7.09.01

Основные абстракции механики

- мат. точка
- абс. твердое тело
- сплошная среда

Мат. точка — тело, размерами кот. можно пренебречь в условиях данной зад.

Абс. тв. тело — система частиц, расстояние между (кот). $\forall$ парой кот. всегда остается постоянным

Сплошная среда — среда, дискретностью кот. можно пренебреч.

## § 1 Кинематика. материальной точки.

Кинематика изучает движение без рассмотрение причин, его вызывающих.

Движение — перемещение 1 тела относ. др.

Тело отсчета — тело, отн. кот. рассм. движ.

Траектория — линия, описываемая телом при движении.

Путь — длина траектории

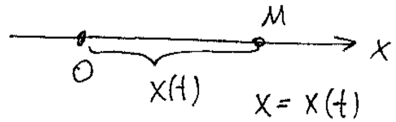
Мат. описание движение:

1) Прямолинейное движение

Метр — расст., кот. прох. свет в вакууме $\approx$ за 1/300.000.000 секунды

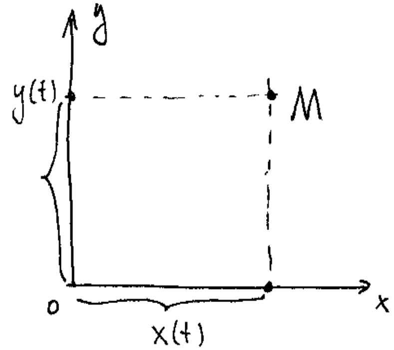
Секунда — продолжит $\approx 10^{10}$ колебаний электрона в атоме цезия.

$x(t)$ — закон движение мат. (·) по прямой



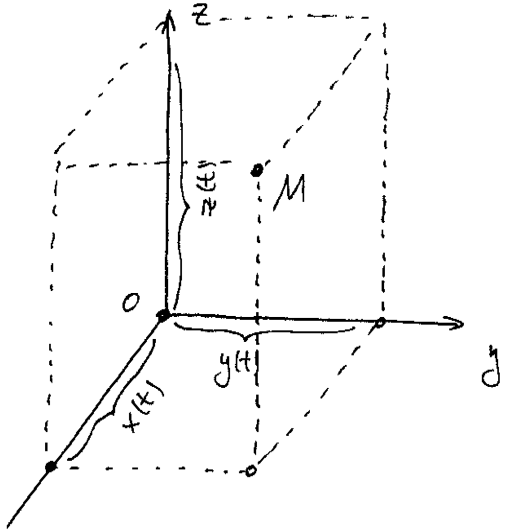

2) Движение в плоскости

Декартова система координат




$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ — закон движ. мат (·) на пл-ти

3) Движение мат (·) в пространстве




$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$ – закон движ.

<u>Система отсчета</u> – система координат + прибор для измер. врем.

<u>Радиус-вектор</u> – вектор, соедин. (·) отсчета с данной мат (·) в данный момент времени.

<u>Орты в дек. С.К.</u> – единичные векторы направленные вдоль осей

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad [x] = [y] = [z] = [r] = м$$

(метр)

<u>Перемещение</u> – разность значений р.в (·), взятых в 2 различных момента времени.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Длительность перемещение:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Скорость: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

$$\vec{v} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z}$$

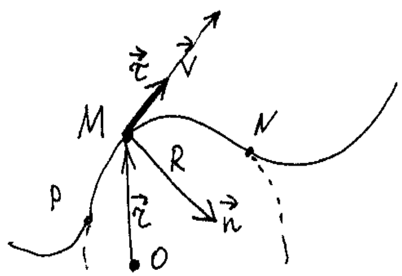
$$[v_x] = [v_y] = [v_z] = [v] = \frac{м}{с}$$

Ускорение: $\vec{W} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

$$\vec{W} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}$$

$$[w_x] = [w_y] = [w_z] = [w] = \frac{м}{с^2}$$

Тангенциальное и нормальное ускор.

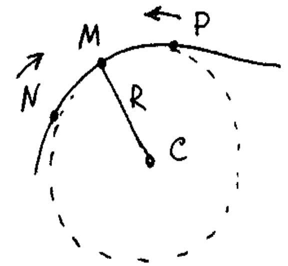



$$\vec{W} = \vec{\tau}\, w_\tau + \vec{n}\, w_n$$

тангенциальное

нормальное

Круг кривизны кривой в (·) M — предельное положение круга, прох. через эту (·) и 2 др. точки (N, P) на кривой $N \to M$, $P \to M$

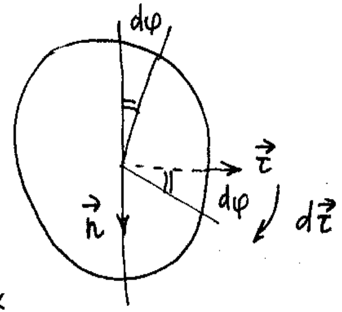


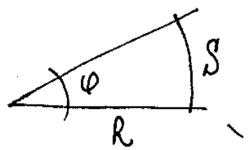

C - центр кривизны

R - радиус кривизны

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{v} = v \cdot \vec{\tau} \Rightarrow \vec{W} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{\tau} + v\dot{\vec{\tau}}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$




в радианах

$$\varphi = \frac{S}{R}$$

$$S = \varphi R \Rightarrow d\vec{\tau} = \vec{n}\, d\varphi$$

$$\vec{W} = \dot{v}\vec{\tau} + v\dot{\varphi}\vec{n}, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\vec{W} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} W_\tau = \dot{v} \\ W_n = v^2/R \end{cases}$$

14.09.01

## §2 Принцип относительности. Преобразование Галилея. Преобразование Лоренца.

П.О. Галилея:

Никакими мех. опытами провед. внутри данной С.О. нельзя уст., нах-ся ли эта С.О. в состоянии покоя или движется равномерно прямолинейно.

Мат. формулировка:

Уравнение, выр. физ. законы должны быть инвариантны относит. преобраз., выражающих ~~преобраз.~~ переход от неподвижной ИСО к сист., движущ. равномерно прямолинейно.

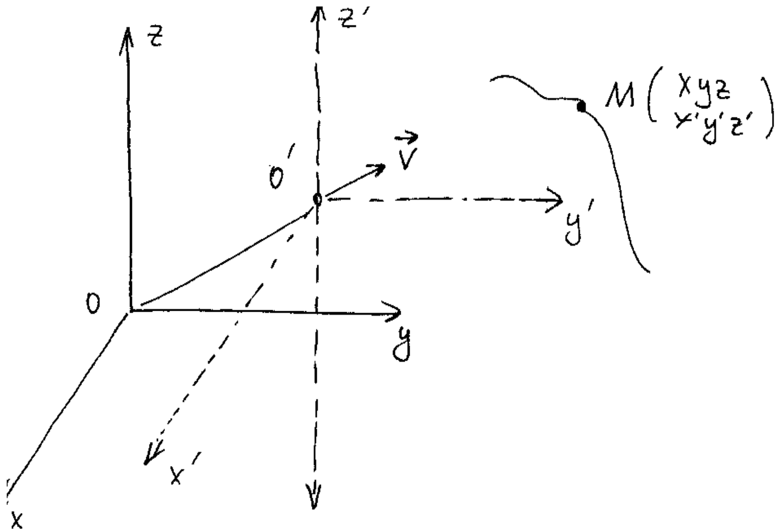
Преобразование Галилея:

Oxyz - неподв. С.О.

O'x'y'z' - подв. С.О.

V - скорость движ. С.О. отн. неподв.

$t = 0 \Leftrightarrow O = O'$




$$OO' = Vt \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' + Vt \\ z = z' + Vt \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x = V_x' + V^x \\ V_y = V_y' + V^y \\ V_z = V_z' + V^z \end{cases}$$

Правило сложения скоростей. $\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{со}$

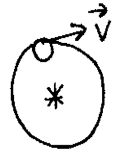
▲ Законы Ньютона инвар. отн. преобр. Гал.
Ур-ие Максвелла – не инвариантны.

Опыт Майкельсона (1887)

(проверка правила слож. скор. для свет. волн)

Движ. С.О. – движение Земли вокруг Солнца

$V = 30$ км/с $= 3 \cdot 10^4$ м/с

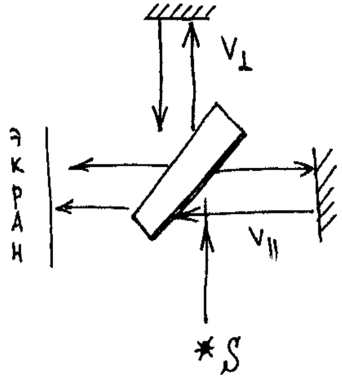



$$\left.\begin{aligned} V &= 3 \cdot 10^4 \text{ м/с} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \end{aligned}\right\} \quad \frac{V}{c} = \frac{1}{10^4} \ll 1$$

$\Downarrow$

используется интерференция света.

Интерферометр Майкельсона.




1) Скор. св. отн. Солнца $c^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$

2) Скор. св. отн. Земли

$$\begin{cases} V_x = V_x' + V \\ V_y = V_y' + 0 \\ V_z = V_z' + 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} |V_\parallel| &= c \pm V \\ |V_\perp| &= \sqrt{c^2 - V^2} \end{aligned}$$

в ходе экспер. поворачиваем интерф. на $90°$ чтобы $V_\parallel$ и $V_\perp$ поменялись местами:

Вывод: предполож. неверно. (П.О.Г для света не работает)

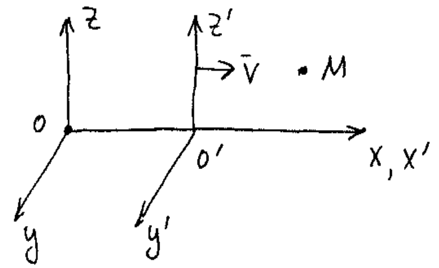
Принцип постоянства скорости света:

Скорость света не зависит от того, по относ. к какой СО (покоящейся или движущ.) она опред-ся.

$V_{абс} = V_{отн} = c$

Теория Относительности

Осн. принцип — отн. времени.




Т свет дошел до (·) M за время t

$$\begin{cases} x = ct \\ y = x' = ct' \end{cases} \Rightarrow \left| x \neq x' \Rightarrow t \neq t' \right|$$

Найдем линейные преобразования координат и времени:

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ t = t' + x'V \cdot \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

Преобразование Лоренца

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & y = y', \; z = z' \\ t = \dfrac{t' + x' \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$$

Пример: Уравнение Максвелла инвариантны отн. преобр. Лоренца

II Закон Ньютона — не инвариантен.

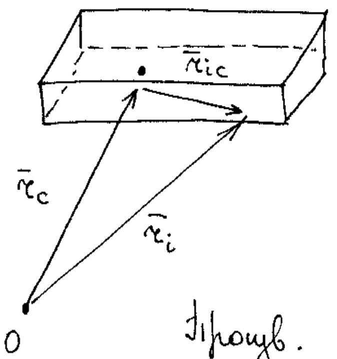
---

Принцип Относительности Эйнштейна

Уравнения, выр. физ. законы должны быть инв. относит. преобраз. Лоренца

# §3 Кинематика твердого тела

<u>Твердое тело</u> — система частиц, расстояние между ∀ парой к·х = const




$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{V}_i = \vec{V}_c + \vec{V}_{ic}$$

Произв. движ. тела можно представить как совокупность движений центра и поворота относит центра

1) Поступат. движение тела:

- движение тела, при кот. скор. всех (·) тела одинаковы

2) Вращ. вокр. неподв. оси:

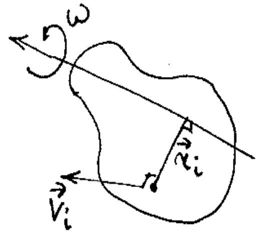
- движение, при кот ∀ точка тела движется по окр., а центр. всех окр. расп. на одной прямой, называемой осью вращения.

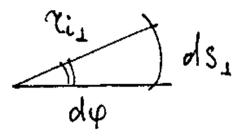
<u>Угловая скорость</u> — хар. изменения ориентации тела в пространстве.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$ , где

$\varphi$ — угол поворота тела вокр. оси.

$V_i = \omega r_{i\perp}$ — расст. (·) до оси вращ.



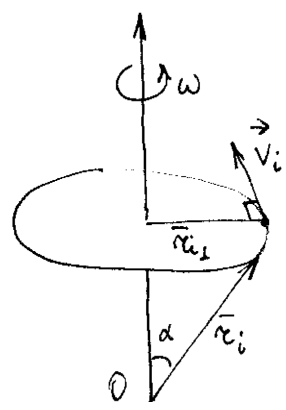

$$V_i = \frac{dS_i}{dt} = r_{i\perp}\frac{d\varphi}{dt} = r_{i\perp}\,\omega$$

Вектор угловой скорости

$|\vec{\omega}| = \dot{\varphi}$ — направление по правилу правого винта

$$\vec{V}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$$

$$V_i = \omega r_i \sin\alpha = \omega r_{i\perp}$$



③ Движение тела с одной неподвижной (·)

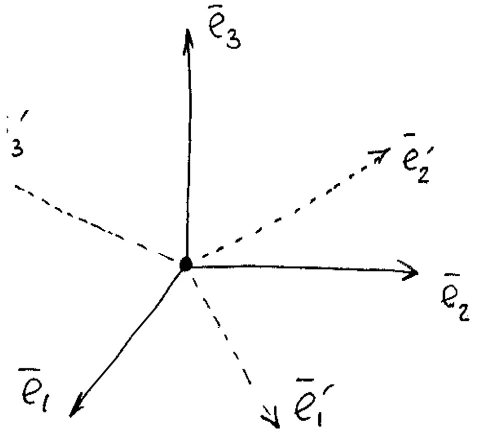
<u>Теорема Эйлера</u>: ДТ с ОНТ в $\forall$ момент времени можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через (·) закрепления

$\vec{V}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$

$\vec{\omega}$ - вращ вокр. оси - угловая скор.

Ось вращения - прямая, проход. через неподв. в данный момент врем. (·)

Ориентация твердого тела в простр.
Матрица поворота.




$S_{ij} = \bar{e}_i \bar{e}_j'$ - матр. поворота.

Преобразов. коорд. вектора $A_i = \sum_{j=1} S_{ij} A_j'$

Двойной поворот

$\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$, где $\hat{A}, \hat{B}$ - матрицы повор.

## §4 Кинематика вращающихся систем отсчета.

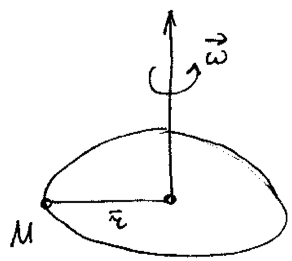
$S$ - неподв. С.О. $S'$ - вращ. СО $(\vec{\omega} = const)$

$d$ - приращ. отн. $S$

$d'$ - приращ. отн. $S'$

$$W \overset{???}{\rightleftarrows} W'$$

Связь перемещений:

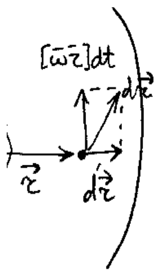



$d\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}]\, dt$

скор. (·) М. отн. неподв. С.

если $d'\vec{r} = 0$

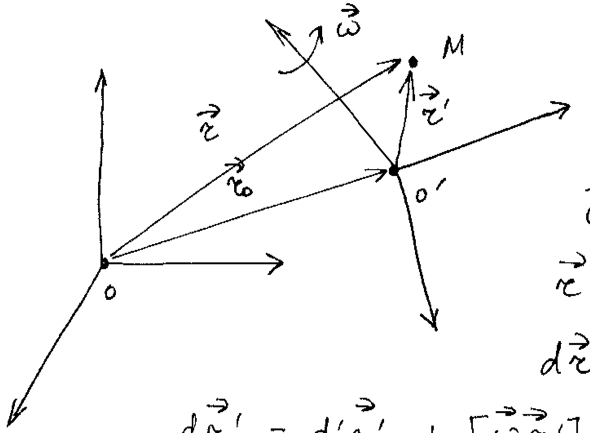
$d'\vec{r} \neq 0 \qquad d\vec{r} = d'\vec{r} + [\vec{\omega}, \vec{r}]\, dt$




$$d\vec A = d'\vec A + [\vec\omega\, \vec A\,]\,dt \quad , \qquad (*)$$

где $\vec A$ - произв. вектор

Если $S'$ имеет подв. нач. отсчета




$$\vec\omega = const$$

$$\vec r = \vec r\,' + \vec r_0$$

$$d\vec r = d\vec r\,' + d\vec r_0$$

$$d\vec r\,' = d'\vec r\,' + [\vec\omega\,\vec r\,']\,dt \quad \text{из } (*)$$

$$d\vec r = d'\vec r\,' + d\vec r_0 + [\vec\omega\,\vec r\,']\,dt$$

Связь скоростей

$\vec V = \vec V' + \vec V_0 + [\vec\omega\,\vec r\,]$, где

$\vec V$ - скор. $M$ отн $S$ $= \dfrac{d\vec r}{dt}$

$\vec V'$ - скор. $M$ отн $S'$ $= \dfrac{d'\vec r\,'}{dt}$

$\vec V_0$ - скор $O'$ отн $S$ $= \dfrac{d\bar r_0}{dt}$

Связь ускорений.

$$d\bar v = d\bar v' + d\bar v_0 + [\bar\omega\, d\bar r']$$

$$\Downarrow \quad \begin{aligned} d\bar r' &= d'\bar r' + [\vec\omega\,\vec r\,']\,dt \\ d\bar v' &= d'\bar v' + [\bar\omega\,\bar v']\,dt \end{aligned}$$

$$d\bar v = d'\bar v' + [\bar\omega\,\bar v']\,dt + d\bar v_0 +$$

$$\Downarrow \quad + [\bar\omega, d'\bar r'] + [\bar\omega, [\bar\omega\, r']]\,dt$$

делим на $dt$ $\Rightarrow$

$$\vec w = \vec w\,' + \vec w_0 + [\bar\omega, \bar v'] + [\vec\omega\,\bar v'] + [\vec\omega[\vec\omega\,\vec r\,']]$$

$$\vec w = \vec w\,' + \vec w_0 + 2[\vec\omega\,\vec v\,'] + [\vec\omega[\vec\omega\,\vec r\,']] \text{ , где}$$

$\vec w = \dfrac{d\bar v}{dt}$ , - абс ускор.

$\vec w\,' = \dfrac{d'\bar v'}{dt}$ - отн.

$\vec w_0 = \dfrac{d\bar v_0}{dt}$

Переносное и кориолисово ускорение:

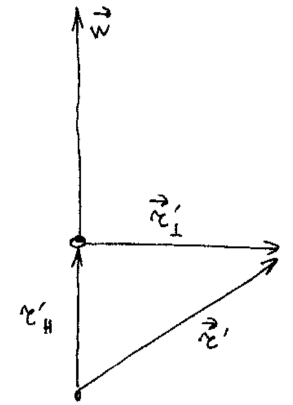
$\vec w = \vec w\,' + \vec w_п + \vec w_к$ , где

$\vec w_п = \vec w_0 + [\vec\omega[\vec\omega\,\vec r\,']]$ - переносное ускор.

(ускор. мат. (·) жестко связанной с вращающейся сист. отсчета)

$\vec w_к = 2[\vec\omega\,\vec v\,']$ - кориолисово ускор

Центростремительное ускорение :




$$\vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}$$

$$[\vec{\omega}\,\vec{r}'] = [\vec{\omega}\; r'_{\perp}]$$

$$[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

$$[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}'_{\perp}]] = \vec{\omega}\,\underbrace{(\vec{\omega}\,\vec{r}'_{\perp})}_{=0} - \vec{r}'_{\perp}\omega^2 = -\vec{r}'_{\perp}\omega^2$$

$\vec{W}_{ц.с} = -\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$ - центростремит. ускор

$\vec{W}_n = \vec{W}_0 + \vec{W}_{цс}$

$\vec{W} = \vec{W}' + \vec{W}_n + \vec{W}_к$

## § 5 Законы Ньютона

I ЗН: ∃ С.О., отн. кот. ∀ тело, бесконечно удаленное от других тел, не испытывает ускорение. Такие системы наз-ся инерциальными

II ЗН: Произведение массы мат (·) на ускорение = действующей на неё силе.

$$m\vec{W} = \vec{F}$$

III ЗН Действие 2 тел др. на друга равны и противопол. направлены

$$\vec{F}_{1.2} = -\vec{F}_{21}$$

Опр Масса - мера инертности тела

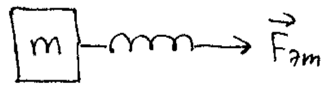
Опр Сила - мера действие на данное тело других тел.

## Измерение сил и масс

1. килограмм - масса эталонного тела предст. собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром и высотой 39 мм. $m_{эт} = 1$ кг.

1 Ньютон - сила выз. ускор. массы 1 кг, равное 1 м/с$^2$ $F_{эт} = 1$ Н.

Измерение массы




измер. ускор. $W = \frac{2S}{t^2}$

$m = \frac{F_{эт}}{W_1}$

измер. силы $F_{эт} = m_{эт} W_2$

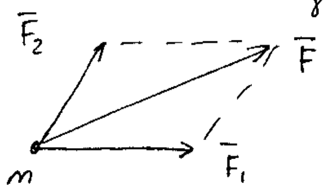
$W_{теор.} = \frac{F}{m} = W_{экспер.}$

III З.Н.

1) Только в инерц. системах отсчета
2) силы взаимодейств. напр. вдоль одной /
3) они приложены к разным телам
3)* они имеют одинаковую природу

Свойства сил и масс:

1) Силы складыв. по прав. слож. вект.




$\vec F_1 + \vec F_2 = \vec F$ - экспер. рез.

2) Массы положит и скалярны

$m \cdot \vec W = \vec F$ (опытный рез $\vec W \parallel \vec F$)

!!! верно при $v \ll c$ !!!

3) масса - аддитивная величина

!!! верно при $v \ll c$ !!!

Опр Импульс - произв. массы на вектор скорости

$$\vec p = m \vec v$$

II ЗН $\Rightarrow$ $\vec P = \vec F$

## §6 Силы в механике

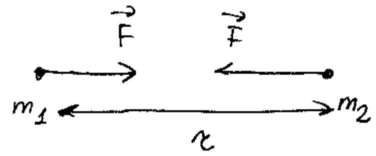
1) Гравитационные
2) Электромагнитные
3) Сильные
4) Слабые

3), 4): $R_{действ} \leq 10^{-15}$ м

Гравитационные силы

Закон всемирного тяготение Ньютона

$\forall$ 2 мат (·) прит с силой, пропорц. их массам и обратно пропорц квадрату расстояние между ними




$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

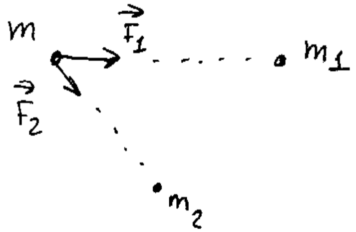
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Нм^2}{кг^2}$ - гравит. пост.

из опыта Кавендиша (1785)

Принцип суперпозиции:

$\forall$ пара частиц взаимодействует независимо.

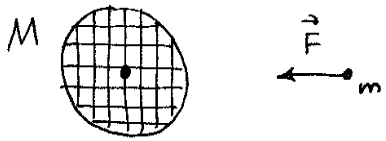



$$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2$$

$$\Downarrow$$

$$\vec F = \sum_i \vec F_i$$

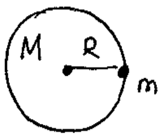
Принцип: притяжение точки к шару




Шар притягивает (·) так, как если бы все его масса находилась в ц. масс

$$\vec F = G\,\frac{Mm}{r^2}$$

Измерение массы Земли:




$$F = G\,\frac{Mm}{R^2} = mg \Rightarrow$$

$$M = \frac{gR^2}{G} = 6\cdot 10^{24}\ \text{кг}.$$

$g = 10$ м/с$^2$

$R = 6400$ км

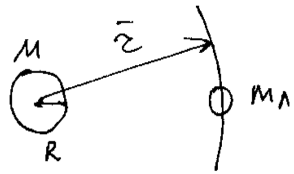
$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}$

Факты, подтверждающие закон всем. тяг.

1) Одинаковость $g$

$$F = G\,\frac{Mm}{R^2} = mg \Rightarrow g = G\,\frac{M}{R^2}$$ не зав. от $m$.

2) Период обращ. луны




$$F = G\,\frac{Mm_л}{r^2} = m\omega^2 r$$

$$\omega = \sqrt{GM/r^3} = \sqrt{gR^2/r^3}$$

$$T = 2\pi\,\frac{r\sqrt{r}}{R\sqrt{g}} \approx 30 \text{ суток}$$

Электромагнитные силы

Электр. заряд – мера электр. взаим. тел.

Электр. поле – поле, содерж. эл. заряд и проявл. действ. на эл. зар.

Напряженность эл. поля – мера действ. эл. поля на эл заряд

$$\vec E = \frac{\vec F}{q} \Rightarrow \vec F = q\vec E$$ – сила Кулона

**Сила Лоренца** – сила, действ. на зар. част. со стор. магнита

$\vec{F}_Л = q[\vec{v}\vec{B}]$, $\vec{B}$ – индукция магн. поля

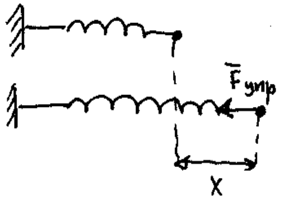
Полная сила:

$$\bar{F}_{ЭМ} = q\bar{E} + q[\bar{v}\bar{B}]$$ – сила Лоренца – сила, действ на заряд в ЭМ. поле

**Сила упругости** – сила препятств. деформации упр тел

Упругая деформация – исчезающая после прекращения действия сил

Закон Гука: $F_{упр} \sim$ величина деформ.




$$\bar{F}_{упр} = -kx$$

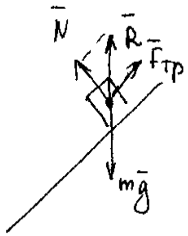
k - коэфф. упругости пруж. $\left[\frac{H}{м}\right]$

**Сила трения** – сила, преп отн. трению соприкасающ. тел.

**Сухое трение покоя** – трение в отсутствии отн. перемещения сопр. тел.

$$|F_{тр}| \le F_{max}$$

**Сила нормального давления** –




составляющая силы взаим. преп. пов-ти соприкосн.

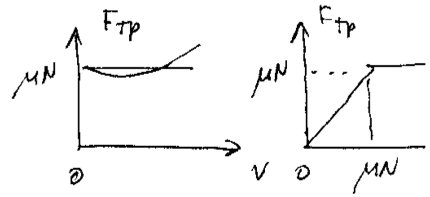
$F_{MAX} \sim N$

$F_{MAX} = \mu N$ –

$\mu$ - коэфф. трения $[\mu] = 1$.

**Сухое трение скольжения**

$F_{тр} \simeq F_{MAX} = \mu N$




**Вязкое трение** – трение, преп. движ. тел в сплошных средах.

Опыт: $F_{тр} \sim \cancel{\mu} V$, $V \ll V_0$

$F_{тр} \sim V^2$, $V \gg V_0$

$V_0$ - ск. среды


трения покоя отсутствует

## Релятивистское уравнение движения

$\dot{\vec p} = \vec F$, $\quad \vec p = \dfrac{m\vec v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ — рел. импульс

$\vec F = q\vec E + q[\vec v\,\vec B]$ — сила Лоренца

## §7 Неинерциальные с.о.
## Силы инерции

$S$ — инерц. СО $\quad S'$ — неинерц. СО

$m\vec w = \vec F$

$m\vec w + m\vec w' - m\vec w' = \vec F$

$m\vec w' = \vec F - m(\vec w - \vec w')$

$m\vec w' = F - \vec F_{ин}$, где $F_{ин} = -m(\vec w - \vec w')$

$\vec w - \vec w' = \vec w_п + \vec w_к$

$\vec w_п = \vec w_0 - \omega^2 \vec r_\perp'$

$\vec w_к = 2[\vec\omega\,\vec v']$

$\Rightarrow \vec F_{ин} = \vec F_п + \vec F_к$

$\vec F_п = -m\vec w_0 + m\omega^2 \vec r_\perp'$

$\vec F_к = -2m[\vec\omega\,\vec v']$

$\vec F_{цб} = m\omega^2 r_\perp'$

## Свойства сил инерции

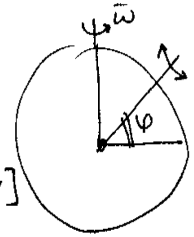
1) $\neq 0$ только для наблюд., связ. с неинерц. с.о.

2) нельзя указать тело, со стор. к-го приложены силы инерции

$\Downarrow$

не подчиняется III З.Н.

Маятник Фукко




$\vec F_к = -2m[\vec\omega\,\vec v'] = -2m[\vec\omega_\perp \vec v']$

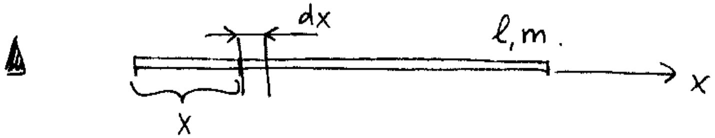
## §8 Импульс системы частиц
## Движение центра масс

**Опр** Имп. сист. $= \sum$ имп. част.

$\vec p = \sum_i \vec p_i = \sum_i m_i \vec v_i$

**Опр** Ц.м. сист. частиц — вообр. точка, рад. вект. кот. опр-ся формулой

$\vec r_c = \dfrac{1}{m} \sum_i m_i \vec r_i$




$$x_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i x_i \qquad m_i \to dm = \frac{m}{l}dx$$

$$x_i \to x$$

$$x_c = \frac{1}{m}\int_0^l x\,\frac{m}{l}\,dx = \frac{l}{2}$$

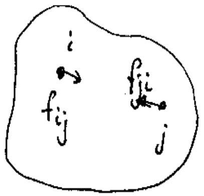
Опр

$$\vec V_c = \dot{\vec r}_c$$
$$\vec w_c = \dot{\vec v}_c = \ddot{\vec r}_c$$
$$\vec V_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec v_i$$
$$\vec w_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec w_i$$

$$\vec p = \sum_i m_i \vec v_i \;\Downarrow\; \vec p = m\vec V_c$$

## Внутр. и внешние силы

Опр Внутр. силы – взаимод. между ч. сист.




$$\bar f_{ij} = -\bar f_{ji}$$

Опр: Внешние силы – действ. на тела системы со стороны тел, не входящих в систему

$$m_i \vec w_i = \vec F_i + \sum_j \vec f_{ij}$$

$$\sum_i m_i \vec w_i = \sum_i \vec F_i + \sum_i\sum_j \vec f_{ij} = \sum_i \vec F_i = \vec F_{вн}$$

$m\vec W_c = \vec F_{вн}$ – закон движ. ц. масс.

Ц. масс сист. частиц движ-ся так, как если бы в этой (·) нах-сь вся масса системы и к ней были бы приложены все вн. силы

## §9 Закон сохр. импульса

$$\vec p = \sum_i m_i \vec v_i$$

$$\dot{\vec p} = \sum_i m_i \dot{\vec v}_i = \sum_i m_i \vec w_i = m\vec w_c = \vec F_{вн}$$

$\dot{\vec p} = \vec F_{вн}$ – закон измен. импульса мех системы.

$\vec F_{вн} = 0 \Rightarrow \vec p = const$ – закон сохр. имп.

Если ~~импульс~~ изм. ~~сист.~~ вн. сил $= 0 \Rightarrow$ импульс сист. не измен-ся.

В. теор. относит-и

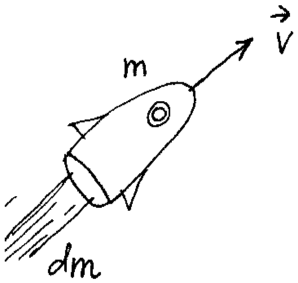
$$\vec F_{вн} = 0 \Rightarrow \vec p = \sum_i \frac{m_i \vec v_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = const$$

Более сильная формулировка.

Если $\exists$ такая ось, в проекции на кот. сумма внешних сил $= 0 \Rightarrow$ в направлении этой оси имп. сист. сохраняется

$$F^{(x)}_{вн} = 0 \Rightarrow p_x = \sum_i m_i v_{ix} = const$$

Реактивное движение:




$dt \to dm$

$$m\vec v = (m - dm)(\vec V + d\vec v) + \vec u\, dm$$

$$\vec u = \vec V + \vec c$$

$\bar c$ – скорость истечения реактивной струи относит р.

$\bar u$ – абс. реакт. скор. струи

$$m\vec v = m\vec v + md\vec v - \vec v\, dm - dm\, d\vec v + \vec v\, dm + \vec c\, dm$$

$$md\vec v = dm\, d\vec v + \vec c\, dm$$

можно пренебречь

$dt \to 0 \Rightarrow$
$dm \to 0$
$d\vec v \to 0$

$$md\vec v = -\vec c\, dm \quad /dt \Rightarrow m\frac{d\vec v}{dt} = -\vec c\,\frac{dm}{dt}$$

$$\vec F_{реакт} = -\vec c\,\mu$$, где $\mu = \frac{dm}{dt}$ – скор. расх. массы

Уравнение Мещерского:

$$m\frac{d\vec v}{dt} = -\mu\vec c + m\vec g$$

Пример: ракета „Энергия"

$\mu = 10$ тонн/с, $c = 3$ км/с

$F_р = \mu c = 3\cdot 10^7$ Н $\approx$ 3000 тонн.

Стартовая масса ракеты

$$\left.\begin{aligned} m &= m \text{ (на орб)} \\ V &= 1 \text{ косм.} \\ c & \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_0 - ?$$

$$\frac{m\,d\bar v}{dt} = -\mu\bar c$$

$$m(t) = m_0 - \mu t$$

X: $m\frac{dv}{dt} = \mu c$

$$(m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu c$$

$$\int_0^t \frac{\mu dt}{m_0-\mu t} = \int_0^v \frac{dv}{c}$$

$$\| $$

$$-\int_{m_0}^{m(t)} \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\frac{m_0}{m} = \frac{v}{c}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{m_0}{m} = e^{v/c}}$$ — формула Циолковского.

ракета „Энергия"

$V = 8$ км/с $\quad m = 100$ тонн $\quad c = 2{,}7$ км/с

$m_0 = 100\, e^3$ тонн $= 2000$ тонн.

## §10 Работа и потенциальная энергия

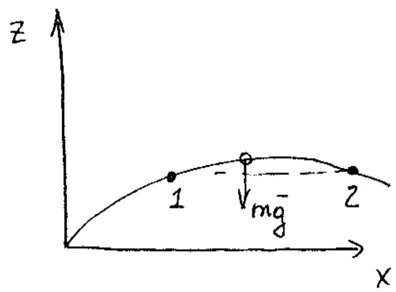
Элем. работа. — скал. произв. силы на беск. малое перемещение точки приложения силы

$$d\bar{A} = (\bar{F}, d\bar{r})$$

Работа $\quad A = \int dA \quad [A] = Н\cdot м = Дж$

сумма эл. работ

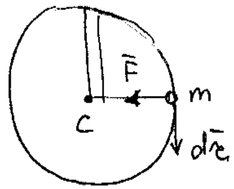
### Работа силы тяжести




$$dA = (\bar{F}, d\bar{r}) = F_z\, dz = -mg\, dz$$

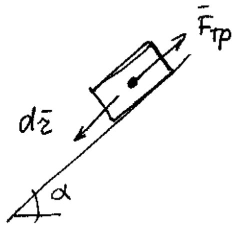
$$A = \int dA = -mg\int_{z_1}^{z_2} dz = mg\,(z_1 - z_2)$$

### Работа центростремит. силы




$$dA = (\vec{F}\, d\vec{r}) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

### Работа силы трения




$$dA = (\vec{F}\, d\vec{r}) < 0$$

$$\Downarrow$$

$$A_{тр} < 0$$

# Силовое поле

Если сила, действ. на мат $(\cdot)$ зависит только от координат $(\cdot)$ (а не от скорости), то $\vec{F}(\vec{r})$ – силовое поле

сила тяжести
сила кулона
сила упругости

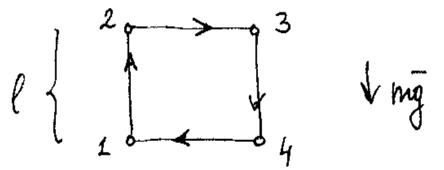
Если нет поле – сила лоренца
сила трение

## Потенциальная сила

Если работа силы, действ на мат $(\cdot) = 0$, при перем. этой точки по $\forall$ замкнутому контуру, то сила наз. ее потенциальной!

$$\oint (\vec{F}\, d\vec{r}) = 0$$

Сила тяжести.




$$\oint dA = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$$

$$\oint dA = -mgl + 0 + mgl + 0 = 0$$

Сила трение

$$\oint dA = -4F_{тр}\, l < 0 \qquad F_{тр} \text{ – не потенц.}$$

## Потенциальная энергия

Элемент. пот. эн. – элем. раб. пот. силы с минусом

$$d\Pi = -dA_п$$

$$\Pi = \int d\Pi$$

$$[\Pi] = [A] = Дж.$$

$$d\Pi = -dA = -(\vec{F}\, d\vec{r}) = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$= \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz$$

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \text{т.е.} \quad \Pi(\vec{r}) \Rightarrow \vec{F}(\vec{r})$$

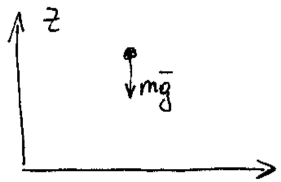
$$\vec{F} = -\operatorname{grad} \Pi$$

$$\operatorname{grad} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Однородное силовое поле.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F} = const \Leftarrow \text{не зав. от коорд.}$$

$$\oint \vec{F}\, d\vec{r} = \vec{F} \oint d\vec{r} = 0$$

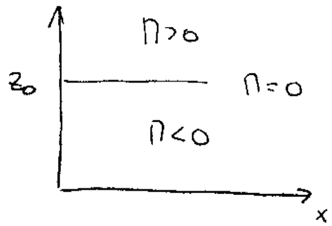



$(h \ll R_{земли})$

$$d\Pi = -dA = -(\vec{F}\, d\vec{r}) = -(m\vec{g}\, d\vec{r}) = mg\, dz$$

$$\Pi = \int d\Pi = mg\int_{z_0}^{z} dz = mg(z - z_0)$$

$z_0$ - ур. нач. отсчета пот. энергии




$z_0 = 0 \quad \Pi = mgh$

▷ Пот. эн. сист. частиц.

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

Для $F_{иск}$ : $\Pi = \sum_i m_i g(z_i - z_0) =$

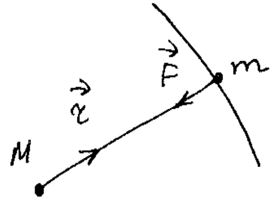
$$= g\sum_i m_i z_i - mgz_0 =$$

$$= mg(z_c - z_0) \underset{\uparrow\, z_0=0}{=} mgh_c$$

▷ Пот. энергия пружины

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

Центральное силовое поле — поле сил, напр. всегда в сторону одной неподв. точки (сил. центра)




$$d\Pi = -dA = -(\vec F d\vec r)$$

$$\vec F = G\frac{Mm}{r^2}\left(-\frac{\bar r}{r}\right) = F\left(-\frac{\bar r}{r}\right)$$

$$\vec r\, d\vec r = xdx + ydy + zdz =$$

$$= \frac{1}{2}d(x^2 + y^2 + z^2) = \bar r\, d\bar r$$

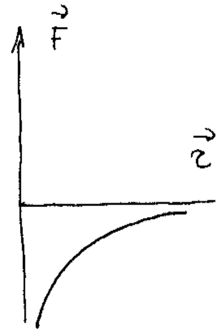
$$\Downarrow$$

$$d\Pi = F\frac{r\,dr}{r} = F\,dr$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\Downarrow$$

$$d\Pi = GMm\frac{dr}{r^2}$$




$$\Pi = \int d\Pi = GMm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = GMm\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

$$r_0 = \infty \Rightarrow \Pi(r) = -\frac{GMm}{r}$$

## § 11 Кинетическая энергия

Закон сохранение энергии в механике

<u>Опр</u> $K = \frac{mv^2}{2}$ $[K] = кг\,\frac{м^2}{с^2} = Нм = Дж$

Закон изменение кин. энергии

$$m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F \qquad \Big|\, d\vec r$$

$$m\left(\frac{d\vec v}{dt}\, d\vec r\right) = (\vec F\, d\vec r) = dA$$

$$m(\vec v\, d\vec v) = m\frac{d\vec r}{dt}\, d\vec v = dA$$

$$\| \qquad v\,dv \qquad \| \qquad d\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA \Rightarrow$$

$dK = dA$ — теор. об изм. кин. эн.

изменение кин. энергии (.) равно работе действ. на неё сил

Кинетич. энергия системы частиц

$$K = \sum_i K_i \Rightarrow K = \sum_i m_i \frac{v_i^2}{2}$$

Поступат. движ. $\bar v_i = \bar v \Rightarrow K = \frac{mv^2}{2}$

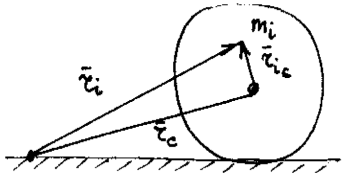
Вращ. вокр. неподв. оси. $v_i = \omega r_{i\perp}$

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum m_i r_{i\perp}^2$$

Момент инерции тела $J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$

$[J] = ?$ кг. м$^2$ $\Rightarrow$ $K = \frac{J\omega^2}{2}$

Плоское движение твердого тела




Движ. при кот. все точки тела движ. || нек. неподв. пл-ти.

$$\vec r_i = \vec r_{ic} + \vec r_c$$

$$\vec V_i = \vec V_c + \vec V_{ic}$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar V_i \bar V_i =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec V_c + \vec V_{ic})(\vec V_c + \vec V_{ic}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[ m V_c^2 + 2\vec V_c \sum_i m_i \bar V_{ic} + \sum_i m_i V_{ic}^2 \right]$$

$$\sum_i m_i \bar V_{ic} = \sum_i m_i(\bar V_i - \bar V_c) = \sum_i m_i \bar V_i - \sum_i m_i \bar V_c =$$
$$= mV_c - V_c m = 0.$$

$$K = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_i m_i V_{ic}^2$$

$$K = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

$J = J_c$ - мом. инерц. через центр.

теорема Кёнига - полная энергия тела = энергии центра и энергии движ. отн. ц.

# Закон сохранение энергии

Полная мех. энергия : $E = K + \Pi$

$$\vec F = \vec F_п + \vec F_к$$

$$d\vec K = dA = (\bar F\, d\bar r) = (\bar F_п\, d\bar r) + (\bar F_{нп}\, d\bar r) =$$

$$= dA_п + dA_{нп}.$$

$$d\Pi = -dA_п$$

$$dK = -d\Pi + dA_{нп} \to d(K+\Pi) = dA_{нп}.$$

$$dE = dA_{нп}$$ - изм. полной энергии равно раб. непот. сил.

Закон изменение энергии

Закон сохранение : $A_{нп} = 0 \Rightarrow E = const$

З.С.Э. в системах относительности

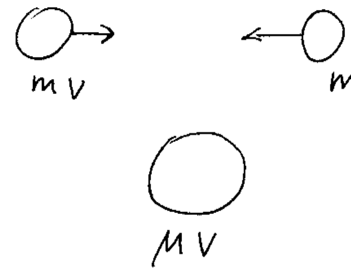
$\sum F_{вн} = 0 \Rightarrow$ релятивистская эн. система сохр.

$$E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = const$$

$$\vec p = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = const \Rightarrow$$ $\forall$ зак. инв. отн. преобр. Лоренца.

Применение преобраз. Лоренца $\Rightarrow$ ЗС.Э.

▲ Неупругий удар.




обычный ЗСЭ не действ. $\Rightarrow$ релятив.

$$\begin{cases} \dfrac{m\bar V}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \dfrac{m\bar v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{M\bar V}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$V = 0.$

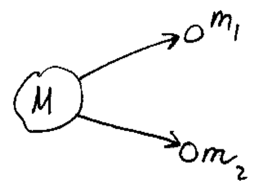
$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 2m \ (!)$$

$\Downarrow$

Энергия сохраняется засчет увеличение массы

Факты, подтверждающие теорию относит.

① Деление ядра




$$E = c^2 (M - m_1 - m_2)$$

выдел-ся энергия из-за дефекта масс

## ② Световое давление

$$\bar p = \frac{m\bar v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;; \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad E_0 = mc^2 \text{ - энерг. покоя}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} E\bar v = \bar p c^2 \\ E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \end{cases}$$

Пусть $m=0 \Rightarrow E = pc \Rightarrow V = c$

такая частица - <u>фотон</u>

Сила светового давления

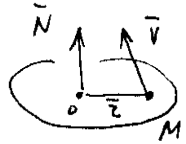
$$F = \dot p = \dot E / c = P/c$$ , где $P$ - мощн. света

Пусть $P = 10^3$ Вт $\Rightarrow F = \frac{10^3 \text{ Вт}}{3\cdot 10^8 \text{ м/с}} = 3\cdot 10^{-6}$ Н

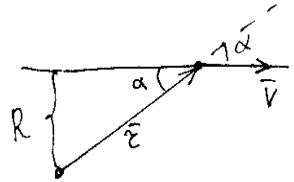
### §12 Момент импульса частицы и сист. частиц.

Мом. импульса част. (отн. (·))

$$\bar N = [\bar r, \bar p] = [\bar r\, m\bar v]$$




$N = rmv$

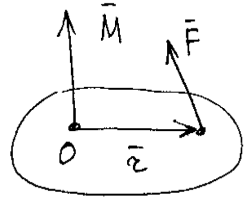



$N = mVR$

$[N] = \frac{\text{кг м}^2}{\text{с}}$

Момент силы (отн. (·))

$$\bar M = [\bar r\, \bar F]$$



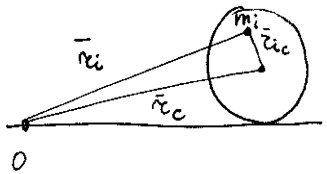

$M = 2F\sin\alpha$

$[M] = $ Нм

$M = 2FR$

Момент импульса системы частиц тела

$$\vec N = \sum_i N_i = \sum_i [\vec r_i\, m_i \vec V_i]$$




$\bar r_i = \bar r_c + \bar r_{ic}$

$\bar V_i = \bar V_c + \bar V_{ic}$

$$\bar N = \sum_i m_i [\bar r_i + \bar r_{ic}, \bar V_c + \bar V_{ic}] =$$

$$= [\bar r_c\, m\bar V_c] + [\bar r_c \sum m_i \bar V_{ic}] +$$

$$+ [\sum_i m_i \bar r_{ic}, \bar V_c] + \sum_i [\bar r_{ic}\, m_i \bar V_{ic}]$$

$$\sum m_i \bar V_{ic} \doteq \sum_i m_i (\bar V_i - \bar V_c) = \sum_i m_i \bar V_i - m \bar V_c = 0$$

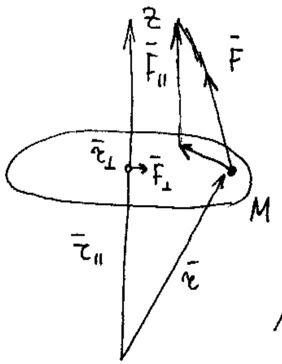
$$\sum_i m_i r_{ic} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \bar N_c = [\bar r_c, m \bar V_c] \\ N_{ic} = \sum_i [\bar r_{ic}, m_i \bar V_{ic}] \end{cases}$$

## Момент относит. оси

/ проекция вектора мом. на эту ось.




$$\bar r = \bar r_\parallel + \bar r_\perp$$

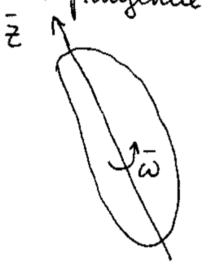
$$\bar F = \bar F_\parallel + \bar F_\perp$$

$$\bar M = [\bar r \bar F] = [\bar r_\parallel + \bar r_\perp, \bar F_\parallel + \bar F_\perp] =$$

$$= [\bar r_\perp \bar F_\perp] + M_\perp = M_\parallel + M_\perp$$

$$\bar N_\parallel = \sum_i [\bar r_{\perp i} ; m_i \bar V_{i\perp}]$$

## Вращение относит. неподв. оси.




$$\vec N_\parallel = \sum_i [\bar r_{i\perp} \; m \bar V_{i\perp}]$$

$$\bar V_{i\perp} = \bar V_i = [\bar\omega \; \bar r_{i\perp}]$$

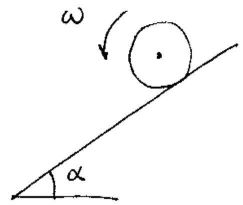
$$\bar N_\parallel = \sum_i m_i [\bar r_{i\perp} [\bar\omega \; \bar r_{i\perp}]] =$$

$$= \sum_i m_i \{ \bar\omega r_{i\perp}^2 - \bar r_{i\perp} \underbrace{(r_{i\perp} \bar\omega)}_{=0} \} \Rightarrow$$

$$N_\parallel = \vec\omega \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

$$N_\parallel = J\vec\omega \qquad J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$ - мом. инерции

## Плоское движ. твердого тела




$$\bar N = \bar N_c + \bar N_{отн}$$

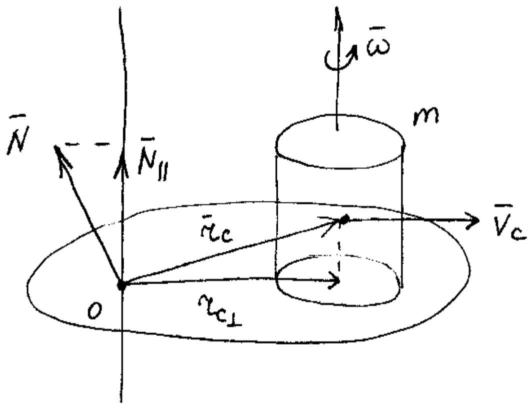
$$\bar N_\parallel = \bar N_c + \bar N_{отнс}$$

отн. центра тело сов. вращ. как вокруг неподв. оси.

$$\bar N_{c\parallel} = [\bar r_{c\perp} \; m \bar V_c]$$

$$\bar N_{отн_c} = J\bar\omega \qquad (J = J_c)$$

$$\bar N_\parallel = [\bar r_{c\perp} \; m \bar V_c] + J\bar\omega$$



## §13 Теорема моментов

### Закон сохр. мом. импульса.

$$\vec N = [\vec r\ m\vec v]$$

$$\dot{\vec N} = [\underbrace{\dot{\vec r}\ m\vec v}_{=0}] + [\vec r\ m\dot{\vec v}]$$

$$\dot{\vec N} = [\vec r\ m\dot{\vec v}] = [\vec r\ \vec F] = \vec M$$

$\dot{\vec N} = \vec M$ — Скор. изм. мом. импульса мат (·) = мом. действ. силы

<u>Система частиц</u>

$$\vec N = \sum_i [\vec r_i\ m_i \vec v_i]$$

$$\dot{\vec N} = \sum_i \underbrace{[\dot{\vec r}_i\ m_i \vec v_i]}_{=0} + \sum_i [\vec r_i\ m_i \dot{\vec v}_i] =$$

$$= \sum_i [\bar r_i ; \vec F_i + \sum_j \vec f_{ij}]$$

$$\dot{\vec N} = \vec M_{вн} + \vec M_{внутр}$$

$$\vec M_{вн} = \sum_i [\vec r_i\ \vec F_i]$$

$$\vec M_{внутр} = \sum_i \sum_j [\vec r_i\ \vec f_{ij}]$$

$$\bar M_{ij} = [\bar r_i - \bar r_j ; \bar f_{ij}] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$M_{внутр} = 0 \Rightarrow \dot{\vec N} = \vec M_{вн}$$

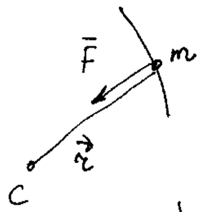
<u>Закон сохр. мом. им.</u>

Если сумма мом. вн. сил = 0 то момент импульса сист. сохр.

Если ∃ ось, отн. кот. ∑ мом. вн. сил = 0, то отн. этой оси момент имп. сист. сохр.

$$M_z^{вн} = 0 \Rightarrow N_z = const$$

▲, движ. част. в центральном силовом поле.




$$\vec M = [\vec r\ \vec F] = 0$$

$$\vec N = [\vec r\ m\vec v] = const$$

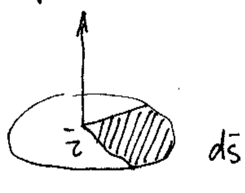
$$\Downarrow$$

1) движ. в центр. сил. поле — плоское

2) секторная скорость сохр-ся.

<u>Опр</u> Секторная площадь.

$$d\bar s = \frac{1}{2}[\bar r\ d\bar r]$$



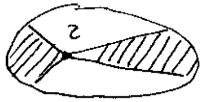
Опр Секторная скорость

$$\bar\sigma = \frac{d\bar S}{dt} \qquad \bar\sigma = \frac{1}{2}[\bar r\ \bar v]$$

$$\bar N = 2m\bar\sigma = const \Rightarrow \bar\sigma = const$$

Закон пост.-ва секторных скоростей

За равные пром. времени радиус-вектор частицы очерчивает равные площ.




— вблизи центра поля тело движется быстрее

§14 Материальная (·) в центр. поле.

Законы Кеплера

1) планеты движ. по эллипсам, в общем фокусе кот. нах-ся солнце.

2) За равные пром. времени рад-вект. планет зачерч. равные площади.

3) Квадраты периодов обращ. планет относятся как кубы полуосей их орб.

2) → закон сохр. секторной скорости.

Вывод 1 з-на ~~Ньютона~~ Кеплера.

$\exists$ мат (·) под действ. центр. сил поле движ. в OXYZ

$$\begin{aligned} &\text{ЗСЭ:} \\ &\text{ЗСИ:} \end{aligned} \begin{cases} K + \Pi = E = const \\ \vec N = [\vec r\,;\, m\vec v] = const \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2)$$

$$\begin{aligned} \dot x^2 &= \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot y^2 &= \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \end{aligned} \Rightarrow K = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)$$

$$\Pi = -\frac{GMm}{r} = -\frac{A}{r}, \qquad A = GMm$$

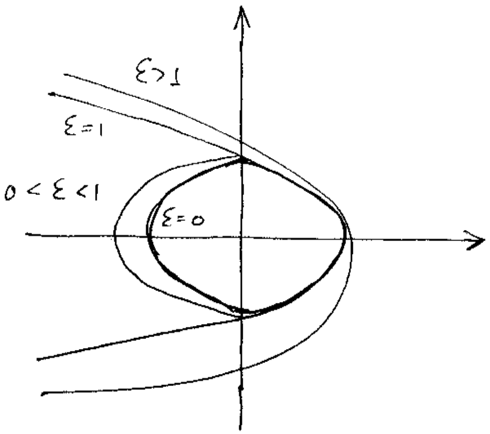
$$\vec N = m[\vec r\ \vec v] = m\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x & y & 0 \\ \dot x & \dot y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec k\, m(x\dot y - y\dot x) = \vec k\, m r^2\dot\varphi$$

$$\begin{cases} m r^2\dot\varphi = N \\ \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{A}{r} = E = const \end{cases}$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$ – общее ур-ие КГП.

$\varepsilon > 0$ – окр.
$\varepsilon > 1$ – гипербола
$0 < \varepsilon < 1$ – эллипс
$\varepsilon = 1$ – парабола




$$\dot\varphi = \frac{N}{mr^2}$$

$$\dot r^2 + r^2\frac{N^2}{m^2r^4} = \frac{2E}{r} + \frac{2A}{mr}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot r = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}} = \frac{dr}{dt} \\ \dot\varphi = \frac{N}{mr^2} = \frac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2Em}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}\cdot r^2$$

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}} = \pm d\varphi \Longrightarrow \left\{ s = \frac{1}{r} \right\}$$

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2}s - s^2}} = \pm d\varphi$$

$$\underbrace{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}}_{a^2} - \Big(\underbrace{s - \frac{mA}{N^2}}_{x}\Big)^2 = a^2 - x^2$$

$$x = s - \frac{mA}{N^2} \qquad dx = ds$$

$$a^2 = \frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm d\varphi \Rightarrow$$

$$\arcsin\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi \Rightarrow s - \frac{mA}{N^2} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{mA}{N^2} + x = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{a\cos\varphi + \frac{mA}{N^2}} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

$$p = N^2/mA$$
$$\varepsilon = aN^2/mA, \qquad A = GMm$$

$$\varepsilon = \frac{N^2}{mA}\cdot\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}} = \sqrt{1 + \frac{2N^2E}{mA^2}}$$

$E = 0 \Rightarrow \varepsilon > 1$ – парабола
$E > 0 \Rightarrow$ гипербола
$E < 0 \Rightarrow$ движ. по замкн. трактр.

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} s - s^2}} = \pm d\varphi$$

## § 15 Плоское движение твердого тела

– движение, при кот все точки тела движ. ся // некот. неподвижной пл. ти

§ 12 $\to$ $\vec{N}_{\parallel} = J\vec{\omega}$, $J = \sum_i m_i r_i^2$

$\vec{N}_i = J\bar{\omega}_i$

§ 13 $\to$ $\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{вн}$ $\Rightarrow$ $\dot{N}_z = M_z$

$J\dot{\omega}_z = M_z$

$\vec{\mathcal{E}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ $\Rightarrow$ $\dot{\omega}_z = \mathcal{E}_z = \ddot{\varphi}$

$[\bar{\mathcal{E}}] = \frac{рад}{c^2}$ — угловое ускорение.

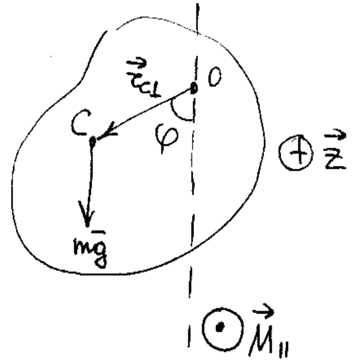
$J\mathcal{E}_z = M_z$ – ур-ие тела, вращ. вокр. неподв. оси.

▲ Физ. маятник – тело произв. формы с неподв. осью вращ.

$$\vec{M}_{\parallel} = \sum_i [\vec{r}_{i\perp}\ m_i\vec{g}] =$$

$$= [\sum_i m_i\vec{r}_{i\perp}, \vec{g}] = [m\vec{r}_{c\perp}, \vec{g}] \ (=)$$

$$\left\{\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i,\ m = \sum_i m_i\right\}$$




$(=)\ [\vec{r}_{c\perp}; m\vec{g}] \Rightarrow$

$J\mathcal{E}_z = M_z$ – сумм. мом.-т сил тяжести таков, как если бы вся масса тела нах. в центре масс

$M_z = -|\vec{M}_{\parallel}| =$

$= -|\vec{r}_{c\perp}|\ mg\sin\varphi$

$M_z = -mgl\sin\varphi$,

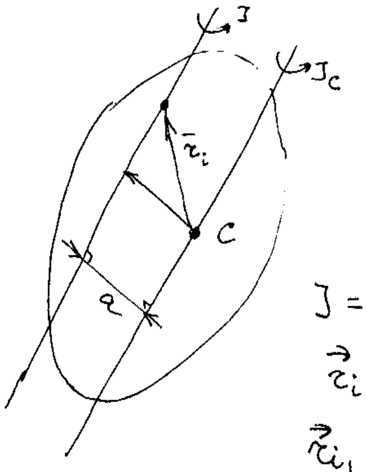
где $l = |\bar{r}_{c\perp}|$ – расст. от ц.м. до оси вр.

$\mathcal{E}_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi} \Rightarrow -mgl\sin\varphi = J\ddot{\varphi}$

$J\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$ – ур-ие колеб. произв. физического маятн.

## Теорема Гюйгенса-Штейнера

$J = J_c + ma^2$ → Момент ин. тела отн. произв. оси = моменту отн. оси, прох через центр масс и $\parallel$ данной плюс масса тела на квадр расст между осями




$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

$$\vec r_i = \vec r_c + \vec r_{ic}$$

$$\vec r_{i\perp} = \vec r_{c\perp} + \vec r_{ic\perp}$$

$$J = \sum_i m_i (\bar r_{i\perp}, \bar r_{i\perp}) =$$

$$= \sum_i m_i (\vec r_{c\perp} + \vec r_{ic\perp})(\vec r_{c\perp} + \vec r_{ic\perp}) =$$

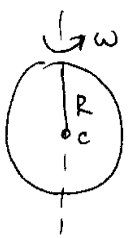
$$= ma^2 + J_c + (2\vec r_{c\perp}, \underbrace{\sum_i m_i r_{ic\perp}}_{0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec r_{ic} = \sum_i m_i (\vec r_i - \vec r_c) = \sum_i m_i r_i - m\vec r_c = 0$$

▲ Обруч

$J = J_c + mR^2$

$J_c = mR^2$




m, R.

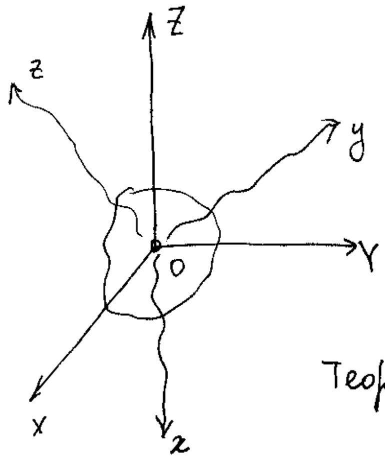
## §16 Тензор инерции твердого тела. Главные оси инерции.

Поступательное движение тв. тела.

⇓

Движ. ц. масс. $m\bar W_c = \bar F$

Движ. тела с 1 неподв. (·)




Теорема моментов: $\dot{\vec N} = \vec M$

∴ Свободное вращение − $\vec M = 0 \Rightarrow \vec N = const$

Опыт показ, что оси, связ. с телом в процессе движ. меняют свою ориентацию отн. вектора $\vec N$, т.е. меняются проекции $\vec N$ на оси

СК, связ. с телом

$N_x = N_x(t)$
$N_y = N_y(t)$
$N_z = N_z(t)$

$$\vec N = \sum_i [\vec r_i \; m_i \vec v_i]$$
§4 (теор. Эйлера) $\vec V_i = [\vec\omega \, \vec r_i]$ $\Big\} \to$

$$\vec N = \sum_i \vec N_i = \sum_i m_i [\vec r_i \vec v_i] = \sum_i m_i [\vec r_i [\vec \omega \vec r_i]] =$$
$$= \sum_i m_i \{\vec\omega r_i^2 - \vec r_i (\vec r_i \vec\omega)\}$$

$$\vec N_{i_x} = m_i \{\vec\omega_x r_i^2 - x_i (\vec r_i \vec\omega)\}$$

$$\begin{cases} r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ (\vec r_i \vec\omega_i) = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z \end{cases}$$

$$N_{ix} = m_i \{\omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)\}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} N_{ix} = m_i \{(y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z\} \\ N_{iy} = m_i \{-y_i x_i \omega_x + (z_i^2 + x_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z\} \\ N_{iz} = m_i \{-z_i x_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2)\omega_z\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \\ N_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z \\ N_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ J_{xy} = -\sum_i m x_i y_i = J_{yx} \end{array}$$

$\hat J$ – тензор инерции тв. тела

$$\vec N = \hat J \vec\omega \;\Rightarrow\; \vec N \not\parallel \vec\omega$$

Главные оси инерции тела.

$\hat J$ зависит от СК $Oxyz$

В общем случае, СК $Oxyz$ можно выбрать так, что $\hat J$ станет диаг. матр

главные оси инерции.

$\exists\, Oxyz$ – гл. оси.

$$\Downarrow \quad \hat J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

$J_x J_y J_z$ – главные мом-ты инерции тела

$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} N_x = J_x \omega_x \\ N_y = J_y \omega_y \\ N_z = J_z \omega_z \end{cases}$$

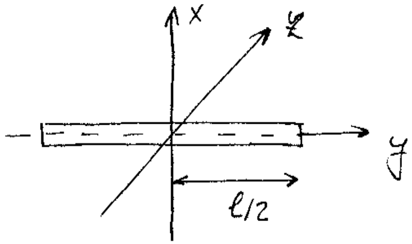
<u>Пример</u> $\exists$ тело вращ. относит. $X$ – одной из главных осей вращ.

$\omega_x \ne 0$ $\qquad \omega_y = \omega_z = 0$
$N_x \ne 0$ $\qquad N_y = N_z = 0$

Опыты $\to$ $\forall$ оси симм. тела явл. гл.о.в

$\vec N \parallel \vec\omega$ Главные оси – физич. выд. тем, что $\vec N \parallel \vec\omega$

Δ Стержень.




$\hat{J}$ - ?

$dV = S\,dx$

$r_\perp = x$

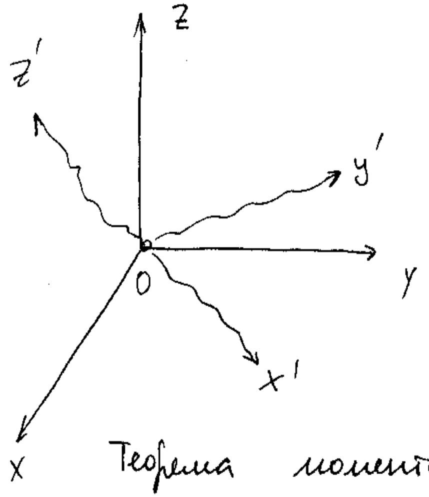
$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

$$J = \int_V r_\perp^2 \rho\, dV \quad : \quad J_x = \int_{-l/2}^{l/2} \rho S x^2\, dx = \frac{ml^2}{12}$$

$$\hat{J} = \frac{ml^2}{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## §17 Динамика твердого тела, Уравнение Эйлера

Oxyz - гл. оси.




$$\left.\begin{matrix} N_x(t) - ? \\ N_y(t) - ? \\ N_z(t) - ? \end{matrix}\right\} - ?$$

$$\left\{\begin{aligned} N_x &= J_x \omega_x \\ N_y &= J_y \omega_y \\ N_z &= J_z \omega_z \end{aligned}\right.$$

Теорема моментов: $\dot{\vec N} = \vec M$ (в Oxyz)

$d\vec N$ разное в $Ox'y'z'$ и $Oxyz$

(§4) $\Rightarrow$ $d\vec A = d'\vec A + [\vec\omega\,\vec A]\,dt$ - $\forall \vec A$ во вращ. системе.

$$\underset{\text{в } Oxyz}{d\vec N} = \underset{\text{в } Ox'y'z'}{d'\vec N} + [\vec\omega\,\vec N]\,dt \quad /dt \Rightarrow$$

$$\dot{\vec N} = \underbrace{\frac{d'\vec N}{dt} + [\vec\omega\,\vec N]}_{} = \vec M$$

$$[\vec\omega\,\vec N] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x\omega_x & J_y\omega_y & J_z\omega_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec i\,(J_z - J_y)\,\omega_y\omega_z + \vec j\,(J_x - J_z)\,\omega_z\omega_x + \vec k\,(J_y - J_x)\,\omega,$$

$$\left\{\begin{aligned} J_x \frac{d'\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\,\omega_y\omega_z &= M_x \\ J_y \frac{d'\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\,\omega_x\omega_z &= M_y \\ J_z \frac{d'\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\,\omega_x\omega_y &= M_z \end{aligned}\right.$$

Ур-ие Эйлера.

Эти ур-ие опр проекц. $\vec\omega$ на гл. оси ин. тел

## Свободное вращение симм. волчка

симм. волчка ↓ тела, у кот одинаковы 2 из 3 гл. мом. ин.

$$J \begin{cases} J_x = J_y \underset{DF}{=} J_A \\ J_z \underset{DF}{=} J_B \neq J_A \end{cases}$$

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \omega_z(t) = \omega_{z0} = const$$

$$\begin{cases} J_A \dot{\omega}_x + (J_B - J_A)\omega_y \omega_{z0} = 0 \\ J_A \dot{\omega}_y + (J_A - J_B)\omega_x \omega_{z0} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

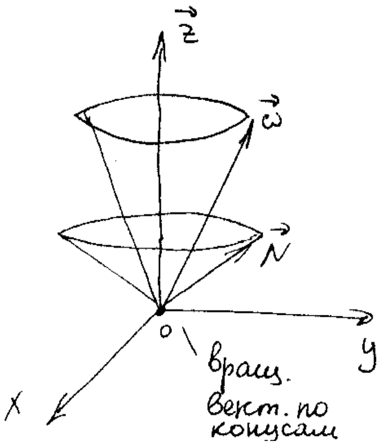
$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y + \Omega \omega_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \Omega = \frac{J_B - J_A}{J_A}\omega_{z0}$$

$\Downarrow$ решить

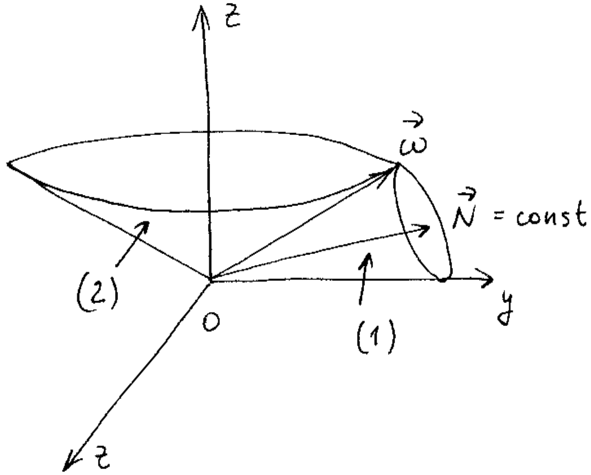
$$\begin{cases} \omega_x(t) = \omega_0 \cos(\Omega t + \varphi) \\ \omega_y(t) = \omega_0 \sin(\Omega t + \varphi) \\ \omega_z(t) = \omega_{0z0} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} N_x(t) = N_0 \cos(\Omega t + \varphi) \\ N_y(t) = N_0 \sin(\Omega t + \varphi) \\ N_z(t) = N_{z0} \end{cases}$$




Своб. симм. волчок движ. так, ~~что~~ как если бы он был вложен в конус, кот без проскальзыв. движ. поверх другого конуса.




## §18 Численный эксперимент в мех.

Асимм. волчок - тело, у кот различны все три гл. мом. ин. $J_x \neq J_y \neq J$

Своб. вращ - $M_x = M_y = M_z = 0$.

Свободное вращение ассиметр. волчка.

считаем, что 1 точка неподвижна.

$\Downarrow$ ур-ие Эйлера

$$\begin{cases} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y \omega_z = 0 \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x \omega_z = 0 \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_y \omega_x = 0 \end{cases}$$

Начальные условие:

$$\begin{cases} \omega_x(t=0) = \omega_{x0} \\ \omega_y(t=0) = \omega_{y0} \\ \omega_z(t=0) = \omega_{z0} \end{cases}$$

Надо найти:

$\omega_x(t)$ - ?

$\omega_y(t)$ - ?

$\omega_z(t)$ - ?

Критерий правильности решение: $K = const$

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i V_i^2 \leftarrow (\S 3) \text{ Т Эйлера:}$$

$$\vec{V}_i = [\vec{\omega}\,\vec{r}_i]$$

$$V_i^2 = (\vec{V}_i \vec{V}_i)$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{V}_i [\vec{\omega}\,\vec{r}_i]) =$$

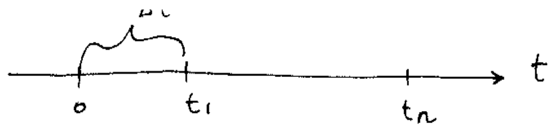
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega}[\vec{r}_i \vec{V}_i]) = \frac{1}{2}\sum_i \Big(\vec{\omega}, \sum_i [\vec{r}_i \vec{V}_i]\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{N}) = \frac{1}{2}(\omega_x N_x + \omega_y N_y + \omega_z N_z)$$

$$K = \frac{1}{2}\left(J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2\right) = const.$$

Численные решение дифуров...

$$\begin{cases} du/dt = f(u\,t) \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \qquad u(t) - ?$$



$t_n = n\Delta t \qquad (n \in N \cup \{0\})$

$u(t_n) = u_n$

$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$

$$\Delta u_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u\,\tau)\,d\tau$$

Метод Эйлера: $\Delta u_n = \Delta t\, f(u_n\, t_n)$

Метод Рунге-Кутта:

$$\begin{cases} \Delta u_n^{(1)} = \Delta t\, f(u_n\, t_n) \\ \Delta u_n^{(2)} = \Delta t\, f(u_n + \frac{1}{2}\Delta u_n^{(1)},\ t_n + \frac{1}{2}\Delta t) \\ \Delta u_n^{(3)} = \Delta t\, f(u_n + \frac{1}{2}\Delta u_n^{(2)},\ t_n + \frac{1}{2}\Delta t) \\ \Delta u_n^{(4)} = \Delta t\, f(u_n + \frac{1}{2}\Delta u_n^{(3)},\ t_n + \frac{1}{2}\Delta t) \end{cases}$$

$$u_n = \frac{1}{6}\left(\Delta u_n^{(1)} + 2\Delta u_n^{(2)} + 2\Delta u_n^{(3)} + \Delta u_n^{(4)}\right)$$

Метод Рунге-Кутта для системы:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u\,v\,t) \\ \dfrac{dv}{dt} = g(u\,v\,t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} V(t=0) = v_0 \\ u(t=0) = u_0 \end{matrix}$$

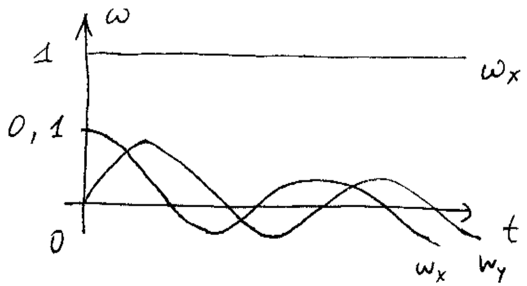
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \Delta u_n \\ v_{n+1} = v_n + \Delta v_n \end{cases}$$

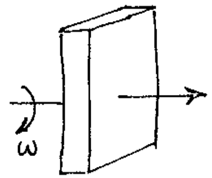
$$\begin{cases} \Delta u_n = \frac{1}{6}\left(\Delta u_n^{(1)} + 2\Delta u_n^{(2)} + 2\Delta u_n^{(3)} + \Delta u_n^{(4)}\right) \\ \Delta v_n = \frac{1}{6}\left(\ldots\right) \end{cases}$$

ост. аналогично 1

Рез-т решение ур-ий Эйлера.

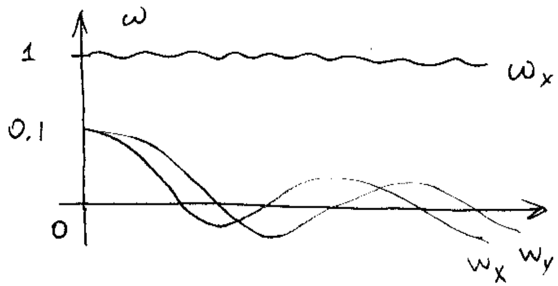
1) Тело вращ. вокр. оси X с max мом. инерции. $J = J_{max}$.

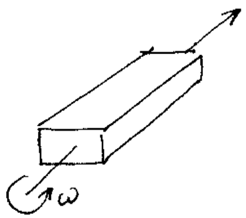


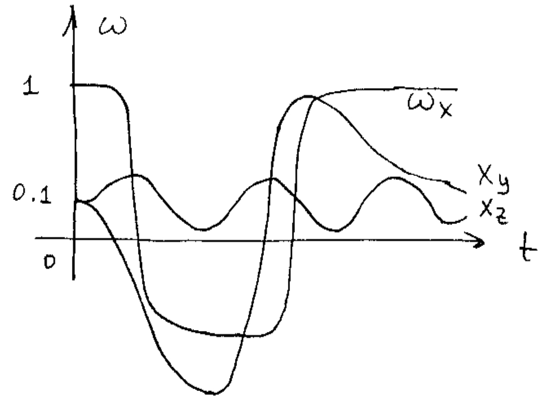

вращ. устойчиво.

2) вращ. вокр. (X) с $J = J_{min}$




3) Вращ. вокр (X) с $J = J_{ср.}$



# Аналитическая механика

## §19 Системы со связями. Степ своб.

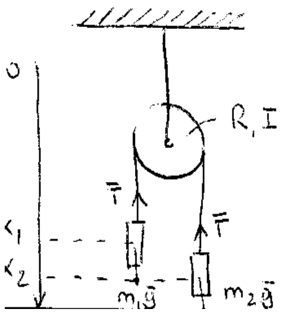
Связи – не вытекающ из ур-ий движ. ограничения на коорд скорости и ускор точек механической системы

Связи осущ стержнями, нитями, или телами различной формы

Силы, с кот. тела осущ связи действ на тела системы наз-ся реакциями связи

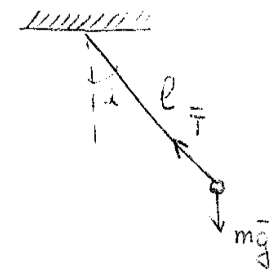
Математич. связи выр ур-ями связи, т.е соотношениями между координатами, скоростями и ускор. точек мех сист.

Δ Машина Атвуда




$$\begin{cases} l = x_1 + x_2 + \pi R & \text{— ур-ие связи} \\ m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + T \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g + T \end{cases}$$

Δ мат маятник




$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ – ур-ие связи.

## Классификация связей

1) Удерживающие \ неудерживающие
2) Стационарные \ нестационарные
3) Голономные \ неголономные

Голономные – сводится к огр. только на коорд

$f(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n, t) = 0$

Из связи коорд. вытекает огр. связи скор.

Δ₁ $\begin{cases} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$

Δ₂ $2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$

$\vec{r}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{v}$

$$\dot x^2 + x\ddot x + \dot y^2 + y\ddot y + \dot z^2 + z\ddot z = 0$$

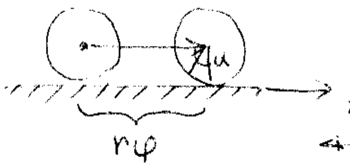
$$v^2 + \vec r \vec w = 0$$

$$\bar r \bar w = r w_r$$

$$w_r = -\frac{v^2}{r}$$

интегр. по $t$ можно перейти к связи координат.

△ качение цилиндра по плоскости. (без проскальзыв.)

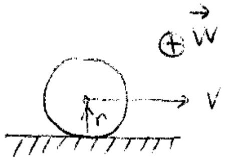



без проскальз

$x = R\varphi$ - голономная связь.

△ (неголономная)

качение шара по пл (по прямой)




(нет проск)

$\vec v = [\vec\omega\, \vec r]$

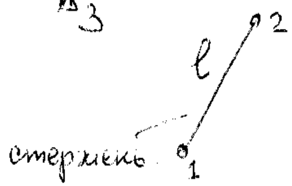
см. Т Эйлера.

Связи коорд. нет: может двиг. и может не двигаться цилиндр. центр.

Связь скоростей т.к. движ. на маленьких $\Delta t$ - прямолин. дв.

Удерживающая связь - связь, ур-ие кот задается равенством △ 1 2

△3




$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=\ell^2$$

голономная связь удерживающая.

△ (неудерживающей связи)

ур-ие задается нер-вом

$$\ell^2 \geqslant (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$


нерастяжимая нить

Будем рассм. удерживающ связи т.к. когда ~~связь~~ нить не напряжена можно считать, что ее нет

Стационарная - связь, ур-нии кот не содержит $t$ в явном виде

$\Delta$ 1, 3

Нестационарная - с зависимостью $t$

голономная стационарная связь:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_n) = 0$$

нестационарная

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_n, t) = 0$$

$\Delta$ мат маятник $l = l(t)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2(t)$$

через нестационарную связь в систему поступает $E$

Задачи механики несвободных систем

Система с голономной связью

$$m_e \ddot{\vec{r}}_e = \underbrace{\vec{F}_e}_{\text{заданная сила}} + \underbrace{\vec{R}_e}_{\text{сила реакции}}, \quad l = 1, \ldots N$$

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_n, t) = 0, \quad \alpha = 1 \ldots k$$

$\vec{F}$ - заданная сила

$\vec{R}$ - сила реакции

$N$ - число мат (·)

$k$ - число связей

Будем искать

$$\begin{cases} \vec{r}_e = \vec{r}_e(t) \\ \vec{R}_e = \vec{R}_e(t) \end{cases} \quad e = 1 \ldots N$$

Число степеней свободы систем - число независ. координат, полност. опр. положение сист в пр-ве

Обобщенные координаты — любые $s$ координат, полностью опр полож. сист. в пр-ве

Обозн. $q_1 \dots q_s$ $\{q\}_s$

Обобщенные скорости — производные от обобщенных коорд. по $t$ $\{\dot{q}\}_s$

1.01.

Число степ свободы $s$

Для как. $s$ ?

Для голономной сист. с конечным числом мат (·)

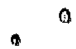
$$S = 3N - k$$

$N$ - число мат (·)

$k$ - число связей

Δ

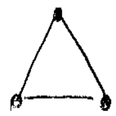
$N = 1$
$k = 0$
$S = 3$



$N = 2$
$k = 0$
$S = 6$

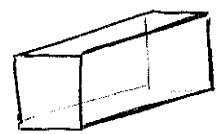
$N = 2$
$k = \cancel{0}\,1$
$S = \cancel{6}\,5$

$N = 2$
$k = 0$
$S = 6$



$N = 3$
$k = 3$
$S = 6$

Пример тв тела.



— положение 3(·) опр положение в пр-ве $\Rightarrow$ $s = 6$ (как у Δ)

Св-ва обобщ. координат

1) радиус-вектор (·) сист явл однозначн ф. обобщ. координат

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1 \dots q_s\, t) \qquad l = 1, \dots N$$

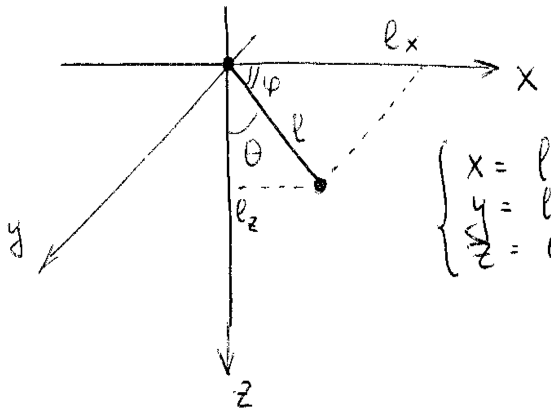
2) обобщ. коорд. обращ-ся в тожд-во уравнениями связи (голономная система)

$f_\alpha (\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N\, t) = 0$

$\alpha = 1, 2 \ldots k$ - число связей.

Подставим $\vec{r} = \vec{r}(q) \Rightarrow$ получим тождество

△ Мат. маятник




$$\begin{cases} x = l\sin\theta\cos\varphi \\ y = l\sin\theta\sin\varphi \\ z = l\cos\theta \end{cases}$$

св-во (1)

$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$

тожд-во $\Rightarrow$ св-во (2)

$N = 1$
$k = 1$
$S = 2$

$q_1 = \theta \quad q_2 = \varphi$

## § 20 Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные связи.

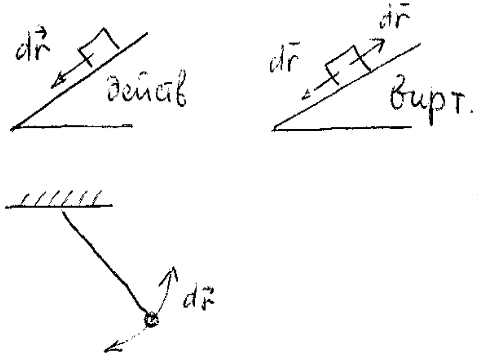
Виртуальный $\equiv$ возможный

Действительное перемещение -

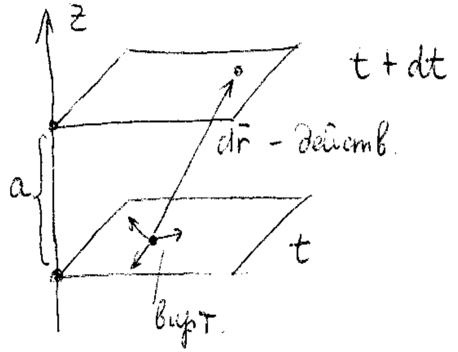
$d\vec{r}$ - бескон. мал. перемещение (·), происх. под действ. как заданных сил, так и сил реакции. Действительное перемещ. происх. за $\Delta t$ в соотв. с ур-ями движения и ур-ями связи.

Виртуальное перемещение - воображаемое б. м. перемещ. (·), допускаемое связями в данный момент времени. Вирт. перемещ. не обладает длительностью и не зависит от зад. сил.

△ (стационарная связь.)



Δ (нестационарные связь)




$Z = at$

Мат. опр. вирт. перем. $\delta\vec{r}$

$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1 \ldots q_s\, t) \qquad e = 1 \ldots N$

связи учтены

$\exists\ t = const$ дифф $\Rightarrow$

$$\delta\vec{r}_e = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}\, \delta q_j$$

вариации независим. коорд.

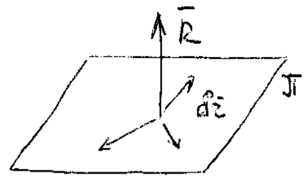
*) Символ $\delta$ действует как обычный дифф-л, но отн. к координатам не по t

Вирт. работа - работа силы на виртуальном перемещении $\delta A = \vec{F}\,\delta\vec{r}$

Идеальные связи - связи, при кот вирт раб сил реакции = 0

$$\delta A_R = \sum_{e=1}^{N} \vec{R}_e\, \delta\vec{r}_e = 0$$

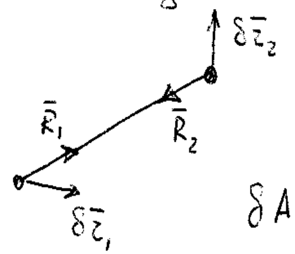
Δ 1 абс. гладкая пл-ть




$F_{тр}$ - сост сил реакц

$\vec{R}\cdot\delta\vec{r} = 0$ - связь идеальна

Δ 2 ~~независимый~~ невесомый жесткий стержень




невесомый $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$

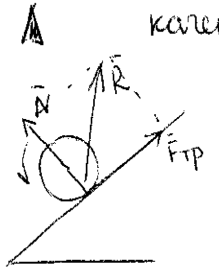
$$\delta A_R = \sum_{e=1}^{N} R_e\,\delta r_e = \vec{R}_1\delta\bar{r}_1 + \vec{R}_2\delta\bar{r}_2 =$$

$$= \vec{R}_1(\underbrace{\delta\bar{r}_1 - \delta\bar{r}_2}_{\delta\vec{r}}) = \bar{R}_1\vec{r} = \{\bar{R}_1 = \alpha\vec{r}\} =$$

$$= \alpha\vec{r}\,\delta\vec{r} = \alpha(x\delta x + y\delta y + z\delta z) =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\,\delta \underset{const}{l^2} = 0$$

A качение без проскальзывание




связь - отсутствие проск.

$$\delta \bar r = 0$$

$$\delta A_R = \bar R \, \delta \bar r = 0$$

## § 21 Ур-ие Лагранжа

### Обобщенные силы

сист с идеальн. голономными связями

$$\vec r_e = \vec r_e(q_1 \dots q_s \, t) \qquad l = 1 \dots N$$

если голономная сист $\Rightarrow$ могут быть построены

$$\delta A_R = \sum_{e=1}^{N} \bar R_e \, \delta \bar r_e = 0$$

$$\delta \bar r_e = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$m_e \ddot{\vec r}_e = \bar F_e + \bar R_e \quad , \quad e = 1, \dots N$$

Исключим силы реакции:

$$\sum_{e=1}^{N} (m_e \ddot{\vec r}_e - \bar F_e) \delta \bar r_e = \sum_{e=1}^{N} \bar R_e \, \delta \bar r_e = 0$$

$$\sum_{e=1}^{N} (m_e \ddot{\bar r}_e - \bar F_e) \delta \bar r_e = 0$$

ур-ие Даламбера-Лагранжа

к обобщ. коорд.

$$\vec r_e = \vec r_e(q_1 \dots q_s \, t) = \vec r(q \, t)$$

$$\delta \vec r_e = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_{e=1}^{N} (m_e \ddot{\vec r}_e - \bar F_e) \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j} \delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \sum_{e=1}^{N} (m_e \ddot{\bar r}_e - \bar F_e) \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j} =$$

$$= \left\{ \sum_{e=1}^{N} m_e \ddot{\bar r}_e \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j} = X_j \, ; \sum_{e=1}^{N} \bar F_e \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j} = Q_j \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} (X_j - Q_j) \, \delta q_j = 0$$

из независ. обобщ. коорд. $\Rightarrow$ $X_j = Q_j$

$j = 1 \dots s$

Покажем, что

$$X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$K = K(q\ \dot q\ t)$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N} m_e v_e^2 = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N} m_e \bar v_e \bar v_e$$

$$\vec v_e = \dot{\vec r}_e$$

$$\vec r_e = \vec r_e(q_1 \dots q_s\ t)$$

$$\vec V_e = \sum_{e=1}^{s} \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial \bar r_e}{\partial t}$$

$$\vec V_e \to K \to K(q\ \dot q\ t)$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\cdot\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N} m_e \bar V_e \bar V_e = \sum_{e=1}^{N} m_e \vec V_e \frac{\partial \bar V_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot q_j} = \sum_{e=1}^{N} m_e \bar V_e \frac{\partial \bar V_e}{\partial \dot q_j} = \sum_{e=1}^{N} m_e \bar V_e \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}\right) = \sum_{e=1}^{N} m \dot{\vec r}_e \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j} + \sum_{e=1}^{N} m_e \vec V_e\, \partial \dots =$$

$$= X_j + \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}; \quad Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

Обобщенные силы

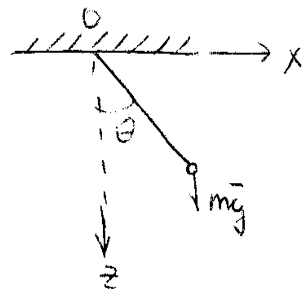
$$Q_j = \sum_{e=1}^{N} \bar F_e \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j} \qquad (j = 1 \dots s)$$

Размерность $[Q] = \frac{Дж}{[q]}$

1) $[q] = м \to [Q] = Н$

2) $[q] = 1 \to [Q] = Н \cdot м$

A плоский мат маятник




$S = 1 \quad q = \theta$

$\dot q = \dot\theta$

голономная, стац связь

$$\begin{cases} x = l \sin\theta \\ z = l \cos\theta \end{cases}$$

$$K = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot z^2)$$

$$\begin{cases} \dot x = l \dot\theta \cos\theta \\ \dot z = -l \dot\theta \sin\theta \end{cases} \Rightarrow v^2 = l^2 \dot\theta^2$$

$$K = \frac{m}{2} l^2 \dot\theta^2$$

$$Q = \vec F \frac{\partial \vec r}{\partial q} = m\vec g \frac{\partial \bar r}{\partial \theta} = mg \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -l\sin\theta$$

$$Q = -mgl\sin\theta$$

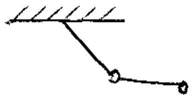
$$\frac{\partial K}{\partial \dot q} = \frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = ml^2\dot\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q$$

$$ml^2\ddot\theta = -mgl\sin\theta$$

$$\ddot\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

сист. с идеальными голономными связями



23.11.

## §22 Ф-ия Лагранжа. Обобщенный импульс

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} = Q_j$$

$$Q_j = \sum_{e=1}^{N} \bar F_e \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_e}$$

I заданные силы - потенциальные

$$\Pi_e = \Pi_e(\bar r_e)$$

$$\bar F_e = -\operatorname{grad} \Pi_e(\bar r_e) =$$

$$= -\left(\vec i\,\frac{\partial \Pi_e}{\partial x_e} + \vec j\,\frac{\partial \Pi_e}{\partial y_e} + \vec k\,\frac{\partial \Pi_e}{\partial z_e}\right)$$

$$\bar F_e \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j} = -\left(\frac{\partial \Pi_e}{\partial x_e}\cdot\frac{\partial x_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial y_e}\frac{\partial y_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial z_e}\frac{\partial z_e}{\partial q_j}\right)$$

$$\bar r_e = \bar r_e(q_1\ q_s\ t) \to$$

$$\to \Pi_e = \Pi_e(\bar r_e) \Rightarrow \Pi_e = \Pi_e(q\ t)$$

$$\bar F_e \frac{\partial \bar r_e}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi_e}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \sum_{e=1}^{N}\left(-\frac{\partial \Pi_e}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_e \Pi_e$$

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

$$\Pi = \sum_{e=1}^{N} \Pi_e = \Pi(q\ t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (K-\Pi)}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial (K-\Pi)}{\partial q_j} = 0$$

$$L = K - \Pi = L(q\ \dot q\ t)$$ - ф-ия лагр.

Ф-ия Лагранжа – ф-ия разница кинетич. и пот. энергии, выраж. через обобщ. коорд., скор. и врем.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1..s$$

Обобщ. пот силы.

$$\bar{F}_e = \bar{F}_e^{(\text{п})} + \bar{F}_e^{(\text{нп})}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(\text{нп})}$$

$$Q_j^{(\text{нп})} = \sum_{e=1}^{N} \vec{F}_e^{(\text{нп})} \frac{\partial \bar{r}_e}{\partial q_j}$$ – обобщ. непот сила