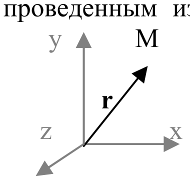
**1. Кинематика материальной точки.**

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются законы движения тел без учета их масс и действующих на них сил. Любое движение можно разложить на *два основных вида движения – поступательное и вращательное*. *Поступательным* называют такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе. *Вращательным* называют движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой. *Материальной точкой* называется тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения. Тело, относительно которого определяется пространственное и временное положение других тел, и связанные с ним система координат и часы, называется *системой отсчета*. С точки зрения кинематики *все системы отсчета эквивалентны*, т.е. в кинематике нельзя указать преимуществ одной системы по сравнению с другой. При решении задач кинематики выбор системы отсчета определяется соображениями удобства.

Положение материальной точки относительно тела отсчета определяется радиус-вектором, проведенным из начала координат в эту точку или набором координат, однозначно определяющим положение точки.




В декартовой системе координат связь между радиус-вектором **r** и координатами **x, y, z**:
**r** = x**i** + y**j** + z**k** , где **i**, **j**, **k** – орты осей **ox**, **oy**, **oz**. Положение точки может изменяться со временем, соответственно радиус-вектор является функцией времени **r** = **r**(t). Закон изменения положения материальной точки во времени носит название *уравнения движения*. Для описания изменения положения материальной точки в пространстве используется *перемещение* **R**, равное вектору, проведенному из начального положения точки в конечное.

$$\vec{R} = \vec{r}_K - \vec{r}_O$$

Линия, которую описывает материальная точка при своем движении, называется *траекторией*. Расстояние между двумя заданными точками, отсчитанное вдоль траектории называется *путем S*. Чтобы описать, как быстро происходит изменение положения тела, используется понятие скорости. *Средней скоростью* $\bar{v}$ называется отношение перемещения $\vec{R}$ материальной точки ко времени Δt, за которое это перемещение произошло:

$$\bar{v} = \frac{\vec{R}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

*Мгновенная скорость* или просто *скорость* $\vec{v}$ есть предел, к которому стремится средняя скорость $\bar{v}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю (скорость есть производная от радиус-вектора по времени):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Скорость является вектором и направлена по касательной к криволинейной траектории. В проекциях на декартовы координаты скорость есть сумма трех составляющих:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad \text{Величина вектора скорости } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Переход к другим координатам осуществляется по правилам дифференцирования сложных функций. Пусть радиус-вектор – есть функция некоторого набора координат $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$. Тогда

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

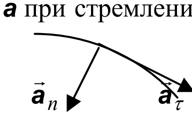
Например, в сферических координатах $q_1 = r,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = \theta$ скорость имеет вид $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi + v_\theta\vec{e}_\theta$, где $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$ - орты касательных линиям (r), (φ), (θ),а составляющие скорости равны $v_r = \dot{r}$, $v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta$, $v_\theta = r\dot{\vartheta}$.

Чтобы описать, как быстро происходит изменение скорости, используется понятие укоренения. *Средним ускорением* $\bar{a}$ называется отношение изменения скорости материальной точки ко времени Δt, за которое это изменение произошло:

$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

*Мгновенное ускорение* или просто *ускорение* $\vec{a}$ есть предел, к которому стремится среднее ускорение $\bar{a}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю (ускорение есть производная от скорости по времени):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$




Ускорение часто представляют состоящим из двух частей **a** = $\mathbf{a}_\tau$ + $\mathbf{a}_n$, одна $\mathbf{a}_\tau$ направлена по касательной к траектории, другая $\mathbf{a}_n$ – перпендикулярно касательной. Вектор $\mathbf{a}_\tau$ называется *тангенциальным ускорением*, эта составляющая меняет величину скорости, $\mathbf{a}_n$ называется *нормальным ускорением*, эта составляющая меняет только направление скорости. Нормальное ускорение равно $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$, тангенциальное $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau$. Величина ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, R - радиус кривизны. Чтобы получить уравнение движения материальной точки нужно найти ее конечное перемещение, которое будет равно сумме перемещений, т.е. равно интегралу от мгновенной скорости за время движения.

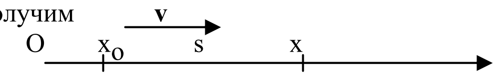
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_o) = \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t)dt \;\; или \;\; \vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t)dt \; ,$$

чтобы найти интеграл, нужно знать скорость в каждый момент времени, для этого нужно найти как меняется скорость. Изменение скорости равно сумме изменений, т.е. равно интегралу от мгновенного ускорения за время движения

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_o) = \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t)dt \;\; или \;\; \vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t)dt$$

Чтобы найти скорость нужно знать как меняется ускорение, для этого в механике выделяют несколько типов движения, для которых уравнения движения имеют простой вид:

1.Равномерное прямолинейное движение, при котором скорость движения постоянна и траекторией движения является прямая линия. В этом случае средняя скорость совпадает с мгновенной, а путь равен перемещению по величине. Тогда, выбрав систему координат так, чтобы движение происходило по оси **ox**, получим уравнение движения $x(t) = x_o + v\,(t - t_o)$ или $s = v\,(t - t_o)$




где $x_o = x(t_o)$ –начальное положение в начальный момент времени $t_o$.

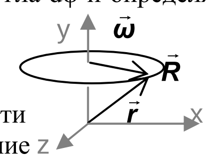
2.Равноускоренное прямолинейное движение, при котором ускорение во время движения постоянно и траекторией движения является прямая линия. В этом случае среднее ускорение совпадает с мгновенным, а путь равен перемещению по величине. Тогда, выбрав систему координат так, чтобы движение происходило по оси **ox**, получим уравнение для скорости $v(t) = v_o + a\,(t - t_o)$,

где $v_o = v(t_o)$ – начальная скорость в начальный момент времени $t_o$. Подставляя скорость в уравнение движения и интегрируя, получим уравнение движения в виде:

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} v(t)dt = x_o + \int_{t_o}^{t} (v_o + a\cdot(t - t_o))\cdot dt = x_o + v_o\cdot(t - t_o) + \frac{a\cdot(t - t_o)^2}{2}$$

3.Равномерное движение по окружности, при котором величина скорости движения постоянна, а траекторией движения является окружность. Скорость движения по окружности носит название *линейной* для отличия от другой характеристики движения по окружности – *угловой скорости* **ω**. Угловая скорость равна пределу, к которому стремится отношение малого угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени $\Delta t$, за который произошел этот поворот при стремлении промежутка времени $\Delta t$ к нулю $\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ (угловая скорость есть производная от угла по времени)

Угловая скорость – псевдовектор. Ее направление совпадает с направлением бесконечно малого угла $d\varphi$ и определяется правилом буравчика. Между линейной и угловой скоростью есть простая связь:




$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \quad или \quad по \quad величине \quad v = \omega r \sin\alpha = \omega R \; ,$$

где $\vec{r}$ есть радиус –вектор, проведенный из лежащего на оси вращения начала координат. Если ввести радиус окружности R – расстояние от оси вращения до материальной точки, то нормальное ускорение будет равно $\mathbf{a_n} = -\,\omega^2\mathbf{R}$

Путь s, пройденный материальной точкой по окружности радиуса R, однозначно связан с углом поворота $\varphi$, $s = \Delta\varphi\, R$, поэтому в силу удобства в качестве уравнения движения используется уравнение для угла поворота:

$$\varphi(t) = \varphi_o + \omega\,(t - t_o)$$

Кроме того, равномерное движение характеризуют: период обращения T – время одного оборота и частота $\nu$ - число оборотов за единицу времени. Они взаимосвязаны $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ (единица измерения частоты – Гц=1/с)

4.Равноускоренное движение по окружности, при котором величина углового ускорения постоянна, а траекторией движения является окружность. *Угловым ускорением* $\varepsilon$ называется предел, к которому стремится отношение малого изменения угловой скорости $\Delta\omega$ к промежутку времени $\Delta t$, за который это изменение произошло при стремлении промежутка времени $\Delta t$ к нулю (угловое ускорение есть производная от угловой скорости по времени)

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Угловое ускорение – псевдовектор. Между величинами углового и тангенциального ускорений есть простая связь:

$$a_\tau = \varepsilon R$$

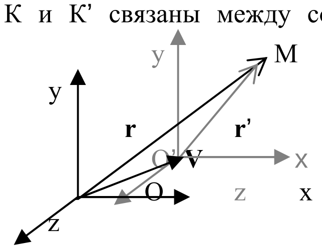
При постоянном угловом ускорении угловая скорость описывается уравнением: $\omega(t) = \omega_o + \varepsilon\,(t - t_o)$, где $\omega_o = \omega(t_o)$ – начальная угловая скорость в момент времени $t_o$. Тогда угол поворота будет описываться следующим уравнением:

$$\varphi(t) = \varphi_o + \int_{t_o}^{t} \omega(t)dt = \varphi_o + \int_{t_o}^{t} (\omega_o + \varepsilon\cdot(t - t_o))\cdot dt = \varphi_o + \omega_o\cdot(t - t_o) + \frac{\varepsilon\cdot(t - t_o)^2}{2} \; .$$

**2. Принцип относительности. Преобразование Галилея и преобразования Лоренца.**

Любая система отсчета К', движущаяся прямолинейно и равномерно со скоростью **V** относительно инерциальной системы К, также будет инерциальной. Координаты точки М в системах отсчета К и К' связаны между собой *преобразованием Галилея*: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} \cdot t$

где $\vec{r}'$ и $\vec{r}$ - радиус-векторы точки М в системах отсчета К' и К.




При этом постулируются следующие *два принципа:*

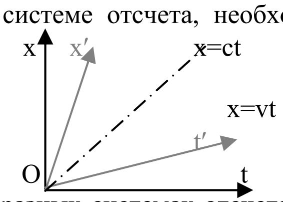
1) *время абсолютно, т.е. промежутки времени между любыми двумя событиями одинаковы во всех произвольно движущихся системах отсчета* $\Delta t = \Delta t'$;
2) *пространство абсолютно, т.е. расстояние между любыми материальными точками одинаково во всех произвольно движущихся системах отсчета*.

*Следствия преобразования Галилея*:

1) закон преобразования скоростей $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$, где $\vec{v}'$ и $\vec{v}$ - скорости точки М в системах отсчета К' и К;
2) равенство ускорений любой точки $\vec{a}' = \vec{a}$ в инерциальных системах отсчета;
3) равенство сил взаимодействия $\vec{F}' = \vec{F}$ материальных точек в инерциальных системах отсчета, поскольку сила взаимодействия зависит только от *расстояний между точками* и *относительных скоростей* материальных точек, т.е. разностей радиус-векторов, указывающих положение точек и разностей скоростей точек.

В целом это означает, что для инерциальных систем отсчета справедлив **принцип относительности Галилея**: *Законы механики инвариантны относительно преобразования Галилея, т.е. уравнения законов механики остаются неизменными при переходе от одной инерциальной системы к другой*. Есть и другие эквивалентные формулировки: 1) все инерциальные системы отсчета равноправны; 2) все механические явления протекают в разных системах одинаково; 3) никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно.

До создания специальной теории относительности принцип относительности Галилея был ограничен областью механических явлений. В других разделах физики, например в волновой теории света , принцип относительности Галилея не выполнялся. Таким образом, получалось, что, используя различие в проявлении физических явлений в различных инерциальных системах отсчета, можно определить собственную скорость тела относительно абсолютного пространства. Однако поставленные опыты давали отрицательный результат. В итоге А. Эйнштейн пришел к выводу о неверности постулатов об абсолютном времени и абсолютном пространстве, он расширил действие принципа относительности Галилея на все физические явления и предложил постулат о постоянстве скорости света во всех инерциальных системах отсчета. Т.о. была создана *релятивистская механика*, которая опирается на два постулата: 1) *все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*; 2) *скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета*. Вместе постулаты называют *принципом относительности Эйнштейна*. Чтобы совместить эти два постулата скорость света должна быть предельной скоростью, а преобразование Галилея и преобразование скоростей должны иметь другой вид. Преобразования, удовлетворяющие принципу относительности Эйнштейна, называются *преобразованиями Лоренца*. Чтобы скорость света не менялась в движущейся системе отсчета, необходимо, чтобы изменились расстояния и интервалы времени. Если использовать в качестве координатных осей – ось Ox, вдоль которой происходит движение, и ось времени Ot, (скорость света положим за единицу c=1), то переход от одной системы отсчета к другой геометрически не может сохранить направления осей. Получается косоугольная система декартовых координат Ox′t′, в которой многое становится удивительным: размеры тел и интервалы времени различны в разных системах отсчета и зависят от скорости с которой они движутся; события, одновременные в одной системе отсчета, не одновременны в другой, но причинно связанные события следуют друг за другом. Если выразить связь координат и времени в неподвижной и движущейся системах, получим следующие соотношения (V – скорость движущейся системы):




$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

Удивительное следствие преобразований Лоренца, что длина тела L′ по направлению движения в движущейся системе уменьшится по сравнению с длиной L в неподвижной системе, а интервал времени увеличится, т.е. часы в движущейся системе по сравнению с покоящейся идут медленнее: $L' = L \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}$ $\quad \Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$

Закон преобразования скоростей в специальной теории относительности будет более сложным. Возьмем общий случай, когда скорость материальной точки **v** имеет отличные от нуля проекции $\mathbf{v_x}$, $\mathbf{v_y}$, $\mathbf{v_z}$ в неподвижной системе и в движущейся системе $\mathbf{v'_x}$, $\mathbf{v'_y}$, $\mathbf{v'_z}$. Тогда проекции скорости в разных системах связаны соотношениями:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}$$

Если скорость движущейся системы мала по сравнению со скоростью света, получаем преобразование Галилея.

$$L' = L, \quad \Delta t' = \Delta t, \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} \cdot t, \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

**3. Кинематика твердого тела.**

При рассмотрении движения тела будем считать его абсолютно твердым.

*Абсолютно твердым телом* или просто *твердым телом* в механике называют идеализированную систему материальных точек, все расстояния между которыми остаются неизменными при движении этой системы как целого в пространстве и времени.

Различают пять видов движения твердого тела: 1) поступательное, 2) вращение вокруг неподвижной оси, 3) плоское движение, 4) движение вокруг неподвижной точки, 5) свободное движение.

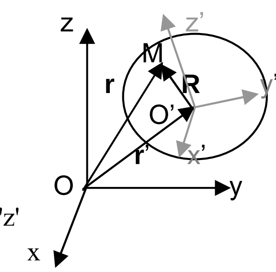
*Движение твердого тела можно представить как сумму поступательного и вращательного независимых движений*.

При *поступательном движении* скорости всех точек тела одинаковы, поэтому такое движение полностью описывается движением одной из его точек. В качестве такой точки удобно выбирать центр масс тела.

При *вращательном движении* тела все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой *осью вращения*. Такое движение полностью описывается *положением в пространстве оси вращения и угловой скорости в каждый момент времени*. Вращательное движение является плоским. *Плоским* называется движение тела, при котором траектории всех его точек лежат в параллельных плоскостях.

Для описания движения твердого тела вводят две системы координат: неподвижную (инерциальную) систему Oxyz и движущуюся систему отсчета O'x'y'z', которую жестко связывают с твердым телом. Центр **O'** удобно совместить с центром масс тела, если вращение происходит вокруг него. Положение тела в пространстве относительно системы Oxyz определяется положением движущейся системы O'x'y'z'. Пусть положение произвольной точки **M** тела в системе Oxyz задается радиусом-вектором **r**, а в системе O'x'y'z' - радиусом-вектором **r'**, радиус вектор **R** указывает положение начала **O'** движущейся системы O'x'y'z' относительно неподвижной системы Oxyz.

Тогда положение точки M твердого тела будет определяться суммой векторов,
**R** - указывающего положение O' относительно неподвижной системы отсчета
и **r'** - указывающего положение точки M относительно начала O'




$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

а скорость точки M будет складываться из скорости начала O' относительно неподвижной системы отсчета Oxyz и скорости точки относительно системы отсчета O'x'y'z'

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}\,'$$

поскольку точка M совершает вращательное движение вокруг оси с угловой скоростью $\omega$, ее скорость $\vec{v}\,'$ в O'x'y'z' равна

$$\vec{v}\,' = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

тогда ее скорость в Oxyz $\quad \vec{v} = \vec{v}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

а ускорение точки M $\quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_{O'} + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,') + (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,') = \vec{a}_{O'} + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,') + (\vec{\omega} \times \vec{v}\,')$

подставим скорость $\vec{v}\,'$ $\quad \vec{a} = \vec{a}_{O'} + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,') + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'))$

используя обозначение углового ускорения $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ , получим

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,') + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'))$$

В случае поступательного движения его описывает уравнение радиус-вектора точки.

В случае вращения вокруг неподвижной оси его описывает уравнение угла поворота вокруг неподвижной оси.

В случае плоского движения его описывает совокупность этих уравнений.

В других случаях может происходить изменение направления оси вращения и количество уравнений, описывающих движение, возрастает.

В случае движения твердого тела вокруг закрепленной точки можно воспользоваться *теоремой Эйлера*: *твердое тело, имеющее одну неподвижную (закрепленную) точку, путем поворота на некоторый угол вокруг неподвижной оси, проходящей через эту точку, может быть переведено из одного положения в любое другое*.

Чтобы повернуть точку в пространстве нужно в общем случае две различающиеся неподвижные оси. Если связать одну неподвижную ось с системой Oxyz, а другую неподвижную ось с системой O'x'y'z', то движение твердого тела можно представить в виде суммы двух движений относительно выбранных осей. Результирующий угол поворота будет равен сумме двух углов $\quad d\vec{\Omega} = d\vec{\varphi} + d\vec{\varphi}\,'$

тогда скорость движения $\quad \vec{v} = \dfrac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} + \dfrac{d\vec{\varphi}\,'}{dt} \times \vec{r}$ , где $\vec{r}$ - радиус вектор точки относительно Oxyz ,

получим $\quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega}\,' \times \vec{r}$ ,

где $\omega$ - скорость вращения относительно оси вращения неподвижной в системе отсчета Oxyz,

$\omega'$ - скорость вращения относительно оси вращения неподвижной в системе отсчета O'x'y'z'.

Угловая скорость $\omega$ может изменяется по величине, но не по направлению, угловая скорость $\omega'$ может изменяется как по величине, так и по направлению.

Свободное движение можно представить как совокупность поступательного движения и движения вокруг неподвижной точки.

Поскольку в общем случае твердое тело имеет три степени свободы поступательного движения и три степени вращательного, то результирующее движение можно описать совокупностью шести уравнений.

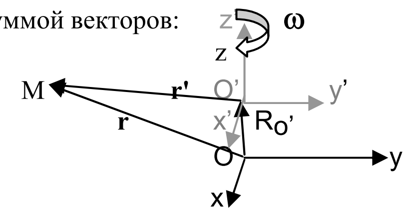
**4. Кинематика вращающихся систем отсчета.**

Для того, чтобы найти уравнение движения во вращающихся системах отсчета, нужно знать законы преобразования скоростей и ускорений при переходе от неподвижной системы к любой подвижной. Классическая механика постулирует следующие **два принципа**: 1) *время абсолютно, т.е. промежутки времени между любыми двумя событиями одинаковы во всех произвольно движущихся системах отсчета;* 2) *пространство абсолютно, т.е. расстояние между любыми материальными точками одинаково во всех произвольно движущихся системах отсчета*. Эти два принципа позволяют записать уравнение движения материальной точки относительно любой подвижной системы отсчета.

Введем неподвижную системы координат Oxyz и подвижную O'x'y'z', которая вращается вокруг оси, неподвижной в системе Oxyz.

Для характеристики *вращения* введем угловую скорость ω вращения подвижной системы относительно неподвижной.

Тогда положение точки M в неподвижной системе будет определяться суммой векторов: **$R_{O'}$** - указывающего положение начала системы координат подвижной системы относительно неподвижной и **r'** - указывающего положение точки относительно начала координат в системе O'x'y'z'.




$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{O'}} + \vec{\mathbf{r}}'$$

поскольку положение начала отсчета подвижной системы относительно неподвижной не меняется, скорость точки будет складываться из скорости вращения вместе с подвижной системой и скорости точки относительно подвижной системы

$$\vec{\mathbf{v}} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}' = \vec{\mathbf{v}}_{вр} + \vec{\mathbf{v}}' = (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}') + \vec{\mathbf{v}}',$$

а ускорение равно $\vec{\mathbf{a}} = \dot{\vec{\mathbf{v}}} = (\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times \vec{\mathbf{r}}') + (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}') + \dot{\vec{\mathbf{v}}}' + (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}')$

подставив $\dot{\vec{\boldsymbol{r}}}'$ $\vec{\mathbf{a}} = (\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times \vec{\mathbf{r}}') + \left[(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}')) + (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}')\right] + \vec{\boldsymbol{a}}' + (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}')$

после приведения подобных членов получим

$$\vec{\mathbf{a}} = (\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times \vec{\mathbf{r}}') + (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}')) + 2 \cdot (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}') + \vec{\boldsymbol{a}}'$$

где $\vec{\boldsymbol{a}}'$ - ускорения точки M в подвижной системе отсчета O'x'y'z',

выражение $2(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}') = \vec{\boldsymbol{a}}_{кор}$ носит название *кориолисова ускорения*,

выражение $(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}')) = \vec{\boldsymbol{a}}_{ос}$ носит название *осестремительного ускорения*,

член $(\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times \vec{\mathbf{r}}')$ связан с изменением скорости вращения подвижной системы.

Можно преобразовать двойное векторное произведение к виду

$$(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}')) = -\omega^2 \vec{\mathbf{R}},$$

где $\vec{\mathbf{R}}$ -радиус-вектор, перпендикулярный оси вращения и характеризующий положение точки относительно этой оси.

Тогда ускорение примет вид $\vec{\mathbf{a}} = (\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times \vec{\mathbf{r}}') - \omega^2 \vec{\boldsymbol{R}} + 2 \cdot (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}') + \vec{\boldsymbol{a}}'$

Если угловая скорость вращения не меняется, первый член исчезает и ускорение складывается из ускорения точки M в подвижной системе, кориолисова ускорения и осестремительного ускорения

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{ос} + \vec{\boldsymbol{a}}_{кор} + \vec{\boldsymbol{a}}'$$

В общем случае связь между положением, скоростью и ускорением точки в неподвижной и подвижной системами отсчета вдается следующими выражениями:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{O'}} + \vec{\mathbf{r}}'$$

$$\vec{\mathbf{v}} = (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}') + \vec{\mathbf{v}}'$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{ос} + \vec{\boldsymbol{a}}_{кор} + \vec{\boldsymbol{a}}' + (\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times \vec{\mathbf{r}}')$$

В подвижной системе отсчета появляются новые скорости и ускорения, связанные с вращением. Т.к. Земля является примером такой подвижной системы отсчета, проявление этих ускорений хорошо известно: отклонение снаряда при стрельбе по оси север – юг, подмывание берегов, уменьшение веса тел, качание маятника Фуко, вращение воды при сливе воды в северном и южном полушариях.

**5. Законы Ньютона.**

В основе классической механики Ньютона лежат три закона движения. Эти законы предполагают существование абсолютного времени и установлены по отношению к абсолютно неподвижной системе координат или по отношению к произвольной инерциальной системе отсчета.

Первый закон Ньютона: *Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано*.

Свойство тела сохранять свою скорость в отсутствии взаимодействия с другими телами называется *инертностью*. Мерой инертности тела является физическая величина, называемая *инертной массой* или просто *массой тела*. Термин «тело» здесь означает материальную точку, не имеющую размера, но обладающую массой.

Из первого закона Ньютона следует, что любое изменение состояния тела обусловлено действием на него сил. Первый закон Ньютона выполняется только в инерциальных системах отсчета. Существование инерциальной системы отсчета является постулатом. Физическое содержание первого закона Ньютона, таким образом, сводится к утверждению, что существует по крайней мере одна инерциальная система отсчета.

Второй закон Ньютона-основное уравнение динамики материальной точки, устанавливает связь между действующей на это тело силой и ускорением, приобретаемом телом под действием этой силы: У*скорение **a** прямо пропорционально действующей силе **F** и обратно пропорционально массе тела* m:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m}$$

или *Масса тела, умноженная на ускорение, равна действующей силе*:

$$m \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{F}}$$

В формулировке Ньютона закон имеет несколько другой смысл: *Изменение количества движения пропорционально приложенной силе и происходит в направлении действия силы*:

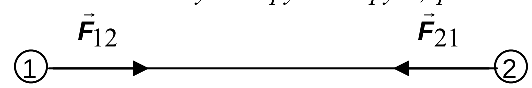
$$\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{F}}$$

Но если подставить p=mv и массу вынести из под знака дифференциала получим связь силы с массой и ускорением. Если известен закон изменения силы то, решая дифференциальное уравнение, можно получить радиус-вектор **r** положения тела и его скорость **v** в любой момент времени:

$$m \cdot \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = \vec{\boldsymbol{F}} \quad \Rightarrow \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t),\ \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}(t)$$

поэтому 2-й закон Ньютона называют *уравнением движения материальной точки*.

Третий закон Ньютона: *силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению*: $\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$




Опыт показывает, что силы *направлены вдоль прямой, соединяющей материальные точки*.

В то время как первые два закона Ньютона относятся к одной материальной точке, третий закон рассматривает взаимодействие двух материальных точек и является основой динамики системы материальных точек.

Кроме того, в третьем законе Ньютона предполагается, что обе силы равны по величине в любой момент времени независимо от движения точек. Это утверждение равносильно представлению о мгновенном распространении взаимодействий и носит название *принципа дальнодействия*. Согласно этому принципу, если изменить положение одного тела, то сразу можно обнаружить изменение во взаимодействии тел, как бы далеко они не находились, т.е. взаимодействие между телами распространяется с бесконечно большой скоростью.

В соответствии с принципом относительности Галилея законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Сила зависит только от взаимного расположения взаимодействующих точек и их относительных скоростей, т.е. скорость движения системы не меняет силу. Масса и ускорение не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. В этом случае говорят, что законы механики *инвариантны* относительно преобразований Галилея.

Законы Ньютона могут иметь различную форму, например форму уравнений Лагранжа или уравнений Гамильтона. Если использовать уравнения Лагранжа, можем вывести вид уравнения движения в других системах координат, например, в полярной:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_{\mathrm{i}}} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{q}_{\mathrm{i}}} = \mathrm{Q}_{\mathrm{i}}, \quad (i = 1,2)$$

откуда в координатах r и φ

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\varphi) = F_\varphi$$

**6. Силы в механике.**

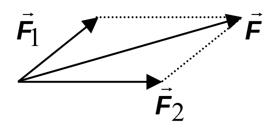
Причиной движения тел и изменения его характера с течением времени является взаимодействие тел. В физике различают четыре типа взаимодействий: 1) *гравитационное*, действующее между всеми телами, имеющими массу; 2) *электромагнитное*, действующее между всеми телами, обладающими электрическими зарядами; 3) *сильное*, действующее между элементарными частицами; 4) *слабое*, обуславливающее процессы превращения некоторых элементарных частиц и атомных ядер.

*Сила как количественная характеристика является мерой интенсивности взаимодействия. В механике сила* есть вектор: она задается величиной, направлением и точкой приложения. В задачах механики учитываются гравитационные силы, силы упругости и силы трения. Почему в механике используются только эти три типа сил и по какому критерию они выбраны ? Эти *силы* возникают при взаимодействии тел и *определяются свойствами самих тел*, массой, упругостью и формой *и не зависят от свойств внешней среды*.

Силы упругости и силы трения возникают при непосредственном соприкосновении тел: силы упругости обусловлены деформацией соприкасающихся тел, силы трения – свойствами поверхности и формой тел. Гравитационные силы действуют на расстоянии и определяются важнейшим свойством тел – их массой и не зависят от свойств среды между телами.

*Закон сложения сил:* Если на тело действует несколько внешних сил, то их можно заменить равнодействующей силой, равной геометрической сумме всех действующих сил (сумма двух сил находится по известному правилу параллелограмма):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i}^{n} \vec{F}_i$$




где $\vec{F}_i$ - сила, с которой действовало бы $i$-е тело на данное тело в *отсутствие* других тел. Это утверждение носит название *принципа суперпозиции*.

Такое название принцип суперпозиции получил в связи с тем, что тела, являющиеся источниками внешних сил, не оказывают влияния на их попарное взаимодействие с телом, на которое они воздействуют.

Если векторная сумма двух сил, приложенных к одной материальной точке, равна нулю, то наличие вызываемых этими силами воздействий не отражается на механическом движении соответствующей материальной точки. Такие силы называются уравновешенными. На этом основан *статический метод измерения величины силы* при помощи ее уравновешивания другой силой. Для измерения силы служат приборы называемые динамометрами. *Динамически* сила измеряется по произведенному ею ускорению. Единицей измерения силы является [Н=1кг·м/с$^2$].

Силы, действующие на данное тело со стороны других тел, называются *внешними силами*. Силы, действующие между частями одного и того тела, называются *внутренними силами*. Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой*.

Установление закона, по которому действует сила, происходит в результате обобщения результатов опыта по наблюдаемому движению. Например, закон всемирного тяготения опирается на экспериментально установленные законы Кеплера.

Рассмотрим используемые в механике силы:

*<u>Сила гравитационного притяжения</u>* пропорциональна произведению масс материальных точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, направлена по прямой, соединяющей эти точки:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$ где коэффициент γ -носит название гравитационной постоянной.

Сила гравитационного притяжения является примером центральной силы. *Центральной силой* называется сила, линия действия которой во все время движения проходит через один и тот же неподвижный центр. Например, в нашем случае двух тел, через центр масс тел. Сила гравитационного притяжения является *консервативной*, т.е. работа силы по перемещению тела не зависит от траектории движения, по которой происходило перемещение.

*<u>Сила упругости</u>* пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена к положению равновесия:

$$F = -\chi \cdot r,$$ где коэффициент χ -носит название коэффициента упругости.

Сила упругости является центральной, консервативной силой.

*<u>Сила трения скольжения</u>* возникает между соприкасающимися и движущимися одно относительно другого телами, пропорциональна силе реакции опоры (или равноценно силе нормального давления) и направлена противоположно движению:

$$F = \mu \cdot N,$$ где коэффициент μ -носит название коэффициента трения.

Сила трения скольжения не является центральной и не является консервативной силой. В механике рассматривается т.н. сила «сухого» трения, в отсутствие какой-либо прослойки между поверхностями.

**7. Неинерциальные системы отсчета. Сила инерции.**

*Неинерциальной* называется такая система отсчета, которая движется ускоренно относительно инерциальной системы. Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Для того, чтобы найти уравнение движения в неинерциальных системах отсчета, нужно знать законы преобразования сил и ускорений при переходе от инерциальной системы к любой неинерциальной. Классическая механика постулирует следующие **два принципа**: 1) *время абсолютно, т.е. промежутки времени между любыми двумя событиями одинаковы во всех произвольно движущихся системах отсчета;* 2) *пространство абсолютно, т.е. расстояние между любыми материальными точками одинаково во всех произвольно движущихся системах отсчета*. Эти два принципа позволяют записать уравнение движения материальной точки относительно любой неинерциальной системы отсчета. *Движение* материальной точки относительно заданной неподвижной инерциальной системы отсчета называется *абсолютным*. *Движение* материальной точки относительно заданной подвижной инерциальной системы отсчета называется *относительным*. Движение материальной точки, которая является неподвижной в движущейся системе отсчета, относительно неподвижной системы отсчета называется *переносным*. Абсолютное движение складывается из относительного и переносного.

*При поступательном движении* системы отсчета со скоростью $\vec{v}_o$, равной скорости движения координат неинерциальной системы отсчета, имеем: $\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{пер}$

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{от} + \vec{a}_{пер}$$

причем $\vec{v}_{пер} = \vec{v}_o$, $\vec{a}_{пер} = \dot{\vec{v}}_o$

Используя уравнение абсолютного движения, получим уравнение относительного движения

$m\vec{a}_{абс} = \vec{F}$, где $\vec{F}$ сила взаимодействия в инерциальной системе отсчета

$$m\vec{a}_{от} = \vec{F} - m\dot{\vec{v}}_o$$

$m\vec{a}_{от} = \vec{F} + \vec{F}_{ин}$, где величина $\vec{F}_{ин} = -m\dot{\vec{v}}_o$ называется *силой инерции*.

*Свойства сил инерции*: 1) силы инерции неинвариантны относительно перехода от одной ускоренной системы отсчета к другой; 2) силы инерции не подчиняются третьему закону Ньютона (равенству действия и противодействия); 3) силы инерции всегда являются внешними по отношению к любой движущейся материальной точке; 4) силы инерции пропорциональны массе материальной точки; 5) движение материальной точки под действием сил инерции аналогично движению во внешних силовых полях, в том числе в гравитационном поле.

Силы инерции нельзя ставить в один ряд с силами, обусловленными воздействием на материальную точку других тел. Они обусловлены свойствами той системы отсчета, в которой рассматривается движение. Движение по отношению к неинерциальным системам отсчета имеет практический интерес (например, движение относительно поверхности Земли).

Всякое *произвольное движение* одной системы отсчета относительно другой можно разложить на два: поступательное со скоростью $\vec{v}_o$, равной скорости движения начала координат движущейся системы отсчета, и вращательное движение с угловой скоростью **ω** вокруг мгновенной оси, проходящей через это начало:

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{пер}$$

где $\vec{v}_{пер} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{от} + \vec{a}_{кор} + \vec{a}_{пер}$$

где $\vec{a}_{кор} = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{от})$

$$\vec{a}_{пер} = \dot{\vec{v}}_o + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор материальной точки в движущейся системе отсчета, $\vec{a}_{кор}$ - называется *кориолисовым ускорением*.

Выражение $\vec{a}_ц = (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = -\omega^2 \vec{R}$ - называется *центростремительным ускорением*,

$\vec{R}$ – перпендикулярная оси вращения составляющая радиус-вектора $\vec{r}$ ( модуль R равен расстоянию от оси вращения до движущейся произвольным образом материальной точки). *Уравнение относительного движения* имеет вид:

$$m\vec{a}_{от} = \vec{F} + \vec{F}_{кор} + \vec{F}_{пер} ,$$

где $\vec{F}_{кор}$ – *сила Кориолиса*, равная $\vec{F}_{кор} = -m\vec{a}_{кор} = 2m(\vec{v}_{от} \times \vec{\omega})$

$\vec{F}_{пер}$ – *переносная сила инерции*, $\vec{F}_{пер} = \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})$,

где $\vec{F}_{ин} = -m\dot{\vec{v}}_o$ сила инерции, величина $\vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{R}$ - называется *центробежной силой*.

В отличии от сил $\vec{F}_{ин}$ *и* $\vec{F}_{цб}$ сила $\vec{F}_{кор}$ зависит от относительной скорости $\vec{v}_{от}$ . Сила Кориолиса перпендикулярна относительной скорости, она не совершает работы при относительном движении. Слагаемое $m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})$ обусловлено неравномерностью вращения и равно нулю при постоянной скорости вращения ω=const, при этом условии уравнение движения имеет вид: $m\vec{a}_{от} = \vec{F} + \vec{F}_{кор} + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб}$

**8. Импульс системы частиц. Движение центра масс.**

*Импульсом или количеством движения материальной точки массой* $m$*, движущейся со скоростью* $\vec{v}$*, называется величина* $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Изменение импульса описывается вторым законом Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

*производная импульса материальной точки по времени равна действующей на эту точку силе*.

Можно переписать основной закон динамики в интегральной форме

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int \vec{F} dt$$

здесь величину $\int \vec{F} dt$ называют *импульсом силы*. Т.о. приращение импульса материальной точки за любой промежуток времени равно импульсу силы за то же время.

*Импульсом* $\vec{P}$ системы $n$ материальных точек называется векторная сумма импульсов этих точек

$$\vec{P} = \sum_i^n \vec{p}_i = \sum_i^n m\vec{v}_i$$

Изменение импульса системы материальных точек есть векторная сумма изменений импульсов каждой точки и равна, в свою очередь, векторной сумме сил, действующих на материальные точки системы. На каждую точку системы действуют *внешние* по отношению к системе силы (со стороны тел, не принадлежащих системе) и *внутренние* силы (со стороны тел, принадлежащих системе). Поэтому сумма сил может быть представлена как сумма двух частей: суммы внешних сил $\vec{F}_i$ и суммы внутренних сил $\vec{F}_{ik}$, где $i$- номер материальной точки, на которую действует сила, $k$- номер материальной точки, со стороны которой действует сила. В итоге дифференцирования импульса системы материальных точек, получаем :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i^n (\vec{F}_i + \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ik}) = \sum_i^n \vec{F}_i + \sum_i^n \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ik}$$

Т.к. векторная сумма внутренних сил в силу третьего закона Ньютона равна нулю, то находим

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i^n \vec{F}_i = \vec{F}\text{, где } \vec{F} \text{ - сумма внешних сил}$$

Если система материальных точек замкнутая, то сумма внешних сил равна нулю, и мы получаем *закон сохранения импульса*: $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = const$

*Импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным как по величине, так и по направлению.*

Чтобы разделить движение системы на движение системы как целого и на движение точек внутри системы, введем понятие центра масс. *Центром масс* или *центром инерции* системы называется точка С, положение которой задается радиус-вектором

$$\vec{R}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ....m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ....m_n} = \frac{\sum_i^n m_i\vec{r}_i}{\sum_i^n m_i} = \frac{\sum_i^n m_i\vec{r}_i}{M},$$

где $M = \sum_i^n m_i$ общая масса системы точек,

тогда скорость движения центра масс равна

$$\vec{V}_c = \frac{\sum_i^n m_i\vec{v}_i}{M}\text{, далее находим}\qquad M \cdot \vec{V}_c = \sum_i^n m_i\vec{v}_i \quad (*)$$

дифференцируя обе части полученного выражения и учитывая, что векторная сумма внутренних сил равна нулю, получим *основное уравнение динамики центра масс,*

$$M \cdot \vec{a}_c = M \cdot \frac{d}{dt}\vec{V}_c = \sum_i^n \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \sum_i^n \vec{F}_i + \sum_i^n \sum_k^n \vec{F}_{ik} = \sum_i^n \vec{F}_i = \vec{F}$$

$$M \cdot \frac{d}{dt}\vec{V}_c = \vec{F}$$

из вида которого вытекает вывод: *Центр масс системы движется как точка, в которой сосредоточена вся масса системы, к которой приложен результирующий вектор внешних сил, действующих на систему*. Только внешние силы могут изменить движение системы. Если система находится в покое, то внутренними силами невозможно вывести из равновесия ее центр масс. Точно так же, если центр масс находится в движении, то внутренними силами нельзя изменить это движение. Система отсчета, в которой центр инерции покоится, называется *системой центра инерции* (ц- системой). В ц-системе суммарный импульс материальных точек равен нулю, что следует из (*) ,если взять $V_c$ равным нулю.

**9. Закон сохранения импульса.**

*Импульсом или количеством движения материальной точки массой* $m$*, движущейся со скоростью* $\vec{\boldsymbol{v}}$*, называется величина*

$$\vec{\boldsymbol{p}} = m \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$$

Изменение импульса описывается вторым законом Ньютона:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{F}}$$

*производная импульса материальной точки по времени равна действующей на эту точку силе.*

Можно переписать основной закон динамики в интегральной форме

$$\vec{\boldsymbol{p}}_2 - \vec{\boldsymbol{p}}_1 = \int \vec{\boldsymbol{F}} dt$$

здесь величину $\int \vec{\boldsymbol{F}} dt$ называют *импульсом силы*. Т.о. приращение импульса материальной точки за любой промежуток времени равно импульсу силы за то же время.

*Импульсом* $\vec{\boldsymbol{P}}$ системы $n$ материальных точек называется векторная сумма импульсов этих точек

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \sum_i^n \vec{\boldsymbol{p}}_i = \sum_i^n m\vec{\boldsymbol{v}}_i$$

Изменение импульса системы материальных точек есть векторная сумма изменений импульсов каждой точки и равна, в свою очередь, векторной сумме сил, действующих на материальные точки системы. На каждую точку системы действуют *внешние* по отношению к системе силы (со стороны тел, не принадлежащих системе) и *внутренние* силы (со стороны тел, принадлежащих системе). Поэтому сумма сил может быть представлена как сумма двух частей: суммы внешних сил $\vec{\boldsymbol{F}}_i$ и суммы внутренних сил $\vec{\boldsymbol{F}}_{ik}$, где $i$- номер материальной точки, на которую действует сила, $k$- номер материальной точки, со стороны которой действует сила. В итоге дифференцирования импульса системы материальных точек, получаем :

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{P}}}{dt} = \sum_i^n \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}_i}{dt} = \sum_i^n (\vec{\boldsymbol{F}}_i + \sum_{k \neq i}^n \vec{\boldsymbol{F}}_{ik}) = \sum_i^n \vec{\boldsymbol{F}}_i + \sum_i^n \sum_{k \neq i}^n \vec{\boldsymbol{F}}_{ik}$$

Т.к. векторная сумма внутренних сил в силу третьего закона Ньютона равна нулю, то находим

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{P}}}{dt} = \sum_i^n \vec{\boldsymbol{F}}_i = \vec{\boldsymbol{F}}\text{, где } \vec{\boldsymbol{F}} \text{ - сумма внешних сил}$$

Если система материальных точек замкнутая, то сумма внешних сил равна нулю,

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{P}}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{P}} = const$$

и мы получаем *закон сохранения импульса*:

*Импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным как по величине, так и по направлению.*

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \sum_i^n \vec{\boldsymbol{p}}_i = const$$

При этом импульсы отдельных точек могут изменяться, но происходить это будет таким образом, что суммарный импульс системы не изменится. Например, если у одной из материальных точек импульс увеличился, то это произошло за счет убыли импульса остальных материальных точек системы.

Закон сохранения импульса справедлив для незамкнутых систем при условии, что сумма внешних сил, действующих на систему равна нулю.

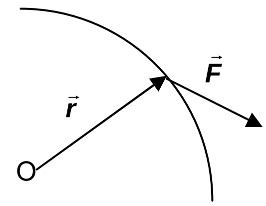
В практическом отношении использование сохранения импульса имеет значительное преимущество по сравнению с другими способами, т.к. можно получить представление о поведении системы, не вдаваясь в детальное рассмотрение процесса.

Закон сохранения импульса является следствием фундаментального свойства пространства - однородности. *Однородность пространства* означает, что, при любом параллельном переносе замкнутой системы как целого в пространстве, ее механические свойства не меняются.

**10. Работа и потенциальная энергия.**

Для характеристики действия силы на материальную точку на протяжении некоторого пути вводится мера этого действия, называемая *работой силы*. Введем понятие *элементарной работы* которая равна скалярному произведению силы $\vec{F}$ на перемещение $d\vec{r}$ .

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$




пусть материальная точка движется по кривой s, тогда элементарная работа будет равна

$$\delta A = F \cdot ds \cdot \cos\alpha$$

*Работа силы* на конечном пути будет равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых путях, т.е. работа равна интегралу

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F \cdot \cos\alpha \cdot ds$$

Работа измеряется в джоулях (Дж=1 Нм).

Из определения работы отметим следующие ее свойства :

1) элементарная работа силы $\vec{F}$ , имеющая проекции на оси Oxyz $F_x, F_y, F_z$ , равна

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

2) работа равнодействующей нескольких сил, приложенных к материальной точке, равна сумме работ слагаемых сил

$$A = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r} = \int (\vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + ... + \vec{F}_n \cdot d\vec{r}) = A_1 + A_2 + ... + A_n .$$

3) работа на совокупности перемещений равна работе на результирующем перемещении. (Доказывается аналогично).

Обозначение элементарной работы через δA, объясняется тем, что символ dA, мог бы привести к неправильному представлению об элементарной работе как о дифференциале от некоторой функции А. Если бы движение происходило вдоль одной прямой Ox и сила являлась функцией одного только x, то элементарная работа $\delta A = F_x \cdot dx$ действительно бы представляла бы дифференциал от величины $\int F_x \cdot dx$. В общем же случае выражение $\delta A = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$ *не представляет собой полного дифференциала* и символ δ следует понимать только как символ бесконечно малой величины, но не дифференциала. Но есть класс сил, элементарная работа которых является полным дифференциалом. Среди сил разнообразной природы, с которыми приходится иметь дело в механике, особое место занимает класс сил, величина и направление которых зависят только от положения точки пространства, в которой находится рассматриваемая материальная точка, или от взаимного расположения взаимодействующих материальных точек. Если на материальную точку в каждом месте пространства действует сила, то говорят, что эта точка находится *в поле сил*. Если сила в каждой точке силового поля не зависит от времени, то такое поле называют *стационарным*, в обратном случае - *нестационарным*. В стационарном силовом поле сила зависит только от положения частиц. Стационарное поле сил называется *потенциальным*, если его можно описать некоторой функцией П = П(x,y,z), такой что ее частные производные по координатам определяют проекции силы на декартовы оси:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \ \ F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \ \ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

или в векторном виде $\vec{F} = -(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{k}) = -grad\Pi = -\nabla\Pi$ , где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты осей Ox, Oy, Oz,

Функция П = П(x,y,z) называется *потенциалом* или *потенциальной энергией* силового поля. Т.о. сила равна со знаком минус градиенту потенциальной энергии силового поля.

*Если поле сил потенциально, работа силы по перемещению материальной точки не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечными положениями точки в этом поле*. Докажем это :

В случае потенциального поля выражение для работы принимает вид

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int (\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz) = -\int d\Pi = \Pi(x_o, y_o, z_o) - \Pi(x, y, z)$$

т.о. работа оказалась зависящей только от координат, определяющих начальное и конечное положения. В этом случае элементарная работа dA представляет собой полный дифференциал dП, взятый с обратным знаком dA = - dП.

Следствия:

1) если начальная и конечная точки совпадают - работа обращается в нуль. *Работа в потенциальном поле по любому замкнутому пути равна нулю*. Этот признак часто берут за определение потенциального поля. Силы, работа которых не зависит от пути движения материальной точки, а определяется только координатами начального и конечного положений, носят название *консервативных*;

2) *работа силы в потенциальном поле при перемещении материальной точки из начального положение в конечное равна убыли потенциальной энергии между этими двумя положениями*. То же можно показать и для системы материальных точек.

В математике интеграл, взятый вдоль дуги кривой, носит название *криволинейного интеграла*. Криволинейный интеграл от вектора носит название *циркуляции вектора по дуге кривой*. Т.о. *работа силы на криволинейном пути равна циркуляции силы на этом пути*. Поэтому можно сказать также, что *циркуляция вектора силы по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю*.

**11. Кинетическая энергия. Закон сохранения энергии в механике.**

Мера движения материальной точки, называемая *кинетической энергией*, есть величина

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

где m и v – масса и скорость материальной точки соответственно.

Из второго закона Ньютона $\vec{\boldsymbol{F}} = m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$

следует, что $\vec{\boldsymbol{F}} d\vec{\boldsymbol{r}} = m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} d\vec{\boldsymbol{r}}$

используя преобразования $\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \cdot dt = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot dt = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot dt \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot d\vec{\mathbf{v}} = d(\frac{v^2}{2})$

получаем $\vec{\boldsymbol{F}} d\vec{\boldsymbol{r}} = m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} d\vec{\boldsymbol{r}} = d(\frac{mv^2}{2})$ .

учитывая что $\vec{\boldsymbol{F}} d\vec{\boldsymbol{r}} = \delta A$ - элементарная работа,

получаем $\delta A = dT$ и следствие:

*Работа всех внешних сил, действующих на материальную точку, равна приращению кинетической энергии этой точки.*

$$A = T_2 - T_1$$

Исходя из полученного соотношения можно дать следующее определение кинетической энергии:

*Кинетическая энергия материальной точки есть мера ее механического движения, она измеряется работой, которую может совершить эта точка при торможении ее до полной остановки.*

Если А > 0, то над материальной точкой производится работа и ее кинетическая энергия возрастает,

если А < 0, то материальная точка отдает свою кинетическую энергию, совершая работу против внешних сил.

*Кинетической энергией* T системы n материальных точек называется сумма кинетических энергий этих точек

$$T = \sum_{i}^{n} T_i = \sum_{i}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Изменение кинетической энергии системы материальных точек есть сумма элементарных работ сил, действовавших на рассматриваемом элементарном перемещении на каждую точку системы

$$dT = \sum_{i}^{n} dT_i = \sum_{i}^{n} d(\frac{m_i v_i^2}{2}) = \sum_{i}^{n} \delta A_i$$

На каждую точку системы действуют *внешние* по отношению к системе силы (со стороны тел, не принадлежащих системе) и *внутренние* силы (со стороны тел, принадлежащих системе). Поэтому сумма работ может быть представлена как сумма двух частей: элементарной работы внешних сил δA и элементарной работы внутренних сил δA'. В итоге получаем :

$$dT = \delta A + \delta A'$$

*Приращение кинетической энергии системы материальных точек на элементарном перемещении равно сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действовавших на этом перемещении.*

Если все (внутренние и внешние) силы, под действием которых происходит движение системы, являются потенциальными, то $\delta A = -d\Pi$ и тогда

$$dT = -d\Pi$$

*приращение кинетической энергии происходит за счет убыли потенциальной энергии* на том же участке. Если переписать равенство, собрав обе части на одной стороне, получим:

$$d(T + \Pi) = 0 \quad \Rightarrow \; T + \Pi = const$$

*При движении в потенциальном силовом поле сумма кинетической и потенциальной энергий системы сохраняет постоянную величину*. Сумму кинетической и потенциальной энергий системы назовем *полной механической энергией* системы и обозначим Е: $E = T + \Pi$

тогда $E_1 = E_2 \; \Rightarrow \; E = const$

приходим к *закону сохранения механической энергии*: *Если система движется под действием только потенциальных сил, то полная механическая энергия ее во время движения сохраняет свою величину.*

Если в числе сил, действующих на систему, наряду с потенциальными силами имеются и непотенциальные, то изменение кинетической энергии будет равно:

$$dT = -d\Pi + \delta A_{внеш} + \delta A_{внутр}$$

где $\delta A_{внеш}$ – работа непотенциальных внешних сил, $\delta A_{внутр}$ – работа непотенциальных внутренних сил. Общую работу внешних и внутренних непотенциальных сил можно разделить на две части: увеличивающую полную механическую энергию (притекшую энергию Е') и уменьшающую полную механическую энергию (рассеянную энергию Е"). Тогда *Приращение механической энергии на некотором перемещении равно разности притекшей и рассеявшейся энергии.*

$$E_2 - E_1 = E' - E''$$

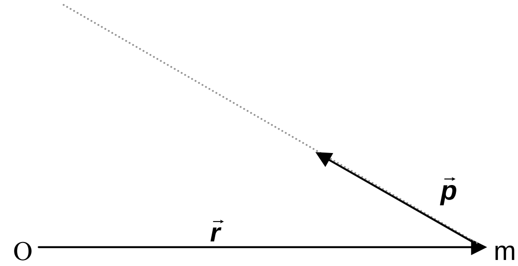
**12. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы.**

*Моментом импульса частицы массой* $m$ *относительно точки O* называется псевдовектор $\vec{L}$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы, проведенный из точки O,

$\vec{p}$ – ее импульс.

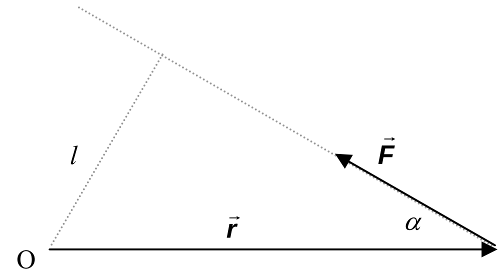



*Моментом импульса системы частицы* $\vec{L}$ *относительно точки O* называется векторная сумма моментов импульсов частиц $\vec{L}_i$, составляющих систему. Для системы из $n$ частиц :

$$\vec{L} = \sum_{i}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

*Моментом силы* $\vec{F}$ *относительно точки O*, из которой проведен радиус-вектор $\vec{r}$ в точку приложения силы, называется псевдовектор $\vec{N}$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$ :

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$




Модуль момента силы равен

$$N = rF\sin\alpha = lF,$$

где $l = r\sin\alpha$ - называется плечом силы $\vec{F}$ относительно точки O.
Для нахождения закона изменения момента импульса частицы продифференцируем выражение для момента импульса по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

т.к. $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ,а векторное произведение $\vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = m(\vec{v} \times \vec{v}) = 0$ , учитывая, что $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , а $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$ получаем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$$

изменение момента импульса обусловлено моментом силы, действующим на частицу. В общем случае системы $n$ частиц уравнение изменения момента импульса частицы $\vec{L}_i$ :

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{N}_i + \sum_{k \neq i}^{n} \vec{N}_{ik}$$

где $\vec{N}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ – момент внешней силы $\vec{F}_i$ относительно точки O, действующей на $i$ -ю частицу с радиус-вектором $\vec{r}_i$, проведенным из точки O,

$\vec{N}_{ik} = \vec{r}_{ik} \times \vec{F}_{ik}$ – момент внутренней силы $\vec{F}_{ik}$, действующей со стороны $k$ -й частицы на $i$ -ю частицу.

Из равенства нулю равнодействующей внутренних сил следует равенство нулю момента внутренних сил

$$\sum_{i}^{n} \sum_{k \neq i}^{n} \vec{N}_{ik} = 0$$ , и тогда

*Уравнение момента импульса* $\vec{L}$ *системы* $n$ *частиц относительно точки O* имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i}^{n} \vec{N}_i$$

Для замкнутой системы внешние силы равны нулю и справедлив *закон сохранения момента импульса*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

Закон сохранения момента импульса следствие фундаментального свойства пространства – изотропии. *Изотропия пространства* означает, что свойства замкнутой механической системы не зависят от ее поворота как целого в пространстве.

**13. Теорема моментов. Закон сохранения момента импульса.**

*Моментом импульса частицы массой* $m$ *относительно точки О* называется псевдовектор $\vec{L}$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы, проведенный из точки О, $\vec{p}$ – ее импульс.

*Моментом силы* $\vec{F}$ *относительно точки* *О*, из которой проведен радиус-вектор $\vec{r}$ в точку приложения силы, называется псевдовектор $\vec{N}$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Для нахождения закона изменения момента импульса частицы продифференцируем выражение для момента импульса по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

т.к. $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, а векторное произведение $\vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = m(\vec{v} \times \vec{v}) = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

учитывая, что $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, а $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$

находим $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$

полученное соотношение носит название *теоремы моментов*:

*Производная по времени от момента импульса материальной точки относительно центра равна моменту равнодействующей приложенных к точке сил относительно того же центра.*

В общем случае системы $n$ частиц уравнение момента импульса частицы $\vec{L}_i$:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{N}_i + \sum_{k \neq i}^{n} \vec{N}_{ik}$$

где $\vec{N}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ – момент внешней силы $\vec{F}_i$ относительно точки О, действующей на $i$-ю частицу с радиус-вектором $\vec{r}_i$, проведенным из точки О,

$\vec{N}_{ik} = \vec{r}_{ik} \times \vec{F}_{ik}$ – момент внутренней силы $\vec{F}_{ik}$, действующей со стороны $k$-й частицы на $i$-ю частицу.

Из равенства нулю равнодействующей внутренних сил следует равенство нулю момента внутренних сил

$$\sum_{i}^{n} \sum_{k \neq i}^{n} \vec{N}_{ik} = 0$$ , и тогда

*Уравнение момента импульса* $\vec{L}$ *системы* $n$ *частиц относительно точки О* имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i}^{n} \vec{N}_i$$

*Для замкнутой системы* моменты внешних сил равны нулю и *справедлив закон сохранения момента импульса*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

Закон сохранения момента импульса следствие фундаментального свойства пространства – изотропии. *Изотропия пространства* означает, что свойства замкнутой механической системы не зависят от ее поворота как целого в пространстве.

Кроме того есть особые случаи действия сил, имеющие важное значение для решения задач динамики:

1) В случае, *если на частицу действует центральная сила*, момент импульса не меняется

$$\vec{F} = F_r \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F_r \frac{\vec{r}}{r} = 0$$

2) В случае, *если сила* $\vec{F}$ *все время остается в одной плоскости с некоторой прямой, например с осью Ox*, момент импульса относительно этой оси не меняется

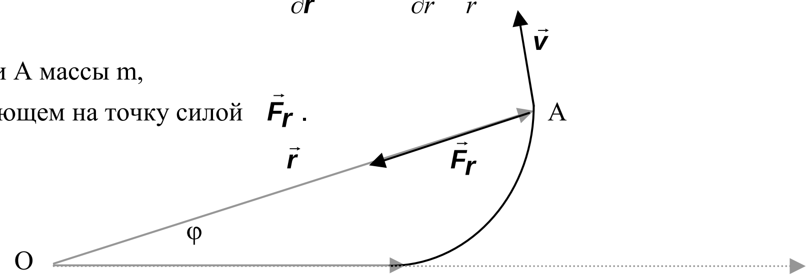
$$\frac{dL_x}{dt} = 0 \Rightarrow L_x = const$$

**14. Материальная точка в центральном поле.**

В классической механике задача двух тел (т.е. движение системы двух материальных точек) сводится к задаче о движении одной материальной точки под действием так называемых центральных сил. Под *центральными силами* понимают силы, линия действия которых проходит через материальную точку и некоторый неподвижный центр, а величина зависит только от расстояния между неподвижным центром и материальной точкой. Если силовое поле таких сил потенциальное, то потенциальная энергия материальной точки в этом поле также будет зависеть только от расстояния между точкой и центром. Поле с такими свойствами получило название *центрального поля*. В случае потенциального поля сила, действующая на материальную точку, равна $\vec{F}_r = -\dfrac{\partial \Pi(r)}{\partial \vec{r}} = -\dfrac{\partial \Pi(r)}{\partial r}\dfrac{\vec{r}}{r}$

Рассмотрим движение материальной точки A массы m,

в центральном поле с центром O, действующем на точку силой $\vec{F}_r$ .




Поскольку центральная сила $\vec{F}_r$ и радиус-вектор материальной точки $\vec{r}$ лежат на одной прямой, момент силы относительно центра O равен нулю. А это значит, что момент импульса относительно центра системы остается неизменным. Момент импульса $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ и радиус-вектор $\vec{r}$ взаимно перпендикулярны, поэтому *движение материальной точки происходит в одной плоскости*. Для описания движения в плоскости удобно использовать полярные координаты **φ, r** с полюсом в центре O. Составим уравнения движения для материальной точки :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \ (i=1,2)$$

Функция Лагранжа системы, состоящей из одной материальной точки, это разность кинетической и потенциальной энергий L = T – П. Запишем выражение для кинетической энергии T в полярных координатах $\varphi,\ r$ **:** $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ .

Потенциальная энергия в центральном поле П=П(r) зависит только от расстояния от центра O. Функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \Pi(r) \ ,$$

подставив ее в уравнения движения, для координат $q_1$=r и $q_2$=φ получим два уравнения движения :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

Из второго уравнения следует сохранение величины $r^2\dot{\varphi} = C$, *физический смысл этого заключается в сохранении момента импульса* $M = mr^2\dot{\varphi}$, величину $r^2\dot{\varphi}$ называют также *секториальной скоростью*, поскольку она равна площади заметаемой радиус-вектором за единицу времени. Первое уравнение можно преобразовать к дифференциальному уравнению двух переменных $\varphi,\ r$. Для этого исключим время, используя константу $C = r^2\dot{\varphi}$ , откуда $\dot{\varphi} = \dfrac{C}{r^2}$ , тогда

первая производная
$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) \ ,$$

вторая производная
$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\dot{\varphi} = -C\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{C}{r^2} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

после подстановки производных в первое уравнение движения получим

$$m\left(-\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{C^2}{r^3}\right) = F_r$$

которое после преобразования будет иметь вид

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F_r}{mC^2}$$

решение данного дифференциального уравнения зависит от вида центральной силы $\vec{F}_r$ . Рассмотрим частный случай – движения под действием силы притяжения центра O, который представляет собой материальную точку массы $m_o$. Тогда действующая на материальную точку сила равна $\vec{F}_r = -\dfrac{\gamma m_o m}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$

Уравнение движения примет вид $\dfrac{d^2}{d\varphi^2}(\dfrac{1}{r})+\dfrac{1}{r}=\dfrac{\gamma m_o}{C^2}$ или, обозначая $p=\dfrac{C^2}{\gamma m_o}$ ,

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(\frac{1}{r})+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}$$

Решением является уравнение конического сечения в каноническом виде

$$\frac{p}{r}=1+e\cos(\varphi-\varepsilon)$$

где e и ε - константы, зависящие от начальных условий (расстояния от центра и скорости), причем
если e<1 - это уравнение эллипса,
если e=1 - это уравнение параболы,
если e>1 - это уравнение гиперболы,
мы получаем три возможные траектории движения материальной точки.

Решение задачи о движении частицы в центральном поле можно получить другим способом, а именно с помощью законов сохранения – энергии и момента импульса. Поскольку в данной задаче момент импульса материальной точки относительно центра О сохраняется, используем выражение для момента импульса

$$M=mr^2\dot{\varphi}=const$$

для подстановки в выражение для энергии материальной точки

$$E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\Pi(r)=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{M^2}{2mr^2}+\Pi(r)$$

выразим из уравнения энергии радиальную скорость, она равна

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}(E-\Pi(r))-\frac{M^2}{m^2r^2}}\ ,$$

далее выразим из уравнения момента импульса угловую скорость движения материальной точки

$$\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{M}{mr^2}\ ,$$

решая их совместно, исключаем время и получаем дифференциальное уравнение двух переменных *φ, r:*

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{\dfrac{M}{r^2}}{\sqrt{2m(E-\Pi(r))-\dfrac{M^2}{r^2}}}$$

*Преимуществом полученного уравнения является отсутствие второй производной в дифференциальном уравнении.*

В случае, если материальная точка движется в гравитационном поле центра О, имеющего массу $m_o$, ее потенциальная энергия равна $\Pi(r)=-\dfrac{\gamma m m_o}{r}$ , (соответственно сила $F(r)=-\dfrac{\partial\Pi(r)}{\partial r}=\dfrac{\partial}{\partial r}(\dfrac{\gamma m m_o}{r})=-\dfrac{\gamma m m_o}{r^2}$). Подставим выражение для потенциальной энергии в полученное дифференциальное уравнение и после преобразований получим

$$d\varphi=\frac{\dfrac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2mE+\dfrac{2\gamma m m_o}{r}-\dfrac{M^2}{r^2}}}=\frac{-d(\dfrac{M}{r})}{\sqrt{2mE-(\dfrac{M^2}{r^2}-\dfrac{2\gamma m m_o}{r}+\dfrac{(\gamma m m_o)^2}{M^2}-\dfrac{(\gamma m m_o)^2}{M^2})}}=\frac{-d(\dfrac{M}{r}-\dfrac{\gamma m m_o}{M})}{\sqrt{2mE+\dfrac{(\gamma m m_o)^2}{M^2}-(\dfrac{M}{r}-\dfrac{\gamma m m_o}{M})^2}}$$

после интегрирования $\varphi=\arccos\dfrac{\dfrac{M}{r}-\dfrac{\gamma m m_o}{M}}{\sqrt{2mE+\dfrac{(\gamma m m_o)^2}{M^2}}}+\varphi_o$, вводя обозначения $p=\dfrac{M^2}{\gamma m m_o}$ и $e=\sqrt{1+\dfrac{2EM^2}{m\gamma^2 m_o^2}}$

получаем $\varphi=\arccos\dfrac{\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{p}}{\dfrac{e}{p}}+\varphi_o$ и окончательно

решение в виде $\dfrac{p}{r}=1+e\cos(\varphi-\varphi_o)$

**15. Плоское движение твердого тела.**

При рассмотрении движения тела будем считать его абсолютно твердым.

*Абсолютно твердым телом* или просто *твердым телом* в механике называют идеализированную систему материальных точек, все расстояния между которыми остаются неизменными при движении этой системы как целого в пространстве и времени.

Движение твердого тела можно представить как сумму поступательного и вращательного независимых движений.

При *поступательном движении* скорости всех точек тела одинаковы, поэтому такое движение полностью описывается движением одной из его точек. В качестве такой точки удобно выбирать центр масс тела.

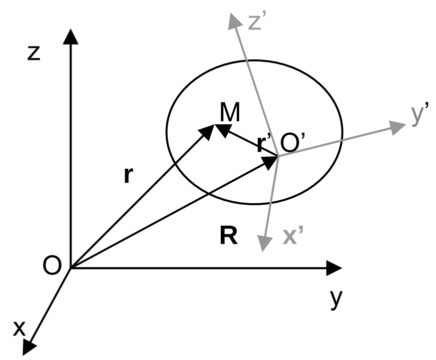
При *вращательном движении* тела все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Такое движение полностью описывается положением в пространстве оси вращения и угловой скорости в каждый момент времени.

Вращательное движение является плоским.

*Плоским* называется движение тела, при котором траектории всех его точек лежат в параллельных плоскостях (например, катится колесо).

Для описания движения твердого тела вводят две системы отсчета: неподвижную (инерциальную) систему отсчета **Oxyz** и движущуюся систему отсчета **O'x'y'z'**, которую жестко связывают с твердым телом. Центр **O'** удобно совместить с центром масс тела. Положение тела в пространстве относительно системы **Oxyz** определяется положением движущейся системы **O'x'y'z'**.

Пусть положение произвольной точки **M** тела в системе **Oxyz** задается радиусом-вектором **r**, а в системе **O'x'y'z'** - радиусом-вектором **r'**, радиус вектор $\mathbf{R_c}$ указывает положение центра масс **O'** движущейся системы **O'x'y'z'**.




Тогда положение точки твердого тела относительно неподвижной системы **Oxyz** будет определяться суммой векторов, $\mathbf{R_c}$ - указывающего положение центра масс относительно неподвижной системы отсчета и **r'** - указывающего положение точки тела относительно центра масс **O'**:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{r}}'$$

*Плоское движение твердого тела это сумма поступательного движения тела и вращения вокруг его неподвижной оси.*

Тогда скорость точки тела будет складываться из скорости центра масс относительно неподвижной системы отсчета и линейной скорости точки относительно подвижной системы отсчета

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} + (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}'),$$ где $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ - угловая скорость вращения тела.

*Уравнения движения твердого тела*, рассматриваемого как систему материальных точек, состоят из двух частей:

уравнения движения центра масс $M \cdot \dfrac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}_C = \vec{\boldsymbol{F}}$, где M –масса тела, $\vec{\boldsymbol{F}}$ - векторная сумма внешних сил;

и уравнение момента импульса тела $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{N}}$, где $\vec{\boldsymbol{L}}$ –момент импульса тела, $\vec{\boldsymbol{N}}$ - момент внешних сил.

Если определить понятие момента инерции тела $I_C$, относительно центра инерции тела и *учитывая, что момент импульса однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии связан с моментом инерции и угловой скоростью простой формулой* $\vec{\boldsymbol{L}} = I_C \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}$, получим уравнение $I_C \cdot \dfrac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{N}}$

*Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении твердого тела складывается из энергии вращения в ц-системе и энергии, связанной с движением центра инерции:* $T = \dfrac{I_c\omega^2}{2} + \dfrac{Mv_c^2}{2}$

Доказывается непосредственным вычислением. Т.к. кинетическая энергия твердого тела состоит из суммы кинетических энергий материальных точек, запишем ее выражение и подставим значение скорости, далее учтем, что импульс частиц в

$$T = \sum_i^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i^n \frac{m_i(\vec{\boldsymbol{v}}_i' + \vec{\boldsymbol{v}}_c)^2}{2} = \sum_i^n \frac{m_i v_i'^2}{2} + \vec{\boldsymbol{v}}_c \sum_i^n m_i \vec{\boldsymbol{v}}'_i + \sum_i^n \frac{m_i v_c^2}{2} = \sum_i^n \frac{m_i v_i'^2}{2} + \sum_i^n \frac{m_i v_c^2}{2} = \frac{I_c\omega^2}{2} + \frac{Mv_c^2}{2}$$

ц- системе равен нулю. Далее учитывая, что сумма кинетических энергий вращения точек это произведение момента инерции на квадрат угловой скорости, деленное пополам, получим конечное выражение. Утверждение доказано.

**16. Тензор инерции твердого тела. Главные оси инерции.**

Моментом инерции твердого тела относительно данной оси вращения называют величину I, равную сумме произведений масс материальных точек $m_i$, составляющих тело, на квадрат расстояний их до оси ращения $r_i$.

$$I = \sum m_i \mathbf{r}_i^2 \quad \text{или для непрерывного распределения} \quad I = \int \mathbf{r}_i^2 dm$$

В механике вращательного движения момент инерции **I** играет роль, аналогичную роли массы в механике поступательного движения. Например, сравним 2-й закон Ньютона и основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси в случае, если тело однородно и вращается вокруг своей оси симметрии

$$m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{F}} \quad \text{и} \quad I\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{N}}$$

или импульс тела при поступательном движении

$$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}} \quad \text{и момент импульса} \quad \vec{\boldsymbol{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

в том же случае однородного тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ вокруг своей оси симметрии.

В общем случае твердого тела любой формы и с произвольным распределением массы, вращающегося вокруг заданной оси z: $L_z = I_z\omega$, где $L_z$ - проекция момента импульса на эту ось , $I_z$ - момент инерции относительно этой оси.

В случае однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии, направления векторов $\vec{\boldsymbol{L}}$ и $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ совпадают, в общем же случае направления векторов не совпадают, т.к. момент импульса определяется выражением

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int (\vec{\boldsymbol{r}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}))dm$$

где, если раскрыть векторно-векторное произведение, получим $(\vec{\boldsymbol{r}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}})) = \vec{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{r}}) - \vec{\boldsymbol{r}}(\vec{\boldsymbol{\omega}}\vec{\boldsymbol{r}}) = r^2\vec{\boldsymbol{\omega}} - (\vec{\boldsymbol{\omega}}\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}$ , и подставив в исходное уравнение

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}\int r^2 dm - \int (\vec{\boldsymbol{\omega}}\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}dm$$

видим, что в общем случае направления векторов $\vec{\boldsymbol{L}}$ и $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ не совпадают, а связь между ними задается соотношениями

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$
$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

где $L_x, L_y, L_z$ , $\omega_x, \omega_y$ , $\omega_z$ - проекции векторов $\vec{\boldsymbol{L}}$ и $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ на оси координат **x, y, z** соответственно. Коэффициенты пропорциональности между ними - *компоненты тензора инерции* тела I, который принято записывать в виде

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Тензор характеризует инертные свойства тела при его вращении. Компоненты тензора инерции в случае непрерывного распределения массы определяются выражениями

$$I_{xx} = \int (y^2+z^2)dm \qquad I_{xy} = I_{yx} = -\int xydm$$
$$I_{yy} = \int (z^2+x^2)dm \qquad I_{yz} = I_{zy} = -\int yzdm$$
$$I_{zz} = \int (x^2+y^2)dm \qquad I_{zx} = I_{xz} = -\int yzdm$$

Диагональные компоненты $I_{xx}$, $I_{yy}$, $I_{zz}$ называют *осевыми моментами инерции*, а недиагональные $I_{xy}$, $I_{yx}$, $I_{zx}$,$I_{xz}$, $I_{zy}$, $I_{yz}$- *центробежными моментами инерции*. Для любой точки твердого тела существует декартова система координат, в которой тензор инерции является диагональным. Оси такой системы координат называют *главными осями инерции*, а $I_x$, $I_y$, $I_z$ называют *главными моментами инерции*. В общем случае главные оси для различных точек твердого тела имеют различное направление, а главные моменты - различные значения. Нахождение главных моментов сводится к решению так называемого векового уравнения

$$\begin{pmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

**17. Динамика твердого тела. Уравнения Эйлера.**

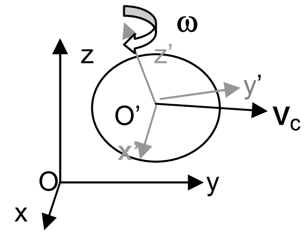
При рассмотрении движения тела будем считать его абсолютно твердым.

*Абсолютно твердым телом* или просто *твердым телом* в механике называют идеализированную систему материальных точек, все расстояния между которыми остаются неизменными при движении этой системы как целого в пространстве и времени.

*Движение твердого тела можно представить как сумму поступательного и вращательного независимых движений.*

При *поступательном движении* скорости и ускорения всех точек тела одинаковы, поэтому такое движение полностью описывается движением одной из его точек. В качестве такой точки удобно выбирать центр масс тела.

При *вращательном движении* тела все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Такое движение полностью описывается положением в пространстве оси вращения и угловой скорости в каждый момент времени.




Для описания движения твердого тела вводят две системы координат: неподвижную (инерциальную) систему **Oxyz** и движущуюся систему координат **O'x'y'z'**, которую жестко связывают с твердым телом.

Центр **O'** удобно совместить с центром масс тела, если вокруг него происходит вращение. Положение тела в пространстве относительно системы **Oxyz** определяется положением движущейся системы **O'x'y'z'**.

Пусть $\vec{\mathbf{v}}_c$ - скорость центра масс тела, а M - масса тела, $\vec{\mathbf{F}}$ - результирующая действия внешних сил, $\vec{\mathbf{L}}$ - момент импульса тела, $\vec{\mathbf{N}}$ - суммарный момент внешних сил. Тогда уравнения движения твердого тела имеют следующий вид:

$$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{c}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \qquad \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{N}}$$

где первое уравнение описывает поступательное движение центра масс твердого тела, а второе изменение момента импульса тела.

В уравнения движения входят только внешние силы. Внутренние силы не влияют на движение абсолютно твердого тела.

*Уравнения Эйлера* динамики твердого тела это утверждение – под действием момента внешних сил происходит изменение момента импульса по величине и направлению. Для нахождения уравнений Эйлера используем уравнение момента импульса $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{N}}$.

При дифференцировании вектора момента импульса L воспользуемся связью абсолютной и относительной производных вектора: $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d'\vec{\mathbf{L}}}{dt} + \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{L}}$

Выражение d′L означает, что изменение происходит в системе, связанной с телом.

<u>Пусть теперь система **xyz**</u> (только чтобы не писать штрихи у каждого x, y, z) связана с твердым телом и имеет ту же угловую скорость, что и тело. Спроектировав уравнение на оси **ox, oy, oz** получим:

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_x = \frac{d'\vec{\mathbf{L}}}{dt} + \omega_y L_z - \omega_z L_y$$

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_y = \frac{d'\vec{\mathbf{L}}}{dt} + \omega_z L_x - \omega_x L_z$$

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_z = \frac{d'\vec{\mathbf{L}}}{dt} + \omega_x L_y - \omega_y L_x$$

Т.к. $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{N}}$ и соответственно $\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_x = N_x$ , $\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_y = N_y$ , $\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_z = N_z$ , и *приняв за оси координат - главные оси инерции тела,* когда $L_x = I_x\omega_x$ , $L_y = I_y\omega_y$ , $L_z = I_z\omega_z$ мы получим:

$$I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_z\omega_y = N_x$$

$$I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = N_y$$

$$I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_y\omega_x = N_z$$

где $I_x$, $I_y$, $I_z$ - главные моменты инерции, а $N_x$ ,$N_y$ ,$N_z$ - главные моменты внешних сил.

Полученные уравнения *называются уравнениями Эйлера*.

Если внешние силы не действуют $\vec{\mathbf{N}} = 0$ , тогда уравнения Эйлера принимают вид:

$$I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_z\omega_y = 0$$

$$I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = 0$$

$$I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_y\omega_x = 0$$

**18. Численный эксперимент в механике.**

*Численный эксперимент* это вид теоретического анализа. Основой численного эксперимента является математическое моделирование, теоретической базой – прикладная математика, а технической – вычислительные машины.

Численный эксперимент можно разделить на ряд этапов.

*Во -первых*, для исследуемого объекта строится физическая модель, для которой разделяются все действующие в данном явлении факторы на главные, которые учитываются, и второстепенные, которые на данном этапе исследования отбрасываются. Одновременно определяются рамки применимости модели, в которых будут справедливы полученные результаты. Эта модель записывается математическим языком, обычно в виде дифференциальных и интегральных уравнений.

*На втором этапе* разрабатывается вычислительный алгоритм математической задачи. Как правило, для решения одной и той же задачи можно предложить разные алгоритмы. Наилучший выбирается исходя из теории численных методов. Целью на данном этапе является применение наиболее эффективных вычислительных методов, которые позволяют получить решение поставленной задачи с заданной точностью за минимальное количество действий.

*Третьим этапом* численного эксперимента является создание программы для реализации разработанного алгоритма на вычислительной машине. Выбирается язык программирования, подходящий для реализации алгоритма, определяются рабочие модули программы, которые затем реализуются в виде текста программ, которые затем переводятся на машинный язык.

*Четвертым этапом* является проведение расчетов на вычислительной машине. В ходе четвертого этапа сначала проводится отладка программы, т.е. предварительное тестирование работы модулей программы. Затем производится проверка математической модели, выясняется насколько хорошо она описывает изучаемый класс явлений, для этого проводятся контрольные эксперименты, по которым имеются надежные данные.

*На пятом этапе*, после выполнения всей этой предварительной работы наступает этап изучения поведения объекта с помощью численного эксперимента и обработка результатов опыта и, наконец, после всестороннего анализа – выводы.

Численный эксперимент необходим там, где невозможно применение других видов анализа. Обычно численный эксперимент проводят в случае, если физические законы, определяющие поведение объектов известны, уравнения составлены, но их решение аналитическими методами не дает результата, а проведение непосредственного эксперимента по каким-либо причинам невозможно. Например, законы имеют существенно нелинейный характер или число объектов велико.

В механике наиболее известной проблемой является движение трех тел. Нахождение закона движения двух, взаимно притягивающихся, тел в пространстве стало первым достижением классической механики. Но задача нахождения закона движения трех и более, взаимно притягивающихся, тел в пространстве стала нерешенной проблемой. И хотя отдельные частные случаи были решены Лагранжем (стационарные решения, т.н. точки либрации), общего решения получить аналитическими методами не удалось. В связи с запуском космических аппаратов, определение траектории движения в случае взаимодействия многих тел и нахождение оптимальной траектории стало повседневной задачей. Создание первых вычислительных машин позволило находить траекторию с помощью численного эксперимента.

Использование численного эксперимента позволило совершить новые открытия. Уже первые численные эксперименты по исследованию колебаний в сложных системах с учетом нелинейности связи, поставленные группой Ферми на первых вычислительных машинах, привели к неожиданным результатам и к рождению нового направления исследований.

Практическим применением численного эксперимента является изучение поведения сложных конструкций, высотных зданий, мостов и т.д. в различных условиях. Даже там, где можно применить прямой эксперимент, например, исследование поведения корпуса самолета в аэродинамической трубе, широко используется численный эксперимент, чтобы снизить финансовые затраты.

Основой методов численного эксперимента является переход от непрерывного изменения величин к дискретному. Решение находится в конечном числе точек, их множество называется сеткой, а сами точки узлами сетки. Основная проблема численных методов – какими соображениями руководствоваться при замене непрерывной области дискретным набором. Основная задача теории численных методов состоит в конструировании алгоритмов, которые при минимальных затратах машинного времени (т.е максимальном шаге сетки) позволяли бы получить решение с достаточной точностью.

Примерами численных методов решения дифференциальных уравнений являются метод Эйлера, метод Рунге-Кутта и т.д.

**19. Системы со связями. Степени свободы. Обобщенные координаты.**

В классической механике описать движение системы, состоящей из N материальных точек, означает найти координаты и скорости всех N частиц в заданный момент времени t. Положение в пространстве системы из N материальных точек определяется 3N координатами. Это не обязательно декартовы координаты.

*Любая совокупность параметров $q_1$, $q_2$, ..., $q_r$, достаточных для определения положения системы в пространстве, называется обобщенными координатами системы, а их производные - обобщенными скоростями.* Их число *r* в общем случае не совпадает с числом координат материальных точек системы. Поскольку совокупность декартовых координат описывает положение системы и совокупность обобщенных координат описывает положение системы, то между совокупностями должны существовать соотношения вида

$$x_i = x_i(t; q_1, q_2, ..., q_r)$$
$$y_i = y_i(t; q_1, q_2, ..., q_r)$$
$$z_i = z_i(t; q_1, q_2, ..., q_r)$$

Движение системы может быть ограничено так, что перемещение частиц при заданных условиях не может быть каким угодно. В таком случае говорят, что на движение системы наложены *связи*. Аналитически связи выражаются равенствами, заключающими время, координаты и их производные.

Связи выражаемые аналитически уравнениями вида

$$F(t; q_1, q_2, ..., q_r; \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_r) = 0,$$

где $q_1$, $q_2$, ..., $q_r$ - обобщенные координаты, носят название кинематических.

Если время не входит явно в уравнения связей, то такие связи называются *склерономными (стационарными)*, в противном случае - реономными (*нестационарными)*.

Кинематические связи, уравнения которых не содержат обобщенных скоростей или путем интегрирования могут быть к такому виду приведены называют *голономными* или *интегрируемыми,* в противном случае - *неголономными* или *неинтегрируемыми*.

В случае голономных связей не все 3N координат частиц являются независимыми. Если у нас k уравнений связи, то имеется s=3N-k независимых координат. Это число получило название *числа степеней свободы*.

Например для однозначного определения положения твердого тела в пространстве достаточно задать положение каких-либо трех его точек, не лежащих на одной прямой. Т.к. у твердого тела расстояния между этими точками не изменяются при движении тела, то из 9 координат, характеризующих выбранные три точки, независимыми являются только шесть. Следовательно, твердое тело, на движение которого не наложены никакие ограничения (связи), является механической системой, имеющей шесть степеней свободы (s=6).

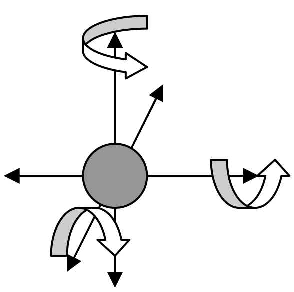
Наличие связей уменьшает их число.

Если тело имеет одну закрепленную точку, вокруг которой может вращаться, то у него три степени свободы (s=3).

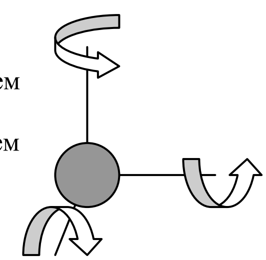
Если тело может вращаться вокруг закрепленной оси, то у него одна степень свободы (s=1).

Если тело может вращаться вокруг закрепленной оси и при этом двигаться вдоль оси, имеет две степени свободы (s=2).

Степени свободы можно определить как число возможных независимых движений, т.е. возможных независимых изменений координат системы

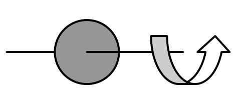


3 возможных движения по трем независимым направлениям
3 возможных вращения по трем независимым направлениям
итого 6 степеней свободы

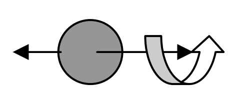


Закрепленная точка
3 возможных вращения по трем независимым направлениям

итого 3 степени свободы



Тело закреплено на оси вращения
возможное только вращения вокруг одной оси
итого 1 степень свободы



Тело может двигаться вдоль оси вращения
возможно только вращение вокруг одной оси
возможно движение вдоль оси
итого 2 степени свободы

**20. Виртуальное перемещение. Виртуальная работа. Идеальные связи.**

Рассмотрим бесконечно малые перемещения точек системы, совместимые со связями, наложенными на систему. Если связи не стационарны, то бесконечно малые перемещения точек системы можно представить состоящими из двух частей: 1) совместимыми со связями бесконечно малые перемещения, которые имели бы место, если бы связи перестали изменяться; 2) перемещения, обусловленные изменениями самих связей.

Первая часть носит название *виртуальных перемещений и определяется как бесконечно малые перемещения точек системы, совместимых со связями, зафиксированными в данный момент времени*.

Ограничивая свободу движения системы, связи действуют на точки системы посредством сил, называемых реакциями связи. Остальные силы носят название активных, это те силы, которые сохраняются, если связи мгновенно исчезнут.

Т.о. уравнение движения точек системы будет описываться уравнениями

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$$

где $m_i$ - масса i-й точки, $\mathbf{a}_i$ - ее ускорение, $\mathbf{F}_i$ - равнодействующая активных сил, $\mathbf{R}_i$ - равнодействующая реакции связей.

Эти уравнения показывают, что *с динамической точки зрения несвободную систему можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием активных сил и реакций связей*. Использование этого положения, называемого *принципом освобождаемости*, оказывается во многих случаях очень полезным. Например, балка, лежащая на двух опорах, не имеет свободы перемещения. Отбрасывая одну из опор и прикладывая к балке соответствующую опорную реакцию, не нарушаем равновесия балки, но балка получает свободу перемещения, вращения вокруг точки опоры.

*Работа реакции связей на виртуальном перемещении носит название виртуальной работы*.

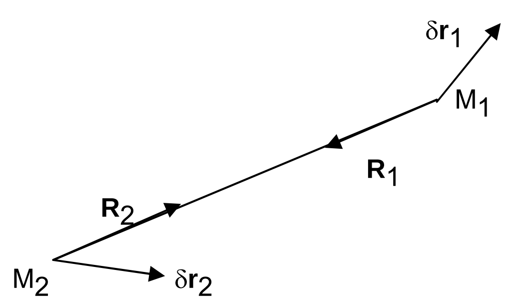
$$\delta W = \sum \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i$$

Идеализация действующих в системе связей приводит к важной абстракции *идеальных связей*.

*Идеальными связями называют такие связи, сумма элементарных работ реакций которых на любом виртуальном перемещении равна нулю*.

$$\delta W = \sum \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Например, возьмем две точки $M_1$ и $M_2$, соединенных жестким стержнем. Одна из точек, например $M_1$ может иметь совершенно произвольное бесконечно малое перемещение, направленное как угодно в пространстве. Вторая может при этом иметь только такое перемещение, проекция которого на направление стержня , равна проекции перемещения первой точки на то же направление. При этом сумма работ связей $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ на любом возможном перемещении равна нулю, т.к. реакции одинаковы по величине и противоположны по направлению, а проекции возможных перемещений на направление стержня равны между собой.




В реальности нет идеальных недеформируемых стержней и работа реакции связей не равна нулю,
но на практике сумма работ в допустимом приближении может быть принята равной нулю.
В этом и заключается идеализация .

**21. Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы.**

Уравнение движения **n** точек системы будет описываться уравнениями

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i\ ,\ \ i=1..n$$

где $m_i$ - масса i-й точки, $\mathbf{a}_i$ - ее ускорение, $\mathbf{F}_i$ - равнодействующая активных сил, $\mathbf{R}_i$ - равнодействующая реакции связей.

Как будут выглядеть уравнения движения в обобщенных координатах ? Чтобы получить их, сначала перепишем их в виде общего уравнения динамики $\sum\limits_i^n m_i\vec{\mathbf{a}}_i\delta\vec{\mathbf{r}}_i - \sum\limits_i^n(\vec{\mathbf{F}}_i\delta\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{R}}_i\delta\vec{\mathbf{r}}_i) = 0$

При этом работа, совершаемая силами на виртуальном перемещении точек системы, будет равна

$$\delta W = \sum_i^n(\vec{\mathbf{F}}_i\delta\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{R}}_i\delta\vec{\mathbf{r}}_i)$$

Но по условию идеальности связей $\sum\limits_i^n\vec{\mathbf{R}}_i\delta\vec{\mathbf{r}}_i = 0$, тогда $\delta W = \sum\limits_i^n\vec{\mathbf{F}}_i\delta\vec{\mathbf{r}}_i$ и уравнение динамики примет вид:

$$\sum_i^n m_i\vec{\mathbf{a}}_i\delta\vec{\mathbf{r}}_i - \sum_i^n\vec{\mathbf{F}}_i\delta\vec{\mathbf{r}}_i = 0$$

Пусть система имеет k степеней свободы, тогда состояние системы будут определять k независимых обобщенных координат $q_1, q_2, \dots q_k$. Вариации переменных $x_i, y_i, z_i$ будут иметь вид:

$$\delta\vec{\mathbf{r}}_i = \sum_j^k\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad \delta x_i = \sum_j^k\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad \delta y_i = \sum_j^k\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad \delta z_i = \sum_j^k\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Подставляя выражения для вариаций в выражение для работы получим (i=1..n, j=1..k)

$$\delta W = \sum_i^n\vec{\mathbf{F}}_i\delta\vec{\mathbf{r}}_i = \sum_i^n\sum_j^k(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial z_i}{\partial q_j})\delta q_j = \sum_j^k Q_j\delta q_j$$

выражение $Q_j = \sum\limits_i^n(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial z_i}{\partial q_j})$ называется *обобщенной силой.*

Далее найдем выражение для векторов скоростей точек системы $\vec{\mathbf{v}}_i = \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial t} + \sum\limits_j^k\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}\delta\dot{q}_j$ из которого следует, что

верны соотношения $\qquad \frac{\partial\vec{\mathbf{v}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha} = \frac{\partial\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha} = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} \qquad (*)$

Покажем также, что верно $\qquad \frac{\partial\vec{\mathbf{v}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha}) \qquad (**)$

Распишем выражение $\frac{\partial\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha\partial t} + \sum\limits_j^k\frac{\partial^2\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha\partial q_j}\delta\dot{q}_j$, с другой стороны $\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha\partial t} + \sum\limits_j^k\frac{\partial^2\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha\partial q_j}\delta\dot{q}_j$

Сравнивая оба выражения видим, что (**) верно.

Теперь перейдем к использованию обобщенных координат в общем уравнении динамики

$$\sum_i^n m\,\dot{\mathbf{v}}_i\,\delta\vec{\mathbf{r}}_i = \sum_i^n m\,\dot{\mathbf{v}}_i(\sum_j^k\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}\delta q_j) = \sum_j^k\sum_i^n m\,\dot{\mathbf{v}}_i\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

выражение под знаком сумм преобразуем и используя ранее полученные выражения (*) и (**) получим

$$m\dot{\vec{\mathbf{v}}}_i\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(m\vec{\mathbf{v}}_i\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}) - m\vec{\mathbf{v}}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(m\vec{\mathbf{v}}_i\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}_i}{\partial\dot{q}_j}) - m\vec{\mathbf{v}}_i\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}(\frac{m\vec{\mathbf{v}}_i^2}{2}) - \frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{m\vec{\mathbf{v}}_i^2}{2})$$

Подставляя полученное выражение в общее уравнение динамики и учитывая, что $\sum m_i\mathbf{v}_i^2/2 = T$ есть кинетическая энергия системы, получим новое выражение для общего уравнения динамики

$$\sum_j^k(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j})\delta q_j = \sum_j^k Q_j\delta q_j \text{ преобразуем к виду } \sum_j^k(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j)\delta q_j = 0$$

и получаем *уравнения Лагранжа*, т.е. *уравнения движения в независимых обобщенных координатах*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1..k)$$

если активные силы *консервативны*, то их можно представить в виде $Q_j = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_j}$, где П – потенциальная энергия

Тогда вводя *функцию Лагранжа* $L(t, q_1, q_2, \dots q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots\dot{q}_n) = T - \Pi$, получаем *уравнения Лагранжа* в другом виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \ (j=1..k)$$

**22. Функция Лагранжа. Обобщенные импульсы.**

*Функцией Лагранжа* или лагранжианом называется функция

$$L(t,q_1,q_2,...q_n;\dot{q}_1,\dot{q}_2,...\dot{q}_n) = T(t,q_1,q_2,...q_n;\dot{q}_1,\dot{q}_2,...\dot{q}_n) - \Pi(t,q_1,q_2,...q_n)$$

где T – кинетическая энергия системы, а П – потенциальная энергия системы.

Каждая механическая система характеризуется определенным лагранжианом. Движение системы описывается *уравнениями Лагранжа*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$ , (j=1..k) , k – число независимых обобщенных координат

которые устанавливают связь между координатами, скоростями и ускорениями системы.

Функция Лагранжа определена с точностью до прибавления к ней полной производной от любой функции координат и времени $f(q_1, q_2 \,....\, q_k, t)$. Тогда новая функция Лагранжа L′ будет равна: $L' = L + \frac{d}{dt}f = L + \dot{f}$ . Подставим ее в уравнения Лагранжа, часть с исходной функцией Лагранжа равна нулю, покажем, что вторая часть равна нулю

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial (L+\dot{f})}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (L+\dot{f})}{\partial q_j} = (\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}) + (\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_j}) = 0 + (\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_j})$$

Из вида полной производной $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j^k \frac{\partial f}{\partial q_j}\delta \dot{q}_j$ следует, что $\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$. Используя также равенство: $\frac{\partial \dot{f}}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha})$

получим, что выражение тождественно равно нулю, т.е. добавление полной производной функции координат и времени

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_j} \equiv 0$$ не меняет уравнений Лагранжа.

Это можно доказать другим способом, если воспользоваться *принципом наименьшего действия*. Согласно этому принципу интеграл $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ , называемый действием, имеет наименьшее значение. Математически это требование означает, что вариация действия должна равняться нулю $\delta S = 0$, откуда с помощью математических преобразований однозначно получаем уравнения Лагранжа. Подставляя в действие функцию L′, получим:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} (L + \frac{d}{dt}f) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + f(t_2, q_1(t_2), q_2(t_2)...q_n(t_2)) - f(t_1, q_1(t_1), q_2(t_1)...q_n(t_1))$$

Учитывая, что вариация от констант равна нулю $\delta S' = \delta S$ т.е. вариация, а с ней и вид уравнений Лагранжа не меняются.

Если механическая система состоит из двух частей A и B, каждая из которых будучи замкнутой, характеризовалась бы функциями Лагранжа $L_A$ и $L_B$, то в пределе при разведении этих частей настолько далеко, что их взаимодействием можно пренебречь, лагранжиан всей системы равен сумме $L = L_A + L_B$.

Это свойство аддитивности лагранжиана устраняет неопределенность, связанную с возможностью умножения его на произвольную постоянную и сводит ее к естественному произволу в выборе единиц.

При движении системы ее обобщенные координаты и скорости в общем случае меняются со временем. Но существуют функции этих переменных и времени, называемые *интегралами движения*, которые остаются постоянными. С интегралами движения связаны законы сохранения. Для замкнутой системы материальных точек интегралами движения являются: полная энергия системы, полный импульс и полный момент импульса.

Производные от функции Лагранжа по обобщенным скоростям все равно, что производные от кинетической энергии по тем же переменным , т.к. потенциальная энергия зависит от координат, но не зависит от скоростей.

*Производные от функции Лагранжа по обобщенным скоростям называют обобщенными импульсами*

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

В декартовой системе координат обобщенные импульсы равны проекциям импульса.

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial(\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2})}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad p_y = m\dot{y} \qquad p_z = m\dot{z}$$

В полярной системе координат обобщенный импульс $p_\varphi$, соответствующий угловой скорости равен моменту импульса.

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial(\frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2})}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$

Видим, что компоненты обобщенного импульса могут иметь разный физический смысл.

**23. Уравнения Гамильтона. Канонические переменные .**

Формулировка законов механики системы материальных точек с помощью функции Лагранжа предполагает описание этой системы путем задания ее обобщенных координат и скоростей. Такое описание не является единственным. Система может быть описана и с помощью обобщенных координат и импульсов. Уравнения движения в независимых переменных – обобщенных координатах и импульсах имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \,, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \,, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \,, \qquad i = 1,2, \dots s \text{, где } s \text{ – число степеней свободы}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{- обобщенные импульсы}$$

и называются в силу их симметрии и простоты *каноническими уравнениями Гамильтона,* а переменные $q_i$ , $p_i$ , которыми описывается система *каноническими переменными.*

Функция H = H(p, q, t) называется функцией Гамильтона или гамильтонианом и равна

$$H = \sum_i p_i \, \dot{q}_i - L$$

Уравнения Гамильтона эквивалентны уравнению Лагранжа.

Переход от набора независимых переменных $q_i , \dot{q}_i$ к другому набору независимых переменных $q_i , \dot{p}_i$ можно совершить путем преобразования, известного под преобразованием Лежандра. Рассмотрим его.

Полный дифференциал функции Лагранжа как функции координат и скоростей равен

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \, d\dot{q}_i$$

Поскольку $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ являются обобщенными импульсами, а $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$ в силу уравнений Лагранжа, это выражение можно записать в виде

$$dL = \sum_i \dot{p}_i \, dq_i + \sum_i p_i \, d\dot{q}_i$$

Далее сделаем следующее преобразование

$$\sum_i p_i \, d\dot{q}_i = d(\sum_i p_i \, \dot{q}_i) - \sum_i \dot{q}_i \, dp_i$$

тогда

$$dL = \sum_i \dot{p}_i \, d\dot{q}_i + d(\sum_i p_i \, \dot{q}_i) - \sum_i \dot{q}_i \, dp_i$$

перенесем полный дифференциал в левую часть равенства, в результате получим

$$d(\sum_i p_i \, \dot{q}_i - L) = \sum_i \dot{q}_i \, dp_i - \sum_i \dot{p}_i \, dq_i$$

Выражение под знаком дифференциала - гамильтониан H = H(p, q, t) , его дифференциал равен

$$dH = \sum_i \dot{q}_i \, dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i$$

Гамильтониан является интегралом движения и равен полной энергии системы.

$$H = T + \Pi$$

Докажем это утверждение.

В случае консервативных сил потенциальная энергия П не зависит от скоростей $\dot{q}_i$ и обобщенный импульс равен

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \,, \qquad \text{где } T \text{ – полная кинетическая энергия системы.}$$

Поскольку Т есть однородная квадратичная функция скоростей и согласно теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

и учитывая, что функция Лагранжа равна L = T – П,

получаем, что функция Гамильтона равна полной энергии системы

$$H = 2T - (T - \Pi) = T + \Pi$$

**24. Равновесие системы и ее устойчивость.**

*Необходимое и достаточное условие равновесия системы, подчиненной стационарным идеальным связям, заключается в равенстве нулю суммы виртуальных работ активных сил на любом возможном перемещении системы из рассматриваемого положения равновесия.*

Чтобы доказать необходимость, предположим, что система находится в положении равновесии. Тогда каждая ее точка находится в равновесии и должна быть равна нулю равнодействующая активных сил $\mathbf{F}_i$ и реакций связи $\mathbf{N}_i$. Равна нулю будет и работа этой равнодействующей, так что

$$\sum_i (\vec{\boldsymbol{F}}_i + \vec{\boldsymbol{N}}_i)\delta\vec{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad \text{или} \qquad \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i \delta\vec{\boldsymbol{r}}_i + \sum_i \vec{\boldsymbol{N}}_i \delta\vec{\boldsymbol{r}} = 0$$

но вторая сумма равна нулю по условию идеальности связей, следовательно необходимость доказана.

Для доказательства достаточности рассуждения ведутся от обратного. Предположим условие выполнено, но система все же не находится в равновесии. Тогда система под действием активных сил и реакций связи придет в движение и за малый промежуток времени совершит некоторое *действительное* перемещение. Т.к. перемещения отдельных точек системы из состояния покоя будут направлены по равнодействующей сил $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{N}_i$ то при этом будет совершена положительная работа: $\sum_i (\vec{\boldsymbol{F}}_i + \vec{\boldsymbol{N}}_i)\delta\vec{\boldsymbol{r}}_i > 0$ . Далее, разбивая работу на две суммы,

получим $\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i \delta\vec{\boldsymbol{r}}_i + \sum_i \vec{\boldsymbol{N}}_i \delta\vec{\boldsymbol{r}} > 0$ но вторая сумма равна нулю по условию идеальности связей,

следовательно $\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i \delta\vec{\boldsymbol{r}}_i > 0$ , что противоречит принятому предположению. Т.о. достаточность доказана.

Если активные силы консервативны, т.е. существует потенциальная энергия $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n)$ такая что

$$\sum_i^n \vec{\boldsymbol{F}}_i\ \delta\vec{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i^n (F_{ix}\ \delta x_i + F_{iy}\ \delta y_i + F_{iz}\ \delta z_i) = \sum_i^n -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i^n -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\delta y_i + \sum_i^n -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\delta z_i = -\delta\Pi = 0$$

Мы получаем *необходимое условие экстремальности потенциальной энергии в положении равновесия системы*.

Если в определении условия равновесия перейти к использованию обобщенных координат, получим

$$\delta W = \sum_i^n Q_j \delta q_j = 0$$

, где j= 1..k, Qj – обобщенная сила, равная

$$Q_j = \sum_i^n (F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}) = \sum_i^n \vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{i}}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

Если активные силы консервативны, то

$$Q_j = -\sum_i^n (\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

Если обобщенные координаты выбраны независимыми, то обобщенные виртуальные перемещения $\delta q_j$ ( j = 1...k, k равно в данном случае числу степеней свободы) будут произвольными. Тогда все коэффициенты при $Q_j$ в выражении для виртуальной работы $\delta W$ при произвольных величинах должны по отдельности быть равны нулю

$$Q_j = 0, \ (j = 1 \ldots k)$$

Т.е. необходимым и достаточным условием равновесия системы с идеальными связями является равенство нулю всех соответствующих независимым обобщенным координатам обобщенных сил. Тогда для потенциальной энергии условие равновесия будет иметь вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \ (j = 1..k)$$

Определение понятия устойчивости равновесия связано с рассмотрением тех движений, которые система станет совершать, будучи выведена из положения равновесия путем сообщения ее точкам малых начальных отклонений от положения равновесия и малых начальных скоростей. *Если после нарушения равновесия система в своем последующем движении будет мало отклоняться от равновесного положения, то такое положение равновесия называется устойчивым.*

Лагранж установил достаточное условие устойчивости равновесия голономной системы с идеальными связями в консервативном поле:

*Если в некотором положении системы, подчиненной идеальным голономным связям и находящейся под действием консервативных сил, потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Условие минимума и максимума находится по степени членов разложения в ряд функции потенциальной энергии в точке равновесия.

**25. Задача о малых колебаниях.**

*Колебанием* в физике называют всякий периодический, т.е повторяемый с течением времени процесс, в котором физическая величина принимает одинаковые значения через равные промежутки времени. Колебание предоставленной самой себе системы, вызванное первоначальным кратковременным внешним возбуждением, называется *свободным* или *собственным колебанием.* Рассмотрим для примера систему с одной степенью свободы, описываемой координатой q.

Если система имеет положение устойчивого равновесия при некотором значении параметра $q=q_o$, то ее потенциальная энергия П как функция q может быть разложена в ряд Тейлора вблизи точки устойчивого равновесия $q_o$:

$$\Pi(q)=\Pi(q_o)-(q-q_o)\left[\frac{\partial\Pi(q)}{\partial q}\right]_{q=q_o}+\frac{1}{2}(q-q_o)^2\left[\frac{\partial^2\Pi(q)}{\partial q^2}\right]_{q=q_o}+\frac{1}{6}(q-q_o)^3\left[\frac{\partial^3\Pi(q)}{\partial q^3}\right]_{q=q_o}+\ldots$$

В состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия П(q) имеет минимум. Это означает, что

$$\left[\frac{\partial\Pi(q)}{\partial q}\right]_{q=q_o}=0\,,\qquad \left[\frac{\partial^2\Pi(q)}{\partial q^2}\right]_{q=q_o}=c>0$$ , где c – положительная константа

*Колебания называются малыми*, если слагаемыми более 2-й степени можно пренебречь. В этом случае, отсчитывая потенциальную энергию П от ее минимального значения в положении равновесия, имеем

$$\Pi(q)=\frac{1}{2}c(q-q_o)^2\,,\qquad Q=-\frac{\partial\Pi(q)}{\partial q}=-c(q-q_o)$$ , где $(q-q_o)$- смещение, Q – восстанавливающая сила.

В результате использования только первого члена в разложении мы получаем линейные дифференциальные уравнения, методы решения которых разработаны. Операция отбрасывания членов высших порядков разложения носит название *линеаризации* уравнений. Решение нелинейных уравнений в большинстве случаев связано с большими трудностями.

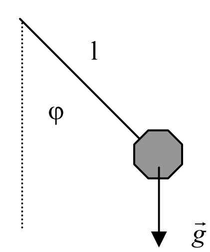
Возникает вопрос насколько полученные в результате отбрасывания нелинейной части уравнения будут отображать действительные свойства рассматриваемой системы ? Конечно линеаризованные уравнения представят искаженную картину колебаний системы, но совершенно естественно ожидать, что эти искажения будут тем менее существенными, чем меньше отбрасываемые члены разложения в сравнении с оставшимися. Таким образом, чтобы искажения при использовании линеаризованных уравнений были несущественными, колебания могут быть только *малыми* колебаниями около положения равновесия. Причем во все время возмущенного движения координата и скорость ее изменения должны оставаться малыми. Т.е. если в начальный момент времени есть такое ε, что $|q|,|\dot q|<\varepsilon$, то для этого ε найдется такое δ, что во все время движения $|q|,|\dot q|<\delta$ .

При этом следует иметь ввиду, не всегда можно отбросить члены ряда выше 2-й степени. Диаграммы сжатия и растяжения многих материалов не имеют прямолинейного участка ( кожа, резина, чугун и т.д.)

Примерами простых колебательных систем являются:

*Математический маятник* – идеальная система, состоящая из нерастяжимой и невесомой нити и тела, рассматриваемого как материальная точка. Отклонение маятника от положения равновесия характеризуется углом φ. При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент, стремящийся вернуть его в положение равновесия, уравнение движения имеют вид

$$ml^2\ddot\varphi=-mgl\sin\varphi\,,$$




преобразуя получаем $\ddot\varphi+\dfrac{g}{l}\sin\varphi=0$

где $ml^2=I$ – момент инерции маятника длины *l* и массой *m,*

*g* – ускорение свободного падения,

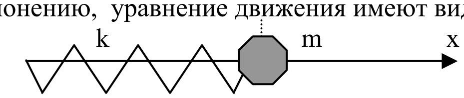
$\ddot\varphi$ - угловое ускорение

В случае малых колебаний отбрасывая нелинейные члены ( т.е. считаем sinφ = φ ) получаем следующее уравнение

$$\ddot\varphi+\omega^2\varphi=0$$ , где $\omega^2=g/l$

*Линейные колебания груза на пружине* – система, состоящая из невесомой пружины, коэффициентом жесткости k и прикрепленного к ней тела массы m, рассматриваемого как материальная точка. Отклонение от положения равновесия характеризуется координатой x. При отклонении тела на пружине от положения равновесия возникает возвращающая сила, которая при малой деформации пружины пропорциональна отклонению, уравнение движения имеют вид

$$m\ddot x-kx=0\,,$$




*Крутильный маятник* – система, состоящая из тела, подвешенного на вертикальном невесомом упругом стержне, которое может колебаться при кручении его вокруг оси, проходящей через стержень. Отклонение от положения равновесия характеризуется углом φ. При кручении возникают упругие силы, стремящиеся вернуть тело в положение равновесия, уравнения движения имеют вид $I\ddot\varphi-c\varphi=0$ ,

где I – момент инерции маятника относительно оси, а c – жесткость стержня по отношению к кручению

**26. Колебания в системах с одной степенью свободы.**

*Механической системой с одной степенью свободы* называется система, положение которой в пространстве однозначно определяется заданием одной величины q, а ее движение под действием приложенных к ней сил – изменением этой одной величины с течением времени. Величина q – носит название обобщенной координаты. Ее физическая природа и размерность могут быть весьма разнообразными и выбор ее, в общем случае, произволен.

Примерами систем с одной степенью свободы являются: математический маятник, крутильный маятник, линейные колебания груза на пружине.

Простейшим колебательным движением системы с одной степенью свободы является гармоническое колебание, при котором обобщенная координата изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса, например

$$q = A\sin(\omega t+\alpha)$$

Дифференциальное уравнение колебаний механической системы можно составить различными способами. Можно использовать какие-либо общие законы динамики: 2-й закон Ньютона, сохранения энергии или момента количества движения. Применение их различно в каждом случае и требует размышлений по выбору наиболее подходящих для этого случае законов. Единство подхода при решении различных динамических задач обеспечивает использование уравнений Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

Для консервативных систем обобщенная сила равна $Q = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q}$

и уравнение Лагранжа принимает вид $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial T}{\partial q} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q}$

В случае малых колебаний вблизи положения устойчивого равновесия со значением параметра $q=q_o$, ее потенциальная энергия П как функция q может быть разложена в ряд Тейлора вблизи точки устойчивого равновесия $q_o$:

$$\Pi(q) = \Pi(q_o) - (q-q_o)\left[\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}\right]_{q=q_o} + \frac{1}{2}(q-q_o)^2\left[\frac{\partial^2 \Pi(q)}{\partial q^2}\right]_{q=q_o} + \frac{1}{6}(q-q_o)^3\left[\frac{\partial^3 \Pi(q)}{\partial q^3}\right]_{q=q_o} + \ldots$$

В состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия П(q) имеет минимум. Это означает, что

$$\left[\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}\right]_{q=q_o} = 0, \qquad \left[\frac{\partial^2 \Pi(q)}{\partial q^2}\right]_{q=q_o} = c > 0$$ , где с – положительная константа

В случа*е малых колебаний* слагаемыми более 2-й степени можно пренебречь. В этом случае, отсчитывая потенциальную энергию П от ее минимального значения в положении равновесия, имеем

$\Pi(q) = \dfrac{1}{2}c(q-q_o)^2, \qquad Q = -\dfrac{\partial \Pi(q)}{\partial q} = -c(q-q_o)$, где $(q-q_o)$- смещение, Q – восстанавливающая сила.

Для получения уравнения движения возьмем $q_o$ за ноль. Тогда потенциальная энергия будет иметь вид

$$\Pi(q) = \frac{1}{2}cq^2,$$

кинетическая энергия в обобщенных координатах в случае одной переменной будет иметь следующий вид

$$T = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$$

раскладывая A(q) в ряд вблизи положения равновесия $q_o=0$ получаем выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}A(0)\cdot\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\left[A'(0)q + \ldots\right]\cdot\dot{q}^2$$

оставляя члены не более 2-го порядка малости и обозначая A(0)=a>0 по условию положительности энергии получим

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2$$

Подставляя выражения для потенциальной и кинетической энергии в уравнение Лагранжа и используя

$\dfrac{\partial T}{\partial q} = 0$, $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q} = cq$ и $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}$ получим $a\ddot{q} + cq = 0$

или вводя обозначение $k^2=c/a$ $\qquad \ddot{q} + k^2 q = 0$

решением этого уравнения является гармоническое колебание $q = A\sin(kt+\alpha)$ частоты $k$

где $A = \sqrt{q_o^2 + \dfrac{\dot{q}_o^2}{k^2}}$, $\quad tg\alpha = \dfrac{kq_o}{\dot{q}_o}$

Амплитуда колебаний А пропорциональна корню квадратному из полной энергии системы Е=Т+П.

**27. Нормальные колебания в нормальных координатах.**

Рассмотрим консервативную динамическую систему, подчиненную стационарным голономным связям и имеющую n - степеней свободы. Пусть эта система совершает малые колебания. Составленные для нее уравнения Лагранжа представляют собой систему n- уравнений. Чтобы понять физическую интерпретацию решения таких систем рассмотрим выражения для кинетической и потенциальной энергий , которые будут представлять собой квадратичные формы:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{n} c_{ik}q_i q_k$$

Возможно ли одновременное приведение двух квадратичных форм – кинетической и потенциальной энергии – к суммам квадратов (к канонической форме)? Другими словами, возможно ли подобрать для рассматриваемой системы такие обобщенные координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots\xi_n$, связанные с координатами $q_1, q_2, \ldots q_n$ соотношениями

$$q_1 = b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + \ldots + b_{1n}\xi_n,$$
$$q_2 = b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + \ldots + b_{2n}\xi_n,$$
$$q_n = b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2 + \ldots + b_{nn}\xi_n,$$

чтобы после подстановки в выражения для кинетической и потенциальной энергий, последние привелись к суммам квадратов

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \ldots + \dot{\xi}_n^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2)$$

Такое приведение возможно, если хотя бы одна из форм положительна. В нашем случае положительны обе формы. Координаты $\xi_i$, в которых кинетическая и потенциальная энергии выражаются суммами квадратов, называются *нормальными координатами* системы. В нормальных координатах уравнения малых колебаний системы приобретают простую форму.

$$\ddot{\xi}_1 + \lambda_1\xi_1 = 0$$
$$\ddot{\xi}_2 + \lambda_2\xi_2 = 0$$
$$\ddot{\xi}_n + \lambda_n\xi_n = 0$$

Переменные $\xi_i$ в этих уравнениях разделены, и интегрирование каждого уравнения может быть выполнено независимо от других. Например, решение k–го уравнения имеет вид

$$\xi_k = A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k) \text{ , где } \omega_k = \sqrt{\lambda_k}$$

Получается, система совершает одновременно n- независимых колебаний. Колебания, совершаемые нормальными координатами системы, носят название *нормальных колебаний*. Колебания системы, определяемые изменением только одной нормальной координаты, называются *главными колебаниями*.

Результирующее движение малых колебаний системы с n-степенями свободы представляет собой линейное наложение n- главных гармонических колебаний. *В разложении движения, совершаемого системой, на ряд простых гармонических колебаний и заключается физический смысл приведения к нормальным координатам*. Главные колебания системы чаще называют *собственными колебаниями*, а их частоты – *собственными частотами*.

В практической постановке задача нахождения решения системы дифференциальных уравнений малых колебаний сводится к нахождению частных решений, соответствующих главным колебаниям. Рассмотрим систему уравнений в исходных обобщенных координатах $q_1, q_2, \ldots q_n$.

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{1n}\ddot{q}_n = -c_{11}q_1 - c_{12}q_2 - \ldots - c_{1n}q_n$$
$$a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{2n}\ddot{q}_n = -c_{21}q_1 - c_{22}q_2 - \ldots - c_{2n}q_n$$
$$a_{n1}\ddot{q}_1 + a_{n2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{nn}\ddot{q}_n = -c_{n1}q_1 - c_{n2}q_2 - \ldots - c_{nn}q_n$$

Если система совершает одно из главных колебаний, все координаты $q_i$ изменяются по одному и тому же гармоническому закону $q_i = b_{ik}A_k\sin(\omega_k t+\alpha_k) = d_i\sin(\omega t+\alpha)$, подставляя эти выражения в систему уравнений получим

$$(a_{11}\omega^2 - c_{11})d_1 + (a_{12}\omega^2 - c_{12})d_2 + \ldots + (a_{1n}\omega^2 - c_{1n})d_n = 0,$$
$$(a_{21}\omega^2 - c_{21})d_1 + (a_{12}\omega^2 - c_{12})d_2 + \ldots + (a_{1n}\omega^2 - c_{1n})d_n = 0,$$
$$(a_{n1}\omega^2 - c_{n1})d_1 + (a_{n2}\omega^2 - c_{n2})d_2 + \ldots + (a_{nn}\omega^2 - c_{nn})d_n = 0,$$

Условие, при котором не все $d_i$ равны нулю одновременно, выражается равенством нулю определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11}\omega^2 - c_{11} & a_{12}\omega^2 - c_{12} & \cdots & a_{1n}\omega^2 - c_{1n} \\ a_{21}\omega^2 - c_{21} & a_{22}\omega^2 - c_{22} & \cdots & a_{2n}\omega^2 - c_{2n} \\ a_{n1}\omega^2 - c_{n1} & a_{n2}\omega^2 - c_{n2} & \cdots & a_{nn}\omega^2 - c_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Из уравнения могут быть найдены частоты колебаний и соответствующие им амплитуды. Уравнение называется уравнением частот или вековым уравнением.

**28. Физические эффекты в колебательных системах.**

В реальных физических системах, участвующих в колебательном движении всегда присутствуют силы сопротивления, действие которых уменьшает энергию системы. Уменьшение энергии проявляется в том, что колебания будут затухать, т.к. $E \sim A^2$ при уменьшении энергии до нуля амплитуда колебаний A также уменьшается до нуля. Наиболее часто встречающийся в механике случай соответствует силе сопротивления пропорциональной скорости движения тела $\boldsymbol{F} = -\gamma\dot{\boldsymbol{r}}$ . Рассмотрим систему с одной степенью свободы. Предположим на отдельные точки $M_i$ системы действуют силы сопротивления $\boldsymbol{F}_i = -\gamma_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$ . Обобщенная сила сопротивления будет равна

$$Q = -\sum_i \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q} = -\sum_i \gamma_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q}$$

с учетом преобразования $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}}$

$$Q = -\sum_i \gamma_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_i \frac{\gamma_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2}$$

Считая, что связи системы стационарны, имеем $\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q}\dot{q}$ и вводя $\gamma(q) = \sum_i \gamma_i \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q}\right|^2$ получим $Q = -\gamma(q)\dot{q}$

Составим уравнение Лагранжа с учетом силы сопротивления

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - Q$$

Подставляя кинетическую и потенциальные энергии $T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2$ и $\Pi = \frac{1}{2}cq^2$ получаем уравнение

$$a\ddot{q} + \gamma\dot{q} + cq = 0$$

которое, делением на коэффициент a, может быть приведено к виду

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_o^2 q = 0 \ , \qquad \text{где } 2\beta = \frac{\gamma}{a}, \ \omega_o^2 = \frac{c}{a}$$

Это дифференциальное уравнение *затухающих колебаний*, его решение имеет вид

$$q = q_o e^{-\beta \cdot t}\sin(\omega t + \alpha_o) \text{, где } \omega^2 = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$$

Видим, что будет проявляться эффект затухания колебаний, с течением времени амплитуда будет уменьшаться до нуля.

Другой случай – это вынужденные колебания. Вынужденные колебания возникают при действии возмущающих сил, являющихся заданными функциями времени. Пусть возмущающая обобщенная сила $Q_в = Q_в(t)$ является заданной функцией времени. Тогда уравнение Лагранжа, с учетом обобщенной силы сопротивления $Q_c$ , будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - Q_c - Q_в(t)$$

Подставляя выражения для кинетической и потенциальной энергий, а также обобщенную силу сопротивления получим уравнение вынужденных колебаний $\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_o^2 q = \frac{Q_в(t)}{a}$

Рассмотрим случай, вызывающий интересный эффект – явление резонанса. Пусть возмущающая обобщенная сила $Q_в = Q_в(t)$ изменяется во времени по гармоническому закону с частотой $\omega_в$

$$\frac{Q_в(t)}{a} = f_o\cos(\omega_в \cdot t)$$

Тогда решение уравнения вынужденных колебаний будет иметь вид

$$q = q_1\cos(\omega_в \cdot t - \alpha) + q_o e^{-\beta \cdot t}\sin(\omega \cdot t + \alpha_o)$$

где $q_1 = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_в^2)^2 + 4\beta^2\omega_в^2}}$ , $\alpha = arctg\frac{2\omega_в\beta}{\omega_o^2 - \omega_в^2}$

Если частота возмущающей обобщенной силы $\omega_в$ становится близка некоторой характерной для системы частоте колебаний $\omega_{рез}$ , амплитуда вынужденных колебаний $q_1$ достигает максимального значения. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний носит название резонанса. Величина $\omega_{рез}$ носит название резонансной циклической частоты и из условия максимума функции $q_1$ равна

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

В акустике и радиотехнике явление резонанса полезно, а в большинстве механических систем играет отрицательную роль