

**Вопросы и ответы к зачету по математическому анализу 2 курс 3 семестр(207)**

1. Определение сходимости числового ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightarrow \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, S \text{ называют суммой числового ряда}$$

2. Критерий Коши сходимости числового ряда (необходимое условие сходимости).

$$\sum_{k=1}^n u_k \rightarrow \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} |S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon, S_n = \sum_{k=1}^n u_k - \text{частичная сумма ряда}$$

$$\text{Следствие(необходимое условие сходимости): } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightarrow \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$$

3. Признаки сравнения сходимости числовых рядов (общий и частный).

Общий признак: Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$  – два числовых ряда и  $0 \leq p_k \leq q_k (\forall k \geq k_0)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} q_k \rightarrow &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow \\ \sum_{k=1}^{\infty} p_k \nrightarrow &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q_k \nrightarrow \end{aligned}$$

Частный признак: Пусть  $p_k = O^*\left(\frac{1}{k^\alpha}\right), k \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow \begin{matrix} \alpha > 1 \\ \alpha \leq 1 \end{matrix}$

4. Признак Даламбера сходимости числовых рядов.

$$p_k > 0 \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = q \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow \begin{matrix} q < 1 \\ q > 1 \end{matrix}$$

5. Признак Коши сходимости числовых рядов.

$$p_k \geq 0 \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = q \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow \begin{matrix} q < 1 \\ q > 1 \end{matrix}$$

6. Признак Раабе сходимости числовых рядов.

$$p_k > 0 \exists \lim_{k \rightarrow \infty} k \left( \frac{p_k}{p_{k+1}} - 1 \right) = \mu \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow \begin{matrix} \mu > 1 \\ \mu < 1 \end{matrix}$$

7. Признак Гаусса сходимости числовых рядов.

$$p_k > 0 \frac{p_k}{p_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}} |c_k| < M, \varepsilon > 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow \begin{matrix} \lambda > 1; \lambda = 1, \mu > 1 \\ \lambda < 1; \lambda = 1, \mu \leq 1 \end{matrix}$$

8. Интегральный признак Коши-Маклорена сходимости числовых рядов.

$$f(x) \geq 0, f(x) \searrow \forall x \geq n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_n^{\infty} f(x) dx \text{ и } \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \rightarrow \text{одновременно}$$

9. Определение абсолютной и условной сходимости числовых рядов.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{абс}}, \text{ если } \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \rightarrow \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{усл}}, \text{ если } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightarrow, \text{ а } \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \nrightarrow \end{aligned}$$

10. Теорема Коши о сумме абсолютно сходящегося ряда.

$$\text{Пусть } \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k - \text{ ряд, полученный перестановкой членов ряда } \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

$$\text{Теорема Коши: Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{абс}} V \Rightarrow \forall \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \xrightarrow{\text{абс}} V$$

11. Теорема Римана о сумме условно сходящегося ряда.

$$\text{Пусть } \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k - \text{ ряд, полученный перестановкой членов ряда } \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \text{ тогда если}$$

$$\text{Теорема Римана: Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{усл}} \Rightarrow \forall L \in \mathbb{R} \exists \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \rightarrow L$$

12. Признак Лейбница сходимости числового ряда (оценка остаточного члена).

Пусть  $p_k \geq 0, p_{k+1} \leq p_k, \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0 \Rightarrow$  знакочередующийся ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} p_k \rightarrow$ , причем  $|S_n - S| \leq p_{n+1}$

13. Признак Абеля сходимости числовых рядов.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightarrow \\ 2) \{v_k\} - \text{монотонная} \\ 3) \{v_k\} - \text{ограниченная} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \rightarrow$$

14. Признак Дирихле сходимости числовых рядов.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq M \text{ (частичные суммы являются ограниченной последовательностью)} \\ 2) \{v_k\} - \text{монотонная} \\ 3) \{v_k\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \rightarrow$$

15. Метод Пуассона-Абеля обобщенного суммирования рядов.

Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  – имеет обобщенную сумму по Пуассону – Абелю, если  $\forall x \in (0,1) \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} \rightarrow S(x), \exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S$  – сумма по Пуассону – Абелю

16. Метод Чезаро обобщенного суммирования рядов.

Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  – имеет обобщенную сумму по Чезаро, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = S$  – сумма по Чезаро, где  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

17. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности.

$$f_n(x) \xrightarrow[\{x\}]{} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N, \forall x \in \{x\} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

18. Определение равномерной сходимости функционального ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} S(x) \Leftrightarrow S_n(x) \xrightarrow[\{x\}]{} S(x), S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

19. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in \{x\} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

20. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\text{Пусть } \exists \sum_{k=1}^{\infty} c_k \rightarrow, |u_k(x)| \leq c_k \forall x \in \{x\} (k = 1, 2, \dots) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} \left. \right\}$$

21. Признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} \\ 2) v_k(x) - \text{монотонна } \forall x \in \{x\} \\ 3) v_k(x) - \text{равномерно ограничена на } \{x\} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} \left. \right\}$$

22. Признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\left. \begin{array}{l} 1) U_n = \sum_{k=1}^n u_k(x) \text{ равномерно ограничены на } \{x\} \\ 2) v_k(x) - \text{монотонна } \forall x \in \{x\} \\ 3) v_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} \left. \right\}$$

23. Теорема о пределе равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

$$f_n(x) \xrightarrow[\{x\}]{} f(x), f_n(x) \in C\{x\} \forall n \in \mathbb{N}, \exists \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \forall n \in \mathbb{N} (a \in \{x\}) \Rightarrow \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = f(a), \text{ причем } f(x) \in C(\{x\})$$

24. Теорема о пределе суммы равномерно сходящегося ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} S(x), \exists \lim_{x \rightarrow a} u_k(x) \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} S(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_k(x)$$

25. Теорема о почленном дифференцировании равномерно сходящегося ряда.

$$\exists u'_k(x) \forall x \in (a, b) \forall k \in \mathbb{N}, u'_k(x) \xrightarrow[(a,b)]{} \left. \right\}, \exists x_0 \in (a, b): \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) \rightarrow \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{(a,b)}{\rightrightarrows} S(x), \exists S'(x) \text{ на } (a,b), S'(x) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

26. Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x), u_k(x) \in R[a,b] \forall k \in \mathbb{N} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx \rightarrow, S(x) \in R[a,b], \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx \end{aligned}$$

27. Определение степенного ряда. Радиус сходимости.

Функциональный ряд вида  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, a_k \in \mathbb{R}$ , называют степенным рядом.

Число  $R \geq 0$ :  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \rightarrow |x - x_0| < R$  называют радиусом сходимости степенного ряда.  
 $\nrightarrow |x - x_0| > R$

28. Теорема Коши-Адамара о радиусе сходимости степенного ряда.

Пусть  $L = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$  Если  $L \neq 0$  и конечно, то  $\exists R = \frac{1}{L}$ :

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \xrightarrow{abc}$  в интервале  $|x - x_0| < R$  и  $\nrightarrow$  вне этого интервала ( $|x - x_0| > R$ ). Если  $L = +\infty$ ,

то степенной ряд сходится только при  $x = x_0$ . Если  $L = 0$ , то степенной ряд  $\rightarrow$  при  $x \in (-\infty; +\infty)$

29. Определение 2-го интеграла.

Пусть  $\Omega$  – замкнутая ограниченная область с границей  $\Gamma$  площади нуль.

Разобьем область  $\Omega$  при помощи конечного числа произвольных кривых площади нуль

на конечное число замкнутых частичных областей  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ ,

$\Delta\Omega_i$  – площадь  $\Omega_i, P_i(\xi_i, \eta_i)$  – произвольная точка в области  $\Omega_i$

$d_i = \sup_{\mu_1, \mu_2 \in \Omega_i} \rho(\mu_1, \mu_2), L = \max_i d_i$

Опр.:  $\iint_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \lim_{L \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i, \eta_i) \Delta\Omega_i$ , если этот предел существует и не зависит от выбора точек  $P_i$ .

Alternative:

Двойным интегралом от непрерывной функции  $f(x, y)$ ,

распространенным на ограниченную замкнутую квадрируемую область  $\Omega$ , называют число

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max|\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j, \text{ где } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$$

и суммирование распространяется на те значения  $i$  и  $j$ , для которых  $(x_i, y_j) \in \Omega$

30. Теорема о сведении 2-го интеграла к повторному.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \iint_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

31. Теорема о замене переменных в 2-ом интеграле.

$$\Omega \xrightarrow[\substack{x=x(u,v) \\ y=y(u,v)}]{} \Omega'$$

Пусть выполнено:

- 1)  $\Omega, \Omega'$  – замкнуты и ограничены
- 2) Соответствие взаимнооднозначное
- 3)  $x(u, v), y(u, v) \in C^1(\Omega')$
- 4)  $I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$  на  $\Omega$

$$\text{Тогда } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) |I| du dv$$

32. Определение 3-го интеграла.

Пусть  $V$  – замкнутая ограниченная кубируемая область в пространстве.

Тогда если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max|\Delta y_j| \rightarrow 0 \\ \max|\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(u_i, v_j, w_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = I,$$

$$u_i \in [x_i, x_{i-1}], v_j \in [y_j, y_{j-1}], w_k \in [z_k, z_{k-1}], \\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

не зависящий от выбора точек  $u_i, v_j, w_k$ , то этот предел называется тройным интегралом функции  $f(x, y, z)$

по области  $V$ . 
$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

33. Теорема о сведении 3-го интеграла к повторному.

$$V: \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq x \leq x_2 \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

34. Теорема о замене переменных в 3-ом интеграле.

$$V(x, y, z) \xrightarrow[\substack{x=x(u, v, w) \\ y=y(u, v, w) \\ z=z(u, v, w)}}{V'(u, v, w)}$$

Пусть выполнено:

- 1)  $V, V'$  – замкнуты и ограничены
- 2) Соответствие взаимно – однозначное
- 3)  $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) \in C^1(V')$
- 4)  $I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$  в  $V$ ,

Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw.$$

35. Определение последовательности множеств, монотонно исчерпывающих данное.

Будем говорить, что последовательность  $\{D_n\}$  открытых связных множеств монотонно исчерпывает множество  $D$ , если:

- 1)  $\forall n \bar{D}_n \subset D_{n+1}$ ;
- 2)  $\bigcup_n D_n = D$ .

36. Определение сходимости кратного несобственного интеграла.

Пусть для любой последовательности  $\{D_n\}$  (все  $\bar{D}_n$  – кубируемые множества), монотонно исчерпывающей множество  $D$ , существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\bar{D}_n} \dots \int f(\bar{x}) d\bar{x}$ , который не зависит от выбора  $\{D_n\}$ . Тогда кратный несобственный интеграл  $\iint_D \dots \int f(\bar{x}) d\bar{x}$  сходится и равен этому пределу.

37. Признак сравнения сходимости кратных несобственных интегралов.

Пусть  $0 \leq f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}), \forall \bar{x} \in D$ . Тогда из сходимости  $\iint_D \dots \int g(\bar{x}) d\bar{x}$  следует сходимость  $\iint_D \dots \int f(\bar{x}) d\bar{x}$ . Из расходимости  $\iint_D \dots \int f(\bar{x}) d\bar{x}$  следует расходимость  $\iint_D \dots \int g(\bar{x}) d\bar{x}$

38. Связь между абсолютной и условной сходимостью кратных несобственных интегралов.

Пусть  $D \subset E^n$ . Если  $n \geq 2$  то  $\iint_D \dots \int f(\bar{x}) d\bar{x}$  и  $\iint_D \dots \int |f(\bar{x})| d\bar{x}$  сходятся и расходятся одновременно.

39. Частный признак сравнения сходимости кратных несобственных интегралов

Пусть  $g(\bar{x}) = |\bar{x}|^{-p}$ , где  $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ .

Тогда

- 1) Если  $D = \{|\bar{x}| > a\}$ , то  $\iint_D \dots \int f(\bar{x}) d\bar{x} \begin{array}{l} \rightarrow p > n \\ \rightarrow p \leq n \end{array}$
- 2) Если  $D = \{|\bar{x}| < a\}$ , то  $\iint_D \dots \int f(\bar{x}) d\bar{x} \begin{array}{l} \rightarrow p < n \\ \rightarrow p \geq n \end{array}$

40. Определение поверхностного интеграла I рода.

Пусть  $S$  – гладкая, двусторонняя, ограниченная поверхность.

Пусть на поверхности  $S$  определена функция  $f(u)$ , которая ограничена на  $S$ . Разобьем поверхность  $S$  гладкими кривыми на конечное число частей  $S_i$ . Пусть  $\Delta$  – максимальный размер частей  $S_i$ .

Обозначим  $\sigma_i$  – площадь  $S_i$ . Предел  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i f(M_i) \sigma_i$ ,  $M_i \in S_i$  называется поверхностным интегралом I рода от функции  $f(u)$  по поверхности  $S$ , если он существует и не зависит от выбора  $S_i, M_i$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i f(M_i) \sigma_i = \int_S f(M) dS$$

41. Теорема о сведении поверхностного интеграла I рода к 2-му интегралу.

Пусть функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на  $S$ . Если поверхность  $S$  задана в виде:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$x, y, z \in C'(\Omega),$$

$$\text{то } \int_S f(M) dS = \iint_{\Omega_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \text{ где}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Определение поверхностного интеграла II рода.

Пусть  $S$  – гладкая, двусторонняя, ограниченная поверхность.

Функции  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  определены и ограничены на  $S$ .

$\{S_i\}$  – разбиение  $S$  гладкими кривыми с диаметром  $\Delta$ .

$$\{M_i\} \in S_i, \bar{n}(M_i) = \{\cos x, \cos y, \cos z\}$$

$$\begin{aligned} \sigma_i & \text{ – площадь } S_i \\ \sigma_x & = \sum_i P(M_i) \cos x \sigma_i \\ \sigma_y & = \sum_i Q(M_i) \cos y \sigma_i \\ \sigma_z & = \sum_i R(M_i) \cos z \sigma_i \end{aligned}$$

Если при  $\Delta \rightarrow 0$  существуют пределы сумм  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  не зависящие от выбора  $S_i, M_i$ , то эти пределы называются поверхностными интегралами II рода

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_x = \iint_S f(M) \cos x dS$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_y = \iint_S f(M) \cos y dS$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_z = \iint_S f(M) \cos z dS$$

$$\bar{a} = (P, Q, R)$$

$$\iint_S (\bar{a}, \bar{n}) dS = \iint_S (P \cos x + Q \cos y + R \cos z) dS = \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy - \text{общий поверхностный}$$

интеграл II рода

43. Теорема о сведении поверхностного интеграла II рода к 2-му интегралу.

Пусть поверхность  $S$  задана параметрически:  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \in C(\Omega)$ .

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

$$\cos x = \pm \frac{A}{L}, \cos y = \pm \frac{B}{L}, \cos z = \pm \frac{C}{L}, L = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, dS = L du dv$$

$$\iint_S (P \cos x + Q \cos y + R \cos z) dS = \pm \iint_{\Omega(u, v)} (\tilde{P} A + \tilde{Q} B + \tilde{R} C) du dv, \text{ где}$$

$$\tilde{P} = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = P(u, v)$$

$$\tilde{Q} = Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = Q(u, v)$$

$$\tilde{R} = R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = R(u, v)$$

44. Определение криволинейного интеграла I рода.

Пусть  $l$  – спрямляемая кривая без самопересечений,  $\{l_k\}$  – разбиение  $l, \Delta = \max_k \Delta l_k$

Функция  $f(M)$  – определена и ограничена на  $l$ .  $M_k \in l_k$

$$\sigma_I = \sum_k f(M) \Delta l_k$$

Если существует предел  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_I$ , независимый от выбора  $l_k$  и  $M_k$ , то этот предел называется

криволинейным интегралом I рода  $\left( \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_I = \int_l f(M) dl \right)$

45. Теорема о сведении криволинейного интеграла I рода к определенному интегралу

Пусть кривая  $l$  задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$x, y, z \in C'_{[t_0, T]}$ ,  $t_0 < T$   $f(M)$  – непрерывна на кривой  $l$ . Тогда

$$\int_l f(M) dl = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

46. Определение криволинейного интеграла II рода.

Пусть  $l$  – кривая без самопересечения,

Функции  $P(M), Q(M), R(M)$  – определены и ограничены на  $l$   $\{l_k\}$  – разбиение  $l$ ,  $\Delta = \max_k \Delta l_k$ ,  $M_k \in l_k$

$$\sigma_{II} = \sum_k P(M_k) \Delta x_k + Q(M_k) \Delta y_k + R(M_k) \Delta z_k$$

Если существует предел  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_{II}$ , независимый от выбора  $l_k$  и  $M_k$ , то этот предел называется

криволинейным интегралом II рода  $\left( \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_{II} = \int_l P(M) dx + Q(M) dy + R(M) dz \right)$ .

47. Теорема о сведении криволинейного интеграла II рода к определенному интегралу.

Пусть кривая  $l$  задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, x, y, z \in C'_{[t_0, T]}, P(M), Q(M), R(M) – непрерывны на кривой  $l$ , Тогда$$

$$\int_l P dx + Q dy + R dz = \int_{t_0}^T (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt$$

48. Криволинейный интеграл II рода от полного дифференциала.

Пусть  $\Omega$  – односвязная область в  $\mathbb{R}^3$ ,  $P(M), Q(M), R(M) \in C(\Omega)$ ,  $C$  – некоторый контур в  $\Omega$ ,

$\exists u(M): du = P dx + Q dy + R dz$ ,  $M \in \Omega$ . Тогда

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = u(M_2) - u(M_1), \text{ где } M_1, M_2 – \text{начало и конец контура соответственно.}$$

49. Способ нахождения функции по полному дифференциалу.

Пусть  $\Omega$  – односвязная область в  $\mathbb{R}^3$ ,  $P(M), Q(M), R(M) \in C(\Omega)$ ,  $\forall M \in \Omega$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ . Тогда  $\exists u(M): du = P dx + Q dy + R dz$ , где  $M \in \Omega$ .

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz \quad ((x_0, y_0, z_0) \in \Omega)$$

50. Формула Грина.

Пусть  $S$  – односвязная, ограниченная область в  $\mathbb{R}^2$ ,  $C = \partial S$  – замкнутый контур,

$P(x, y), Q(x, y), R(x, y) \in C'_{S \cup \partial S}$ . Тогда справедливо:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy – \text{формула Грина.}$$

51. Нахождение площади плоской области с помощью криволинейных интегралов.

$$\text{Площадь } S = \iint_S dx dy = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx, \text{ где } C = \partial S$$

52. Формула Стокса.

Пусть  $S = \partial V$  – кусочно – гладкая, двусторонняя, ограниченная поверхность

$C = \partial S$  – простой, замкнутый кусочно – гладкий контур,  $P(M), Q(M), R(M) \in C'_{S \cup \partial S}$ ,

$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  – нормаль к поверхности  $S$ . Тогда справедливо

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

53. Формула Остроградского.

Пусть  $V$  – ограниченный объем в  $\mathbb{R}^3$ .  $S = \partial V$  – кусочно – гладкая, двусторонняя поверхность,  
 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  – внешняя нормаль к  $S$ ,  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C'_{V+\partial V}$ .

Тогда справедливо

$$\oiint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

54. Определение grad U.

$u(\vec{r}) = u(x, y, z)$  – скалярное поле в  $\mathbb{R}^3$

$$\text{grad } u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \text{ (в декартовой системе координат)}$$

55. Определение div a.

$\vec{a}(\vec{r}) = (a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z))$  – векторное поле в  $\mathbb{R}^3$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \text{ (в декартовой системе координат)}$$

56. Определение rot a.

$\vec{a}(\vec{r}) = (a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z))$  – векторное поле в  $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \text{ (в декартовой системе координат)}$$

57. Инвариантная форма формулы Стокса.

$\vec{A} = (P, Q, R)$ ,  $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$ ,  $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  – нормаль к  $S$

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot } \vec{A}, \vec{n}) dS$$

58. Инвариантная форма записи формулы Остроградского.

$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  – внешняя нормаль к  $S$ ,  $\vec{A} = (P, Q, R)$

$$\oiint_S (\vec{A}, \vec{n}) dS = \iiint_V \text{div } \vec{A} dV$$

59. Условие потенциальности векторного поля.

Поле  $\vec{A}$  потенциально  $\Leftrightarrow$

$\exists u: \vec{A} = \text{grad } u \Leftrightarrow$  криволинейный интеграл II рода не зависит от пути интегрирования  $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{A} = 0$

60. Формальные действия с оператором  $\nabla$ .

$$\text{Example: } \text{div}(u\vec{a}) = (\nabla, u\vec{a}) = (\nabla, u_c\vec{a}) + (\nabla, u\vec{a}_c) = u_c(\nabla, \vec{a}) + (\nabla u, \vec{a}_c) = u \text{ div } \vec{a} + \vec{a} \text{ grad } u$$