Введение

Данное пособие представляет собой систематизированное содержание лекций по курсу "Ведение в численные методы", который читается на втором курсе факультета ВМиК с 1994 г. и содержит последовательное изложение основных понятий, определений, теорем и утверждений, рассматриваемых и доказываемых на лекциях.

Интерполяция и квадратурные формулы

§ 1. Интерполирование

Опр. Пусть функция f(x) задана таблично на [a,b]:
$x_0 = a$, $x_n = b$, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots. < x_n$, $y_i = f(x_i)$ i = 0,..., n

Тогда построение непрерывной на [a,b] функции φ (x) , такой что $\varphi(x_i) = y_i$ называется интерполяцией функции f(x) на [a,b].

Опр. Пусть полином степени n $L_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ интерполирует y=f(x) на [a,b], т.е. $L_n(x_i) = y_i = f(x_i)$. Тогда $L_n(x)$ называется интерполяционным полиномом.

Утверждение. Интерполяционный многочлен степени n для функции y=f(x), заданной таблично в n+1 точках, существует и единственен.
Данное утверждение следует из того, что определитель Вандермонда отличен от нуля.
Существуют некоторые стандартные формы записи интерполяционных полиномов. Интерполяционный многочлен в форме **Лагранжа** имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i)\prod_{j\neq i}\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right].$$

Интерполяционный многочлен в форме **Ньютона** имеет вид

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})\,y(x_0;x_1;\ldots;x_i),$$

где

$$y(x_i;x_j) = \frac{y(x_i) - y(x_j)}{x_i - x_j},$$

$$y(x_i;x_j;x_k) = \frac{y(x_i;x_j) - y(x_j;x_k)}{x_i - x_k}$$

$$y(x_i;x_j;x_k;x_m) = \frac{y(x_i;x_j;x_k) - y(x_j;x_k;x_m)}{x_i - x_m}$$

. . . - выражения такого вида называются **разделенными разностями** .

Теорема.
Пусть функция y=f(x) имеет n+1 непрерывную производную на [a,b], и $L_n(x)$ - интерполяционный многочлен, $L_n(x_i) = f(x_i)$, i=0,1,..., n. Тогда для погрешности интерполяции ψ (x) = п L(x) - f(x)п справедлива оценка

$$\psi(x) \le \frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|\omega_n(x)\right|$$

где

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Полиномы Эрмита

Полиномы Эрмита интерполируют таблично заданную функцию с учетом известных значений производной в узлах сетки.
Пусть заданы n+1 узлов x_i , $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, значения функции в них $y_i = f(x_i)$ и значения производной в них $y_i' = f'(x_i)$ i = 0,..., n. Требуется построить полином $P_{2n+1}(x)$ такой, что $P_{2n+1}(x_i) = y_i$, $P_{2n+1}'(x_i) = y_i'$. Этот полином и называется полиномом **Эрмита**.

Интерполяция сплайнами

Пусть функция y=f(x) задана таблично :
$x_0 = a$, $x_n = b$, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots. < x_n$, $y_i = f(x_i)$ i = 0,..., n.

Кубической сплайн-интерполяцией называется функция φ (x) такая, что
$\varphi(x_i) = f(x_i)$, i=0,1,...,n ,

$\varphi'(x_i-0) = \varphi'(x_i+0)$, $\varphi''(x_i-0) = \varphi''(x_i+0)$ i=1,...,n-1 (1)

$\varphi''(x_0) = 0$, $\varphi''(x_n) = 0$, и $\varphi(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$, x_{i-1} ё x ё x_i

Величины коэффициентов a,b,c,d, находятся из системы уравнений (1). Для нахождения значений этих коэффициентов удобно, с помощью последовательного исключения неизвестных, редуцировать систему (1) к системе трехточечных уравнений относительно коэффициентов c_i , и решать ее далее с помощью метода прогонки (см. далее).

§ 2. Квадратурные формулы

Выражение вида $$S = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i), \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

предназначенное для вычисления определенного интеграла $$I = \int_a^b f(x)dx$$ называется квадратурной формулой.
Величина R=I - S называется погрешностью квадратурной формулы.

Формула прямоугольников

Простая : $S_0 = (b-a) f((b+a)/2)$, $R_0 = -(b-a)^3$ f --(ξ)/ 24 , ξ O (a,b)

Составная: $$S = h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \qquad R_{0,n} = -\frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi$$, h=(b-a)/n

Формула трапеций

Простая : $S_1 = (b-a)(f(b) + f(a))/ 2$, $R_1 = (b-a)^3$ f --(ξ)/ 12 , ξ O (a,b)

Составная: $$S = h\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \qquad R_{1,n} = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi$$, h=(b-a)/n

Формула Симпсона

Простая : $S_2 = (b-a)(f(a) + 4f((b+a)/2) + f(b))/ 6$,

$R_2 = (b-a)^5 f^{(4)}(\xi)/ 90$, ξ O (a,b)

Составная: $$S = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + f_n\right] \quad R_{2,n} = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi$$,
h=(b-a)/n, здесь - четное число.

Формулы Гаусса

В квадратурных формулах Гаусса ищутся не только коэффициенты C_i , но и точки x_i - из соображений обеспечения точности квадратурной формулы для полинома максимальной степени.

Квадратурная формула Гаусса $$S = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$ будет точна для произвольного полинома степени 2n+1,если величины c_i и x_i удовлетворяют системе уравнений:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{(b-a)^{k+1}}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^k = c_0 x_0^k + c_1 x_1^k + \ldots + c_n x_n^k \qquad ,k = 0,1,\ldots,2n+1$$

Можно показать, что узлы x_j квадратурной формулы на отрезке [-1,1] являются корнями полинома **Лежандра**:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left\{(x-1)^n (x+1)^n\right\}$$,

а коэффициенты квадратурной формулы вычисляются по формулам

$$C_m = \int_{-1}^{1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\ldots(x-x_n)}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})(x-x_{m+1})\ldots(x_m-x_n)}dx, \quad m = 0,\ldots,n$$

Решение систем линейных уравнений

Постановка задачи

Найти вектор **x** , удовлетворяющий уравнению
A**x** = f ,
где A - квадратная матрица порядка n,
A = { $a_{i,j}$ }, i,j = 1,2,...,n, $\mathbf{x}^T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $f^T = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$,
или, что тоже самое, найти $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяющие системе уравнений

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = f_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = f_2$

....

$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = f_n$

§ **1. Прямые методы**

Метод Гаусса состоит в приведении матрицы к треугольному виду.
Приведение матрицы к треугольному виду осуществляется по формулам

$$a_{ml}^{[k+1]} = a_{ml}^{[k]} - \frac{a_{mk}^{[k]}}{a_{kk}^{[k]}} a_{kl}^{[k]}$$

$$\varphi_m^{[k+1]} = \varphi_m^{[k]} - \frac{a_{mk}^{[k]}}{a_{kk}^{[k]}} \varphi_k^{[k]}$$

, m= k+1,...,n, l= k,..., n, k=1,...,n-1.
(прямой ход метода Гаусса), в результате чего получается система

$a^{(n)}_{11} x_1 + a^{(n)}_{12} x_2 + \ldots + a^{(n)}_{kk} x_k + \ldots + a^{(n)}_{1n} x_n = \varphi^{(n)}_1$

$a^{(n)}_{22} x_2 + \ldots + a^{(n)}_{kk} x_k + \ldots + a^{(n)}_{2n} x_n = \varphi^{(n)}_2$

....

$a^{(n)}_{kk} x_k + \ldots + a^{(n)}_{kn} x_n = \varphi^{(n)}_k$

....

$a^{(n)}_{nn} x_n = \varphi^{(n)}_n$

Вычисление решения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ осуществляется следующим образом

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(n)}} \left[\varphi_k^{(n)} - \sum_{l=k+1}^{n} a_{kl}^{(n)} x_l \right], \quad k = n, n-1, \ldots, 1$$

(формулы обратного хода Гаусса)
Общее число действий в методе Гаусса порядка $(n^3 + 3n^2)/3$.
Метод прогонки
Метод прогонки применяется для решения систем линейных уравнений с матрицей специального вида - трехдиагональной матрицей :

$- a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i$ i=2, ... , n-1

$x_1 = \kappa_1 x_2 + \nu_1$ (2)

$x_n = \kappa_2 x_{n-1} + \nu_2$

На первом этапе находятся коэффициенты

$\alpha_{i+1} = b_i / (c_i - a_i \alpha_i)$, $\beta_{i+1} = (\beta_i a_i + f_i) / (c_i - a_i \alpha_i)$ i=2, ... , n-1 (прямой ход), $\alpha_2 = \kappa_1$, $\beta_2 = \nu_1$,

а на втором этапе находится решение

$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}$, i = n-1, ... ,2,1

$x_n = (\nu_2 + \beta_n) / (1 - \alpha_{n\,\kappa\,2})$.

Для корректности метода прогонки достаточно, чтобы коэффициенты α_i были по модулю меньше единицы, а выражения в знаменателях формул были отличны от нуля. Достаточные условия корректности прогонки формулируются в следующих теоремах.
Теорема
Пусть система уравнений (2) такова, что $a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > 0$, c_i Ё $a_i + b_i$, i=2,..., n-1, и п $\kappa_{1п}$ + п $\kappa_{2п}$ <2, п $\kappa_{1п}$ ё 1, п $\kappa_{2п\,ё}$ 1.

Тогда метод прогонки корректен.

Теорема
Пусть система уравнений (2) такова, что $a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > 0$, c_i Ё $a_i + b_i$, i=2,..., n-1, и существует i_0 >1 такое, что $c_{i0} > a_{i0} + b_{i0}$, и п $\kappa_{1п}$ ё 1, п $\kappa_{2п\,ё}$ 1.

Тогда метод прогонки корректен.
Теорема
Пусть система уравнений (2) такова, что з a_{i_3} , з b_i з ,з c_i з >0, з c_i з > з a_{i_3} + +з b_i з , i=2,..., n-1, и п $\kappa_{1п}$ ё 1, п $\kappa_{2п\,ё}$ 1.

Тогда метод прогонки корректен.

§ **2. Итерационные методы**

Канонический вид одношаговых итерационных методов для решения системы линейных алгебраических уравнений A**x** = **f** :

$$B_{k+1}\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau_{k+1}}+Ax_k=f\ ,\ k=0,1,2,\dots,$$

где B_{k+1} - квадратная матрица nf n , $\tau_{k+1}>0$ - итерационный параметр. В дальнейшем будем использовать следующие согласованные нормы в конечномерном пространстве размерности n:

$$\|y\|=\sqrt{(y,y)}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}y_j^{\,2}}$$

- евклидова норма

- норма в C $\|y\|_C=\max|y_j|$

- энергетическая норма A=A*>0 $\|y\|_A=(Ay,y)$

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}$$

Под нормой матрицы A будем понимать

Итерационный метод сходится, если $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k-x\|=0$.

Опр. Величина $z_k = x_k - x$ называется погрешностью решения.

Опр. Если B_{k+1} = B и $\tau_{k+1}=\tau$ то метод называется стационарным

Теорема.

Пусть A=A* >0, и B- 0.5τ A>0 тогда итерационный метод

$$B\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau}+Ax_k=f\ ,\ k=0,1,2,\dots,$$

сходится в норме к к * к к $_A$, $\|z\|_A=\sqrt{(Az,z)}$.

Метод Зейделя

Каноническому виду метода Зейделя соответствует B=(D+L), τ =1, где D -диагональная матрица, L - нижняя треугольная матрица

$$\|z\|_A=\sqrt{(Az,z)}$$

Индексный вид метода Зейделя

$$\sum_{j=1}^{i}a_{ij}x_j^{k+1}+\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{k}=f_i\quad i=1,\dots,n$$

Теорема

Пусть A=A*>0, тогда метод Зейделя сходится.

Теорема

Пусть матрица A такова, что $\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\le q|a_{ii}|$ i=1,..., n, к qк <1, тогда метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q, т.е.

$$\|z^{k+1}\|=\|x^{k+1}-x\|\le|q|^{k+1}\|x^0-x\|=|q|^{k+1}\|z^0\|.$$

Метод релаксации

Канонический вид

$$(L+\frac{1}{\omega}D)(x^{k+1}-x^k)+Ax^k=f\qquad(\tau=1)$$

ω < 1- метод нижней релаксации

ω = 1- метод Зейделя

ω > 1- метод верхней релаксации

Теорема Пусть A=A*>0, 0<ω <2, тогда метод релаксации сходится.

Метод простой итерации

Канонический вид метода простой итерации -

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau}+Ax_k=f$$

Теорема

Пусть $A=A^*>0$, $\tau\le\dfrac{2}{\|A\|}$, тогда метод простой итерации сходится.

Замечание. Если $A=A^*>0$ то у матрицы A существует n собственных значений λ_k таких, что

$0<\lambda_{min}=\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_{n-1}<\lambda_n=\lambda_{max}$,

при этом $\|A\|=\lambda_{max}$ и $\lambda_{min}E\le A\le\lambda_{max}E$.

Можно найти оптимальное значение итерационного параметра $\tau=\tau_0$ такое, что заданная точность решения будет достигаться за минимальное число итераций.

Теорема

Пусть $A=A^*>0$, тогда при $\tau=\tau_0=\dfrac{2}{\lambda_{min}+\lambda_{max}}$ для погрешности явного метода простой итерации z_k справедлива оценка

$$\|z_{k+1}\|\le\rho_0\|z_k\|,\quad \rho_0=\frac{1-\xi}{1+\xi},\ \xi=\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}.$$

Основы теории разностных схем

§ 1. Основные понятия

Опр. Пусть дан отрезок [a,b]. Равномерной сеткой на этом отрезке назовем множество узлов ω_h такое, что $\omega_h=\{x_j=jh,\ j=0,\ldots,n,\ h=(b-a)/n\}$.

Опр. Сеточной функцией $y=y_j=y(x_j)$ называется функция, заданная в узлах сетки.

Любую сеточную функцию $y_j=y(x_j)$ можно представить в виде вектора $Y=(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$, и, следовательно, множество сеточных функций образует конечномерное пространство, в данном случае размерности n+1. В этом пространстве можно ввести норму, например

$\|y\|_C=\max\limits_{0\le i\le n}|y_i|$ или $\|y\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}y_i^2\right)^{1/2}$.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$Lu(x)=f(x,u)$ (например, $\dfrac{du}{dx}=f(x,u)$).

Заменим Lu в узле сетки x_i линейной комбинацией значений сеточной функции y_i на некотором множестве узлов сетки, называемом шаблоном. Такая замена Lu на $L_h y_h$ называется аппроксимацией на сетке дифференциального оператора L разностным оператором L_h. Замена непрерывной функции f(x,u) в узлах сетки на сеточную функцию $\varphi(x_h,y_h)$ называется аппроксимацией правой части.

Таким образом дифференциальное уравнение можно аппроксимировать (заменить) на сетке **разностной схемой**

$L_h y_h=\varphi(x_h,y_h)$ (например, $\dfrac{y_{j+1}-y_j}{h}=f\left(x_j,y_j\right)$).

Изучение разностных аппроксимаций проводится сначала локально, т.е. в любом фиксированном узле сетки.

Пусть u_h - проекция непрерывной функции u(x) на сетку (например, $u_h=u(x_j)=u_j$).

Опр. Погрешностью аппроксимации дифференциального оператора Lu разностным оператором L_h назовем величину $\psi_1=(Lu)_h-L_h u_h$, где $(Lu)_h$ - проекция на сетку результата действия дифференциального оператора L на функцию u

(например, $\dfrac{du}{dx}(x_j)$).

Опр. Говорят, что погрешность аппроксимации дифференциального оператора имеет в узле x_i порядок k , если $\psi_1(x_i)=O(h^k)$ – 0 при h– 0.

Опр. Погрешностью аппроксимации правой части f сеточной функцией φ_h назовем величину $\psi_2=f_h-\varphi_h$, где f_h - проекция на сетку функции f(x,u) (например, $f(x_j,u_j)$).

Опр. Погрешность аппроксимации правой части имеет в узле x_i порядок m , если $\psi_2=O(h^m)$ – 0 при h– 0

Опр. Погрешностью аппроксимации разностной схемы на решении в узле x_i (локальной погрешностью) назовем величину ψ, равную

$\psi = \psi_1 - \psi_2 = (Lu)_h - L_h u_h - (f_h - \varphi_h) = \varphi_h - L_h u_h$,

здесь использовано, что Lu=f.

$$\left(\text{например } \psi = \frac{du}{dx}(x_j) - \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \left(f\left(x_j, u_j\right) - f(x_j, u_j)\right), \text{ здесь } \psi_2 = 0. \right).$$

Опр. Значения локальной погрешности аппроксимации в каждом узле x_i образуют сеточную функцию погрешности аппроксимации ψ_i .

Обычно требуется оценка погрешности аппроксимации на сетке, т.е. оценка функции ψ_i в некоторой сеточной норме.

Опр. Говорят, что погрешность аппроксимации разностной схемы имеет m-ый порядок на сетке, если ч к ψ ч к = O(h^m).

Опр. Решение разностной схемы сходится к решению дифференциального уравнения с порядком k на сетке, если погрешность решения ч к z_h ч к =ч ace=Symbol>к u_h - y_h ч к = O(h^k) – 0 при h– 0.

§ 2.Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

Требуется найти численное решение задачи **Коши** для ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t,u), \quad 0 < t < T, \quad u = u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

На отрезке [0,T] вводим разностную сетку w_t = { $t_n = n\tau$, n=0,...,N, τ =T/N } и сеточную функцию $y_n = y(t_n)$.

Метод Эйлера

1.Явный метод Эйлера.

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f\left(t_n, y_n\right) \qquad n = 0,1,\ldots,N \\ y_0 = u_0 \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации явного метода Эйлера $\psi = O(\tau)$ - первого порядка ($\psi_1 = O(\tau)$, $\psi_2 = 0$).

Одним из способов повышения порядка сходимости разностных схем для ОДУ является использование **методов Рунге-Кутта**.

Общий вид схем Рунге -Кутта для решения задачи Коши для ОДУ первого порядка имеет следующий :

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = p_1 k_1 + p_2 k_2 + \ldots + p_l k_l \\ k_1 = f\left(t_n, y_n\right) \\ k_2 = f\left(t_n + \alpha_2\tau, y_n + \alpha_2\tau k_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \alpha_3\tau, y_n + \alpha_3\tau k_2\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_l = f\left(t_n + \alpha_l\tau, y_n + \alpha_l\tau k_{l-1}\right) \\ \sum\limits_{i=1}^{l} p_i = 1, \quad p_i > 0, i = 1,\ldots,l \end{cases}$$

Величины p_k и α_k выбираются из соображений аппроксимации.

Метод Рунге - Кутта второго порядка

Величины p_1, p_2 , α определяются из условия второго порядка аппроксимации, для данной схемы $p_1 = (2\alpha - 1)/\alpha$, $p_2 = 1/2\alpha$.

Метод Рунге- Кутта второго порядка можно записать в другом виде

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-y_n}{\tau} = \sigma f\Big(t_n + \alpha\tau, y_n + \alpha\tau f(t_n, y_n)\Big) + (1-\sigma) f\big(t_n, y_n\big) \\ (1-\sigma)\,\alpha = \dfrac{1}{2}, \quad 0 < \sigma < 1 \end{cases}$$

Условие второго порядка аппроксимации (1-σ)α =0.5.

На практике широко распространен **Метод Рунге - Кутта четвертого порядка :**

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-y_n}{\tau} = \dfrac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] \\ k_1 = f\big(t_n, y_n\big) \\ k_2 = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, y_n + \dfrac{\tau k_1}{2}\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, y_n + \dfrac{\tau k_2}{2}\right) \\ k_4 = f\big(t_n + \tau, y_n + \tau k_{i-1}\big) \end{cases}$$

Данная схема имеет четвертый порядок аппроксимации.

Другую возможность для повышения порядка сходимости разностных схем для решения ОДУ предоставляют **Методы Адамса.**

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} = b_0 f_{n+1} + b_1 f_n + \ldots + b_p f_{n-(p-1)}$$

$$\sum_{i=0}^{p} b_i = 1, \quad f_j = f(x_j, y_j)$$

В методах Адамса коэффициенты b_i находятся из условий наивысшего для данного p порядка погрешности аппроксимации.

Методы Адамса являются многошаговыми и являются разновидностью p - шаговых методов. P-шаговый метод может быть записан в следующем общем виде:

$$\frac{a_0 y_{n+1} + a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \ldots + a_p y_{n-(p-1)}}{\tau} = b_0 f_{n+1} + b_1 f_n + \ldots + b_p f_{n-(p-1)}$$

$$\sum_{i=0}^{p} b_i = 1, \quad \sum_{i=0}^{p} a_i = 0, \quad f_n = f(t_n, y_n)$$

P- шаговому методу Адамса соответствует набор коэффициентов a $_i$ вида

$a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = \ldots = a_p = 0$

Явный двухшаговый метод Адамса.

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} = \frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \qquad n = 1,2,\ldots$$

Погрешность аппроксимации имеет второй порядок. Для нахождения y_1 (со вторым порядком) используется обычно схема Рунге-Кутта второго порядка.

Неявный двухшаговый метод Адамса.

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}=\frac{1}{6}\left[\frac{5}{2}f_{n+1}+4f_n-\frac{1}{2}f_{n-1}\right]\quad n=1,2,\ldots$$

Погрешность аппроксимации имеет третий порядок . Для начала решения задачи Коши для ОДУ первые p шагов нужно сделать с помощью какого-либо другого метода, например, метода Рунге - Кутта.

§ 3. Разностная схема для решения краевой задачи второго порядка

Рассмотрим задачу для уравнения второго порядка с краевыми условиями первого рода

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dx^2}-qu=f(x), \quad u=u(x), \quad 0<x<1\\ u(0)=\mu_0 \qquad q=const>0\\ u(1)=\mu_1\end{cases}$$

Разностная аппроксимация второй производной на равномерной сетке ω_h простейшего вида имеет второй порядок аппроксимации:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\approx\frac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}, \qquad \psi=O(h^2)$$

Тем самым разностная схема второго порядка аппроксимации для краевой задачи с краевыми условиями первого рода имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}-qy_j=f_j \quad j=1,\ldots,n-1\\ y_0=\mu_o\\ y_n=\mu_1\end{cases}$$

Данная разностная схема может быть решена при помощи метода прогонки, который устойчив при q>0. Для применения метода прогонки разностную схему удобно переписать в виде

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{h^2}y_{j-1}+(q+\dfrac{2}{h^2})y_j-\dfrac{1}{h^2}y_{j+1}=-f_j \quad j=1,\ldots,n-1\\ y_0=\mu_o\\ y_n=\mu_1\end{cases}$$

На практике часто встречается задача с краевыми условиями первого и второго рода:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dx^2}-qu=f(x), \quad u=u(x), \quad 0<x<1\\ u(0)=\mu_0 \qquad q=const>0\\ \dfrac{du}{dt}(1)=\mu_1\end{cases}$$

Разностная схема аппроксимирующая краевую задачу с краевым условием второго рода требует специальной аппроксимации первой производной в краевом условии со вторым порядком аппроксимации:

$$\begin{cases}\dfrac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}-qy_j=f_j \quad j=1,\ldots,n-1\\ y_0=\mu_o\\ \dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}+\dfrac{h}{2}(f(1)+qy_n)=\mu_1\end{cases}$$

При аппроксимации первой производной использован тот факт, что исходное дифференциальное уравнение справедливо и в точке x=1. Решение данной разностной схемы может быть получено с помощью метода прогонки, для чего удобно записать разностную схему в виде:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{h^2} y_{j-1} + (q + \dfrac{2}{h^2}) y_j - \dfrac{1}{h^2} y_{j+1} = -f_j \quad j = 1,\ldots,n-1 \\ y_0 = \mu_o \\ y_{n-1} = y_n + \dfrac{h^2}{2}(f(1) + q y_n) - \mu_1 h \end{cases}$$

§ 4. Разностная задача на собственные значения

Дифференциальная задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0 \quad u = u(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Числа λ и соответствующие функции $u(x) \neq 0$, удовлетворяющие поставленной краевой задаче называются собственными числами и собственными функциями соответственно. Для данной задачи

$$u_m(x) = \sin(\pi m x), \quad \lambda_m = (\pi m)^2, \quad m = 0,1,\ldots.$$

Заметим, что функции $u_m(x)$ являются линейно независимыми и взаимно ортогональными и могут быть нормированы.

Для разностной задачи на собственные значения

$$\begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + \lambda y_j = 0 \quad j = 1,\ldots,n-1 \\ y_0 = 0 \\ y_n = 0 \end{cases}$$

соответствующие собственные функции и собственные значения разностной задачи имеют вид

$$y_m(x_j) = \sin(\pi m x_j), \quad \lambda_m = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{\pi m h}{2}), \quad m = 1,2,\ldots,n-1$$

Заметим, что функции $y_m(x)$ являются линейно независимыми и взаимно ортогональными, как и в дифференциальном случае, и могут быть нормированы