Метод Гаусса.

Число делений: $Q_1 = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$,

Число арифм операций $Q = Q_2 + Q_3 = \frac{1}{3}n(n-1)\left(n+\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$.

Число вычислений растет пропорционально n^3

-<u>Прогонка</u>

$$A_i x_{i-1} + C_i x_i + B_i x_{i+1} = F_i,\ i = 1,...,n-1, \quad x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1},\ 0 \le i \le n-1.$$

$$x_0 = q_0,\ x_n = q_n, \qquad \alpha_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i\alpha_i + C_i},\ \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i\beta_i}{A_i\alpha_i + C_i},\ i = 1,2,\ldots n-1.$$

Число вычислений растет пропорционально n

<u>Обусловленность.</u>

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \|A\| = \sup_{\|z\|=1}\|A\mathbf{z}\|. \quad \delta\mathbf{x} = A^{-1}\delta\mathbf{f}. \quad M_A = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \quad \bar{M}_A \ge |\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|,$$

Фита$_к$=Ах$_к$-f -невязка

Следуя Адамару, будем называть математическую задачу корректной, если выполняются три условия:
1. Решение задачи существует.
2. Решение задачи единственное.
3. Решение задачи непрерывно зависит от входных данных.

<u>Итерационные:</u>
При их применении ответ получается в процессе построения последовательных приближений $\mathbf{x}_k = \{x_1^k, x_2^k, \ldots x_n^k\}$ итераций, сходящихся к решению системы в пространстве $_nE$ с евклидовой нормой x $\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}$

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = \lim_{k\to\infty}\sqrt{(x_1^k - x_1)^2 + (x_2^k - x_2)^2 + \cdots + (x_n^k - x_n)^2} = 0.$$

В частности, в простейшем случае очередной член последовательности m_{1k+}**x** может выражается только через предыдущий :

$\mathbf{x}_{k+1} = F(\mathbf{x}_k)$. Такие итерационные алгоритмы называют одношаговыми.

$$B_{k+1}\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\tau_{k+1}} + A\mathbf{x}_k = \mathbf{f},\ \det B_{k+1} \ne 0,\ \tau_{k+1} > 0.$$

Теорема Самарского

Пусть A - самосопряженная положительно определенная матрица:

$$A = A^*,\ A > 0, \qquad (84)$$

$B - \frac{\tau}{2}A$ *- положительно определенная матрица, τ - положительное число:*

$$B - \frac{\tau}{2}A > 0,\ \tau > 0. \qquad (85)$$

Тогда при любом выборе нулевого приближения $\mathbf{x}_0$ итерационный процесс, который определяется рекуррентной формулой (65), сходится к решению исходной системы (62).

Метод простой итерации.

Такое название получил метод, при котором в качестве матрицы B выбирается единичная матрица: $B=E$ а итерационный параметр τ предполагается независящим от номера итерации к. Иными словами, метод простой итерации – это явный стационарный метод, когда очередная итерация вычисляется по рекуррентной формуле $\mathbf{x}_{k+1} = (E - \tau A)\mathbf{x}_k + \tau\mathbf{f}$

$\tau_* = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} < \tau_0$. - оптимальный выбор итерационног параметра.0<t<2/Лмах

Метод зейделя и верхней релаксации.

$$(D + T_H)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + A\mathbf{x}_k = \mathbf{f},$$

Метод с разделение матрицы на части). $A = D + T_H + T_B$,

$$(D + T_H)\mathbf{x}_{k+1} + T_B\mathbf{x}_k = \mathbf{f}.$$

$$(D + \omega T_H)\frac{(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)}{\omega} + A\mathbf{x}_k = \mathbf{f}.$$

$$\left(\frac{1}{\omega}D + T_H\right)\mathbf{x}_{k+1} + \left[\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)D + T_B\right]\mathbf{x}_k = \mathbf{f}.$$

$$B = D + \omega T_H,\ \tau = \omega > 0.$$

Интерполирование полиномами.Лагранж.

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена некоторая функция $y = f(x)$, однако полная информация о ней недоступна. Известны лишь ее значения в конечном числе точек $x_0, x_1, \dots x_n$, этого отрезка, которые мы будем считать занумерованными в порядке возрастания:

$$a \le x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots x_n \le b. \qquad (1)$$

Требуется по известным значениям

$$y_i = f(x_i),\ i = 0,1,\dots,n \qquad (2)$$

«восстановить», хотя бы приближенно, исходную функцию $y = f(x)$, то есть построить на отрезке $[a,b]$ функцию $F(x)$, достаточно близкую к $f(x)$. Функцию $F(x)$ принято называть интерполирующей функцией, точки $x = x_0, x = x_1, \dots x = x_n$ - узлами интерполяции.

$$\varphi_0(x) = 1;\quad \varphi_1(x) = x;\quad \varphi_2(x) = x^2,\quad \dots\quad \varphi_n(x) = x^n.$$

Лагранж: $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) Q_{n,i}(x)$,

По грешность интерполирования.

$R_n(x) = f(x) - P_n(x),\ x \in [a,b]$. $R_n(x_i) = 0$ при $i = 0,1,\dots,n$, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$.

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,$$

Интерполирование с кратным узлами. Эрмит.

Расширим постановку задачи об интерполяции. Ранее полагалось, что в узлах интерполяции заданы только значения функции $f(x)$. Пусть теперь в узлах $x_k \in [a,b]$, $k = 0,1,\ldots m$, среди которых нет совпадающих, заданы значения функции $f(x_k)$, и её производных $f^{(i)}(x_k)$, $i = 1,2,\ldots,N_k - 1$ до $(N_k - 1)$-го порядка включительно. Числа N_k при этом называют кратностью узла x_k. В каждой точке x_k, таким образом, задано N_k величин:

$$f(x_k), f'(x_k), \ldots f^{(N_k-1)}(x_k).$$

В общей сложности на всей совокупности узлов $x_0, x_1, \ldots, x_m$ известно $N_0 + N_1 + \ldots + N_m$ величин, что дает возможность ставить вопрос о построении полинома $H_n(x)$ степени

$$n = N_0 + \ldots + N_m - 1, \tag{38}$$

удовлетворяющего требованиям:

$$H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k),\ k = 0,1,\ldots,m,\ i = 0,1,\ldots,N_k - 1. \tag{39}$$

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,$$

Интерполирование сплайнами.

Определение:

Назовем кубическим сплайном функции $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ на сетке (54) функцию $S(x)$ удовлетворяющую условиям:

- **S1.** *На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S(x)$ является полиномом третьей степени.*
- **S2.** *Функция $S(x)$, её первая $S'(x)$ и вторая $S''(x)$ производные непрерывны на сегменте $[a,b]$.*
- **S3.** $S(x_i) = f(x_i) = f_i$, $i = 0,\ldots,n$
- **S4.** *На концах сегмента $[a,b]$ функция $S''(x)$ удовлетворяет условиям $S''(a) = S''(b) = 0$.*

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3,\ x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1,\ldots,n.$$

$$b_i = \frac{1}{2}h_i c_i - \frac{1}{6}h_i^2 d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h},\ i = 1,\ldots,n,$$

$$a_i = f(x_i) = f_i,\ i = 1,\ldots,n$$

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}.$$

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ таков, что при любой сетке, удовлетворяющей условию $h < \delta$ справедливо неравенство*

$$|f(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b], \tag{86}$$

иными словами $S_h(x)$ при $h \to 0$ равномерно сходится к непрерывной функции $f(x)$.

Метод наименьших квадратов.

Найти такой, набор коэффициентов a_k, при которых суммарная квадратичная погрешность J оказывается минимальной.

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x), \quad m < n,$$

$$J = \sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x_i))^2.$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = -2\sum_{i=0}^{n}(y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x_i))\varphi_l(x_i) = 0 \quad l = 0,1,\ldots,m. \quad \sum_{k=0}^{m}\gamma_{lk}a_k = b_l, \quad l = 0,1,\ldots,m,$$

Симпосон.

$$I = P_n + \alpha_n. \qquad \gamma_{lk} = \sum_{i=0}^{n}\varphi_l(x_i)\varphi_k(x_i),$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = T_n + \beta_n, \qquad I = \int_a^b f(x)\,dx = S_n + \gamma_n. \qquad b_l = \sum_{i=0}^{n}\varphi_l(x_i)y_i.$$

$\alpha_n \approx An^{-2}$ и $\beta_n \approx Bn^{-2}$. $\gamma_n \approx Cn^{-4}$. (априорные-верны с самого начала)

Апостериорные-основаны на сопоставление выч. Рез-тов с разным числом точек Н:

$$\alpha_n \approx \frac{1}{3}(P_n - P_{n/2}). \quad \beta_n = \frac{1}{3}(T_n - T_{n/2}) + \frac{4}{3n^2}(\nu_n - \nu_{n/2}) \approx \frac{1}{3}(T_n - T_{n/2}). \quad \gamma_n \approx \frac{1}{15}(S_n - S_{n/2}).$$

Квадратурные фор-лы гаусса.

Обсудим постановку и решение такой задачи в формулировке Гаусса: построить квадратурную формулу с числом узлов , которая является точной для любого полинома степени $nn()21n-$ или ниже. Такая постановка задачи вполне оправдана: квадратурная формула, точная для полиномов, будет хорошо работать для гладких функций.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + \delta_n,$$

полином лежаранда:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Весовые коэф.=

$$c_m = \int_{-1}^{1} Q_{n-1,m}(x)\,dx$$

Нам осталось решить последний вопрос – доказать, что квадратурная формула, у которой в качестве узлов x_i берутся корни полинома Лежандра, а весовые коэффициенты c_i вычисляются по формулам (95), действительно решают задачу Гаусса, являясь точной для любого полинома степени $(2n-1)$.

Разностная аппроксимация.

Пусть на отрезке $\lfloor a,b \rfloor$ задан набор точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < b. \tag{1}$$

Будем называть его сеткой. Чтобы не усложнять изложения, условимся считать сетку равномерной:

$$x_{i+1} - x_i = h = (b-a)/n, \; 0 \le i \le n-1. \tag{2}$$

Пусть каждой точке сетки x_i сопоставлено по определенному закону число y_i. Совокупность этих чисел $\mathrm{y} = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} = \{y_i\}$ $(0 \le i \le n)$ назовем сеточной функцией. Сеточные функции, определенные на сетке (1), образуют $(n+1)$-мерное линейное пространство.

Р.А.1 производной. :

$$L_h^{+}[y_i]=\frac{y_{i+1}-y_i}{h},0\le i\le n-1; \quad (5)$$

$$L_h^{-}[y_i]=\frac{y_i-y_{i-1}}{h},1\le i\le n; \quad (6)$$

$$L_h^{(0)}[y_i]=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h},1\le i\le n-1. \quad (7)$$

Отношение (5) называют правой разностной производной, отношение (6) – левой разностной производной и отношение (7) – центральной разностной производной.

$$\left|\psi_i^{+}\right|\le\frac{1}{2}M_2h,\ \left|\psi_i^{-}\right|\le\frac{1}{2}M_2h \quad \left|\psi_i^{(0)}\right|\le\frac{1}{3}M_3h^2.$$

Р.А.2 производной. :

$$L_h[y]=\frac{\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h}}{h}=\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}. \qquad \left|\psi_i\right|\le\frac{1}{12}M_4h^2$$

Метод эйлера

$$u'=f(x,u),$$
$$u(x_0)=u_0.$$

Замена u`на правую разностную производную.

Пусть нам нужно построить решение задачи (27), (28) на отрезке $\lfloor x_0,x_0+l\rfloor$ длины l. Возьмем некоторое целое число n, введем шаг $h=l/n$ и образуем на отрезке сетку

$$x_i=x_0+ih,\ 0\le i\le n. \quad (29)$$

Сопоставим задаче (27), (28) на отрезке разностную задачу

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=f(x_i,y_i),\ 0\le i\le n-1; \quad (30)$$

$$y_0=u_0. \quad (31)$$

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_c\le\frac{M_2}{2}h,\ \|\mathbf{z}\|_c\le\frac{M_2l}{2}e^{Cl}h.$$

Неравенства (50) показывают, что при $h\to 0$ погрешность аппроксимации уравнения и связанная с ней неравенством (45) погрешность решения стремятся к нулю со скоростью h. В связи с этим метод Эйлера называют методом первого порядка точности относительно h.

Рунге-кнута

Рассмотрим правую часть разностного уравнения (56), содержащую первые производные от функции $f(x,u)$. Главная идея метода Рунге-Кутта состоит в том, чтобы приближенно заменить ее на сумму значений функции f в двух разных точках с точностью до членов порядка h^2. С этой целью положим:

$$y_{i+1}=y_i+\left[(1-\alpha)f(x_i,y_i)+\alpha f\left(x_i+\frac{h}{2\alpha},y_i+\frac{h}{2\alpha}f(x_i,y_i)\right)\right]h.$$

для альфа 1 и ½ .

$$\left|\psi_i\right|\le\|\boldsymbol{\psi}\|_c\le Mh^2,$$

$$\|\mathbf{z}\|_c\le Mle^{Cl}h^2. \quad (83)$$

Таким образом, при $h\to 0$ погрешность аппроксимации уравнения и, как следствие, погрешность решения стремятся к нулю со скоростью h^2. Это означает, что

Метод адамса.

Тупо интегрируем и заменяем на близкий интерполирующий полином.

$$P_m(x) = \sum_{j=i-m}^{i} f(x_j, y_j) Q_{m,j}(x), \qquad y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_m(x)dx = y_i + \sum_{j=i-m}^{i} a_j f(x_j, y_j),$$

$$|\psi_i| \le \|\psi\|_c \le \frac{5}{12} M_3 h^2,$$

$$a_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_{m,j}(x)dx.$$

Процесс построения более точных схем можно продолжить за счет увеличения m. При $m = 2$ получается схема третьего порядка точности, при $m = 3$ - четвертого и

Краевая задача.

Вторая разностная производная.

$$u'' - q(x)u = -f(x), \quad a < x < b, \qquad \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - q_i y_i = -f_i, \quad 1 \le i \le n-1,$$

$$u(a) = u_1, \quad u(b) = u_2. \qquad y_0 = u_0, \quad y_n = u_2.$$

из (L+ - L-)/h

$$\|\psi\|_c \le \frac{M_4}{12} h^2, \ \|z\|_c \le \frac{M_4}{12 q_0} h^2.$$