y,e_i)e_i=\Sigma(y,Ae_i)e_i.$$
- Определяя A^* указанным образом, получим сопряженное отображение.
- Свойства операции сопряжения :
- $(A^*)^*=A$; $(A+B)^*= A^*+ B^*$; $(\alpha A)^*= \alpha^* A^*$ для $\alpha\in C$; $(AB)^*= B^*A^*$; $(A^{-1})^*= (A^*)^{-1}$.
- *Утверждение*. Матрицы взаимно сопряженных отображений относительно любой пары ортонормированных базисов являются взаимно сопряженными.
- *Утверждение*. $rang(A)=rang(A^*)$.
- *Утверждение*. $V=Ker(A)\oplus im(A^*)$; $W= Ker(A^*)\oplus im(A)$.
- Пусть $x\in Ker(A), y\in W$ $\Rightarrow$ $(x, A^*y)=(Ax,y)=(0,y)=0$ $\Rightarrow$ $Ker(A)\perp im(A^*)$ $\Rightarrow$ $V=Ker(A)\oplus im(A^*)$; т.к. $dim(Ker(A))+dim(im(A^*))= dim(Ker(A))+dim(im(A))=V$.

31. Нормальный оператор.

- *Лемма*. Если операторы $A,B:V\to V$ в комплексном пространстве V коммутируют, то у них есть общий собственный вектор.
- Пусть $W=W(\lambda)$ - собственное подпространство A и $x\in W$. Тогда $A(Bx)=B(Ax)=B(\lambda x)=\lambda Bx \Rightarrow Bx\in W \Rightarrow BW\subseteq W$, т.е. W инвариантно относительно B; тогда у индуцированного на W оператора B найдется собственный вектор, являющимся в силу определения W собственным и для A.
- Оператор $A:V\to V$ называется *нормальным*, если $AA^*=A^*A$, т.е. коммутирует со своим сопряженным.
- *Теорема*. $A:V\to V$ нормален $\Leftrightarrow$ существует ортонормированный базис из его собственных векторов.
- (1) Пусть A - нормальный оператор. Согласно лемме, у A и A^* найдется общий собственный вектор e_1. Будем считать, что он нормирован. Рассмотрим V^{n-1} - ортогональное дополнение к $L(e_1)$. Это подпространство инвариантно относительно A и A^*. Для A и A^* индуцированных на V^{n-1}, найдется общий нормированный собственный вектор e_2. Продолжая процесс аналогичным образом, получим ортонормированную систему из n векторов $(e_1,e_2, \dots ,e_n)$, собственных для A и A^*.
- (2) Пусть $e=(e_1,e_2, \dots ,e_n)$ - ортонормированный базис V и $Ae_i=\lambda_i e_i$. Определим оператор B следующим образом : $Be_i=(\lambda_i)^*e_i$. Очевидно, что B сопряжен A, $A^*=B$. Остается убедиться, что $AA^*x=A^*Ax$ для $\forall x\in V$.

32. Блочно-диагональная форма вещественной нормальной матрицы

33. Эрмитовы операторы и матрицы. Эрмитово разложение

- Линейный оператор $H:V\to V$ называется *самосопряженным*, если $H=H^*$, т.е. H равен собственному сопряженному. Самосопряженный оператор в унитарном пространстве называется *эрмитовым*; в евклидовом пространстве - *симметричным*.
- *Теорема 1*. $H:V\to V$ в унитарном V является эрмитовым $\Leftrightarrow$ (Hx,x) вещественно для любого x.
- *Утверждение*. Эрмитов оператор является нормальным.
- *Теорема 2*. Нормальный H является эрмитовым $\Leftrightarrow$ все его собственные значения есть вещественные числа.
- (1) Пусть H - эрмитов. Возьмем собственное значение λ и соответствующий ему нормированный собственный вектор x. $\lambda=(\lambda x,x)=(Hx,x)=(x,Hx)=(x,\lambda x)=\lambda^* \Rightarrow \lambda$ есть вещественное число.
- (2) Обратно, пусть нормальный H имеет вещественные собственные значения $\Rightarrow$ матрицы H и H^* в ортонормированном базисе из собственных векторов (где по диагонали стоят собственные значения) виде будут совпадать.
- *Эрмитовым* разложением оператора A называется представление оператора в виде суммы эрмитова и косоэрмитова оператора; т.е. пара эрмитовых операторов B,C такая что $A=B+iC$.
- *Теорема 1*. Для любого $A:V\to V$ в унитарном пространстве эрмитово разложение существует и единственно.
- Легко убедиться в том, что $B=(A+A^*)/2$ и $C=(A-A^*)/2i$ обладают заданными свойствами. Единственность пары B,C вытекает из того, что допуская представление $A=B+iC$, где B и C - эрмитовы, с учетом равенства $A^*= B-iC$, приходим к выписанным определениям.
- *Утверждение*. Оператор A является нормальным $\Leftrightarrow$ операторы B и C в его эрмитовом разложении коммутируют.
- *Эрмитовым* разложением оператора A называется представление оператора в виде $A=BU$, где B - неотрицательный и U - унитарный.

34. Симметрические операторы и матрицы

35. Унитарный (ортогональный) оператор.

- Оператор $A:V\to V$ в унитарном V называется *унитарным*, если $A^*A=E$.
- Унитарный оператор в евклидовом пространстве называется *ортогональным*.
- Теорема. A есть унитарный $\Leftrightarrow$ $\forall x,y\in V$ $(Ax,Ay)=(x,y)$ (A сохраняет скалярное произведение) $\Leftrightarrow$ A сохраняет ортонормированность $\Leftrightarrow$ A изометричен $\Leftrightarrow$ A нормален и его собственные значения по модулю равны 1.
- Пусть A есть унитарный оператор $\Rightarrow$ $(Ax,Ay)=(x,A^*Ay)=(x,y)$ (A сохраняет скалярное произведение) $\Rightarrow$ сохраняет ортонормированность $\Rightarrow$ A обратим; умножая $A^*A=E$ справа на A^{-1} , получаем $A^*=A^{-1} \Rightarrow AA^*= A^*A=E$. A нормален,

покажем, что его собственные значения по модулю равны 1. Пусть λ - собственное значение A и $|x|=1 \Rightarrow 1=(x,x)=(Ax,Ax)=\lambda(\lambda^*)=\lambda^2 \Rightarrow |\lambda|=1$.

- Обратно, пусть A нормален и его собственные значения по модулю равны 1. Перемножая диагональные матрицы A и A^* в любом порядке, получим $AA^*= A^*A=E$.
- Пусть A сохраняет ортонормированность $\Rightarrow (Ax,Ay)=(x,y)$ (A сохраняет скалярное произведение). $(x,A^*Ay)=(x,y) \Rightarrow (x,(A^*A-E)y)=0 \Rightarrow A^*A=E$.
- Пусть A сохраняет скалярное произведение $\Rightarrow$ A изометричен, т.к. метрика и норма определены скалярным произведением.
- Обратно, пусть A изометричен. Воспользуемся соотношением :

$$(x,y)=(|x+y|^2-|x-y|^2+i|x+iy|^2-i|x-iy|^2)/4$$

- и покажем, что A сохраняет скалярное произведение.

36. Каноническая форма ортогонального оператора.

- Унитарный оператор в евклидовом пространстве называется *ортогональным*.
- Матрица P(e) ортогонального оператора P ортогональна; det $P(e)=\pm1$.
- Ортогональное преобразование называется *собственным* (*сохраняющим ориентацию*), если det $P(e)=+1$. Ортогональное преобразование называется *несобственным*, если det $P(e)=-1$.
- *Теорема*. Любой ортогональный оператор $P:V\to V$ представим в виде прямой суммы ортогональных отражений и поворотов; т.е. в V найдется базис e, в котором матрица P имеет квазидиагональный вид, где по диагонали стоят 1,-1 и матрицы поворота в двумерных подпространствах на какие-то углы φ_k .

37. Знакоопределенные операторы. Корень из оператора.

- Эрмитов оператор H называется *неотрицательным* : $H\geq0$, если для любого x : $(Hx,x)\geq0$. H называется *положительно определенным* : $H>0$, если для любого ненулевого x : $(Hx,x)>0$.
- H называется *неположительным*, если (-H) неотрицателен. H называется *отрицательно определенным*, если (-H) положительно определен.
- *Теорема 1*. Эрмитов H является положительно определенным $\Leftrightarrow$ все его собственные значения положительны.
- *Лемма*. Если H и S положительно определены, a и b неотрицательны и не равны нулю одновремено, то aH+bS положительно определен. Если H положительно определен, то H^{-1} также положительно определен.
- Неотрицательный оператор S называется *корнем квадратным* из неотрицательного H, если $S^2=H$.
- *Теорема 2*. Корень квадратный из $H\geq0$ существует и единственен.

Классификация линейных операторов в конечномерном унитарном пространстве по характеру собственных значений

Оператор	Собственные значения
Эрмитов	вещественны
Неотрицательный	неотрицательны
Положительно определенный	положительны
Унитарный	по модулю равны 1
Обратимый	не равны 0
Идемпотентный	равны 0 или 1
Нильпотентный	равны 0

38. Разложения линейного оператора (полярное). Сингулярные числа и векторы

- *Теорема 2*. Для любого $A:V\to V$ в унитарном пространстве эрмитово разложение существует. Если A невырожден, то эрмитово разложение единственно , причем $B>0$.
- Если A невырожден, то $B=(AA^*)^{1/2}$; $U=B^{-1}A$.

39. Теорема и альтернатива Фредгольма

- *Теорема 1* (*альтернатива Фредгольма*). Либо основное уравнение Az=u имеет решение при любой правой части, либо сопряженное однородное уравнение имеет ненулевое решение.
- *Теорема 2* (теорема Фредгольма). Операторное уравнение Az=u разрешимо $\Leftrightarrow$ вектор u ортогонален $Ker(A^*)$.
- Доказательство этих теорем основано на факте $V=im(A)\oplus Ker(A^*)$.

40. Билинейные формы в линейном пространстве. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Формулы Якоби.

- *Билинейной формой*, заданной на V(P) называется отображение $B:V^2\to P$, удовлетворяющее следующим соотношениям :
- $B(x+y,z)=B(x,z)+B(y,z)$; $B(ax,y)=aB(x,y)$;
- $B(x,y+z)=B(x,y)+B(x,z)$; $B(x,ay)=aB(x,y)$;
- (линейное по обоим аргументам).
- *Утверждение*. Произведение двух линейных форм k(x)l(y) является билинейной формой.
- Билинейная форма B называется *симметричной*, если $B(x,y)=B(y,x)$; B называется *кососимметричной*, если $B(x,y)=-B(y,x)$.
- *Матрицей* B в базисе e называется квадратная матрица $B(e)=[\beta_{kj}]=[B(e_k,e_j)]$.

- *Утверждение*. Для любых векторов x,y и фиксированного базиса e:

$$B(x,y)=x^T(e)B(e)y(e),$$

- где x(e),y(e) - координатные столбцы векторов x,y в базисе e.
- *Общий вид* билинейной формы :

$$B(x,y)=\Sigma\ \beta_{kj}\ x^k y^j.$$

- *Утверждение* (преобразование матрицы билинейной формы). Пусть e и e'=eS - базисы V. Тогда $B(e')=S^T B(e)S$.
- *Рангом* билинейной формы B называется ранг ее матрицы : rang B=rang B(e).
- Билинейная форма называется *вырожденной*, если для некоторого ненулевого x и любого y выполняется B(x,y)=0.
- *Теорема*. Билинейная форма B(x,y) вырождена $\Leftrightarrow$ rang B < dim V.
- Фиксируем базис e. Вырожденнность B(x,y) равносильна существованию ненулевого решения системы уравнений $\{B(x,e_1), \dots , B(x,e_n)\}$, матрица коэффициентов которой есть матрица B(e) билинейной формы в выбранном базисе.
- Отображение $A:V\rightarrow P$ называется *квадратичной формой* на V если A(x)=B(x,x), где B - некоторая симметричная билинейная форма. Билинейная B(x,y) называется *полярной* к квадратичной форме A(x).
- *Утверждение*. Квадратичная форма однозначно определяет полярную к ней симметричную билинейную форму.
- Это очевидно из соотношения B(x,y)=[A(x+y)-A(x)-A(y)]/2.
- *Матрицей* квадратичной формы называется матрица полярной к ней билинейной формы. *Рангом* квадратичной формы называется ранг полярной к ней билинейной формы.

. *Каноническим видом* квадратичной формы называется ее матрица в некотором базисе, имеющая диагональный вид. Канонический вид, очевидно, определен неоднозначно.

- *Теорема*. Для любой квадратичной формы $A:V\rightarrow P$ в пространстве V существует базис h, такой, что A(h) есть диагональная матрица.
- Доказательство основано на *методе Лагранжа* последовательного выделения полных квадратов. См.: Шикин Е.В. , стр 98.
- Обозначение : Δ_k - главные миноры матрицы квадратичной формы. $\Delta_0 = 1$.
- *Теорема* (метод Якоби). Пусть $\Delta_k \neq 0$. Тогда A(x,x) можно привести к виду $A(f)=\mathrm{diag}\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$, где $\delta_k = \Delta_{k-1}/\Delta_k$.
-

41. Закон инерции квадратичных форм. Сигнатурное правило Якоби.

- *Теорема* (закон инерции). Число положительных p и число отрицательных m коэффициентов в любом каноническом виде данной квадратичной формы постоянны.
- Число (p-m) называется *сигнатурой* квадратичной формы.
- *Индексом* квадратичной формы A(x,x) называется максимальная размерность подпространства W, на котором A отрицательно определена: dim(W)=index A(x,x).
- *Утверждение*. Индекс квадратичной формы равен числу m отрицательных слагаемых в ее каноническом виде.

42. Квадратичные формы в евклидовом (и унитарном) пространстве. Приведение к главным осям.

- *Теорема*. Пусть B(x,y) - билинейная форма, заданная на евклидовом пространстве V. Тогда существует единственный оператор A, такой, что для любых векторов x,y выполняется B(x,y)=(Ax,y). При этом матрица оператора A совпадает с матрицей формы B.
- *Утверждение*. Оператор A симметричен $\Leftrightarrow$ форма B симметрична.
- *Утверждение*. Аналогичная теорема справедлива и для полуторалинейной формы в унитарном пространстве.
- *Теорема*. Пусть B(x,y) - квадратичная форма, заданная на евклидовом пространстве V. Существует ортонормированный базис e, такой, что

$$B(x,x)=\Sigma\lambda_i(x^i)^2.$$

- Представим квадратичную форму в виде B(x,y)=(Ax,y), где A-симметричный опертор. Достаточно найти для симметричного A ортонормированный базис e из собственных векторов. Тогда матрица B(e)=A(e) будет иметь диагональный вид.
- Операция построения такого ортонормированного базиса называется *приведением квадратичной формы к главным осям*.

43. Одновременное приведение к главным осям пары квадратичных форм.

- *Теорема*. Пусть в n-мерном вещественном пространстве V заданы две квадратичные формы B(x,x) и C(x,x), причем C>0. Возможно одним преобразованием привести эти две квадратичные формы к главным осям; т.е. существует базис e :

$$B(x,x)=\Sigma\lambda_i(x^i)^2;\ C(x,x)=\Sigma(x^i)^2.$$

- Поскольку C положительно определена, то с ее помощью можно задать скалярное произведение - положим (x,y)=C(x,y). Таким образом V превращено в евклидово пространство; в нем существует ортонормированный базис e, для которого $B(x,x)=\Sigma\lambda_i(x^i)^2$. Так как e ортонормирован, то $C(x,x)=\Sigma(x^i)^2$.

Утверждение. Аналогичная теорема справедлива и для эрмитовых квадратичных форм в комплексном пространстве

44. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

- Квадратичная форма A(x,x) называется *положительно определенной*, если A(x,x)>0 для любого ненулевого вектора x. Квадратичная форма A(x,x) называется *отрицательно определенной*, если A(x,x)<0 для любого ненулевого вектора x.
- Обозначение : Δ_k - минор матрицы квадратичной формы, расположенный в строках 1,2,...k и столбцах 1,2,...k. $\Delta_0 = 1$.
- *Теорема* (критерий Сильвестра положительной определенности). Квадратичная форма A(x,x) положительно определена $\Leftrightarrow$ все $\Delta_k > 0$. Квадратичная форма A(x,x) отрицательно определена $\Leftrightarrow$ все $\Delta_k\Delta_{k-1} < 0$.

45.

46. Уравнения гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве.

-

47-48. Норма вектора. Эквивалентность форм в конечномерном пространстве.

- Линейное пространство V(P) называется *нормированным*, если на нем задана *норма* - отображение | | : V→R со следующими свойствами :
- (1) $|x|\geq 0$, причем $|x|=0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (2) $|\alpha x|=|\alpha||x|$;
- (3) $|x+y|\leq|x|+|y|$ (неравентво треугольника).
- Евклидова норма : $|x|=(x,x)^{1/2}$.
- *Энергетической нормой* x называется величина $|x|_A=|A^{1/2}x|$, определяемая положительным оператором A.
- p-нормой ($p\in\boldsymbol{N}$) вектора $x\in\boldsymbol{R}^n$ называется величина $|x|_p=(\Sigma_i \mid x^i \mid^p)^{1/p}$.
- Будем говорить, что последовательность векторов x_n *сходится* к вектору a по выбранной норме, если $|x_n-a|\to 0$.
- Будем говорить, что две нормы (1 и 2) в пространстве V *эквивалентны*, если найдутся положительные константы C_1 и C_2 такие, что для любого вектора x выполняются неравенства :

$$|x|_2 \leq C_1|x|_1 \ ; \ |x|_1 \leq C_2|x|_2.$$

- Теорема. Любые две нормы в конечномерном комплексном пространстве эквивалентны.
- Фиксируем базис e. Покажем, что любая норма |x| эквивалентна евклидовой норме $|x|_E=(\Sigma \mid x^i \mid^2)^{1/2}$.
- (1) Пусть $M=\max\{|e_1|,...,|e_n|\}$. Тогда

$$|x| \leq |\Sigma_i\, x^i e_i \mid \leq \Sigma_i\, |x^i|\, |e_i| \leq M\Sigma_i\, |x^i| \leq M(n^{1/2})(\Sigma \mid x^i \mid^2)^{1/2}.$$

- Таким образом, полагая $C_1=M(n^{1/2})$, получаем, что $|x| \leq C_1|x|_E$.
- (2) Рассмотрим единичную сферу относительно нормы |x| с центром в 0 - множество

$$S=\{x : |x|=1\}.$$

- Покажем, что все евклидовы нормы векторов из этой сферы ограничены. Предположим противное, т.е. что для любого $m\in\boldsymbol{N}$ найдется найдется на этой сфере вектор $x_m : |x_m|_E > m$. Рассмотрим последовательность векторов

$$y_m=x_m /|x_m|_E \in S_E$$

- (принадлежащих евклидовой единичной сфере). Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса из $\{y_m\}$ можно выделить сходящуюся по евклидовой норме подпоследовательность; без ограничения общности будем считать, что $\{y_m\}\to b$. $b\neq 0$ поскольку $b\in S_E$. Согласно доказанному в первой части, $|y_m-b| \leq C_1|y_m-b|_E$; таким образом, $\{y_m\}\to b$ по норме ||. Однако, согласно определению векторов y_m , $|y_m|=|x_m|/|x_m|_E < 1/m \to 0$ (противоречие).
- (3) Таким образом, евклидовы нормы векторов на сфере S ограничены каким-то числом C_2. Проецируя на сферу произвольный x, получим $|x/|x||_E\leq C_2 \Rightarrow |x|_E\leq C_2|x|$.

50. Норма линейного оператора.

- *Утверждение*. В конечномерных нормированных пространствах V,W любой оператор A:V→W непрерывен.
- Оператор A:V→W называется *ограниченным*, если существует константа M: $|Ax|_W\leq M|x|_V$ для любого вектора $x\in V$.
- Теорема. В конечномерных нормированных пространствах V,W любой оператор A:V→W ограничен.
- Наименьшая из констант M: $|Ax|_W\leq M|x|_V$ называется *нормой* оператора A, *подчиненной векторным нормам* в пространствах V,W и обозначается ||A||. Иначе, $||A||=\sup |Ax|_W$ по единичной сфере в пространстве V. Подчиненная норма является не единственным способом нормирования пространства линейных операторов.
- Норма |A| называется *согласованной с векторными нормами* в пространствах V,W если $|Ax|_W\leq|A||x|_V$. Подчиненная норма является наименьшей из всех согласованных норм.
- *Утверждение*. Пусть операторная норма согласована с векторной нормой в пространстве V, A:V→V и λ - его собственное значение. Тогда $|\lambda|\leq|A|$.
- Пусть собственный вектор x соответсвует $\lambda \Rightarrow |Ax| = \lambda|x| \leq |A||x| \Rightarrow |\lambda|\leq|A|$.
- Пусть V и W - унитарные пространства. В качестве нормы в них берется просто длина вектора $(x,x)^{1/2}$. Соответствующая подчиненная операторная норма называется *спектральной нормой* :

$$||A||=\{\sup |Ax|_E : |x| = 1\}=\sup\{(Ax,Ax)^{1/2} : |x| = 1\} \text{ (sup по единичной сфере).}$$

- *Теорема*. Спектральная норма оператора равна его максимальному сингулярному числу, т.е. $||A|| = \max \{\nu_k\}$, где ν_k^2 - собственные вектора оператора A^*A.
- *Утверждение*. Спектральная норма унитарного оператора равна 1. Спектральная норма неотрицательного оператора равна его наибольшему собственному значению.
- *Утверждение*. Спектральная норма не меняется при унитарных (ортогональных) преобразованиях пространств.

51. Матричные нормы линейного оператора.

- *Евклидова норма* матрицы. Пусть $A=(\alpha_{kn})\in C(KxN)$ - произвольная комплексная матрица. Величина $|A|_E=(\Sigma_k\Sigma_n|\alpha_{kn}|^2)^{1/2}$ является нормой в пространстве матриц, согласованной с нормами типа $|x|_2$ в C^K и C^N.

52.

53. Экстремальные свойства собственных значений самосопряженного оператора.

- Пусть V - n-мерное евклидово пространство, $A:V\rightarrow V$ - симметричный оператор. Существует ортнормированный базис из его собственных векторов $e=(e_1,...,e_n)$; пусть $\lambda_1\le...\le\lambda_n$ - соответствующие собственные значения. S - единичная сфера.
- *Лемма*. Если x - вектор из $S\cap(L=L(e_t,...,e_s))$, то $\lambda_t\le(Ax,x)\le\lambda_s$.
- *Утверждение*. Пусть B и A - два симметричных оператора и $B-A\ge0$; а $\lambda_1\le...\le\lambda_n$ и $\mu_1\le...\le\mu_n$ - наборы их собственных значений. Утверждается, что эти наборы между собой связаны неравенствами $\lambda_i\le\mu_i$.

54.

55.

---

61. Операторные уравнения. Условия разрешимости.

- Уравнение вида Az=u, где $A:V\rightarrow W$, V и W - унитарные, u=const., будем называть (основным) *операторным уравнением*.
- Однородное уравнение $A^*z=0$ называется *сопряженным* к основному уравнению.

62. Нормальное решение. Псевдорешение.

- Пусть операторное уравнение Az=u разрешимо; имеется некоторая совокупность его решений H. *Нормальным решением* назовем решение наименьшей длины, т.е. такое решение z_o : $|z_0|=\inf\{|z| : Az=u\}$.
- *Теорема 1*. Если уравнение разрешимо, то нормальное его решение существует и единственно.
- Совокупность решений H является линейным аффинным многообразием : H=z+Ker(A), где z - какое-нибудь решение. Разложим z в сумму ортогональной проекции на Ker(A) и ортогональной составляющей z_o. z_o есть нормальное решение.
- Пусть операторное уравнение Az=u неразрешимо; определим *функционал невязки* $\Phi(z)=|Az-u|$. Вектор z_0 будем называть *псевдорешением* если z_0 минимизирует $\Phi(z)$, т.е. $\Phi(z_0)=\inf\{\Phi(z)=|Az-u|,\ z\in V\}$. $x=Az_0$ есть ортогональная проекция вектора u на im(A).
- *Нормальным псевдорешением* будем называть псевдорешение наименьшей длины; или, что то же самое, нормальное решение уравнения Az=x.
- *Утверждение*. Нормальное псевдорешение существует и единственно.
- Уравнение $A^*Az=A^*u$ называется *нормальным* к основному уравнению Az=u.
- *Теорема 2*. Вектор z_0 является псевдорешением Az=u $\Leftrightarrow$ z_0 является решением нормального уравнения.
- Поскольку $u-x\in Ker(A^*)$, то $A^*x= A^*u$ и достаточно показать, что уравнение Az=x равносильно уравнению $A^*Az=A^*x$. В самом деле,
$$A^*Az=A^*x \Rightarrow A^*(Az-x)=0 \Rightarrow Az-x\in Ker(A^*).$$
- Но поскольку $Az-x\in im(A)=(Ker(A^*))^{\perp}$, то Az-x=0. Обратное очевидно.