

Билет 1: Краевая задача

$$u'' - u = -1$$
$$u(0) = u(1) = 0$$
$$h = 1/4$$

Написать разностную задачу. Получить решение дифференциальной и разностной задачи.

Ответ:

$$Y_1 = Y_3 = 0.0849$$

$$Y_2 = 0.1127$$

Билет 2: Задача Коши

$$u' + xu^2 = 0$$

$$u(1) = 1$$

(Видимо) определить погрешность

Решение методом Рунге-Кутты

Ответ: $u(1+h) = 1 - h + 0.5h^2 - 1/4h^4 + O(h^5)$ (точное решение)

$$Y_1 = 1 - h + 0.5h^2 + 0.5h^3 - 0.5h^4 = y(1+h)$$

$$Y(1+h) - u(1+h) \approx 0.5h^3$$

Билет 3: $u'(x) + xu^2 = 0$, $u(1) = 1$.

(видимо) определить погрешность

$$y(1+h) = 1 - h + 0.5h^2 + 0.25h^3 - 0.125h^4 + \dots$$

$$y(1+h) - u(1+h) \approx h^3/4$$

Билет 4: $u'(x) + (1+x)u^3 = 0$, $u(0) = 1$;

Сделать 1 шаг по методу Рунге-Кутты с $h = 0.05$, $\alpha = 1$

Ответ: $u(h) = 0.95238$, $y(h) = 0.95250$

Билет 5: Доказать, что для такой задачи

$$\frac{du}{dt} = -u^2, \quad 0 < t < 1/u_0, \quad u(0) = u_0 > 0$$

разностная схема $\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = y_n * y_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$

является точной, т.е. $y_n = u(t_n)$

Билет 6: Вычислить $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ с помощью квадратурной формулы

Гаусса с 3-мя узлами

Ответ: $I_h = 0.6931216$

Билет 7: Методом Симпсона с шагом $h = 1/4$ вычислить интеграл

$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$. Дать априорную и апостериорную оценки

погрешности.

Ответ: $I_h = 0.6931545$

$$|\psi| \leq 3.255 \cdot 10^{-5}$$

$$I_h - I = 8 \cdot 10^{-6}$$

Билет 8: С помощью квадратурной формулы Гаусса с двумя узлами вычислить интеграл

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

$$\text{Ответ: } I_h = 0.6923$$

Билет 9: Для $n=3$ построить квадратурные формулы интерполяционного типа

$$\rho(x) \equiv 1, x_1 = a, x_2 = b$$

$$\text{Ответ: } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

Билет 10: Построить интерполяционный многочлен 2-ой степени

$$f(x) = \cos(x), x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ответ: } L_2(x) = -\frac{3}{\pi^2} x^2 - \frac{1}{2\pi} x + 1$$

Билет 11: Построить интерполяционный многочлен функции $u =$

$$\frac{1}{1+x^2} \text{ второй степени по ее значениям в точках } x_0 = 1, x_1 = 0.5, x_2 = 1$$

$$\text{Ответ: } L_2(x) = -0.2x^2 - 0.3x + 1$$

Билет 12: Построить интерполяционный многочлен 2-ой степени функции

$$y = \frac{1}{1-x}$$

$$x_0 = -1, x_1 = -0.5, x_2 = 0$$

и вычислить его значение в точке $x = 0.5$

$$\text{Ответ: } L_2(x) = \frac{1}{3} x^2 + \frac{5}{6} x + 1$$

Билет 13: Построить сплайн для функции $f(x) = \frac{1}{1+x}$ на $[0, 2]$,

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$$

Ответ: на $[0, 1]$

$$S_1 = 0.5 - \frac{14}{81}(x-1) - \frac{1}{108}(x-1)^2 - \frac{109}{184}(x-1)^3$$

На $[1, 2]$

$$S_2 = \frac{1}{3} - \frac{47}{324}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2 + \frac{5}{324}(x-2)^3$$

Билет 14: Выписать систему уравнений, определяющих кубический сплайн с условием периодичности

Ответ:

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), \quad i=1 \dots N-1$$

$$c_0 = c_N; \quad c_1 = c_{N+1}; \quad \dots$$

$$h_0 = h_N; \quad f_0 = f_N$$

Билет 15: Решить СЛАУ методом Гаусса

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 23$$

$$5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11$$

$$5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3$$

Ответ : $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3$

Билет 16: $2x + y = 4$

$$x + y = 3$$

Записать метод простой итерации и определить, при каких τ он сходится, $x_0 = y_0 = 0$; $\tau = 2/3$, построить две первые итерации.

Ответ: $\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} + 2x_n + y_n = 4$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + x_n + y_n = 3$$

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{\max}(A)} \quad \lambda_{\max} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.618$$

8/3

4/9

2

8/9

ı

ı

right

right

На первом шаге итерации получим

ı

ı

ı

ı

ı

ı

(ı)ı

(ı)ı

ı

ı

ı

ı

Билет 17: Найти число обусловленности матрицы

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.01 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.01 \end{matrix}$$

Ответ: 200

Билет 18: Найти число умножений, требуемых для перемножения двух матриц $y = Ax$ (порядок матрицы $A = m$).

Ответ: m^2

Билет 19: Найти число умножений, требуемых для перемножения двух квадратных матриц $y=AB$ (порядок матриц A и $B=m$)

Билет 20: $y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}=f_i$

$i=1,2,\dots,N-1, y_0=m_1, y_N=m_2$

Выписать формулы прогонки, посчитать число умножений и делений, определить, устойчива ли она.

Ответ: $\alpha_{i+1}=\frac{1}{1-\alpha_i}, \beta_{i+1}=\frac{\beta_i+f_i}{1-\alpha_i}, i=1\dots N-1$

$\alpha_1=0, \beta_1=m_1$

Число делений = $2(N-1)$

Число умножений = $N-1$

Прогонка устойчива. Ахуеть, да?