МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

А.М. ДЕНИСОВ, А.В. РАЗГУЛИН

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие для подготовки к коллоквиуму
(Draft version)

МОСКВА – 2007 г.

Пособие написано для студентов 2 курса факультета вычислительной математики и кибернетики как дополнение к лекционному курсу "Обыкновенные дифференциальные уравнения". В пособии охвачен материал, входящий в программу коллоквиума по обыкновенным дифференциальным уравнениям, который студенты сдают в конце 3 семестра.

Оглавление

Глава 1

Основные понятия

1.1 Понятия о дифференциальных уравнениях

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные неизвестной функции. Приведем некоторые примеры.

Пример 1.1.1. *Найти функцию $y(t)$ такую, что*

$$y'''(t) + (y'(t))^2 - e^t y(t) = 1 + t, \quad a \le t \le b.$$

Пример 1.1.2. *Найти функцию $u(t,x)$ такую, что*

$$u_{tt}(t,x) + u_t(t,x) = (t^2 + x)u(t,x), \quad a \le t \le b, \quad c \le x \le d.$$

Пример 1.1.3. *Найти функцию $u(t,x)$ такую, что*

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x) = 0, \quad a \le t \le b, \quad c \le x \le d.$$

Уравнение, содержащее производные неизвестной функции только по одной независимой переменной, называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Уравнение, содержащее производные неизвестной функции по нескольким независимым переменным, называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Уравнения, приведенные в примерах 1.1.1 и 1.1.2 являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнение из примера 1.1.3 – дифференциальное уравнение в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называется наибольший порядок входящих в него производных.

Данный курс посвящен, в основном, обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad t \in [a,b],$$

где $F(t,y,p)$ - заданная функция трех переменных.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad t \in [a,b],$$

где $F(t,y,p_1,\dots,p_n)$ - заданная функция $n+2$ переменных.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной, называется уравнение

$$y^{(n)} = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad t \in [a,b], \tag{1.1}$$

где $F(t,y,p_1,\dots,p_{n-1})$ – заданная функция $n+1$ переменной.

Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями можно рассматривать системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть заданы функции $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$,

$i = 1, 2, \ldots, n$. Нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ называется система

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), & t \in [a, b], \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), & t \in [a, b], \\ \ldots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), & t \in [a, b]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) может быть сведено к нормальной системе (1.2). Действительно, пусть функция $y(t)$ является решением уравнения (1.1). Введем функции

$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \quad \ldots \quad y_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t), \quad y_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Тогда функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ являются решениями нормальной системы

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), & t \in [a, b], \\ y_2'(t) = y_3(t), & t \in [a, b], \\ \ldots \\ y_{n-1}'(t) = y_n(t), & t \in [a, b], \\ y_n'(t) = F(t, y_1(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)), & t \in [a, b]. \end{cases} \tag{1.3}$$

Справедливо и обратное. Если функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ являются решениями системы (1.3), то функция $y(t) = y_1(t)$ является решением уравнения (1.1).

1.2 Основные модели, приводящие к ОДУ

Дифференциальные уравнения часто возникают как математические модели в экологии, физике, экономике и других областях знаний. Под математической моделью некоторого явления обычно понимают отражение основных закономерностей описываемого явления в математической форме. Рассмотрим несколько примеров математических моделей, описываемых с помощью дифференциальных уравнений.

1.2.1 Простейшая модель динамики популяции.

Пусть имеется популяция, состоящая из достаточно большого количества особей. Считаем, что с течением времени количество особей подчиняется следующему закону: изменение количества особей за любой бесконечно малый интервал времени пропорционально количеству особей в текущей момент времени. Придадим отмеченным закономерностям строгий математический вид.

Обозначим $p(t)$ – количество особей в момент времени t. Ясно, что $p(t) \in \mathbb{N}$. Из биологии известно, что если численность особей $p(t) \geqslant p_{\min}$, где $p_{\min}$ – достаточно большое натуральное число, $p_{\min} \gg 1$, то относительная численность популяции $y(t) = p(t)/p_{\min}$ ведет себя достаточно гладким образом. Будем далее считать ее непрерывно дифференцируемой функцией времени.

Получим уравнение, описывающее динамику относительной численности. Для этого рассмотрим изменение численности на отрезке времени от t до $t + \Delta t$ бесконечно малой длины Δt и обозначим приращение численности как $\Delta p(t) = p(t + \Delta t) - p(t)$. Согласно указанному выше закону $\Delta p(t) \sim p(t)\Delta t$, или, вводя коэффициент пропорциональности

k, получаем приближенное равенство $\Delta p(t) \simeq kp(t)\Delta t$. После почленного деления на $p_{\min}$, перехода к функции $y(t)$ и использования ее дифференцируемости, получаем равенство

$$\Delta y(t) = k(y(t) + \bar{o}(1))\Delta t.$$

Поделим обе части уравнения на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Получаем дифференциальное уравнение, связывающее искомую функцию $y(t)$ и ее производную $dy(t)/dt$ в момент времени t:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t). \tag{1.4}$$

Простые соображения, основанные на знании формул производных для экспоненты и произведения двух функций, позволяют проинтегрировать дифференциальное уравнение (1.4), т.е. перейти от дифференциальной записи к эквивалентной алгебраической:

$$y'(t) - ky(t) = 0 \Leftrightarrow y'(t)\mathrm{e}^{-kt} - ky(t)\mathrm{e}^{-kt} = 0 \Leftrightarrow \left(y(t)\mathrm{e}^{-kt}\right)' = 0 \Leftrightarrow y(t) = C\mathrm{e}^{kt}.$$

Итак, дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений, параметрически зависящих от произвольной константы $C \in \mathbb{R}$. Эту константу можно определить, если задать дополнительное условие на искомое решение. Самым простым из условий является задание значения функции в некоторый момент времени $t = t_0$:

$$y(t_0) = y_0. \tag{1.5}$$

Тогда решение задачи (1.4)-(1.5) определяется однозначно:

$$y(t) = y_0\mathrm{e}^{k(t-t_0)}. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.4) и найденное решение (1.6) описывают лишь самые простые закономерности динамики популяции. Действительно, при $k > 0$ численность популяции неограниченно возрастает при $t \to +\infty$, что в реальности не наблюдается. Если же $k < 0$, тогда относительная численность популяции монотонно уменьшается и со временем станет меньше 1, или, что тоже самое, $p(t) < p_{\min}$, и тогда уже нельзя применять дифференциальное уравнение в качестве модели рассматриваемого явления. Таким образом, дифференциальное уравнение как математический объект имеет в данном случае более широкую область допустимых значений параметров, чем это диктуется моделью.

1.2.2 Модель "хищник-жертва".

Рассмотрим несколько более реальную модель популяции особей первого типа (хищников), которая меняется со временем в зависимости от количества пищи – особей популяции второго типа (жертвы). Обозначим $x_1(t)$ – нормированная численность хищников, $x_2(t)$ – нормированная численность жертв, и далее будем считать эти функции непрерывно дифференцируемыми.

В простейшей модели динамики популяции скорость изменения численности пропорциональна численности с постоянными коэффициентами k_j: $dx_j(t)/dt = k_jx_j(t)$, $j = 1, 2$. Рассмотрим более содержательную модель, в которой $k_j = k_j(x_1, x_2)$ – функция от количества хищников и жертв. Для уравнения динамики численности хищников возьмем соответствующий коэффициент $k_1(x_1, x_2)$ в виде

$$k_1(x_1, x_2) = -a + bx_2, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

где $-a < 0$ задает коэффициент убывания хищников при отсутствии пищи ($x_2 = 0$), $bx_2 > 0$ – пропорциональный количеству пищи коэффициент роста хищников. Аналогичные соображения используются для случая жертв:

$$k_2(x_1, x_2) = c - dx_1, \quad c > 0, \quad d > 0,$$

где c – коэффициент роста жертв при отсутствии хищников ($x_1 = 0$), $-dx_1 < 0$ – пропорциональный количеству хищников коэффициент потерь жертв. В результате приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = (-a + bx_2(t))x_1(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = (c - dx_1(t))x_2(t).$$

Перейдем к новым переменным $y_1 = x_1 d/c$, $y_2 = x_2 b/a$, $\tau = ct$, и обозначим $y_j' = dy_j/d\tau$, $j = 1, 2$. Получаем

$$y_1' = \alpha y_1(y_2 - 1), \quad y_2' = y_2(1 - y_1), \quad \alpha = a/c > 0.$$

Оказывается, графики функции $(y_1(t), y_2(t))$ в координатах (y_1, y_2) представляют собой замкнутые линии с центром в точке $(1, 1)$, т.е. численность хищников и жертв меняется циклически, причем наибольшей численности хищников соответствует наименьшая численность жертв и наоборот.

Нетрудно показать, что в окрестности $(1, 1)$ эти замкнутые линии приближенно представляют собой эллипсы. Для этого поделим уравнения друг на друга и выделим полный дифференциал:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\alpha y_1(y_2 - 1)}{y_2(1 - y_1)}, \quad \frac{1 - y_1}{y_1} dy_1 = \alpha \frac{y_2 - 1}{y_2}, \quad y_1 - \ln y_1 + \alpha y_2 - \alpha \ln y_2 = C.$$

Если y_j находятся в окрестности единицы, тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\ln y_j = \ln(1 + y_j - 1) = y_j - 1 - 0.5(y_j - 1)^2 + \bar{o}((y_j - 1)^2), \quad j = 1, 2.$$

После подстановки полученных разложений, с точностью до слагаемых порядка выше второго получаем уравнение

$$(y_1 - 1)^2 + \alpha(y_2 - 1)^2 = 2C,$$

задающее эллипс с центром в $(1, 1)$ и отношением полуосей $\sqrt{\alpha}$.

1.2.3 Модель движения космического корабля.

Пусть космический корабль (материальная точка) движется в плоскости, проходящей через центр Земли. Тогда его декартовы координаты в этой плоскости с началом координат в центре Земли могут быть заданы двумя функциями $x_1(t)$, $x_2(t)$ от времени t, $r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$ – расстояние до центра Земли. Считая Землю шаром радиуса R и массой M, будем учитывать только силу тяжести, обусловленную притяжением корабля массы m к Земле. Тогда на расстоянии $r = r(t) \geqslant R$ от центра Земли на корабль действует сила всемирного тяготения $F = \gamma mM/r^2$, и ускорение корабля находится по формуле $g(t) = F/m = \gamma M/r^2$. На поверхности Земли при $r = R$ имеем $g = \gamma M/R^2$, откуда вытекает формула $g(t) = gR^2/r^2(t)$.

Будем использовать обозначения $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, $\overline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$. С учетом того, что сила тяготения направлена к центру Земли, вектор силы записывается в виде

$$\overline{F}(t) = -\frac{\overline{x}(t)}{r(t)} g(t)m = -\frac{\overline{x}(t)}{r^3(t)} mgR^2.$$

Подставляя полученное выражение для силы тяготения в формулу второго закона Ньютона $m\overline{a}(t) = \overline{F}(t)$, $\overline{a}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t))$, получаем $\overline{a}(t) = -\frac{\overline{x}(t)}{r^3(t)} gR^2$, или в координатах:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{x_1}{r^3} gR^2, \quad \ddot{x}_2 = -\frac{x_2}{r^3} gR^2.$$

Проведем несложный анализ полученных уравнений. Умножим на $\dot{x}_1$ первое уравнение, на $\dot{x}_2$ – второе уравнение и сложим. В полученном уравнении

$$\ddot{x}_1\dot{x}_1 + \ddot{x}_2\dot{x}_2 = -\frac{gR^2}{r^3}(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)$$

преобразуем производные произведений и выделим полную производную с учетом обозначений $v^2(t) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_1^2$, $r^2 = x_1^2 + x_1^2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1^2}{2}\right) = -\frac{gR^2}{2r^3} \cdot \frac{d}{dt}\left(x_1^2 + x_1^2\right) = gR^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r}\right) = 0,$$

$$\frac{v^2(t)}{2} - \frac{gR^2}{r(t)} = \frac{v^2(t_0)}{2} - \frac{gR^2}{r(t_0)} \tag{1.7}$$

Полученное равенство, выражающее собой (после умножения на m) закон сохранения энергии при движении космического корабля в поле силы тяжести, позволяет ответить на вопрос о том, какова должна быть начальная скорость $v(t_0)$ стартующего с поверхности Земли ($r(t_0) = R$) космического корабля, чтобы он навсегда удалился от Земли, т.е. $r(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Действительно, из (1.7) имеем

$$-\frac{gR^2}{r(t)} \leqslant \frac{v^2(t_0)}{2} - gR,$$

откуда при $t \to +\infty$ получаем

$$v(t_0) \geqslant \sqrt{2Rg} \text{ – вторая космическая скорость.}$$

1.3 Общее решение и общий интеграл

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), \tag{1.8}$$

где функция $f(t, y)$ определена на некотором множестве $D \subseteq \mathbb{R}^2$. В результате интегрирования уравнения (1.8) могут получаться решения как в виде зависящего от параметра C семейства функций $y = g(t, C)$, так и отдельные решения, не входящие в эти семейства. Возникает вопрос, как в наиболее компактном виде охватить все возможные решения уравнения (1.8).

1.3.1 Общее решение.

Определение 1.3.1. *Функция $y = g(t, C)$ называется общим решением дифференциального уравнения (1.8) на множестве D, если:*

1. *Для любого допустимого C функция $y = g(t, C)$ является решением дифференциального уравнения (1.8).*

2. *Для любого решения $z(t)$ дифференциального уравнения (1.8), интегральная кривая которого лежит в D, найдется такая константа C_0, что $z(t) = g(t, C_0)$, т.е. любое решение входит в параметрическое семейство общего решения.*

Общее решение существует не всегда. Наличие общего решения зависит как от вида дифференциального уравнения, так и от выбора множества D. Рассмотрим пример.

Пример 1.3.1. *Уравнение*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y} \tag{1.9}$$

имеет решение $y_1(t) \equiv 0$ и параметрическое семейство решений $y_2(t, C) = \pm\sqrt{(t + C)^3}$. В области D_+, лежащей в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}^2 \cap \{y > 0\}$, общее решение задается формулой $y_+(t, C) = \sqrt{(t + C)^3}$. В области D_-, лежащей в нижней полуплоскости $\mathbb{R}^2_- \mathbb{R}^2 \cap \{y < 0\}$, общее решение задается формулой $y_-(t, C) = -\sqrt{(t + C)^3}$. Если же пересечение выбранной области D с осью абсцисс $y = 0$ содержит интервал ненулевой длины, тогда общего решения не существует, а есть совокупность решений, составленных из $y_1(t)$, $y_2(t, C)$, а также решений, составленных из гладко примыкающих кусков этих кривых, например:

$$y_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leqslant 1, \\ \sqrt{(t-1)^3}, & \text{при } t \geqslant 1, \end{cases} \qquad y_4(t) = \begin{cases} -\sqrt{(t-1)^3}, & \text{при } t \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Решение $g_0(t)$ дифференциального уравнения (1.8) называется *частным* решением, если во всех точках его интегральной кривой выполняется условие единственности, т.е. ее не касаются другие интегральные кривые уравнения (1.8). В примере 1.3.1 для любого фиксированного C_0 функция $g_0^+(t) = \sqrt{(t + C_0)^3}$ является частным решением уравнения (1.9) в области D_+, функция $g_0^-(t) = -\sqrt{(t + C_0)^3}$ является частным решением уравнения (1.9) в области D_-. Решение $y_1(t) \equiv 0$ не является частным решением, т.к. в каждой точке его интегральной кривой происходит касание с другими интегральными кривыми (1.9). Такие решения называются *особыми.*

1.3.2 Первый интеграл и общий интеграл.

Общее решений дифференциального уравнения дает зависимость искомой функции от t и C в явной форме. Однако в такой форме найти решение дифференциального уравнения удается далеко не всегда. Часто бывает достаточно просто перейти от дифференциального уравнения к эквивалентному ему алгебраическому уравнению, возможно не разрешенному относительно искомого решения.

Определение 1.3.2. *Пусть $\Phi(t, y)$ – заданная на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^2$ функция. Уравнение*

$$\Phi(t, y) = C \tag{1.10}$$

называется первым интегралом дифференциального уравнения (1.8) в D, если для любого решения $y = g(t)$, $t \in [a, b]$, интегральная кривая которого лежит в D, найдется константа C_0, что уравнение (1.10) обращается в тождество на $[a, b]$ при подстановке $y = g(t)$, $C = C_0$, т.е.

$$\Phi(t, g(t)) = C_0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Замечание. Часто первым интегралом называется также сама функция $\Phi(t, y)$.

Пример 1.3.2. *Если $y(t) \neq 0$ – произвольное решение дифференциального уравнения $dy/dt = 3\sqrt[3]{y}/2$. После разделения переменных и интегрирования получаем равенство $\sqrt[3]{y^2(t)} - t = C$. Тогда первым интегралом дифференциального уравнения является уравнение*

$$\Phi(t, y) \equiv \sqrt[3]{y^2} - t = C$$

в произвольной области, целиком лежащей в $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$.

Вообще говоря, уравнение $\Phi(t, y) = C$ может обращаться в тождество и на других функциях, не являющихся решениями дифференциального уравнения. Наиболее экономное понятие, дающее решение дифференциального уравнения в неявном виде, связано с общим интегралом, являющимся аналогом общего решения.

Определение 1.3.3. *Уравнение $\Phi(t, y) = C$ называется общим интегралом дифференциального уравнения (1.8) в области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, если оно является первым интегралом этого дифференциального уравнения, и любая непрерывно дифференцируемая функция $y = y(t, C)$, удовлетворяющая (1.10) (т.е. $\Phi(t, y(t, C)) \equiv C$) и график которой лежит в D, является также и решением дифференциального уравнения (1.8).*

Пример 1.3.3. *Для дифференциального уравнения $dy/dt = 3\sqrt[3]{y}/2$ общий интеграл в произвольной области, целиком лежащей в $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$, имеет вид $\sqrt[3]{y^2(t)} - t = C$.*

1.4 Дифференциальные уравнения в симметричном виде и в полных дифференциалах

Рассмотрение дифференциальных уравнений первого порядка в разрешенном относительно производной виде $dy/dt = f(t, y)$ вносит определенную несимметричность в переменные t, y, подразумевая, что y есть функция t, $y = y(t)$. С точки зрения интегральных кривых, представляющих собой графики решений дифференциального уравнения, нет особой разницы в выборе способа параметризации: $y = y(t)$, $t = t(y)$, или, в общем случае, $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, τ – параметр. Последний способ параметризации кривой позволяет охватить, например, кривые вида $t = const$, которые не допускаются для решений $y = y(t)$, но иногда естественным образом могут служить их дополнением при расширенном толковании решения.

Пример 1.4.1. *Уравнение $dy/dt = y/t$ имеет при $t \neq 0$ общее решение $y = C_1 t$. Особенность $t = 0$ исчезает в перевернутом уравнении $dt/dy = t/y$ с общим решением $t = C_2 y$, однако появляется условие $y \neq 0$. Если же записать уравнение в симметричном виде (в дифференциалах)*

$$tdy - ydt = 0,$$

тогда обе функции $y = 0$ и $t = 0$ являются решениями этого уравнения, которое обобщает предыдущие два уравнения, разрешенные относительно производных.

1.4.1 Уравнения в симметричном виде.

Дифференциальным уравнением в симметричном виде (или в дифференциалах) называется уравнение
$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0. \tag{1.11}$$
Далее считается, что функции $M(t,y)$ и $N(t,y)$ определены и непрерывны в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и подчиняются условию
$$|M(t,y)| + |N(t,y)| > 0, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.12}$$

Поскольку в (1.11) переменные входят симметрично, то определение решения естественно дать в параметрическом виде.

Определение 1.4.1. *Пара функций $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ называется параметрическим решением уравнения в симметричном виде (1.11) на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, если*

1. *Функции $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ непрерывно дифференцируемы на $[\tau_1, \tau_2]$ и $|\varphi'(\tau)| + |\psi'(\tau)| > 0 \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$.*

2. *$(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$.*

3. $$M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{1.13}$$

Определения общего решения и общего интеграла для уравнений в симметричном виде дается аналогично определениям 1.3.1, 1.3.3. Дадим необходимое для последующего изложения определение общего интеграла.

Определение 1.4.2. *Уравнение $\Phi(t,y) = C$ называется первым интегралом уравнения (1.11) в области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, если для любого параметрического решения $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, интегральная кривая которого лежит в D, найдется константа C_0, что $\Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C_0$, $\forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$.*

Первый интеграл называется общим в данной области, если любая непрерывно дифференцируемая пара функций $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, удовлетворяющая $\Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \equiv C$ и график которой лежит в D, является также и решением дифференциального уравнения (1.11).

Из условия 1 в определении параметрического решения вытекает, что либо $\varphi'(\tau) \neq 0$, либо $\psi'(\tau) \neq 0$ в окрестности каждой точки $\tau_0 \in (\tau_1, \tau_2)$. Это в свою очередь означает существование одной из обратных функций $\tau = \varphi^{-1}(t)$ либо $\tau = \psi^{-1}(y)$, и, соответственно, возможность представить решение уравнения (1.11) либо в виде $y = \psi(\varphi^{-1}(t))$ в окрестности точки $t_0 = \varphi(\tau_0)$, либо в виде $t = \varphi(\psi^{-1}(y))$ в окрестности точки $y_0 = \psi(\tau_0)$.

Пример 1.4.2. *Уравнение в симметричном виде $tdt + ydy = 0$ имеет общий интеграл $t^2 + y^2 = C$, $C > 0$. Интегральные кривые параметрических решений представляют собой дуги окружностей. Если параметрическое решение $t = \cos\tau$, $y = \sin\tau$ рассматривается отрезке $\tau \in [\pi/4, 3\pi/4]$, тогда не существует однозначной функции $y = y(t)$ либо $t = t(y)$, описывающей соответствующую дугу целиком. В тоже время, в окрестности каждой точки рассматриваемой дуги такие представления нетрудно выписать.*

1.4.2 Уравнения в полных дифференциалах.

Наиболее просто интегрируются дифференциальные уравнения в симметричном виде, левая часть которых представляет собой полный дифференциал некоторой функции.

Определение 1.4.3. *Дифференциальное уравнение в симметричном виде (1.11) называется уравнением в полных дифференциалах в области D, если существует непрерывно дифференцируемая в D функция $V(t,y)$, $|\frac{\partial V(t,y)}{\partial t}| + |\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}| > 0$, удовлетворяющая равенствам*

$$M(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial t}, \quad N(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial y}, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.14}$$

Теорема 1.4.1. *Уравнение в полных дифференциалах вида (1.11) имеет в области D общий интеграл*

$$V(t,y) = C. \tag{1.15}$$

Доказательство. Согласно определению общего интеграла 1.4.2 проверим сначала, что алгебраическое уравнение (1.15) является первым интегралом. В силу условия 1.14 справедливо равенство

$$dV(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial t}dt + \frac{\partial V(t,y)}{\partial y}dy = M(t,y)dt + N(t,y)dy, \quad \forall (t,y) \in D.$$

Рассмотрим параметрическое решение $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$. Если воспользоваться инвариантностью формы записи первого дифференциала и вычислить его в точках интегральной кривой, тогда в силу (1.13) имеем

$$d[V(\varphi(\tau), \psi(\tau))] = M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Поэтому $V(\varphi(\tau), \psi(\tau) \equiv C$, т.е. уравнение (1.15) является первым интегралом.

Рассмотрим уравнение (1.15) в окрестности произвольной точки $(t_0, y_0) \in D$ и положим $C_0 = V(t_0, y_0)$. Из условия (1.12) и представления (1.14) имеем

$$\frac{\partial V(t_0,y_0)}{\partial t} = M(t_0,y_0) \neq 0 \quad \text{либо} \quad \frac{\partial V(t_0,y_0)}{\partial y} = N(t_0,y_0) \neq 0.$$

Пусть для определенности справедливо второе из выписанных неравенств. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки t_0 существует *единственная* непрерывно дифференцируемая функция $y = g(t)$, для которой $V(t, g(t)) = C_0$ в рассматриваемой окрестности. Если теперь взять дифференциалы левой и правой частей полученного равенства, то

$$dC = 0 = dV(t, g(t)) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial t}dt + \frac{\partial V(t, g(t))}{\partial y}dg(t) = M(t, g(t))dt + N(t, g(t))g'(t)dt,$$

т.е. функция $y = g(t)$ является решением уравнения (1.11). □

Замечание. Из доказательства теоремы 1.4.1 следует, что через любую точку $(t_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая уравнения в полных дифференциалах (1.11), (1.14).

Если ввести векторное поле $\overline{a}(t,y) = (M(t,y), N(t,y))$, тогда условие (1.14) будет означать *потенциальность* этого поля: $\overline{a}(t,y) = \mathrm{grad}V(t,y)$. Потенциальные поля изучаются в курсе математического анализа. Критерий потенциальности векторного поля, или, что тоже самое, критерий уравнения в полных дифференциалах, дается следующей теоремой, сформулированной в используемых нами обозначениях.

Теорема 1.4.2. *Пусть функции $M(t,y)$, $N(t,y)$ и их частные производные непрерывны в односвязной области D. Тогда условие (1.14) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(t,y)}{\partial t},\quad \forall(t,y)\in D. \tag{1.16}$$

По известным $M(t,y)$ и $N(t,y)$, удовлетворяющим условию (1.16), функция $V(t,y)$ в общем случае находится в виде криволинейного интеграла второго рода

$$V(t,y)=\int\limits_{P_0}^{P} Mdt+Ndy,\quad P=P(t,y),\quad P_0=P_0(t_0,y_0),$$

где интеграл берется по любой гладкой кривой, соединяющей точки $P_0,P\in D$. В случае прямоугольника криволинейный интеграл достаточно просто реализуется в виде обычных интегралов. Действительно, из равенства $M=\partial V/\partial t$ имеем

$$V(t,y)=\int\limits_{t_0}^{t} M(\xi,y)d\xi+v(y).$$

Вычислим производную $\partial V/\partial t$ с помощью соотношений (1.16).

$$N(t,y)=\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial M(\xi,y)}{\partial y}d\xi+v'(y)=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial N(\xi,y)}{\partial t}d\xi+v'(y)=$$
$$=N(t,y)-N(t_0,y)+v'(y).$$

Отсюда $v'(y)=N(t_0,y)$, поэтому $v(y)=\int_{y_0}^{y}N(t_0,\eta)d\eta$. Окончательно получаем

$$V(t,y)=\int\limits_{t_0}^{t} M(\xi,y)d\xi+\int\limits_{y_0}^{y} N(t_0,\eta)d\eta.$$

1.4.3 Интегрирующий множитель.

Определение 1.4.4. *Непрерывно дифференцируемая в области D функция $\mu=\mu(t,y)\neq 0$ называется интегрирующим множителем, если уравнение*

$$\mu(t,y)M(t,y)dt+\mu(t,y)N(t,y)dy=0 \tag{1.17}$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Теорема 1.4.3. *Пусть уравнение $Mdt+Ndy=0$ имеет в области D общий интеграл $\Phi(t,y)=C$, причем всюду в D выполнено $|\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t}|+|\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial y}|>0$. Тогда существует интегрирующий множитель в D.*

Доказательство. Через любую точку области D проходит единственная интегральная кривая. Пусть $(\varphi(\tau),\psi(\tau))$ – соответствующее параметрическое решение. По определению общего интеграла, $\Phi(\varphi(\tau),\psi(\tau))\equiv C$. После вычисления дифференциала имеем

$$0=dC=\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\varphi'(\tau)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\psi'(\tau)\Big)d\tau.$$

В тоже время, из определения параметрического решения (1.13):

$$M(\varphi(\tau),\psi(\tau))\varphi'(\tau)+N(\varphi(\tau),\psi(\tau))\psi'(\tau)=0, \quad |\varphi'(\tau)|+|\psi'(\tau)|>0.$$

Таким образом, имеет нетривиальное решение система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial t} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'(\tau) \\ \psi'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это возможно только в случае равенства нулю определителя матрицы, т.е.

$$N\frac{\partial\Phi}{\partial t} \equiv M\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Заметим, что если в какой-либо точке $M=0$, тогда $N\neq 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}\neq 0$. Поэтому можно положить

$$\mu(t,y)=\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,y)}{M(t,y)} \equiv \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}(t,y)}{N(t,y)} \neq 0.$$

Нетрудно видеть, что $\mu(t,y)$ является интегрирующим множителем, причем (1.17) является уравнением в полных дифференциалах с функцией $V=\Phi(t,y)$. $\square$

Интегрирующий множитель определяется неоднозначно. Если $\mu(t,y)$ является интегрирующим множителем, тогда для некоторой непрерывно дифференцируемой функции $V(t,y)$ имеем $dV=\mu M dt+\mu N dy$. Умножая это равенство на $f(V)$, где $f(s)\neq 0$ произвольная непрерывно дифференцируемая функция скалярного аргумента, получаем

$$f(V)dV = d[\int f(V)dV] = \mu f(V)Mdt + \mu f(V)Ndy.$$

Поэтому $\mu_1(t,y)=\mu(t,y)f(V(t,y))$ – также интегрирующий множитель.

Отметим, что (1.17) является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(t,y)M(t,y)\big)=\frac{\partial}{\partial t}\big(\mu(t,y)N(t,y)\big)$, которое можно рассматривать в качестве уравнения для нахождения интегрирующего множителя. После приведения подобных слагаемых имеем

$$N\frac{\partial\mu}{\partial t} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right). \tag{1.18}$$

Это уравнение в частных производных. В общем случае оно сложнее исходного уравнения в симметричном виде, и решать его невыгодно. Тем не менее, в ряде случаев (1.18) можно использовать для нахождения интегрирующего множителя.

1. Если $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)=g(t)$ – функция только аргумента t, тогда интегрирующий множитель можно искать в виде $\mu=\mu(t)$. Уравнение (1.18) принимает вид $\mu'(t)=\mu(t)g(t)$ и имеет решение $\mu(t)=\exp\{\int g(t)dt\}$.

2. Если $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)=h(y)$ – функция только аргумента y, тогда интегрирующий множитель можно искать в виде $\mu=\mu(y)$. Уравнение (1.18) принимает вид $\mu'(y)=-\mu(y)h(y)$ и имеет решение $\mu(t)=\exp\{-\int h(y)dy\}$.

Глава 2

Задача Коши

2.1 Задача Коши для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной

Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = \{(t, y): \quad |t - t_0| \leq T, \quad |y - y_0| \leq A\}$$

Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ дифференциальное уравнение

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \tag{2.1}$$

с условием

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.2}$$

Требуется определить функцию $y(t)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) и условию (2.2). Эта задача называется задачей с начальным условием или задачей Коши.

Определение 2.1.1. *Функция $\bar{y}(t)$ называется решением задачи Коши на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$, если: $\bar{y}(t) \in C^1[t_0 - T, t_0 + T]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$ для $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и условию (2.2).*

2.1.1 Редукция к интегральному уравнению.

Покажем, что решение задачи с начальным условием (2.1), (2.2)эквивалентно решению некоторого интегрального уравнения.

Рассмотрим уравнение относительно неизвестной функции $y(t)$

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \tag{2.3}$$

Такое уравнение называется интегральным, поскольку неизвестная функция $y(t)$ входит под знак интеграла.

Лемма 2.1.1. *Функция $\bar{y}(t)$ является решением задачи Коши (2.1), (2.2) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ тогда и только тогда, когда $\bar{y}(t) \in C[t_0 - T, t_0 + T]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$ для $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3)для $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.*

Доказательство. Пусть функция $\bar{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (2.1), (2.2) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$. Из определения 2.1.1 следует, что $\bar{y}(t) \in C[t_0 - T, t_0 + T]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$ для $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Покажем, что $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) для $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Интегрируя уравнение (2.1) от t_0 до t, получим

$$\int\limits_{t_0}^{t} \bar{y}'(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$

Учитывая начальное условие (2.2), имеем

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$

Следовательно, функция $\bar{y}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.3) при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

Пусть функция $\bar{y}(t)$ такова, что $\bar{y}(t) \in C[t_0 - T, t_0 + T]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$ для $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ и $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) для $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, то есть

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \tag{2.4}$$

Покажем, что $\bar{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (2.1), (2.2).

Положив в (2.4) , $t = t_0$,получим, что $\bar{y}(0) = y_0$. Следовательно условие (2.2) выполнено. Так как функция $\bar{y}(t)$ непрерывна на $[t_0 - T, t_0 + T]$, то правая часть равенства

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$

непрерывно дифференцируема на $[t_0 - T, t_0 + T]$.Следовательно $\bar{y}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0 - T, t_0 + T]$. Дифференцируя (2.4), получим , что $\bar{y}(t)$ удовлетворяет (2.1)и лемма 2.1.1 доказана. $\square$

2.1.2 Лемма Гронуолла-Беллмана.

Докажем единственность решения задачи Коши (2.1), (2.2). Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.1.2. *Пусть функция $z \in C[a, b]$ и такова, что*

$$0 \leq z(t) \leq c + d\left|\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|, \quad t \in [a, b], \tag{2.5}$$

где постоянная c неотрицательна, постоянная d положительна, а t_0 - произвольное фиксированное число на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$z(t) \leq ce^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a, b]. \tag{2.6}$$

Доказательство. Рассмотрим $t \geq t_0$. Введем функцию

$$p(t) = \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, b].$$

Тогда $p'(t) = z(t) \geq 0$, $p(t_0) = 0$. Из (2.5) следует, что $p'(t) \leq c + dp(t), \quad t \in [t_0, b]$. Умножив это неравенство на $e^{-d(t-t_0)}$, получим

$$p'(t)e^{-d(t-t_0)} \leq ce^{-d(t-t_0)} + dp(t)e^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Это неравенство можно переписать так

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)e^{-d(t-t_0)}\right) \le ce^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Проинтегрировав от t_0 до t , получим

$$p(t)e^{-d(t-t_0)} - p(t_0) \le c\int\limits_{t_0}^{t} e^{-d(\tau-t_0)}d\tau = \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t-t_0)}\right), \quad t \in [t_0, b].$$

Учитывая то, что $p(t_0) = 0$, имеем $dp(t) \le ce^{d(t-t_0)} - c$. Следовательно

$$z(t) \le c + dp(t) \le c + ce^{d(t-t_0)} - c = ce^{d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

и неравенство (2.6) для $t \in [t_0, b]$ доказано.

Докажем неравенство (2.6) для $t \in [a, t_0]$. Перепишем неравенство (2.5) следующим образом

$$0 \le z(t) \le c - d\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau = c + d\int\limits_{t}^{t_0} z(\tau)d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Обозначим через

$$q(t) = \int\limits_{t}^{t_0} z(\tau)d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Тогда $q'(t) = -z(t) \le 0$, $q(t_0) = 0$. Из неравенства (2.5) следует, что $-q'(t) \le c + dq(t), \quad t \in [a, t_0]$. Умножив это неравенство на $e^{-d(t_0-t)}$, получим

$$-q'(t)e^{-d(t_0-t)} \le ce^{-d(t_0-t)} + dq(t)e^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [a, t_0].$$

Это неравенство можно переписать так

$$-\frac{d}{dt}\left(q(t)e^{-d(t_0-t)}\right) \le ce^{-d(t_0-t)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Проинтегрировав от t до t_0 , получим

$$q(t)e^{-d(t_0-t)} - q(t_0) \le c\int\limits_{t}^{t_0} e^{-d(t_0-\tau)}d\tau = \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t_0-t)}\right), \quad t \in [a, t_0].$$

Следовательно $dq(t) \le ce^{d(t_0-t)} - c$. А значит

$$z(t) \le c + dq(t) \le c + ce^{d(t_0-t)} - c = ce^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a, t_0].$$

и неравенство (2.6) для $t \in [a, t_0]$ доказано,что и завершает доказательство леммы 2.1.2. $\square$

2.1.3 Условие Липшица.

Сформулируем теперь важное для дальнейших исследований условие Липшица.

Определение 2.1.2. *Функция $f(t, y)$, заданная в прямоугольнике* Π *удовлетворяет в* Π *условию Липшица по y, если*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \Pi,$$

где L - постоянная.

Замечание 1. Если функции $f(t, y)$ и $f_y(t, y)$ определены и непрерывны в Π, то $f(t, y)$ удовлетворяет в Π условию Липшица по y. Действительно, так как $f_y(t, y)$ непрерывна в Π, то $|f_y(t, y)| \leqslant M, \quad \forall (t, y) \in \Pi$. Тогда из формулы Лагранжа следует, что

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |f_y(t, \theta)(y_1 - y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \Pi.$$

Замечание 2. Функция $f(t, y)$ может быть не дифференцируема по y, но удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим, например, функцию $f(t, y) = (t - t_0)|y - y_0|$. Очевидно, что она не дифференцируема при $y = y_0, t \neq t_0$, однако

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t - t_0| \cdot \big||(y_1 - y_0)| - |(y_2 - y_0)|\big| \leqslant T|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \Pi.$$

Замечание 3. Функция $f(t, y)$ может быть непрерывной по y, но не удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим, например, функцию $f(y) = \sqrt{y}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $f(y) = -\sqrt{|y|}$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$. Очевидно, что она непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Покажем, что она не удовлетворяет условию Липшица. Предположим, что оно выполнено. Тогда существует такая постоянная L, что

$$|\sqrt{y}_1 - \sqrt{y}_2| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [-1, 1].$$

Пусть $y_1 > 0, y_2 = 0$. Тогда $y_1 \leq L^2 y_1^2$, и взяв $0 < y_1 < L^{-2}$ мы получим противоречие.

2.1.4 Теорема единственности решения задачи Коши.

Докажем теперь теорему единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2).

Теорема 2.1.1. *Пусть функция $f \in C[\Pi]$ и удовлетворяет в* Π *условию Липшица по y. Если $y_1(t)$, $y_2(t)$ – решения задачи Коши (2.1), (2.2)на отрезке* $[t_0 - T, t_0 + T]$*, то* $y_1(t) = y_2(t)$ *для* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

Доказательство. Так как $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – решения задачи Коши (2.1), (2.2), то из леммы 2.1.1 следует, что они являются решениями интегрального уравнения (2.3). То есть

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \\ y_2(t) &= y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая разность по модулю, получаем

$$|y_1(t)-y_2(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))|d\tau\right|, \quad t \in [t_0-T, t_0+T].$$

Используя условие Липшица, имеем

$$|y_1(t)-y_2(t)| \le L\left|\int_{t_0}^{t} |y_1(\tau)-y_2(\tau)|d\tau\right|, \quad t \in [t_0-T, t_0+T].$$

Обозначив $z(t) = |y_1(t)-y_2(t)|$, перепишем последнее неравенство следующим образом

$$0 \leqslant z(t) \leqslant L\left|\int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|, \quad t \in [t_0-T, t_0+T].$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана с $c = 0$ и $d = L$, имеем $z(t) = 0, t \in [t_0-T, t_0+T]$. Следовательно $y_1(t) = y_2(t), t \in [t_0-T, t_0+T]$ и теорема 2.1.1 доказана. □

Замечание 4. Если условие Липшица не выполнено, то решение задачи (2.1), (2.2) может быть не единственным. Например, если

$$f(y) = \sqrt{y}, 0 \le y \le 1, \quad f(y) = -\sqrt{|y|}, -1 \le y \le 0,$$

то задача $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = 0$ имеет решения $y_1(t) = 0$ и $y_2(t) = t^2/4$, $0 \le t \le 2$, $y_2(t) = -t^2/4$, $-2 \le t \le 0$.

2.1.5 Теорема существования решения задачи Коши.

Перейдем к доказательству существования решения задачи с начальным условием. Следует отметить, что в отличие от доказательства теоремы единственности, мы можем доказать теорему существования не на всем исходном отрезке $[t_0-T, t_0+T]$, а на некотором, вообще говоря, меньшем.

Теорема 2.1.2. *Пусть функция $f \in C[\Pi]$, удовлетворяет в Π условию Липшица по y и $|f(t,y)| \le M$, $(t,y) \in \Pi$. Тогда на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$,где $h = \min\{T, A/M\}$, существует функция $\bar{y}(t)$ такая, что $\bar{y} \in C^1[t_0-h, t_0+h]$, $|\bar{y}(t)-y_0| \le A, t \in [t_0-h, t_0+h]$,*

$$\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t)), \quad t \in [t_0-h, t_0+h], \tag{2.7}$$

$$\bar{y}(t_0) = y_0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Из леммы 2.1.1 следует, что для доказательства теоремы, достаточно доказать существование функции $\bar{y} \in C[t_0-h, t_0+h]$, такой, что $|\bar{y}(t)-y_0| \le A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$, и являющейся решением интегрального уравнения

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0-h, t_0+h]. \tag{2.9}$$

Проведем доказательство, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций $y_k(t), k = 0, 1, 2...$ таких, что $y_0(t) = y_0$,

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], k = 0, 1, 2.... \tag{2.10}$$

Покажем, используя метод математической индукции, что все $y_k \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ и $|y_k(t) - y_0| \le A, t \in [t_0 - h, t_0 + h], k = 0, 1, 2, ...$

Для $k = 0$ это очевидно справедливо, поскольку $y_0(t) = y_0$.

Пусть это верно для $k = m$. То есть $y_m \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ и $|y_m(t) - y_0| \le A, t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Покажем, что

$$y_{m+1}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], k = 0, 1, 2..., \tag{2.11}$$

такова, что и $y_{m+1} \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ и $|y_{m+1}(t) - y_0| \le A, t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Действительно, так как $|y_m(t) - y_0| \le A, t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ то функция $f(t, y_m(t))$ определена и непрерывна на $[t_0 - h, t_0 + h]$.Значит интеграл, стоящий в правой части (2.11),определен и непрерывен при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Следовательно,$y_{m+1} \in C[t_0 - h, t_0 + h]$.

Оценим

$$|y_{m+1}(t) - y_0| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau \right| \le$$

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau))|d\tau \right| \le \left| \int\limits_{t_0}^{t} M d\tau \right| \le Mh \le M(A/M) = A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Таким образом, $|y_{m+1}(t) - y_0| \le A, t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Следовательно, мы показали что все $y_k \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ и $|y_k(t) - y_0| \le A, t \in [t_0 - h, t_0 + h], k = 0, 1, 2, \dots$.

Докажем, используя метод математической индукции, что

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \le AL^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], k = 0, 1, 2, \dots. \tag{2.12}$$

Для $k = 0$ имеем

$$|y_1(t) - y_0(t)| = \left| y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_0)d\tau - y_0 \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_0)d\tau \right| \le Mh \le A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h],$$

то есть при $k = 0$ оценка (2.12) верна.

Пусть неравенство (2.12) справедливо для $k = m - 1$ Покажем, что тогда оно справедливо при $k = m$. Действительно

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| = \left| y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau - y_0 - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_{m-1}(\tau))d\tau \right| \le$$

$$\leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau)) - f(\tau, y_{m-1}(\tau))| d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Используя условие Липшица и неравенство (2.12) для $k = m - 1$, получим

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \leq L \left| \int\limits_{t_0}^{t} |y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)| d\tau \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int\limits_{t_0}^{t} AL^{m-1} \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| = AL^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

Следовательно оценка (2.12) справедлива при $k = m$ и значит она доказана для любого $k \in \mathbb{N}$.

Представим функции $y_k(t)$ как частичные суммы ряда

$$y_k(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{k} (y_n(t) - y_{n-1}(t)), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Равномерная сходимость последовательности функций $y_k(t)$ на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(t)) \tag{2.13}$$

на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Применим признак Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости ряда (2.13) на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Из оценки (2.12) следует, что

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq AL^{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} = c_n, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad n = 1, 2...$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно ряд (2.13) сходится равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Это означает, что последовательность функций $y_k(t)$ сходится равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ к функции $\bar{y}(t)$. Так как все функции $y_k(t)$ непрерывны на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$,то функция $\bar{y}(t)$ также непрерывна на этом отрезке, то есть $\bar{y} \in C[t_0 - h, t_0 + h]$.

Покажем, что $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A, t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.Как было доказано $|y_k(t) - y_0| \leq A, t \in [t_0 - h, t_0 + h], k = 0, 1, 2, \ldots$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \longrightarrow \infty$ и произвольном фиксированном $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ получим что $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A, t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Покажем, что $\bar{y}(t)$ является решением интегрального уравнения (2.9). Переходя в (2.10) к пределу при $k \longrightarrow \infty$ и произвольном фиксированном $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, получим, что $\bar{y}(t)$ является решением интегрального уравнения (2.9).

Таким образом мы показали, что $\bar{y} \in C[t_0 - h, t_0 + h]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A, t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ и является решением интегрального уравнения (2.9). Следовательно $\bar{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ и теорема 2.1.2 доказана. □

Вернемся опять к вопросу о том, почему мы не можем доказать теорему существования на всем отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$, а доказываем существование решения только на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, где $h = \min\{T, A/M\}$. Это объясняется тем, что мы должны следить за тем, чтобы точка $(t, y(t))$ не выходила за пределы прямоугольника П, то есть чтобы выполнялось неравенство $|y(t)-y_0| \le A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$. Это необходимо поскольку только в П функция $f(t,y)$ ограничена фиксированной постоянной M и удовлетворяет условию Липшица с фиксированной константой L. Попытки увеличить число $h = \min\{T, A/M\}$ за счет увеличения A, вообще говоря, безрезультатны, поскольку при увеличении A в общем случае увеличивается постоянная M.

Приведем пример показывающий, что без дополнительных предположений относительно функции $f(t,y)$ решение существует только на достаточно малом отрезке.

Упражнение 2.1.1. *Рассмотрим задачу Коши*

$$y'(t) = a(y(t)^2+1), \quad a > 0,$$

$$y(0) = 0.$$

Функция $f(t,y) = a(y^2+1)$ определена при любых действительных t и y. Однако решение этой задачи $y(t) = \operatorname{tg} at$ существует только на отрезке $[-h_1, h_1]$, содержащемся в интервале $(-\pi/(2a), \pi/(2a))$.

2.2 Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения n-го порядка на произвольном отрезке

2.2.1 Постановка задачи Коши для системы ОДУ

В этом разделе мы докажем теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения n-го порядка на произвольном отрезке.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений на отрезке $[a,b]$

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ \ldots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)). \end{cases}$$

Функции $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ заданы. Требуется определить функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$

Для сокращения записи нормальной системы перейдем к векторным обозначениям

$$\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))^\top, \quad \overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = (y_1'(t), y_2'(t), \ldots, y_n'(t))^\top,$$

$$\overline{f}(t, \overline{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{pmatrix} = (f_1(t, \overline{y}), f_2(t, \overline{y}), \ldots, f_n(t, \overline{y}))^\top.$$

Используя эти обозначения нормальную систему можно переписать так

$$\overline{y}\,'(t) = \overline{f}(t, \overline{y}(t)), \quad t \in [a,b], \tag{2.14}$$

Вектор-функция $\overline{y}(t)$ называется непрерывно дифференцируемой на некотором отрезке, если все ее компоненты непрерывно дифференцируемы на этом отрезке.

Пусть вектор функция $\overline{y}(t)$ является решением системы (2.14). Множество точек $(t, y_1(t), y_2(t), \ldots,$ $t \in [a, b]$ представляет собой кривую в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Эта кривая называется интегральной кривой системы (2.14).

Рассмотрим начальное условие

$$\overline{y}(t_0) = \overline{y}_0, \tag{2.15}$$

где t_0 - некоторая фиксированная точка отрезка $[a, b]$, а

$$\overline{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix},$$

– заданный числовой вектор из $\mathbb{R}^n$.

Задачей Коши или задачей с начальным условием для нормальной системы дифференциальных уравнений называется задача отыскания вектор функции $\overline{y}(t)$, удовлетворяющей системе (2.14) и начальному условию (2.15).

Пусть вектор функция $\overline{f}(t, \overline{y})$ определена и непрерывна при $t \in [a, b]$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2.2.1. *Вектор функция $\overline{y}(t)$ называется решением задачи Коши (2.14)-(2.15) на отрезке $[a, b]$, если:*

1. *$\overline{y}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$,*
2. *$\overline{y}\,'(t) = \overline{f}(t, \overline{y}(t))$, $t \in [a, b]$,*
3. *$\overline{y}(t_0) = \overline{y}_0$.*

Определение 2.2.2. *Вектор функция $\overline{f}(t, \overline{y})$ удовлетворяет условию Липшица по $\overline{y}$, если найдется такая положительная константа $L > 0$, что для $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнены неравенства*

$$|f_k(t, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) - f_k(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)| \leqslant L\big(|\bar{y}_1 - \tilde{y}_1| + |\bar{y}_2 - \tilde{y}_2| + \cdots + |\bar{y}_n - \tilde{y}_n|\big), \tag{2.16}$$
$$\forall t \in [a, b], \quad \forall \overline{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)^\top, \widetilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

2.2.2 Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Докажем единственность решения задачи Коши (2.14),(2.15) для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 2.2.1. *Пусть вектор функция $\overline{f}(t, \overline{y})$ определена и непрерывна при $t \in [a, b]$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица (2.16). Тогда если вектор функции $\overline{y}(t)$ и $\widetilde{y}(t)$ являются решениями задачи Коши (2.14)-(2.15) на отрезке $[a, b]$, то $\overline{y}(t) = \widetilde{y}(t)$ для всех $t \in [a, b]$.*

Доказательство. Так как вектор функция $\overline{y}(t) = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \ldots, \bar{y}_n(t))^\top$ – решение задачи Коши (2.14)-(2.15), то

$$\bar{y}_i'(t) = f_n(t, \bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \ldots, \bar{y}_n(t)) \quad t \in [a, b], \quad \bar{y}_i(t_0) = y_{0i}.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение от t_0 до t и используя начальное условие (2.15), получим для $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\bar{y}_i(t) = y_{0i} + \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, \bar{y}_1(\tau), \bar{y}_2(\tau), \ldots, \bar{y}_n(\tau))d\tau, \quad t \in [a, b]. \tag{2.17}$$

Компоненты $\tilde{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ другого решения $\widetilde{y}(t) = (\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \ldots, \tilde{y}_n(t))^\top$ удовлетворяют таким же уравнениям

$$\tilde{y}_i(t) = y_{0i} + \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, \tilde{y}_1(\tau), \tilde{y}_2(\tau), \ldots, \tilde{y}_n(\tau))d\tau, \quad t \in [a, b]. \tag{2.18}$$

Вычитая уравнения (2.18) из уравнений (2.17) и используя условие Липшица (2.16), получим для $i = 1, 2, \ldots, n$ и $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |\bar{y}_i(t) - \tilde{y}_i(t)| &= \left| \int\limits_{t_0}^{t} \left(f_i(\tau, \bar{y}_1(\tau), \bar{y}_2(\tau), \ldots, \bar{y}_n(\tau)) - f_i(\tau, \tilde{y}_1(\tau), \tilde{y}_2(\tau), \ldots, \tilde{y}_n(\tau)) \right) d\tau \right| \leqslant \\ &\leq L \left| \int\limits_{t_0}^{t} \Big(|\bar{y}_1(\tau) - \tilde{y}_1(\tau)| + |\bar{y}_2(\tau) - \tilde{y}_2(\tau)| + \cdots + |\bar{y}_n(\tau) - \tilde{y}_n(\tau)| \Big) d\tau \right|. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Введем функцию

$$z(t) = |\bar{y}_1(t) - \tilde{y}_1(t)| + |\bar{y}_2(t) - \tilde{y}_2(t)| + \cdots + |\bar{y}_n(t) - \tilde{y}_n(t)|.$$

Тогда неравенства (2.19) можно переписать так

$$|\bar{y}_i(t) - \tilde{y}_i(t)| \leq L \left| \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [a, b].$$

Складывая все эти неравенства, имеем

$$z(t) \leqslant nL \left| \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad t \in [a, b].$$

Из леммы Гронуолла-Беллмана 2.1.2 следует, что $z(t) = 0$, $t \in [a, b]$. Это означает, что

$$\bar{y}_i(t) = \tilde{y}_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [a, b].$$

Следовательно $\bar{y}(t) = \tilde{y}(t)$, $t \in [a, b]$ и теорема 2.2.1 доказана. □

2.2.3 Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ на всем отрезке

Перейдем к доказательству теоремы существования решения задачи Коши (2.14)-(2.15).

Теорема 2.2.2. *Пусть вектор функция* $\overline{f}(t,\overline{y})$ *определена и непрерывна при* $t \in [a,b]$, $y \in \mathbb{R}^n$ *и удовлетворяет условию Липшица (2.16). Тогда существует вектор функция* $\overline{y}(t)$, *являющаяся решением задачи Коши (2.14)-(2.15) на всем отрезке* $[a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $y_i(t)$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots, y_n(\tau))d\tau, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.20}$$

Покажем, что если функции $\bar{y}_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.20), то вектор функция $\overline{y}(t) = (\bar{y}_1(t),\ldots,\bar{y}_n(t))^\top$ с компонентами $\bar{y}_i(t)$ является решением задачи Коши (2.14)-(2.15) на отрезке $[a,b]$.

Действительно, положив в (2.20) $t = t_0$, получим, что $\overline{y}(t)$ удовлетворяет условиям (2.15). Дифференцируя (2.20) по t убеждаемся в том, что выполнены уравнения (2.14).

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что существуют функции $\bar{y}_i(t)$ непрерывные на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющие системе интегральных уравнений (2.20).

Докажем существование таких функций $\bar{y}_i(t)$, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность вектор функций $\overline{y}^{(k)}(t) = (y_1^{(k)}(t), y_2^{(k)}(t), ..., y_n^{(k)}(t))^\top$, $k = 0,1,2,\ldots,$ таких, что

$$y_i^{(k+1)}(t) = y_{0i} + \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1^{(k)}(\tau), y_2^{(k)}(\tau), \ldots, y_n^{(k)}(\tau))d\tau, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad t \in [a,b], \tag{2.21}$$

$$y_i^{(0)}(t) = y_{0i}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad t \in [a,b].$$

Докажем, что все $y_i^{(k)}(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$.

Для $y_i^{(0)}(t)$ это верно. Предположим, что это верно для $y_i^{(m)}(t)$ и покажем , что это верно для $y_i^{(m+1)}(t)$. Так как все функции $f_i(t,\overline{y})$ непрерывны при $t \in [a,b]$, $y \in \mathbb{R}^n$, то из (2.21) следует, что $y_i^{(m+1)}(t)$ определены и непрерывны на $[a,b]$.

Обозначим через B следующую постоянную

$$B = \max_{i=1,2,\ldots,n} \left[\max_{t\in[a,b]} \left| \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n})d\tau \right| \right].$$

Покажем, что для всех $i = 1,2,\ldots,n$ и $k = 0,1,\ldots$ на отрезке $[a,b]$ справедливы оценки

$$|y_i^{(k+1)}(t) - y_i^{(k)}(t)| \le B(nL)^k \frac{|t-t_0|^k}{k!}. \tag{2.22}$$

При $k = 0$ это верно так как

$$|y_i^{(1)}(t) - y_i^{(0)}(t)| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} |f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n})|d\tau \right| \le B.$$

Пусть неравенство (2.22) справедливо для $k = m-1$. Покажем, что оно выполнено для $k = m$. Из (2.21) имеем

$$|y_i^{(m+1)}(t) - y_i^{(m)}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f_i(\tau, y_1^{(m)}(\tau), y_2^{(m)}(\tau), \dots, y_n^{(m)}(\tau)) - f_i(\tau, y_1^{(m-1)}(\tau), y_2^{(m-1)}(\tau), \dots, y_n^{(m-1)}(\tau))| d\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} L\Big(|y_1^{(m)}(\tau) - y_1^{(m-1)}(\tau)| + |y_2^{(m)}(\tau) - y_2^{(m-1)}(\tau)| + \dots + |y_n^{(m)}(\tau) - y_n^{(m-1)}(\tau)|\Big) d\tau \right|.$$

Используя предположение индукции, получим

$$|y_i^{(m+1)}(t) - y_i^{(m)}(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} B(nL)^m \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| \leqslant B(nL)^m \frac{|t-t_0|^m}{m!}.$$

Следовательно неравенство (2.22) доказано по индукции.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функциональные ряды

$$y_i^{(0)}(t) + \sum_{0}^{\infty} (y_i^{(m+1)}(t) - y_i^{(m)}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Из (2.22)следует, что на отрезке $[a, b]$ справедливы оценки

$$|y_i^{(m+1)}(t) - y_i^{(m)}(t)| \leq B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Учитывая эти оценки согласно признаку Вейерштрасса, получим, что функциональные ряды сходятся равномерно на отрезке $[a, b]$. Следовательно последовательности непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций

$$y_i^{(k)}(t) = y_i^0(t) + \sum_{0}^{k-1} (y_i^{(m+1)}(t) - y_i^{(m)}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

сходятся равномерно на отрезке $[a, b]$ к непрерывным функциям $\bar{y}_i(t)$.

Переходя к пределу при $k \to +\infty$ в формулах (2.21), получим, что функции $\bar{y}_i(t)$ являются решением системы интегральных уравнений (2.20), а значит и задачи (2.14)-(2.15). Теорема 2.2.2 доказана. □

Замечание. Для выполнения условия Липшица (2.16) достаточно, чтобы все функции $f_k(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ имели равномерно ограниченные частные производные

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_j} f_k(t, y_1, y_2, ..., y_n) \right| \leq D, \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$k, j = 1, 2, ..., n$, D - постоянная. Действительно, в этом случае

$$|f_k(t, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_k(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)| \leqslant$$
$$\leqslant |f_k(t, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_k(t, \tilde{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)| +$$
$$+ |f_k(t, \tilde{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_k(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \bar{y}_n)| + \dots$$
$$\dots + |f_k(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_k(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)|.$$

Применяя формулу Лагранжа по каждой переменной, получим

$$|f_k(t,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\dots,\bar{y}_n)-f_k(t,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\dots,\tilde{y}_n)|\le D\Big(|\bar{y}_1-\tilde{y}_1|+|\bar{y}_2-\tilde{y}_2|+\dots+|\bar{y}_n-\tilde{y}_n|\Big).$$

Следовательно все функции $f_k(t,y_1,y_2,...,y_n)$ удовлетворяют условию Липшица (2.16) с постоянной $L=D$.

Используя это замечание, легко привести пример системы, удовлетворяющей условиям теорем 2.2.1 и 2.2.2.

Пример 2.2.1. *Для системы*

$$\begin{cases} y_1'(t)=t\sin(y_1(t)+y_2(t))+(y_1(t))^3(1+(y_1(t))^2)^{-1},\\ y_2'(t)=t^2y_2(t)+\cos(y_1(t)+y_2(t)). \end{cases}$$

выполнены условия теорем 2.2.1 и 2.2.2, и решение задачи Коши для этой системы существует и единственно на любом отрезке $[a,b]$.

2.2.4 Задача Коши для ОДУ n-го порядка на произвольном отрезке.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)}(t)=F(t,y(t),y'(t),y''(t),\dots,y^{(n-1)}(t)),\quad t\in[a,b], \tag{2.23}$$

где функция $F(t,y_1,y_2,\dots,y_n)$ задана, а $y(t)$ – неизвестная искомая функция.

Рассмотрим для функции $y(t)$ начальные условия

$$y(t_0)=y_{00},\quad y'(t_0)=y_{01},\quad y^{(2)}(t_0)=y_{02},\quad \dots,\quad y^{(n-1)}(t_0)=y_{0n-1}, \tag{2.24}$$

где t_0 некоторое фиксированное число на отрезке $[a,b]$, а y_{0i} – заданные числа.

Задачей Коши или задачей с начальными условиями для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, называется задача отыскания функции $y(t)$, удовлетворяющей уравнению (2.23) и начальным условиям (2.24).

Определение 2.2.3. *Функция $y(t)$ называется решением задачи Коши (2.23)-(2.24) на отрезке $[a,b]$, если $y(t)$ является n-раз дифференцируемой на $[a,b]$ функцией, $y(t)$ удовлетворяет уравнению (2.23) и начальным условиям (2.24).*

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (2.23)-(2.24).

Теорема 2.2.3. *Пусть функция $F(t,y_1,y_2,\dots,y_n)$ определена и непрерывна при $t\in[a,b]$,$(y_1,y_2,\dots,y_n)\in R^n$ и удовлетворяет условию Липшица*

$$|F(t,\hat{y}_1,\hat{y}_2,\dots,\hat{y}_n)-F(t,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\dots,\tilde{y}_n)|\leqslant L\sum_{i=1}^{n}|\hat{y}_i-\tilde{y}_i|, \tag{2.25}$$

$$\forall t\in[a,b],\quad \forall(\hat{y}_1,\hat{y}_2,\dots,\hat{y}_n),(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\dots,\tilde{y}_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда существует единственная функция $\bar{y}(t)$, являющаяся решением задачи Коши (2.23)-(2.24) на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Докажем вначале единственность решения. Пусть функция $y(t)$ является решением задачи Коши (2.23),(2.24) на отрезке $[a,b]$. Введем функции

$$y_1(t)=y(t),\quad y_2(t)=y'(t),\quad y_3(t)=y''(t),\dots,y_n(t)=y^{(n-1)}(t).$$

Так как функция $y(t)$ является решением задачи Коши (2.23)-(2.24) на отрезке $[a, b]$, то функции $y_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ являются решением задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(t) & = & y_2(t), \\ y_2'(t) & = & y_3(t), \\ & \ldots & \\ y_{n-1}'(t) & = & y_n(t), \\ y_n'(t) & = & F(t, y_1(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)), \end{cases} \tag{2.26}$$

с начальными условиями

$$y_i(t_0) = y_{0i-1}, \quad i = 1, 2..., n. \tag{2.27}$$

Из условий теоремы следует, что задача Коши (2.26)-(2.27) удовлетворяет условиям теоремы 2.2.1 единственности решения задачи Коши для системы ОДУ. Следовательно решение задачи Коши (2.26)-(2.27), а значит и решение задачи Коши (2.23)-(2.24) также единственно.

Докажем существование решения решения Коши (2.23)-(2.24). Рассмотрим задачу Коши (2.26)-(2.27). Для нее выполнены условия теоремы 2.2.2 существования решения на отрезке $[a, b]$. То есть существуют непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции $y_i(t)$, удовлетворяющие (2.26)-(2.27). Обозначив $y_1(t)$ через $y(t)$, получим, что $y(t)$ является непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией, $y^{(i-1)}(t) = y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $y(t)$ удовлетворяет (2.23)-(2.24). Следовательно $y(t)$ является решением Коши (2.23)-(2.24). Теорема 2.2.3 доказана. □

2.2.5 Задача Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} y_1'(t) & = & a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + \hat{f}_1(t), \\ y_2'(t) & = & a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)y_n(t) + \hat{f}_2(t), \\ & \ldots & \\ y_n'(t) & = & a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + \hat{f}_n(t), \end{cases} \tag{2.28}$$

где $a_{ij}(t)$, $\hat{f}_i(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ – заданные непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции.

Пусть задано начальное условие

$$y_i(t_0) = y_{0i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.29}$$

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (2.28)-(2.29).

Теорема 2.2.4. *Пусть $a_{ij}(t)$, $\hat{f}_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда существует единственная вектор функция $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))^\top$, являющаяся решением задачи Коши (2.28)-(2.29) на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Система (2.28) является частным случаем системы (2.14) с

$$f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_{i1}(t)y_1 + a_{i2}(t)y_2 + \cdots + a_{in}(t)y_n + \hat{f}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти функции $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определены и непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (2.16) с постоянной

$$L = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max_{t\in[a,b]} |a_{ij}(t)|.$$

Следовательно для задачи Коши (2.28)-(2.29) выполнены условия теорем 2.2.1 и 2.2.2, и она имеет единственное решение на отрезке $[a,b]$. Теорема 2.2.4 доказана. □

2.2.6 Задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка.

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{2.30}$$

где $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $f(t)$ – заданные непрерывные функции.

Рассмотрим для функции $y(t)$ начальные условия

$$y^{(i)}(t_0) = y_{0i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.31}$$

Теорема 2.2.5. *Пусть функции $a_i(t)$, $f(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда существует единственная функция $y(t)$, являющаяся решением задачи Коши (2.30)-(2.31) на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Уравнение (2.30) является частным случаем уравнения (2.23) с функцией

$$F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(t) - a_n(t)y_1 - a_{n-1}(t)y_2 - \cdots - a_1(t)y_n.$$

Эта функция $F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определена и непрерывна при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица (2.25) с постоянной

$$L = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \max_{t\in[a,b]} |a_i(t)|.$$

Следовательно для задачи Коши (2.30)-(2.31) выполнены условия теоремы 2.2.3 и ее решение существует и единственно на отрезке $[a,b]$. Теорема 2.2.5 доказана.

2.3 Задача Коши для ОДУ первого порядка, не разрешенного относительно производной

2.3.1 Примеры постановки задачи Коши

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0. \tag{2.32}$$

Всюду в этом параграфе будем считать, что вещественнозначная функция $F(t, y, p)$ определена в параллелепипеде D с центром в некоторой точке $(t_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$:

$$D = \{(t, y, p) \in \mathbb{R}^3 : |t - t_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b, |p - y_0'| \leqslant c\}, \tag{2.33}$$

где a, b, c – фиксированные положительные числа.

Определение 2.3.1. *Функция $y(t)$ называется решением уравнения (3.15) на отрезке $[t_1, t_2]$, если:*

1. *$y(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$;*
2. *$(t, y(t), y'(t)) \in D$ для всех $t \in [t_1, t_2]$;*
3. *на отрезке $[t_1, t_2]$ выполнено (3.15).*

Если уравнение разрешено относительно производной (3.15), $F(t, y, p) = p - f(t, y)$, тогда при некоторых дополнительных условиях на функцию $f(t, y)$ для получения единственного решения уравнения достаточно задать условие прохождения соответствующей интегральной кривой (графика решения) через некоторую точку (t_0, y_0). В общем случае приходим к задаче с дополнительным условием

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.34}$$

Проиллюстрируем особенности такой задачи для случая уравнения, квадратично зависящего от производной:

$$(y')^2 - (t + y)y' + ty = 0, \quad \text{или} \begin{cases} p^2 - (t + y)p + ty = 0, \\ p = y'. \end{cases} \tag{2.35}$$

Поскольку квадратное уравнение имеет корни $p_1 = t$, $p_2 = y$, тогда исходное дифференциальное уравнение распадается на совокупность двух уравнений, разрешенных относительно производной:

$$y' = t, \quad y' = y.$$

Получаем два семейства решений

$$y_1(t) = \frac{t^2}{2} + C_1, \quad y_2(t) = C_2 \exp\{t\}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Пример 2.3.1. *Задача для уравнения (2.35) одним дополнительным условием* $y(0) = 1$ *имеет два решения:*

$$y_1(t) = \frac{t^2}{2}, \quad y_2(t) = \exp\{t\}. \tag{2.36}$$

Задача для уравнения (2.35) одним дополнительным условием $y(0) = 0$ *имеет четыре решения:*

$$y_1(t) = \frac{t^2}{2}, \quad y_2(t) = 0, \quad y_3(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{при } t < 0, \\ y_2(t), & \text{при } t \geqslant 0, \end{cases} \quad y_4(t) = \begin{cases} y_2(t), & \text{при } t < 0, \\ y_1(t), & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Рассмотренный пример показывает, что неединственность решения достаточно характерна для задачи (2.34). Для единственности необходимо задать еще одно дополнительное условие. Из геометрических соображений наиболее естественно потребовать, чтобы искомое решение проходило через заданную точку с данным наклоном касательной. В результате приходим к постановке задачи Коши

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \tag{2.38}$$

Пример 2.3.2. *Задача Коши для уравнения (2.35) начальными условиями*

$$y(0)=1,\quad y'(0)=0\quad (\text{ т.е. } (t_0,y_0,y_0')=(0,1,0),\quad F(0,1,0)=0,\quad \frac{\partial F(0,1,0)}{\partial p}=-1\neq 0) \tag{2.39}$$

имеет единственное решение $y(t)=y_1(t)=t^2/2+1$.

Задача Коши для уравнения (2.35) начальными условиями

$$y(0)=1,\quad y'(0)=1\quad (\text{ т.е. } (t_0,y_0,y_0')=(0,1,1),\quad F(0,1,1)=0,\quad \frac{\partial F(0,1,1)}{\partial p}=1\neq 0) \tag{2.40}$$

имеет единственное решение $y(t)=y_2(t)=\exp\{t\}$.

Задача Коши для уравнения (2.35) начальными условиями

$$y(0)=1,\quad y'(0)=y_0',\quad \forall y_0'\notin\{0;1\},\quad (\text{ т.е. } (t_0,y_0,y_0')=(0,1,y_0'),\quad F(t_0,y_0,y_0')\neq 0) \tag{2.41}$$

не имеет ни одного решения.

Задача Коши для уравнения (2.35) начальными условиями

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0\quad (\text{ т.е. } (t_0,y_0,y_0')=(0,0,0),\quad F(0,0,0)=0,\quad \frac{\partial F(0,0,0)}{\partial p}=0) \tag{2.42}$$

имеет четыре решения (2.37).

Приведенный пример показывает следующие особенности постановки задачи Коши (2.38):

1. Тройка чисел $(t_0,y_0,y_0')\in\mathbb{R}^3$ не может быть взята произвольно; для существования решения необходимо выполнения условия $F(t_0,y_0,y_0')=0$.

2. Двух дополнительных условий $y(t_0)=y_0$, $y'(t_0)=y_0'$ может оказаться недостаточно для единственности решения в случае $\frac{\partial F(t_0,y_0,y_0')}{\partial p}=0$.

2.3.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Теорема 2.3.1. *Пусть функция $F(t,y,p)$ определена в параллелепипеде D вида (2.33) с центром в (t_0,y_0,y_0') и выполнены следующие условия:*

1. (t_0,y_0,y_0') *– корень уравнения* $F(t,y,p)=0$, *т.е.* $F(t_0,y_0,y_0')=0$; (2.43)

2. *функции* $F(t,y,p)$, $\dfrac{\partial F(t,y,p)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F(t,y,p)}{\partial p}$ *непрерывны в* D; (2.44)

3. $\dfrac{\partial F(t_0,y_0,y_0')}{\partial p}\neq 0.$ (2.45)

Тогда найдется $h>0$, что на отрезке $[t_0-h,t_0+h]$ существует единственное решение задачи Коши (2.38).

Доказательство. Дифференциальное уравнение $F(t,y,y')=0$ эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{cases} F(t,y,p)=0,\\ p=\dfrac{dy}{dt}, \end{cases} \tag{2.46}$$

первое из которых задает алгебраическую связь между переменными $(t, y, p) \in D$, а второе – дифференциальную связь между этими переменными.

Рассмотрим алгебраическое уравнение в окрестности точки $M_0(t_0, y_0, y_0')$. В силу (2.43)-(2.45) и согласно теореме о неявной функции, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность Ω_0 точки $M_0'(t_0, y_0)$, в которой существует единственная непрерывная функция $p = f(t, y)$ с непрерывной частной производной

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = -\frac{\partial F(t,y,f(t,y))/\partial y}{\partial F(t,y,f(t,y))/\partial p}. \tag{2.47}$$

Функция $p = f(t, y)$ удовлетворяет условию $|p - y_0'| < \varepsilon$ и является решением алгебраического уравнения $F(t, y, p) = 0$ в Ω_0 и, в частности, выполнено равенство

$$y_0' = f(t_0, y_0). \tag{2.48}$$

В окрестности Ω_0 система (2.46) эквивалентна одному дифференциальному уравнению $y' = f(t, y)$, разрешенному относительно производной, а соответствующая задача Коши (2.38) принимает вид

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.49}$$

Отметим, что фигурирующее в (2.38) начальное условие на производную $y'(t_0) = y_0'$ автоматически выполнено в силу равенства (2.48) и непрерывности функции $f(t, y)$.

Рассмотрим задачу Коши (2.49) в прямоугольнике

$$\Pi = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leqslant a_0, \quad |y - y_0| \leqslant b_0\},$$

где положительные числа a_0, b_0 настолько малы, чтобы $\Pi \subset \Omega_0$. Как уже установлено выше, функция $f(t, y)$ непрерывна в Ω_0, а значит и в Π. Условие Липшица для этой функции по переменной y на множестве Π с константой

$$L = \max_{(t,y)\in\Pi} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$$

вытекает из (2.47). Таким образом, в Π выполнены все условия теоремы 2.1.2 существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ, разрешенного относительно производной. Следовательно, найдется $h > 0$, что на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственное решение задачи Коши (2.49), а значит и задачи Коши (2.38). □

В приведенном выше примере 2.3.2 условия теоремы 2.3.1 выполнены для задач Коши (2.39), (2.40) и не выполнены для задач Коши (2.41), (2.42).

2.3.3 Методы интегрирования

Рассмотрим метод интегрирования уравнений, основанный на его почленном дифференцировании. Получающееся уравнение становится линейным относительно старшей производной, и в нем эффективно производится замена искомой функции.

Уравнение вида $y = f(t, y')$, разрешенное относительно переменной y, эквивалентно системе алгебраического и дифференциального уравнений

$$y = f(t, p), \quad dy = p dt.$$

Из алгебраического уравнения выражаем dy, воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала:

$$dy = \frac{\partial f(t,p)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t,p)}{\partial p}dp = pdt.$$

Последнее равенство задает дифференциальное уравнение первого порядка в симметричном виде относительно переменных t, p. Если удалось найти общее параметрическое решение этого уравнения $t = \varphi(\tau, c)$, $p = \psi(\tau, c)$, тогда и решение исходного уравнения существует в параметрическом виде

$$t = \varphi(\tau, c), \quad y = f(t, \psi(\tau, c).$$

Уравнение вида $t = f(y, y')$, разрешенное относительно переменной t, эквивалентно системе алгебраического и дифференциального уравнений

$$t = f(y, p), \quad dy = pdt.$$

Из алгебраического уравнения выражаем dt, воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала:

$$dt = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp = \frac{dy}{p}.$$

Последнее равенство задает дифференциальное уравнение первого порядка в симметричном виде относительно переменных y, p. Если удалось найти общее параметрическое решение этого уравнения $y = \varphi(\tau, c)$, $p = \psi(\tau, c)$, тогда и решение исходного уравнения существует в параметрическом виде

$$y = \varphi(\tau, c), \quad t = f(\varphi(\tau, c), \psi(\tau, c)).$$

Уравнение вида $F(t, y, y') = 0$ эквивалентно системе алгебраического и дифференциального уравнений

$$F(t, y, p) = 0, \quad dy = pdt.$$

Относительно алгебраического уравнения предположим, что оно задает гладкую поверхность в $\mathbb{R}^3$, описываемую параметрически с помощью непрерывно дифференцируемых функций $T(u, v)$, $y = Y(u, v)$, $P(u, v)$:

$$t = T(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad p = P(u, v).$$

Воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала, вычисляем dy, dt и получаем дифференциальную связь между параметрами (u, v), которая выделяет из всех точек поверхности именно интегральные кривые:

$$\frac{\partial Y(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial Y(u,v)}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial T(u,v)}{\partial v}dv\right)P(u, v).$$

Получаем дифференциальное уравнение первого порядка в симметричном виде относительно переменных u, v. Если удалось найти общее параметрическое решение этого уравнения $u = \varphi(\tau, c)$, $v = \psi(\tau, c)$, тогда и решение исходного уравнения существует в параметрическом виде

$$t = T(\varphi(\tau, c), \psi(\tau, c)), \quad y = Y(\varphi(\tau, c), \psi(\tau, c)).$$

2.3.4 Особые решения ОДУ 1-го порядка

Определение 2.3.2. *Функция $y = \xi(t)$ называется особым решением дифференциального уравнения*

$$F(t, y, y') = 0$$

на отрезке $[t_1, t_2]$, если $y = \xi(t)$ является решением уравнения на этом отрезке в смысле определения 2.3.1, и через каждую точку соответствующей интегральной кривой $\Gamma = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \xi(t), t \in [t_1, t_2]\}$ проходит другое решение решение этого уравнения с тем же самым наклоном касательной, но отличающееся от данного решения в сколь угодно малой окрестности точки.

Таким образом, в каждой точке интегральной кривой особого решения нарушается единственность решения задачи Коши

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \forall (t_0, y_0) \in \Gamma.$$

Следовательно, нарушается одно или несколько условий доказанной выше теоремы 2.3.1 о существовании и единственности решения задачи Коши. Рассмотрим основные ситуации, приводящие к появлению особых решений. Нас будет интересовать прежде всего необходимые условия для особых решений.

Если не выполнены условия гладкости функции $F(t, y, p)$, тогда примеры особых решений нетрудно построить даже для разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений.

Пример 2.3.3. *Уравнение*

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \tag{2.50}$$

имеет решение $y_1(t) \equiv 0$ и семейство решений $y_2(t, c) = \dfrac{(t + c)^3}{27}$. Функция $y_1(t)$ является особым решением уравнения (2.50) на любом отрезке $[t_1, t_2]$, поскольку для любого $t_0 \in [t_1, t_2]$ найдется $c_0 = -t_0$, что через точку $(t_0, 0)$ интегральной кривой решения $y_1(t)$ проходит другое решение $y_2(t, c_0) = \dfrac{(t - y_0)^3}{27}$ с тем же самым нулевым углом наклона касательной. В данном случае $F(t, y, p) = p - \sqrt[3]{y^2}$ является непрерывной функцией, а производная $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ терпит разрыв при $y = 0$, т.е. нарушено одно из условий (2.44).

Таким образом, особое решение может содержаться среди тех кривых, на которых частная производная $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ не существует.

Пусть теперь выполнены условия (2.44) относительно функции $F(t, y, p)$. Если существует особое решение $\xi(t)$, тогда во всех точках его интегральной кривой должны выполняться два равенства

$$F(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0.$$

Ясно, что тройка $(t, \xi(t), \xi'(t))$ является при каждом t является решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} F(t, y, p) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial p}(t, y, p) = 0. \end{cases} \tag{2.51}$$

Часто из системы (2.51) можно исключить переменную p и получить уравнение $\Phi(t,y) = 0$. Решения этого уравнения на плоскости задаются одной или несколькими линиями, которые называются *дискриминантными кривыми.* Очевидно, что интегральная кривая особого решения составлена из дискриминантных кривых и $\Phi(t, \xi(t)) = 0$.

Возможны следующие три случая:

1. Уравнение $\Phi(t,y) = 0$ задает особое решение.

2. Уравнение $\Phi(t,y) = 0$ задает решение ОДУ, которое не является особым.

3. Уравнение $\Phi(t,y) = 0$ задает функцию, не являющуюся решением ОДУ.

Приведем соответствующие примеры.

Пример 2.3.4. *Перепишем уравнение (2.50) из примера 2.3.3 в эквивалентном виде*

$$(y')^3 - y^2 = 0.$$

Из системы (2.51) для дискриминантной кривой, $\begin{cases} p^3 - y^2 = 0, \\ 3p^2 = 0, \end{cases}$ *находим функцию* $y(t) = 0$*, которая является особым решением.*

Пример 2.3.5. *Рассмотрим уравнение*

$$(y')^2 - y^2 = 0.$$

Из системы (2.51) для дискриминантной кривой, $\begin{cases} p^2 - y^2 = 0, \\ 2p = 0, \end{cases}$ *находим функцию* $y(t) = 0$*, которая является решением исходного уравнения. Для проверки того, будет ли найденное решение особым, проинтегрируем исходное уравнение и найдем два семейства решений*

$$y_1(t) = c_1 \exp\{t\}, \quad y_2(t) = c_2 \exp\{-t\}.$$

Ни одна из интегральных кривых этих семейств решений не касается интегральной кривой решения $y(t) = 0$ *ни в одной точке. Следовательно, решение* $y(t) = 0$ *не является особым для рассматриваемого уравнения.*

Пример 2.3.6. *Рассмотрим уравнение (2.35). Система (2.51) для дискриминантной кривой,* $\begin{cases} p^2 - (t+y)p + ty = 0, \\ 2p - t - y = 0, \end{cases}$ *дает функцию* $y(t) = t$*, которая не является решением ОДУ. Следовательно, особых решений рассматриваемое уравнение не имеет.*

Глава 3

Общая теория линейных уравнений и систем ОДУ

3.1 Комплекснозначные решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка и системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Комплекснозначной функцией действительного аргумента $t \in [a,b]$ называется функция $y(t)$ такая, что $y(t) = u(t) + iv(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ – действительные функции. Комплекснозначная функция $y(t)$ непрерывна на $[a,b]$, если $u(t)$ и $v(t)$ непрерывны на $[a,b]$. Комплекснозначная функция $y(t)$ дифференцируема на $[a,b]$, если $u(t)$ и $v(t)$ дифференцируемы на $[a,b]$, при этом $y'(t) = u'(t) + iv'(t)$. Аналогично определяются производные более высокого порядка функции $y(t)$.

Комплекснозначные решения линейных дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами возникают также как комплексные числа при решении алгебраических уравнений с действительными коэффициентами.

Рассмотрим пример. Требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0, \quad t \in [a,b], \tag{3.1}$$

Ищем решение этого уравнения в виде $y(t) = e^{\lambda t}$, где λ – неизвестная постоянная. Подставляя это представление в уравнение (3.1) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Это уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_1 = -1 + 2i, \lambda_1 = -1 - 2i$. Как известно, если комплексное число $z = x + iy$, то $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Следовательно уравнение (3.1) имеет два комплекснозначных решения

$$y_1(t) = e^{-t}\cos 2t + ie^{-t}\sin 2t, \quad y_2(t) = e^{-t}\cos 2t - ie^{-t}\sin 2t. \tag{3.2}$$

Перейдем к определению комплекснозначного решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.3}$$

с действительными коэффициентами $a_k(t) \in \mathbb{R}$ и комплекснозначной функцией $f(t) = g(t) + ih(t)$, $g(t) \in \mathbb{R}$, $h(t) \in \mathbb{R}$.

Определение 3.1.1. *Комплекснозначная функция $y(t) = u(t) + iv(t)$ называется решением уравнения (3.3), если функции $u(t)$ и $v(t)$ n-раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют уравнениям*

$$u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)u'(t) + a_n(t)u(t) = g(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.4}$$
$$v^{(n)}(t) + a_1(t)v^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)v'(t) + a_n(t)v(t) = h(t), \quad t \in [a,b]. \tag{3.5}$$

Рассмотрим задачу Коши для комплекснозначных решений уравнения (3.3). Требуется определить решение уравнения (3.3) такое, что

$$y^{(m)}(t_0) = y_{0,m}, \quad m = 0, 1, 2..., n-1, \tag{3.6}$$

где $y_{0,m}$ – заданные комплексные числа $y_{0,m} = u_{0,m} + iv_{0,m}$, $u_{0,m}, v_{0,m} \in \mathbb{R}$.

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (3.3)-(3.6).

Теорема 3.1.1. *Пусть функции $a_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $g(t)$ и $h(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Тогда существует единственная функция $y(t)$, являющаяся решением задачи Коши (3.3)-(3.6) на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3.4)с начальными условиями

$$u^{(m)}(t_0) = u_{0,m}, \quad m = 0, 1, 2..., n-1. \tag{3.7}$$

По теореме 2.2.5 из параграфа 2.2.6 задача Коши (3.4)-(3.7)имеет единственное решение $u(t)$. Аналогично задача Коши для уравнения (3.5)с начальными условиями

$$v^{(m)}(t_0) = v_{0,m}, \quad m = 0, 1, 2..., n-1 \tag{3.8}$$

имеет единственное решение $v(t)$. Тогда комплекснозначная функция $y(t) = u(t)+iv(t)$ является решением задачи Коши (3.3)-(3.6) на отрезке $[a, b]$. Единственность решения задачи Коши (3.3)-(3.6) следует из единственности решения задач Коши (3.4)-(3.7) и (3.5)-(3.8). Теорема доказана 3.1.1. □

Следствие 3.1.1. *Если функция $f(t)$ в уравнении (3.3) действительна (т.е. $h(t) = 0$) и начальные данные в (3.6) действительны (т.е. $v_{0,m} = 0$, $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$), то задача Коши (3.3)-(3.6) имеет только действительное решение.*

Определим комплекснозначное решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} y_1'(t) &= a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + f_1(t), \\ y_2'(t) &= a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)y_n(t) + f_2(t), \\ &\dots \\ y_n'(t) &= a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + f_n(t), \end{cases} \tag{3.9}$$

где функции $a_{kj}(t)$, $k, j = 1, 2, ..., n$ – действительны, а $f_k(t) = g_k(t) + ih_k(t)$ – комплекснозначны.

Определение 3.1.2. *Комплекснозначная вектор функция*

$$\overline{y}(t) = (u_1(t) + iv_1(t), u_2(t) + iv_2(t), \dots, u_n(t) + iv_n(t))^\top$$

называется решением системы (3.9), если $u_k(t)$, $v_k(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$, и

$$\begin{cases} u_1'(t) &= a_{11}(t)u_1(t) + a_{12}(t)u_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)u_n(t) + g_1(t), \\ u_2'(t) &= a_{21}(t)u_1(t) + a_{22}(t)u_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)u_n(t) + g_2(t), \\ &\dots \\ u_n'(t) &= a_{n1}(t)u_1(t) + a_{n2}(t)u_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)u_n(t) + g_n(t), \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} v_1'(t) &= a_{11}(t)v_1(t) + a_{12}(t)v_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)v_n(t) + h_1(t), \\ v_2'(t) &= a_{21}(t)v_1(t) + a_{22}(t)v_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)v_n(t) + h_2(t), \\ &\dots \\ v_n'(t) &= a_{n1}(t)v_1(t) + a_{n2}(t)v_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)v_n(t) + h_n(t). \end{cases} \tag{3.11}$$

Пусть задано начальное условие

$$y_k(t_0) = y_{0k} = u_{0k} + iv_{0k}, \tag{3.12}$$

где u_{0k}, v_{0k} – действительные числа, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (3.9)-(3.12).

Теорема 3.1.2. *Пусть $a_{kj}(t)$, $g_k(t)$, $h_k(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда существует единственная вектор функция $\bar{y}(t)$, являющаяся решением задачи Коши (3.9)-(3.12) на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для системы (3.10) с начальным условием

$$u_k(t_0) = u_{0k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.13}$$

По теореме 2.2.4 из параграфа 2.2.5 задача Коши (3.10)-(3.13)имеет единственное решение вектор функцию $\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t), \ldots, \bar{u}_n(t))$.

Аналогично задача Коши для уравнения (3.11) с начальными условиями

$$v_k(t_0) = v_{0k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.14}$$

имеет единственное решение вектор функцию $\bar{v}(t) = (\bar{v}_1(t), \bar{v}_2(t), \ldots, \bar{v}_n(t))$. Тогда комплекснозначная вектор функция

$$\bar{y}(t) = \bar{u}(t) + i\bar{v}(t) = (\bar{u}_1(t) + i\bar{v}_1(t), \bar{u}_2(t) + i\bar{v}_2(t), \ldots, \bar{u}_n(t) + i\bar{v}_n(t))$$

будет решением задачи Коши (3.9)-(3.12) на отрезке $[a, b]$. Единственность решения задачи Коши (3.9)-(3.12) следует из единственности решений задач Коши (3.10)-(3.13) и (3.11)-(3.14). Теорема 3.1.2 доказана. □

Следствие 3.1.2. *Если функции $f_k(t)$ в системе (3.9) действительны (т.е. $g_k(t) = 0$) и начальные данные в (3.12) действительны (т.е. $v_{0k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$), то задача Коши (3.9)-(3.12) имеет только действительное решение.*

3.2 Линейные системы ОДУ и матричные ОДУ

Рассмотрим нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в векторной форме с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $a_{i,j}(t) \in \mathbb{R}$ и $f_k(t) \in \mathbb{C}$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Напомним, что решение $\overline{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^\top$, системы (3.15) является вообще говоря комплекснозначной вектор-функцией $\overline{y}(t) = \overline{u}(t) + i\overline{v}(t)$, где

$$\overline{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^\top, \quad \overline{v}(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))^\top, \quad u_j(t) \in \mathbb{R}, \quad v_j(t) \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

В дальнейшем, если не оговорено особо, речь пойдет именно о комплекснозначных решениях.

3.2.1 Линейные однородные системы ОДУ

Определение 3.2.1. *Система (3.15) называется однородной, если* $\overline{f}(t) \equiv \overline{\theta}$ *на отрезке* $[a, b]$. *В противном случае система (3.15) называется неоднородной.*

Лемма 3.2.1. *Если* $\overline{y}(t)$ *– решение линейной однородной системы ОДУ, тогда* $\alpha\overline{y}(t)$ *также решение однородной системы для любого* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Если* $\overline{y}_1(t)$ *и* $\overline{y}_2(t)$ *– два решения линейной однородной системы, тогда* $\overline{y}(t) = \overline{y}_1(t) + \overline{y}_2(t)$ *также решение однородной системы.*

Доказательство. Если $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$, тогда

$$\frac{d\{\alpha\overline{y}(t)\}}{dt} = \alpha\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \alpha A(t)\overline{y}(t) = A(t)\{\alpha\overline{y}(t)\}.$$

Если $d\overline{y}_\ell(t)/dt = A(t)\overline{y}_\ell(t)$, $\ell = 1, 2$, тогда

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \frac{d\{\overline{y}_1(t) + \overline{y}_1(t)\}}{dt} = \frac{d\overline{y}_1(t)}{dt} + \frac{d\overline{y}_1(t)}{dt} = A(t)\overline{y}_1(t) + A(t)\overline{y}_2(t) = A(t)\overline{y}(t).$$

□

Следствие 3.2.1. *Если* $\overline{y}_\ell(t)$ *решения линейной однородной системы* $\ell = 1, \ldots, m$, *тогда* $\overline{y}(t) = \sum\limits_{\ell=1}^{m} \alpha_\ell \overline{y}_\ell(t)$ *также решение однородной системы для любых* $\alpha_\ell \in \mathbb{C}$.

3.2.2 Однородные матричные ОДУ.

Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $a_{i,j}(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad \overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Пусть имеется n вектор-функций $\overline{y}_j(t) = (y_{1,j}(t), \ldots, y_{n,j}(t))^\top$, $j = 1, \ldots, n$. Составим матрицу $Y(t)$, столбцами которой являются данные вектор-функции:

$$Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(t) & \cdots & y_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,1}(t) & \cdots & y_{n,n}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Сопоставим системе (3.16) матричное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \tag{3.18}$$

где производная матричной функции равна матрице, состоящей из производных элементов исходной матрицы, т.е. $dY(t)/dt = \|dy_{j,i}(t)/dt\|$.

По определению, решением матричного дифференциального уравнения (3.18) на отрезке $[a, b]$ называется непрерывно дифференцируемая на данном отрезке матричная функция вида (3.17), обращающая уравнение (3.18) в тождество. Уравнение (3.18) имеет по сравнению с системой (3.16) более симметричную форму записи, напоминающую скалярное уравнение первого порядка: и "коэффициент"$A(t)$ уравнения и искомая функция $Y(t)$ являются объектами одинаковой природы – матричными функциями. Связь между решениями системы (3.16) и матричным уравнением (3.18) устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 3.2.1. *Вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ являются решениями однородной системы ОДУ (3.16) на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда составленная из этих функций матрица $Y(t)$ вида (3.17) является решением матричного дифференциального уравнения (3.18).*

Доказательство. Для доказательства необходимости рассмотрим решения $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ системы (3.16) и составим из них матрицу $Y(t)$ вида (3.17). Поскольку

$$\frac{d\overline{y}_j(t)}{dt} = A(t)\overline{y}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$

тогда для соответствующей матричной производной, элементы которой сгруппированы по столбцам, получаем равенства

$$\frac{dY(t)}{dt} = \left(\frac{d\overline{y}_1(t)}{dt}, \frac{d\overline{y}_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\overline{y}_n(t)}{dt}\right) = (A\overline{y}_1(t), A\overline{y}_2(t), \ldots, A\overline{y}_n(t)) = A(t)Y(t).$$

То есть выполнено матричное уравнение (3.18). Аналогично, расписывая матричное уравнение (3.18) по столбцам, доказывается достаточность. □

Теорема 3.2.2. *Пусть матричная функция $Y(t)$ является решением уравнения (3.18). Тогда:*

1. *для любого вектора констант $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$, $c_j \in \mathbb{C}$, вектор-функция $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}$ удовлетворяет уравнению (3.16);*

2. *для любой матрицы констант $B = \|b_{i,j}\|$, $b_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \ldots, n$, матричная функция $X(t) = Y(t)B$ удовлетворяет системе (3.18).*

Доказательство. 1. Если матричная функция $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$ является решением уравнения (3.18), тогда по теореме 3.2.1 вектор-столбцы $\overline{y}_j(t)$ являются решениями системы ОДУ (3.16), также как и их линейная комбинация

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c} = \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{y}_j(t).$$

2. В силу линейности операции дифференцирования и ассоциативности операции произведения матриц, имеем:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{Y(t)B\right\} = \frac{dY(t)}{dt} \cdot B = \left\{A(t)Y(t)\right\} B = A(t)\left\{Y(t)B\right\} = A(t)X(t).$$

□

3.3 Линейная зависимость вектор-функций и определитель Вронского

3.3.1 Линейная зависимость произвольных вектор-функций

В этом параграфе рассматриваются произвольные комплекснозначные вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$, определены на отрезке $[a, b]$, т.е. $\overline{y}_j(t) = (y_{j,1}(t), \ldots, y_{j,m}(t))^\top$, $j = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$. Никакая связь с решениями дифференциальных уравнений и даже непрерывность этих функций пока не предполагаются.

Определение 3.3.1. *Вектор функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдется такой ненулевой вектор констант $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)^\top$, $c_j \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{j=1}^{m} |c_j| > 0$, что*

$$c_1\overline{y}_1(t) + c_2\overline{y}_2(t) + \cdots + c_m\overline{y}_m(t) = \overline{\theta}, \quad \forall t \in [a, b] \tag{3.19}$$

. Если же равенство (3.19) выполнено только для тривиального вектора констант, $\overline{c} = (0, \ldots, 0)^\top$, тогда вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$.

Здесь и далее $\overline{\theta} = (0, \ldots, 0)^\top$ обозначает нулевой вектор-столбец соответствующей размерности. Эквивалентная (3.20) матричная форма записи условия линейной зависимости состоит в том, что для матричной функции $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t))$ порядка $m \times m$ выполнено равенство

$$Y(t)\overline{c} = \overline{\theta}, \quad \forall t \in [a, b], \tag{3.20}$$

хотя бы для одного ненулевого вектора констант.

Если рассматриваемые вектор-функции принимают только вещественные значения, тогда в определениях линейной зависимости и независимости достаточно рассматривать лишь действительные коэффициенты c_j, $j = 1, \ldots, m$.

Определение 3.3.2. *Определителем Вронского системы заданных на отрезке $[a, b]$ вектор функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называется зависящий от переменной $t \in [a, b]$ определитель матричной функции $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t))$:*

$$\Delta(t) = \det Y(t).$$

Необходимое условие линейной зависимости вектор-функций устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Если система вектор функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ является линейно зависимой на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этом отрезке: $\Delta(t) = 0$ $\forall t \in [a, b]$.*

Доказательство. Из условия линейной зависимости (3.20) вытекает существование такого ненулевого вектора $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)^\top$, что для произвольного фиксированного $t_0 \in [a, b]$ справедливо равенство

$$Y(t_0)\overline{c} = \overline{\theta}. \tag{3.21}$$

Равенство (3.21) означает, что однородная система линейных алгебраических уравнений с числовой матрицей $Y(t_0)$ имеет нетривиальное решение $\overline{c}$. По известной теореме алгебры это возможно только для вырожденной матрицы, т.е. $\det Y(t_0) = 0$. □

Отметим, что к утверждению теоремы нетрудно было бы прийти и на основе определения (3.19), которое означает линейную зависимость столбцов матрицы $Y(t)$ для любого $t \in [a, b]$.

Без дополнительных предположений относительно вектор-функций равенство нулю определителя Вронского является, вообще говоря, только лишь необходимым условием линейной зависимости. Из равенства нулю определителя Вронского системы вектор-функций не вытекает их линейная зависимость.

Пример 3.3.1. *Для $m = 2$ рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ две вектор-функции, имеющие нулевой определитель Вронского:*

$$\overline{y}_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad \overline{y}_2(t) = \begin{pmatrix} t|t| \\ |t| \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t|t| \\ t & |t| \end{pmatrix}, \quad \Delta(t) = \det Y(t) \equiv 0.$$

Эти вектор-функции являются линейно независимыми на рассматриваемом отрезке. Действительно, если для некоторого вектора $\overline{c} = (c_1, c_2)^\top$ справедливо равенство $Y(t)\overline{c} = \overline{\theta}$ в каждой точке отрезка $[-1, 1]$, тогда при $t = 1$ должно выполняться равенство $c_1 + c_2 = 0$, а при $t = -1$ – равенство $c_1 - c_2 = 0$, откуда $c_1 = c_2 = 0$.

3.3.2 Линейная зависимость решений линейной однородной системы ОДУ

Рассмотрим систему из n-мерных вектор-функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$, являющихся решением линейной однородной системы ОДУ (3.16), $Y(t)$ – соответствующая матричная функция из (3.17). Подчеркнем, что количество вектор-функций совпадает с порядком системы ОДУ. Исследуем вопрос о связи свойства линейной зависимости решений системы ОДУ и значения определителя Вронского.

Теорема 3.3.2. *Пусть $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ – система вектор-функций решений системы ОДУ (3.16) на отрезке $[a, b]$. Если найдется точка $t_0 \in [a, b]$, для которой $\det Y(t_0) = 0$, то система $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ линейно зависима на отрезке $[a, b]$ и $\det Y(t) = 0$ $\forall t \in [a, b]$.*

Доказательство. Однородная система линейных алгебраических уравнений относительно вектора $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_n)^\top$,

$$Y(t_0)\overline{c} = \overline{\theta}, \tag{3.22}$$

имеет ненулевое решение $\overline{c}^0 = (c_1^0, \ldots, c_n^0)^\top$ в силу вырожденности числовой матрицы $Y(t_0)$, имеющей нулевой определитель.

Положим $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}^0$. Ясно, что $\overline{y}(t)$ – решение системы ОДУ (3.16) в силу первой части теоремы 3.2.2 и, кроме того, $\overline{y}(t_0) = \overline{\theta}$ в силу (3.22). Таким образом, построенная функция является решением задачи Коши с нулевым начальным условием при $t = t_0$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad \overline{y}(t_0) = \overline{\theta}.$$

Эта задача Коши по теореме существования и единственности 2.1.2 имеет на рассматриваемом отрезке только одно решение – нулевое. Поэтому

$$\overline{\theta} = \overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}^0 = c_1^0\overline{y}_1(t) + c_2^0\overline{y}_2(t) + \cdots + c_n^0\overline{y}_n(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

и рассматриваемая система вектор-функций является линейно зависимой на отрезке $[a, b]$. Тогда в силу теоремы 3.3.1 имеем $\det Y(t) = 0$, $\forall t \in [a, b]$. □

Из теорем 3.3.1 и 3.3.2 вытекает следующая теорема об альтернативе для определителя Вронского системы вектор-функций решений линейной однородной системы ОДУ.

Теорема 3.3.3. *Определитель Вронского для вектор-функций* $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$, *являющихся решениями линейного однородного ОДУ (3.16) на отрезке* $[a, b]$, *либо тождественно равен нулю,* $\det Y(t) \equiv 0$ *(и система линейно зависима), либо не обращается в ноль ни в одной точке,* $\det Y(t) \neq 0$ $\forall t \in [a, b]$ *(и система линейно независима).*

Заметим, что согласно теореме 3.3.3 система вектор-функций из примера 3.3.1 не может являться решением никакой однородной системы ОДУ второго порядка с непрерывными на отрезке $[-1, 1]$ коэффициентами.

3.4 Фундаментальная система решений и общее решение линейной системы ОДУ

3.4.1 Фундаментальная система решений линейной однородной системы ОДУ

Определение 3.4.1. *Фундаментальной системой решений (ФСР) линейной однородной системы ОДУ* $\dfrac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t)$ *порядка* n *на отрезке* $[a, b]$ *называется совокупность* n *линейно независимых решений* $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ *этой системы. Соответствующая функциональная матрица* $Y(t)$ *вида (3.17) называется фундаментальной матрицей.*

В силу теоремы (3.2.2) фундаментальная матрица является решением матричного дифференциального уравнения (3.18), а в силу теоремы (3.3.3) она имеет на отрезке $[a, b]$ отличный от нуля определитель, $\det Y(t) \neq 0$.

Теорема 3.4.1. *Для любой однородной системы линейных дифференциальных уравнений вида (3.16) с непрерывными на отрезке* $[a, b]$ *коэффициентами существует фундаментальная матрица.*

Доказательство. Зафиксируем любое $t_0 \in [a, b]$ и рассмотрим задачу Коши для матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = E, \tag{3.23}$$

где E – единичная матрица. Расписывая матричные равенства по столбцам заключаем, что задача (3.23) эквивалентна совокупности из n задач Коши

$$\frac{d\overline{y}_j(t)}{dt} = A(t)\overline{y}_j(t), \quad \overline{y}_j(t_0) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, 0)^\top, \quad j = 1, \ldots, n,$$

отличающихся лишь начальными данными. Существование на всем отрезке $[a, b]$ решений $\overline{y}_j(t)$ этих задач Коши, а значит и решения $Y(t)$ матричной задачи (3.23), вытекает из теоремы 2.1.2. Поскольку определитель Вронского матричной функции $Y(t)$ в силу (3.23) равен единице, $\det Y(t_0) = \det E = 1$, тогда линейная независимость на рассматриваемом отрезке построенной системы решений $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ есть следствие теоремы 3.3.3 об альтернативе для определителя Вронского. □

Фундаментальная матрица неединственна. Полагая в задаче Коши (3.23) начальное условие $Y(t_0) = B$, $\det B \neq 0$, мы получим другую фундаментальную матрицу. Заметим также, что если элементы матрицы системы вещественны, $a_{i,j}(t) \in \mathbb{R}$, тогда и фундаментальная матрица может быть выбрана вещественной.

3.4.2 Общее решение линейной однородной системы ОДУ

Определение 3.4.2. *Общим решением линейной однородной системы дифференциальных уравнений n-го порядка называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение системы может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 3.4.2. *Пусть $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t))$ – фундаментальная матрица для линейной однородной системы ОДУ*

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t)$$

на отрезке $[a, b]$. Тогда ее общее решение представимо в виде

$$\overline{y}_{O,O}(t) = c_1\overline{y}_1(t) + c_2\overline{y}_2(t) + \cdots + c_n\overline{y}_n(t) = Y(t)\overline{c}, \quad \forall\overline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n), c_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n. \tag{3.24}$$

Доказательство. По теореме 3.2.2 вектор-функция $Y(t)\overline{c}$ является решением однородной системы ОДУ $\forall\overline{c} \in \mathbb{C}^n$. Согласно определению общего решения осталось показать, что для любого наперед заданного решения $\overline{y}(t)$ линейной однородной системы ОДУ найдется вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ такой, что на отрезке $[a, b]$ выполнено равенство

$$\overline{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}. \tag{3.25}$$

Для построения $\widetilde{c}$ зафиксируем произвольное $t_0 \in [a, b]$ и вычислим $\overline{y}^0 = \overline{y}(t_0)$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\widetilde{c}$:

$$Y(t_0)\widetilde{c} = \overline{y}^0. \tag{3.26}$$

В силу невырожденности матрицы $Y(t_0)$ с определителем $\det Y(t_0) \neq 0$ эта система имеет единственное решение. Тогда функции $\widetilde{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}$ и $\overline{y}(t)$ являются решениями одной и той же задачи Коши

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad \overline{y}(t_0) = \overline{y}^0, \tag{3.27}$$

и по теореме единственности обязаны совпадать, что доказывает (3.25). Отметим, что для фиксированного решения $\overline{y}(t)$ вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ в представлении (3.25) определен однозначно. $\square$

Если элементы матрицы системы вещественны, $a_{i,j}(t) \in \mathbb{R}$, то и общее решение естественно искать в классе вещественнозначных функций. Тогда при выборе вещественной фундаментальной матрицы (это всегда возможно в рассматриваемом случае) формула (3.24) при $\overline{c} \in \mathbb{R}^n$ дает общее вещественнозначное решение линейной однородной системы ОДУ.

В ходе доказательства теоремы 3.4.2 была фактически выведена формула для решения задачи Коши (3.27) с произвольным начальным условием $\overline{y}^0$. Действительно, из (3.26) имеем $\widetilde{c} = Y(t_0)^{-1}\overline{y}^0$, и после использования (3.26) получаем

$$\overline{y}(t) = Z(t, t_0)\overline{y}^0, \quad Z(t, t_0) = Y(t)Y(t_0)^{-1}. \tag{3.28}$$

Функциональная матрица $Z(t, t_0)$ называется *матрицантом.* Как матричная функция переменной t она является решением следующей задачи Коши

$$\frac{dZ(t, t_0)}{dt} = A(t)Z(t, t_0), \quad Z(t_0, t_0) = Y(t_0)Y(t_0)^{-1} = E.$$

3.4.3 Общее решение линейной неоднородной системы ОДУ. Метод вариации постоянных.

Рассмотрим линейную неоднородную систему ОДУ с непрерывным вектором $\overline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^\top$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t). \tag{3.29}$$

Как и в предыдущем пункте $Y(t)$ обозначает фундаментальную матрицу соответствующей (3.29) однородной системы ОДУ $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$ с той же самой матрицей коэффициентов $A(t)$.

Определение 3.4.3. *Общим решением линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений n-го порядка (3.29) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этой системы такое, что любое другое решение системы (3.29) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 3.4.3. *Общее решение $\overline{y}_{O,H}(t)$ линейного неоднородного ОДУ (3.29) представимо в виде*

$$\overline{y}_{O,H}(t) = Y(t)\overline{c} + \overline{y}_H(t), \quad \forall \overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top \in \mathbb{C}^n, \tag{3.30}$$

где $\overline{y}_H$ – произвольное частное решение неоднородной системы ОДУ.

Доказательство. В силу линейности системы (3.29) вектор-функция $\overline{y}_{O,H}(t)$ является решением (3.29) для любого вектора констант $\overline{c} \in \mathbb{C}^n$. Согласно определению общего решения осталось показать, что для любого наперед заданного решения $\widetilde{y}(t)$ системы (3.29) найдется вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$, что на отрезке $[a, b]$ будет выполнено равенство

$$\widetilde{y}(t) = Y(t)\widetilde{c} + \overline{y}_H(t). \tag{3.31}$$

Разность $\overline{y}(t) = \widetilde{y}(t) - \overline{y}_H(t)$ двух решений неоднородной системы является решением однородной системы, $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$. Тогда по теореме 3.4.2 об общем решении линейной однородной системы ОДУ найдется такой вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство $\overline{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}$, которое приводит к (3.31). □

Построения одного из частных решений неоднородной системы может быть проведено методом вариации постоянных и выражено с помощью введенного в (3.28) матриципанта $Z(t, \tau)$.

Теорема 3.4.4. *Для любого $t_0 \in [a, b]$ формула*

$$\overline{y}_H(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Z(t, \tau)\overline{f}(t)d\tau \tag{3.32}$$

задает частное решение неоднородной системы (3.29), удовлетворяющее условию $\overline{y}_H(t_0) = 0$.

Доказательство. Воспользуемся методом вариации постоянных, согласно которому частное решение неоднородной системы ищется в виде, повторяющем структуру (3.24) общего решения однородной системы, в котором вектор констант $\overline{c}$ заменен на пока произвольную непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\overline{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t))^\top$, а именно:

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}(t). \tag{3.33}$$

Поскольку фундаментальная матрица удовлетворяет уравнению $dY(t)/dt = A(t)Y(t)$, тогда

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt}\overline{c}(t) + Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt} = A(t)Y(t)\overline{c}(t) + Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt}. \tag{3.34}$$

Подставляя выражения (3.33) и (3.34) в уравнение (3.29) и приводя подобные слагаемые, получаем уравнение для определения вектор-функции $\overline{c}(t)$:

$$Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt} = \overline{f}(t). \tag{3.35}$$

В силу невырожденности фундаментальной матрицы это уравнение можно переписать в виде $d\overline{c}(t)/dt = Y(t)^{-1}\overline{f}(t)$ и проинтегрировать от t до t_0. Полагая по определению, что интеграл от вектор-функции есть вектор, составленный из интегралов координатных функций, имеем $\overline{c}(t) = \int_{t_0}^{t} Y(\tau)^{-1}\overline{f}(\tau)d\tau$. После подстановки в (3.33) окончательно получаем

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y(\tau)^{-1}\overline{f}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} Y(t)Y(\tau)^{-1}\overline{f}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau.$$

□

3.5 Построение ФСР для линейной однородной системы ОДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов $A(t) \equiv A = \|a_{i,j}\|$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A\overline{y}(t). \tag{3.36}$$

По аналогии со скалярным уравнением $dy(t)/dt = ay(t)$, имеющим решение $y(t) = h\exp\{at\}$ для любого $h \in \mathbb{C}$, будем искать нетривиальные решения уравнения (3.36) в виде

$$\overline{y}(t) = \overline{h}\exp\{\lambda t\}, \quad \overline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^\top \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.37}$$

Подстановка выражения (3.37) в уравнение (3.36) приводит к задаче нахождения таких $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых система линейных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda E)\overline{h} = \overline{\theta} \tag{3.38}$$

имеет нетривиальное решение $\overline{h}$. Как известно из курса линейной алгебры, такие λ называются *собственными значениями* матрицы A, а отвечающие им вектора $\overline{h}$ – *собственными векторами* матрицы A. Собственные значения и только они являются корнями так называемого характеристического многочлена $M(\lambda)$:

$$M(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0. \tag{3.39}$$

3.5.1 Построение ФСР, когда существует базис из собственных векторов.

Поскольку характеристический многочлен имеет степень n, тогда по основной теореме алгебры у него имеется ровно n корней (собственных значений), с учетом их кратности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Из курса линейной алгебры известно, что существует не более, чем n линейно независимых собственных векторов матрицы A. Остановимся сначала на случае, когда количество линейно независимых собственных векторов в точности равно n. Заметим, что в этом случае собственные вектора составляют базис пространства $\mathbb{C}^n$.

Теорема 3.5.1. *Пусть у матрицы A имеется ровно n линейно независимых собственных векторов*

$$\overline{h}_1, \quad \overline{h}_2, \quad \ldots, \quad \overline{h}_n,$$

отвечающих соответствующим собственным значениям

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n.$$

Тогда вектор-функции

$$\overline{y}_1(t) = \overline{h}_1 \exp\{\lambda_1 t\}, \quad \overline{y}_2(t) = \overline{h}_2 \exp\{\lambda_2 t\}, \quad \ldots, \quad \overline{y}_n(t) = \overline{h}_n \exp\{\lambda_n t\} \tag{3.40}$$

образуют фундаментальную систему решений (3.36) на произвольном отрезке $[a, b]$, $a < b$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $[a, b]$. Для любого $j = 1, \ldots, n$ собственное значение λ_j и соответствующий собственный вектор $\overline{h}_j$ удовлетворяют уравнению (3.38), и тогда каждая из вектор-функций $\overline{y}_j(t) = \overline{h}_j \exp\{\lambda_j t\}$ является решением уравнения (3.36) на $[a, b]$ по построению.

Докажем линейную независимость на отрезке $[a, b]$ построенной системы функций. Для этого согласно теореме 3.3.3 об альтернативе для определителя Вронского достаточно убедиться, что $\det Y(t) \neq 0$ для некоторого $t \in [a, b]$, где $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$. Рассмотрим отрезок $[c, d]$, включающий в себя исходный отрезок $[a, b]$ и точку $t = 0$:

$$[a, b] \subseteq [c, d], \quad 0 \in [c, d].$$

Вектор-функции из (3.40) являются решениями системы (3.36) на отрезке $[c, d]$. В принадлежащей этому отрезку точке $t = 0$ определитель Вронского

$$\det Y(0) = \det(\overline{h}_1, \overline{h}_2, \ldots, \overline{h}_n) \neq 0,$$

так как в противном случае составляющие $Y(0)$ столбцы – собственные вектора $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \ldots, \overline{h}_n$ – были бы линейно зависимыми. Согласно теореме 3.3.3 об альтернативе для определителя Вронского $\det Y(t) \neq 0$ на всем отрезке $[c, d]$, а значит и на его части $[a, b]$. $\square$

3.5.2 Построение ФСР, когда не существует базиса из собственных векторов.

Рассмотрим случай, когда когда количество существующих у матрицы A линейно независимых собственных векторов строго меньше, чем порядок системы n. Выпишем все попарно различные собственные значения λ_j с соответствующими кратностями m_j:

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1, & \lambda_2, & \ldots, & \lambda_\ell & , \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j, \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_\ell & , \quad k_j \geqslant 1, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_\ell = n. \end{array}$$

Пусть далее $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ обозначает одно из собственных значений с соответствующей кратностью k. Покажем, что каждому такому собственному значению можно сопоставить ровно k вектор-функций, являющихся решениями однородной системы (3.36). Если размерность $s = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ собственного подпространства, определяющая количество линейно независимых собственных векторов для данного собственного значения, равна кратности собственного значения, $s = k$, тогда искомые функции строятся согласно (3.40).

Если размерность собственного подпространства меньше кратности собственного значения, $s < k$, то, как известно из курса линейной алгебры, можно выбрать собственные векторы $\overline{h}_1^{(1)}$, $\overline{h}_2^{(1)}$, $\dots$, $\overline{h}_s^{(1)}$ так, что состоящая ровно из k векторов система собственных векторов $\overline{h}_j^{(1)}$ и присоединенных векторов $\overline{h}_j^{(m)}$, $m = 2, \dots, p_j$, $j = 1, \dots, s$, $p_j \geqslant 1$, $p_1 + p_2 + \dots + p_s = k$, которую запишем в виде

$$\begin{array}{cccc}
\overline{h}_1^{(1)}, & \overline{h}_1^{(2)}, & \dots & \overline{h}_1^{(p_1)}, \\
\overline{h}_2^{(1)}, & \overline{h}_2^{(2)}, & \dots & \overline{h}_2^{(p_2)}, \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\overline{h}_s^{(1)}, & \overline{h}_s^{(2)}, & \dots & \overline{h}_s^{(p_s)},
\end{array}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\begin{array}{rcl}
A\overline{h}_j^{(1)} & = & \lambda\overline{h}_j^{(1)}, \\
A\overline{h}_j^{(2)} & = & \lambda\overline{h}_j^{(2)} + \overline{h}_j^{(1)}, \\
 & \dots & \\
A\overline{h}_j^{(m)} & = & \lambda\overline{h}_j^{(m)} + \overline{h}_j^{(m-1)}, \\
 & \dots & \\
A\overline{h}_j^{(p_j)} & = & \lambda\overline{h}_j^{(p_j)} + \overline{h}_j^{(p_j-1)}.
\end{array} \tag{3.41}$$

С помощью собственных и присоединенных векторов построим семейство из следующих k функций

$$\begin{array}{rcl}
\overline{y}_j^{(1)}(t) & = & \overline{h}_j^{(1)} \exp\{\lambda t\}, \\
\overline{y}_j^{(2)}(t) & = & \left(\overline{h}_j^{(2)} + \dfrac{t}{1!}\overline{h}_j^{(1)}\right) \exp\{\lambda t\}, \qquad (3.42) \\
 & \vdots & \\
\overline{y}_j^{(m)}(t) & = & \left(\overline{h}_j^{(m)} + \dfrac{t}{1!}\overline{h}_j^{(m-1)} + \dfrac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{(m-2)} + \dots + \dfrac{t^q}{q!}\overline{h}_j^{(m-q)} + \dots + \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}\overline{h}_j^{(1)}\right) \exp\{\lambda t\}, \\
 & \vdots & \\
\overline{y}_j^{(p_j)}(t) & = & \left(\overline{h}_j^{(p_j)} + \dfrac{t}{1!}\overline{h}_j^{(p_j-1)} + \dfrac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{(p_j-2)} + \dots + \dfrac{t^q}{q!}\overline{h}_j^{(p_j-q)} + \dots + \dfrac{t^{p_j-1}}{(p_j-1)!}\overline{h}_j^{(1)}\right) \exp\{\lambda t\},
\end{array}$$

$j = 1, \dots, s.$

Докажем, что все функции из построенного семейства являются решениями линейной однородной системы (3.36). Рассмотрим функцию $\overline{y}_j^{(m)}(t)$, вычислим ее производную $d\overline{y}_j^{(m)}(t)/dt$ и сгруппируем результат так, чтобы удобно было воспользоваться соотношениями (3.36). Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d\overline{y}_j^{(m)}(t)}{dt} = \\
&= \Big(\overline{h}_j^{(m-1)} + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{(m-2)} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{(m-3)} + \dots + \frac{t^q}{q!}\overline{h}_j^{(m-q-1)} + \dots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\overline{h}_j^{(1)} + \\
&\quad +\lambda\overline{h}_j^{(m)} + \frac{t}{1!}\lambda\overline{h}_j^{(m-1)} + \frac{t^2}{2!}\lambda\overline{h}_j^{(m-2)} + \dots + \frac{t^q}{q!}\lambda\overline{h}_j^{(m-q)} + \dots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\lambda\overline{h}_j^{(2)} + \\
&\quad + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\lambda\overline{h}_j^{(1)}\Big) \exp\{\lambda t\} = \\
&= \Big(A\overline{h}_j^{(m)} + \frac{t}{1!}A\overline{h}_j^{(m-1)} + \frac{t^2}{2!}A\overline{h}_j^{(m-2)} + \dots + \frac{t^q}{q!}A\overline{h}_j^{(m-q)} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}A\overline{h}_j^{(1)}\Big) \exp\{\lambda t\} = \\
&= A\overline{y}_j^{(m)}(t), \qquad m = 1, \dots, p_j, \quad j = 1, \dots, s.
\end{aligned}$$

Докажем, что система из n вектор-функций, состоящая из объединения построенных для всех $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ решений вида (3.42), является линейно независимой на произвольном отрезке $[a, b]$. Рассуждая также, как и в теореме 3.5.1, рассмотрим отрезок $[c, d]$, $[a, b] \subseteq [c, d]$, $0 \in [c, d]$. Вектор-функции из (3.42) являются решениями системы (3.36) на отрезке $[c, d]$. В принадлежащей этому отрезку точке $t = 0$ определитель Вронского этой системы отличен от нуля, поскольку соответствующая матрица $Y(0)$ составлена из столбцов, являющихся собственными и присоединенными векторами матрицы A, совокупность которых линейно независима и образует базис в $\mathbb{C}^n$. Согласно теореме 3.3.3 об альтернативе для определителя Вронского $\det Y(t) \neq 0$ на всем отрезке $[c, d]$, а значит и на его части $[a, b]$. Поэтому рассматриваемая система решений (3.36) является линейно независимой на $[a, b]$ и, следовательно, составляет фундаментальную систему решений на этом отрезке. Тем самым установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.5.2. *Система из n вектор-функций, состоящая из объединения построенных для всех попарно различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ решений вида (3.42), является фундаментальной системой решений (3.36) на произвольном отрезке $[a, b]$, $a < b$.*

3.5.3 Построение ФСР в вещественном виде.

В предыдущем параграфе при построении ФСР мы фактически не использовали то, что матрица системы вещественна. При этом ФСР конструктивно построена в комплексной форме. Однако общая теорема 3.4.1 из параграфа 3.4.1 гарантирует существование ФСР в вещественном виде. Возникает вопрос, нельзя ли также конструктивно построить ФСР в вещественном виде в случае, если матрица системы составлена из вещественных коэффициентов, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$? Ответ на этот вопрос положительный. Ниже даны пояснения.

Напомним, что у вещественной матрицы характеристический многочлен имеет вещественные коэффициенты. Как следует из курса линейной алгебры, его комплекснозначные корни (собственные значения матрицы системы) идут комплексно сопряженными парами: $\lambda = p + iq$, $\lambda^* = p - iq$, $M(\lambda) = 0$, $M(\lambda^*) = 0$. Тогда в построенной в теореме 3.5.2 фундаментальной системе решений вектор-функции, отвечающие вещественным собственным значениям, являются вещественными, а отвечающие комплексным собственным значениям функции встречаются только комплексно сопряженными парами. Заменим в фундаментальной системе решений каждую такую пару функций $\overline{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^\top$ и $\overline{y}^*(t) = (y_1^*(t), \dots, y_n^*(t))^\top$ соответствующими действительными и мнимыми частями,

$\overline{y}^R(t) = \operatorname{Re}\overline{y}(t)$, $\overline{y}^I(t) = \operatorname{Im}\overline{y}(t)$. Так как

$$\overline{y}^R(t) = 0.5(\overline{y}(t) + \overline{y}^*(t)), \quad \overline{y}^I(t) = 0.5i(\overline{y}^*(t) - \overline{y}(t)), \tag{3.43}$$

тогда $\overline{y}^R(t), \overline{y}^I(t)$ – решения однородной системы как линейные комбинации решений. Построенная таким образом совокупность вектор-функций состоит из n *вещественных* решений линейной однородной системы ОДУ и задает ее фундаментальную систему решений.

Для обоснования этого факта осталось убедиться в линейной независимости над полем вещественных чисел построенной системы на любом отрезке $[a, b]$. Предположим противное, т.е. некоторая линейная комбинация с вещественными коэффициентами $r_j \in \mathbb{R}$ для построенных функций обращается в ноль на некотором отрезке $[a, b]$. Не ограничивая общности можно считать, что в такой линейной комбинации встречается сумма вида

$$\cdots + r_1\overline{y}^R(t) + r_2\overline{y}^I(t) + \cdots = 0, \quad r_1^2 + r_2^2 > 0.$$

Подставляя из (3.43) выражения для всех встречающихся пар через соответствующие комплексные вектор-функции, получаем равенство

$$\cdots + 0.5(r_1 - ir_2)\overline{y}(t) + 0.5(r_1 + ir_2)\overline{y}^*(t) + \cdots = 0, \quad r_1^2 + r_2^2 > 0.$$

Таким образом, нетривиальная линейная комбинация с комплексными коэффициентами для вектор-функций из исходной фундаментальной системы решений обратилась в ноль, что противоречит ее линейной независимости.

3.6 Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка. Общие свойства.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t), \quad t \in [a, b] \tag{3.44}$$

с непрерывными на отрезке $[a, b]$ действительными коэффициентами $a_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и непрерывной на отрезке $[a, b]$ комплекснозначной функцией $f(t)$.

В этом параграфе мы рассматриваем, вообще говоря, комплекснозначные решения уравнения (3.44). Основная цель состоит в описании множества всех решений этого уравнения.

Введем линейный дифференциальный оператор n-го порядка.

Определение 3.6.1. *Линейным дифференциальным оператором n-го порядка называется оператор*

$$Ly = a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t), \quad t \in [a, b]. \tag{3.45}$$

Используя это определение, уравнение (3.44) можно записать в виде

$$Ly = f(t), \quad t \in [a, b].$$

Если функция $f(t)$ равна нулю на отрезке $[a, b]$, то уравнение (3.44) называется *однородным*, а если функция $f(t)$ не равна нулю на отрезке $[a, b]$, то уравнение (3.44) называется *неоднородным*.

Теорема 3.6.1. *Если функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$ являются решениями уравнений $Ly_k = f_k(t)$, то функция $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$, где c_k – комплексные постоянные, является решением уравнения $Ly = f(t)$, где $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k f_k(t)$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы следует из линейности оператора L, которая является следствием линейности оператора дифференцирования:

$$Ly = L\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k L y_k = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t) = f(t), \quad t \in [a, b].$$

$\square$

Следствие 3.6.1. *Линейная комбинация решений однородного уравнения является решением однородного уравнения. Разность двух решений неоднородного уравнения с одинаковой правой частью есть решение однородного уравнения.*

Теорема 3.6.2. *Линейность и однородность уравнения (3.44) сохраняется при замене независимого аргумента $t = \varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$ любая n раз дифференцируемая на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, для которой $\varphi'(\tau) \neq 0$, $\forall \tau \in [\alpha, \beta]$.*

Линейность уравнения (3.44) сохраняется при замене искомой функции $y(t) = c(t)z(t) + d(t)$, где $c(t), d(t)$ – n раз непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции, $c(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$. При $d(t) \equiv 0$ сохраняется также однородность уравнения (3.44).

Доказательство. Из правила дифференцирования сложной функции $y = y(\varphi(\tau))$ следуют формулы

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{1}{\varphi'(\tau)}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \frac{1}{[\varphi'(\tau)]^2} - \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{\varphi''(\tau)}{[\varphi'(\tau)]^3}, \dots$$

Таким образом, производная $\dfrac{d^ky}{dt^k}$ представляет собой линейную комбинацию производных $\dfrac{dy}{d\tau}, \dfrac{d^2y}{d\tau^2}, \dots, \dfrac{d^ky}{d\tau^k}$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ коэффициентами. Отсюда вытекает справедливость первой части теоремы.

Согласно формулам дифференцирования произведения и суммы имеем

$$\begin{aligned} y^{(k)}(t) &= \big(c(t)z(t) + d(t)\big)^{(k)} = \\ &= c(t)z^{(k)}(t) + kc'(t)z^{(k-1)}(t) + \frac{k(k-1)}{2!}c''(t)z^{(k-2)}(t) + \dots + c(t)^{(k)}z(t) + d^{(k)}(t). \end{aligned}$$

Полученное выражение линейно зависит от $z(t), z'(t), \dots, z^{(k)}(t)$, а при $d(t) \equiv 0$ это выражение однородно относительно $z(t)$. Отсюда вытекает справедливость второй части теоремы. $\square$

Теорема 3.6.3. *Решение задачи Коши*

$$Ly = f(t), \quad y(t_0) = y_0^{(0)}, \quad y'(t_0) = y_0^{(1)}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

представимо в виде суммы $y(t) = v(t) + w(t)$, где функция $v(t)$ является решением задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$Lv = f(t), \quad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0, \quad \dots, \quad v^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

а функция $w(t)$ является решением задачи Коши для однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями

$$Lw = 0, \quad w(t_0) = y_0^{(0)}, \quad w'(t_0) = y_0^{(1)}, \quad \dots, \quad w^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Доказательство. Сумма $y(t) = v(t) + w(t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению в силу теоремы 3.6.1. Для начальных условий имеем равенства

$$y^{(k)}(t_0) = v^{(k)}(t_0) + w^{(k)}(t_0) = 0 + y_0^{(k)} = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

□

Теорема 3.6.4. *Решение задачи Коши для однородного уравнения*

$$Ly = 0, \quad y(t_0) = y_0^{(0)}, \quad y'(t_0) = y_0^{(1)}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

представимо в виде суммы

$$y(t) = \sum_{m=0}^{n-1} y_m(t) y_0^{(m)},$$

где функции $y_m(t)$ являются решениями задач Коши:

$$Ly_m = 0, \quad y_m^{(m)}(t_0) = 1, \quad y_m^{(k)}(t_0) = 0, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \backslash \{m\}.$$

Доказательство. Функция $y(t)$ является решением однородного уравнения как линейная комбинация решений $y_m(t)$ однородного уравнения с постоянными коэффициентами в силу теоремы 3.6.1. Осталось убедиться в выполнении начальных условий:

$$y^{(k)}(t_0) = \sum_{m=0}^{n-1} y_m^{(k)}(t_0) y_0^{(m)} = y_k^{(k)}(t_0) y_0^{(k)} = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

□

3.7 Линейная зависимость скалярных функций и определитель Вронского

3.7.1 Линейная зависимость произвольных скалярных функций

В этом параграфе рассматриваются произвольные скалярные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$, определены на отрезке $[a, b]$ и принимающие комплексные значения. Никакая связь с решениями дифференциальных уравнений пока не предполагаются.

Определение 3.7.1. *Скалярные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдется такие комплексные константы $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, m$, $\sum\limits_{k=1}^{m} |c_k| > 0$, что справедливо равенство*

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{3.46}$$

Если же равенство (3.46) выполнено только для тривиального вектора констант, $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, тогда скалярные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$.

Свойства линейной зависимости достаточно гладких скалярных и векторных функций оказываются тесно связанными. Пусть функции $\varphi_j(t)$ являются $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемыми на $[a,b]$, $j=1,\ldots,m$. Сопоставим каждой скалярной функции $\varphi_j(t)$ рассматриваемого семейства вектор-функцию $\overline{\varphi}_j(t)$, составленную из самой функции и ее производных до порядка $m-1$ включительно:

$$\overline{\varphi}_j(t) = (\varphi_j(t), \varphi_j'(t), \ldots, \varphi_j^{(m-1)}(t))^\top, \quad j=1,\ldots,m, \quad \varphi^{(p)}(t) = \frac{d^p\varphi(t)}{dt^p}. \tag{3.47}$$

Лемма 3.7.1. *Система $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$, состоящая из $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ скалярных функций, является линейно зависимой на этом отрезка тогда и только тогда, когда соответствующая система построенных согласно (3.47) вектор-функций $\overline{\varphi}_1(t), \overline{\varphi}_2(t), \ldots, \overline{\varphi}_m(t)$ является линейно зависимой на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Из определения (3.46) линейной зависимости скалярных функций вытекает существования нетривиального набора комплексных констант $c_1, c_2, \ldots, c_m$, что на отрезке $[a,b]$ выполнены ровно m равенств

$$\begin{aligned}
c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_m\varphi_m(t) &= 0,\\
c_1\varphi_1'(t) + c_2\varphi_2'(t) + \cdots + c_m\varphi_m'(t) &= 0,\\
&\cdots\\
c_1\varphi_1^{(m-1)}(t) + c_2\varphi_2^{(m-1)}(t) + \cdots + c_m\varphi_m^{(m-1)}(t) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.48}$$

первое из которых есть в точности (3.46), а остальные получаются почленным дифференцированием (3.46) соответствующее число раз. С помощью (3.47) уравнения (3.46) можно записать в векторном виде

$$c_1\overline{\varphi}_1(t) + c_2\overline{\varphi}_2(t) + \cdots + c_m\overline{\varphi}_m(t) = 0, \tag{3.49}$$

который согласно (3.19) означает линейную зависимость вектор-функций.

Обратно, из линейной зависимости построенных согласно (3.47) вектор-функций $\overline{\varphi}_1(t), \overline{\varphi}_2(t), \ldots, \overline{\varphi}$ следует векторное равенство (3.49) и покоординатные равенства (3.48), первое из которых дает (3.46). □

Определение 3.7.2. *Определителем Вронского системы $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$, состоящей из $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций, называется зависящий от переменной $t \in [a,b]$ определитель построенной по вектор-функциям (3.47) функциональной матрицы $Y(t) = (\overline{\varphi}_1(t), \overline{\varphi}_2(t), \ldots, \overline{\varphi}_m(t))$:*

$$\Delta(t) = W[\varphi_1, \ldots, \varphi_m](t) = \det Y(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_1'(t) & \ldots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Следствие 3.7.1. *Из определения следует, что, если функции $\varphi_k(t)$ действительны, то при определении их линейной зависимости и независимости достаточно рассматривать действительные значения постоянных $c_k = 0$, $k=1,2,\ldots,m$.*

Упражнение 3.7.1. *Рассмотрим функции $\varphi_1(t) = t^2$ и $\varphi_2(t) = t|t|$ на отрезке $[a,b]$, где $0<a<b$. Очевидно, что на этом отрезке $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ и функции линейно зависимы. Если же $a<0<b$, то положив $t=d=\min\{|a|,b\}$ и $t=-d$ в равенстве $c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t) = 0$, получим систему $c_1d^2+c_2d^2=0$, $c_1d^2-c_2d^2=0$, из которой следует, что $c_1=c_2=0$, а значит $\varphi_1(t)=t^2$ и $\varphi_2(t)=t|t|$ линейно независимы на этом отрезке.*

Замечание. Приведенный пример показывает, что линейная зависимость и независимость системы функций в общем случае зависит от того на каком отрезке рассматривается эта система.

Необходимое условие линейной зависимости скалярных функций устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.7.1. *Если система $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ скалярных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$, является линейно зависимой на отрезке $[a,b]$, тогда определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этом отрезке: $\Delta(t) = 0 \ \forall t \in [a,b]$.*

Доказательство. Приведем два способа доказательства.

Способ 1. Так как функции $\varphi_k(t)$ линейно зависимы на $[a,b]$, то существует постоянная $c_p \neq 0$. Тогда

$$\varphi_p(t) = \frac{c_1}{c_p}\varphi_1(t) + \dots + \frac{c_{p-1}}{c_p}\varphi_{p-1}(t) + \frac{c_{p+1}}{c_p}\varphi_{p+1}(t) + \dots + \frac{c_n}{c_p}\varphi_m(t), \quad t \in [a,b].$$

Из этого представления следует, что p-ый столбец определителя Вронского является линейной комбинацией остальных столбцов. Следовательно этот определитель равен нулю для всех $t \in [a,b]$.

Способ 2. Из линейной зависимости скалярных функций $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ согласно лемме 3.7.1 вытекает линейная зависимость соответствующих вектор-функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_m(t)$. Поэтому равенство нулю определителя функциональной матрицы $Y(t)$, совпадающего по определению с определителем Вронского, есть следствие векторной теоремы 3.3.1. □

Как и в случае вектор-функций, без дополнительных предположений равенство нулю определителя Вронского является, вообще говоря, только лишь необходимым условием линейной зависимости скалярных функций. Из равенства нулю определителя Вронского не вытекает их линейная зависимость.

Пример 3.7.1. *Для $m = 2$ рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ две функции, имеющие нулевой определитель Вронского:*

$$\varphi_1(t) = t^2, \quad \varphi_2(t) = t|t|, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{pmatrix}, \quad \Delta(t) = W[\varphi_1, \varphi_2](t) = \det Y(t) \equiv 0.$$

Однако, как показано выше, эти функции являются линейно независимыми на рассматриваемом отрезке.

3.7.2 Линейная зависимость решений линейного однородного ОДУ

Рассмотрим линейное однородное ОДУ порядка n с произвольными непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами $a_j(t) \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n$, $a_0(t) \neq 0$:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0. \tag{3.50}$$

Уравнение (3.50) эквивалентно линейной однородной системе ОДУ

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\dfrac{a_n(t)}{a_0(t)} & -\dfrac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)} & -\dfrac{a_{n-2}(t)}{a_0(t)} & \dots & -\dfrac{a_1(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

в следующем смысле: если $y(t)$ – решение уравнения (3.50), тогда вектор функция $\overline{y}(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))^\top$ является решением системы (3.51). И наоборот, если вектор-функция $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^\top$ является решением системы (3.51), тогда первая компонента $y_1(t)$ является решением ОДУ (3.50).

Рассмотрим систему скалярных функций $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, являющихся решением линейного однородного ОДУ (3.50) порядка n. Подчеркнем, что количество функций в рассматриваемой системе совпадает с порядком ОДУ. Исследуем вопрос о связи свойства линейной зависимости решений линейного однородного ОДУ и значения определителя Вронского. В отличие от случая произвольной системы функции для системы решений однородного дифференциального уравнения (3.50) поведение определителя Вронского является критерием линейной зависимости или независимости системы решений. Справедлива следующая теоремы, которую можно назвать теоремой об альтернативе для определителя Вронского.

Теорема 3.7.2. *Для решений $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейного однородного ОДУ (3.50) на отрезке $[a, b]$ справедлива следующая альтернатива:*

- $\triangleleft$ *либо $\Delta(t) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$ и функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейно зависимы на этом отрезке,*
- $\triangleleft$ *либо $\Delta(t) \neq 0$ $\forall t \in [a, b]$ и функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейно независимы на $[a, b]$.*

Доказательство. Приведем два способа доказательства.

Способ 1. Пусть в какой-то точке t_0 определитель Вронского, составленный из функций $y_k(t)$, равен нулю, то-есть $\Delta(t_0) = 0$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) & = & 0, \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) + \dots + c_n y_n'(t_0) & = & 0, \\ & \dots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) & = & 0. \end{cases} \tag{3.52}$$

Так как определитель этой системы равен определителю Вронского и равен нулю, $\Delta(t_0) = 0$, то эта система имеет нетривиальное решение $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} |\tilde{c}_k| > 0$.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(t).$$

Из теоремы 3.6.1 следует, что она является решением однородного дифференциального уравнения (3.50), а из (3.52) следует, что она удовлетворяет начальным условиям

$$\tilde{y}^{(m)}(t_0) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Это означает, что функция $\tilde{y}(t)$ является решением однородного дифференциального уравнения (3.50) и удовлетворяет нулевым начальным условиям в точке t_0. По теореме единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения эта функция равна нулю на отрезке $[a, b]$. Следовательно

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(t) = 0, \quad t \in [a, b]$$

и функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$ линейно зависимы. Тогда из теоремы 3.7.1 следует, что определитель Вронского, составленный из этих функций равен нулю на отрезке $[a, b]$.

Пусть существует точка $\hat{t} \in [a, b]$ такая, что $\Delta(\hat{t}) \neq 0$. Тогда из предыдущего следует, что определитель Вронского, не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$ и функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$ линейно независимы на этом отрезке.

Способ 2. В силу теоремы 3.7.1 осталось рассмотреть случай, когда в некоторой точке $t_0 \in [a, b]$ определитель Вронского равен нулю, $\Delta(t_0) = 0$. Тогда составленная из вектор-столбцов $\overline{y}_j(t) = (y_j(t), y_j'(t), \ldots, y_j^{(n-1)}(t))^\top$, $j = 1, \ldots, n$, являющихся решениями линейной однородной системы ОДУ (3.51), функциональная матрица $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$ вырождена при $t = t_0$, $\det Y(t_0) = \Delta(t_0) = 0$. Согласно установленной в теореме 3.3.3 альтернативе для решений однородной системы ОДУ заключаем, что $\det Y(t) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$, и вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ линейно зависимы на этом отрезке. В силу леммы 3.7.1 отсюда следует линейная зависимость скалярных функций $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ на рассматриваемом отрезке. □

3.8 Фундаментальная система решений и общее решение линейного ОДУ

3.8.1 Фундаментальная система решений линейного однородного ОДУ

Определение 3.8.1. *Фундаментальной системой решений линейного однородного ОДУ (3.50) порядка n на отрезке $[a, b]$ называется система из n линейно независимых на данном отрезке решений этого уравнения.*

Теорема 3.8.1. *У любого линейного однородного ОДУ (3.50) с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $a_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, $a_0(t) \neq 0$, существует фундаментальная система решений на $[a, b]$.*

Доказательство. Приведем два способа доказательства.

Способ 1. Рассмотрим постоянную матрицу B с элементами b_{ij} , $i, j = 1, 2, \ldots, n$ такую, что $\det B \neq 0$. Обозначим через $y_j(t)$ – решения задачи Коши для уравнения (3.50) с начальными условиями

$$y_j(t_0) = b_{1j}, \quad y_j'(t_0) = b_{2j}, \ldots, y_j^{(n-1)}(t_0) = b_{nj} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.53}$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка функции $y_j(t)$ существуют и определены однозначно. Составленный из них определитель Вронского $\Delta(t)$, в силу условий (3.53), таков , что $\Delta(t_0) = detB \neq 0$. Следовательно по теореме 3.7.2 он не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$ и функции $y_j(t)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$. Значит они образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.50) и теорема доказана.

Способ 2. Рассмотрим эквивалентную уравнению (3.50) однородную систему ОДУ (3.51). Согласно теореме 3.4.1 у этой системы существует фундаментальная матрица $Y(t)$, ее вектор-столбцы составляют фундаментальную систему решений (3.51). Тогда в силу леммы 3.7.1 первые компоненты этих вектор-столбцов являются линейно независимыми решениями уравнения (3.50) и поэтому составляют его фундаментальную систему решений. □

Замечание 1. Из доказательства теоремы 3.8.1 следует, что фундаментальная система решений уравнения (3.50)определена неоднозначно. Действительно, выбирая различные матрицы B такие, что $\det B \neq 0$, мы получим различные фундаментальные системы решений уравнения (3.50).

Замечание 2. Если коэффициенты уравнения вещественны, $a_j(t) \in \mathbb{R}$, тогда, как следует из замечания к теореме 3.4.1, фундаментальная матрица $Y(t)$ для системы ОДУ (3.51) в доказательстве теоремы 3.8.1 может быть выбрана вещественной, и поэтому фундаментальная система решений линейного однородного ОДУ (3.50) также может быть выбрана вещественной.

Пример 3.8.1. *Рассмотрим три Функции $y_1(t) = t$, $y_2(t) = t^3$ и $y_3(t) = |t|^3$ на отрезке $[-1, 3]$. Эти функции линейно независимы на рассматриваемом отрезке и удовлетворяют линейному однородному ОДУ второго порядка*

$$t^2 y'' - 3ty' + 3y = 0, \quad t \in [-1, 3].$$

Кажущееся противоречие с теоремой 3.8.1, согласно которой ФСР должна состоять из двух функций объясняется тем, что для данного уравнения не выполнены условия этой теоремы: коэффициент $a_0(t) = t^2$ обращается в ноль при $t = 0 \in [-1, 3]$.

3.8.2 Общее решение линейного однородного ОДУ

Определение 3.8.2. *Общим решением линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.50) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение уравнения (3.50) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 3.8.2. *Пусть $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ – фундаментальная система решений линейного однородного ОДУ (3.50) на отрезке $[a, b]$. Тогда общее решение этого уравнения на рассматриваемом отрезке имеет вид*

$$y_{O,O}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t), \quad \forall \overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n. \tag{3.54}$$

Доказательство. Приведем два способа доказательства.

Способ 1. Так как линейная комбинация решений однородного уравнения (3.50) является решением этого уравнения, то при любых значениях постоянных c_k функция $y_{O,O}(t)$, определяемая формулой (3.54), является решением линейного однородного дифференциального уравнения (3.50).

Покажем теперь, что любое решение уравнения (3.50) может быть получено из (3.54) в результате выбора значений постоянных c_k. Пусть $\tilde{y}(t)$ - некоторое решение уравнения (3.50). Рассмотрим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) & = & \tilde{y}(t_0), \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) + \cdots + c_n y_n'(t_0) & = & \tilde{y}'(t_0), \\ & \cdots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) & = & \tilde{y}^{(n-1)}(t_0), \end{array} \right. \tag{3.55}$$

где t_0 – некоторая точка отрезка $[a, b]$. Определитель этой системы равен определителю Вронского в точке t_0 и не равен нулю . Следовательно система (3.55) имеет единственное решение $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n$.

Рассмотрим функцию

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(t).$$

Эта функция является решением уравнения (3.50). Так как постоянные $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n$ представляют собой решение системы (3.55), то функция $\hat{y}(t)$ такова, что

$$\hat{y}^{(k)}(t_0) = \tilde{y}^{(k)}(t_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Следовательно функции $\hat{y}(t)$ и $\tilde{y}(t)$ являются решениями уравнения (3.50) и удовлетворяют одним и тем же начальным условиям в точке t_0 . По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши эти функции должны совпадать:

$$\tilde{y}(t) = \hat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(t).$$

Способ 2. Функция в (3.54) дает решение линейного однородного ОДУ (3.50) как линейная комбинация его решений. Осталось показать, что выбором вектора констант в формуле (3.54) можно охватить все решения (3.54). Действительно, зафиксируем произвольное решение $y(t)$ уравнения (3.54) и составим вектор-функцию $\overline{y}(t) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))^\top$, а также вектор-функции $\overline{y}_j(t) = (y_j(t), y_j'(t), \ldots, y_j^{(n-1)}(t))^\top$, $j = 1, \ldots, n$, отвечающие фундаментальной системе решений. Построенные вектор-функции являются решениями линейной однородной системы ОДУ (3.51), причем по лемме 3.7.1 система $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ линейно независима на отрезке $[a, b]$ и поэтому составляет фундаментальную систему решений для системы ОДУ (3.51) на рассматриваемом отрезке. Тогда по теореме 3.4.2 об общем решении линейной однородной системы ОДУ для любого решения (3.51), а значит и для данного $\overline{y}(t)$, найдутся такие константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что всюду на $[a, b]$ выполнено векторное равенство $\overline{y}(t) = c_1\overline{y}_1(t) + c_2\overline{y}_2(t) + \cdots + c_n\overline{y}_n(t)$, первые компоненты которого дают равенство

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t).$$

Отметим, что для фиксированного решения $y(t)$ константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в последнем представлении определены однозначно. Теорема 3.8.2 доказана. □

Замечание. Если все коэффициенты уравнения (3.50) вещественны, $a_j(t) \in \mathbb{R}$, то и общее решение естественно искать в классе вещественнозначных функций. Тогда при выборе вещественной фундаментальной системы решений (см. замечание к теореме 3.8.1) формула (3.54) при $\overline{c} \in \mathbb{R}^n$ дает общее вещественнозначное решение линейного однородного ОДУ.

3.8.3 Общее решение линейного неоднородного ОДУ.

Рассмотрим линейное неоднородное ОДУ с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $a_j(t) \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$, $a_0(t) \neq 0$ и правой частью $f(t)$:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t). \tag{3.56}$$

Перейдем к описанию общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.56). Определение общего решения этого уравнения аналогично определению общего решения однородного уравнения.

Определение 3.8.3. *Общим решением линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.56) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение уравнения (3.56) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 3.8.3. *Пусть $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ – фундаментальная система решений линейного однородного ОДУ (3.50) на отрезке $[a,b]$, $y_H(t)$ – некоторое (частное) решение неоднородного уравнения (3.56). Тогда общее решение линейного неоднородного ОДУ (3.56) на рассматриваемом отрезке имеет вид*

$$y_{O,H}(t) = y_H(t) + y_{O,O}(t) = y_H(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \dots + c_ny_n(t), \quad \forall c_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.57}$$

Доказательство. Для любого вектора констант $\overline{c} \in \mathbb{C}^n$ формула (3.57) определяет решение линейного неоднородного ОДУ (3.56) в силу линейности уравнения. Согласно определению общего решения осталось показать, что выбором вектора констант в формуле (3.57) можно получить любое наперед заданное решение (3.56), т.е. для любого решения $\widetilde{y}(t)$ неоднородного ОДУ (3.56) найдутся константы $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \dots, \widetilde{c}_n$, что на отрезке $[a,b]$ будет выполнено равенство

$$\widetilde{y}(t) = y_H(t) + \widetilde{c}_1y_1(t) + \widetilde{c}_2y_2(t) + \dots + \widetilde{c}_ny_n(t). \tag{3.58}$$

Разность $y(t) = \widetilde{y}(t) - y_H(t)$ двух решений линейного неоднородного ОДУ (3.56) является решением однородного ОДУ (3.50). По теореме 3.8.2 об общем решении линейного однородного ОДУ найдется такой вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство $y(t) = \widetilde{c}_1y_1(t) + \widetilde{c}_2y_2(t) + \dots + \widetilde{c}_ny_n(t)$, а вместе с ним и искомое равенство (3.58). □

3.8.4 Метод вариации постоянных.

Из теоремы 3.8.3 следует, что для построения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (3.56) достаточно знать фундаментальную систему решений однородного уравнения(3.50) и какое нибудь решение неоднородного уравнения (3.56). Рассмотрим метод построения решения $y_H(t)$ неоднородного уравнения (3.56) в случае, когда известна фундаментальная система решений однородного уравнения (3.50). В этом методе, как и в случае линейной неоднородной системы ОДУ, частное решение ищется в виде, повторяющем структуру (3.54) общего решения однородного ОДУ, в котором константы $c_1, c_2, \dots, c_n$ заменены на пока произвольные непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$, а именно:

$$y_H(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \dots + c_n(t)y_n(t). \tag{3.59}$$

Перейдем к векторной форме записи и введем вектор-функции

$$\overline{y}_j(t) = (y_j(t), y_j'(t), \dots, y_j^{(n-1)}(t))^\top, j = 1, \dots, n,$$

составляющие фундаментальную систему решений однородной системы ОДУ (3.51), $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t))$ – соответствующая фундаментальная матрица, $\overline{y}_H(t) = (y_H(t), y_H'(t), \dots, y_H^{(n-1)}($
Тогда задача сводится к нахождению вектор-функции $\overline{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))^\top$, для которой функция $\overline{y}_H(t) = Y(t)\overline{c}(t)$ является решением следующей линейной неоднородной системы ОДУ

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad \overline{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{f(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix}, \tag{3.60}$$

где матрица $A(t)$ определена в (3.51). Тогда можно воспользоваться полученной в теореме 3.4.4 формулой (3.32) для частного решения произвольной линейной неоднородной системы ОДУ,

$$\overline{y}_H(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(t)d\tau, \quad Z(t,\tau) = Y(t)Y^{-1}(\tau),$$

и затем взять первую компоненту полученной вектор-функции. Однако при практическом использовании метода вариации постоянных и нахождения вектор-функции $\overline{c}(t)$ достаточно выписать полученную в (3.35) при доказательстве теоремы 3.4.4 систему $Y(t)d\overline{c}(t)/dt = \overline{f}(t)$, которая для рассматриваемых фундаментальных матриц и вектора правой части принимает вид

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(t) \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{f(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix}. \qquad (3.61)$$

Из этой системы однозначно ($\Delta(t) = \det Y(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$) определяются производные $c_k'(t) = g_k(t)$. Интегрируя, найдем функции

$$c_k(t) = \int\limits_{t_0}^{t} g_k(\tau)d\tau, \quad k = 1,2,\dots,n,$$

а значит и искомое решение неоднородного уравнения (3.56)

$$y_H(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t) \int\limits_{t_0}^{t} g_k(\tau)d\tau.$$

Тем самым показано существования частного решения линейного неоднородного уравнения (3.50) в виде (3.59).

Проведенные выше рассуждения использовали некоторые факты из теории линейных систем дифференциальных уравнений. Можно было бы провести соответствующие рассмотрения напрямую. Покажем, как это сделать. Пусть производные $c_k'(t)$ функций $c_k(t)$ из представления (3.59) определяются для каждого $t \in [a,b]$ из системы линейных алгебраических уравнений 3.61. Отметим одну важную закономерность, вытекающую из (3.61). Первые $(n-1)$ равенств в (3.61) приводят к соотношениям

$$c_1'(t)y_1^{(k)}(t) + c_2'(t)y_2^{(k)}(t) + c_n'(t)y_n^{(k)}(t) = 0, \quad k = 0,1,\dots,n-2.$$

С учетом этих равенств выражения для производных частного решения из (3.59) принимают вид

$$\begin{aligned}
y'_H(t) &= c_1(t)y'_1(t) + c_2(t)y'_2(t) + c_n(t)y'_n(t),\\
y''_H(t) &= c_1(t)y''_1(t) + c_2(t)y''_2(t) + c_n(t)y''_n(t),\\
&\dots\\
y_H^{(n-1)}(t) &= c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t),\\
y_H^{(n)}(t) &= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} c'_k(t)y_k^{(n-1)}(t) =\\
&= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \frac{f(t)}{a_0(t)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в методе вариации постоянных вычисление производных искомого частного решения (3.59) до порядка $(n-1)$ включительно происходит так, как будто бы функции $c_j(t)$ не зависят от t и являются константами.

Подставив функцию $y_H(t)$ в левую часть уравнения (3.56), имеем

$$Ly_H(t) = a_0(t)\cdot\frac{f(t)}{a_0(t)}+$$

$$+a_0(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k^{(n)}(t)+a_1(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k^{(n-1)}(t)+\dots+a_{n-1}(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y'_k(t)+a_n(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k(t).$$

Произведя перегруппировку слагаемых и приняв во внимание определение (3.45) оператора L, получим

$$Ly_H(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)Ly_k(t) = f(t) + 0 = f(t), \quad t\in[a,b],$$

поскольку функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ являются решениями однородного уравнения (3.50), $Ly_k(t) = 0$. Итак, мы еще раз убедились, что построенная функция $y_H(t)$ является решением неоднородного уравнения (3.56).

3.8.5 Построение ФСР для линейного однородного ОДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное ОДУ порядка n с вещественными коэффициентами $a_j\in\mathbb{R}$, $j = 0,\dots,n$, $a_0\neq 0$:

$$a_0y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}y'(t) + a_ny(t) = 0. \tag{3.62}$$

Для построения фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ (3.62) достаточно построить векторную фундаментальную систему решений соответствующей уравнению (3.62) линейной однородной системы ОДУ

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A\overline{y}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\dfrac{a_1}{a_0}\end{pmatrix} \tag{3.63}$$

и выделить первые компоненты. Для этого воспользуемся специальной структурой матрицы системы A в (3.63). Как известно из курса линейной алгебры, такая матрица относится к классу матриц Фробениуса. Для таких матриц характеристическое уравнение, корни которого являются собственными значениями матрицы, принимает вид

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1\\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\dfrac{a_1}{a_0}-\lambda \end{pmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель по первой строке после несложных преобразований приходим к задаче нахождения корней характеристического многочлена для линейного однородного ОДУ (3.62):

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{3.64}$$

Известно, что у матриц Фробениуса каждому λ_j из совокупности попарно различных собственных значений $\{\lambda_1,\dots,\lambda_\ell\}$ с соответствующими кратностями $k_1,\dots,k_\ell$ ($k_1+\dots+k_\ell=n$) отвечает ровно один собственный вектор $\overline{h}_j^{(1)}$, $\dim\operatorname{Ker}(A-\lambda_jE)=1$, и если его кратность $k_j>1$, тогда существуют ровно k_j-1 присоединенных векторов $\overline{h}_j^{(2)},\overline{h}_j^{(3)},\dots,\overline{h}_j^{(k_j)}$, $j=1,\dots,\ell$. Тогда фундаментальная система решений легко выписывается благодаря (3.42) и теореме 3.5.2:

$$\overline{h}_j^{(1)}\exp\{\lambda_jt\},\quad \left(\overline{h}_j^{(2)}+\frac{t}{1!}\overline{h}_j^{(1)}\right)\exp\{\lambda_jt\},\ \dots,$$
$$\dots,\left(\overline{h}_j^{(k_j)}+\frac{t}{1!}\overline{h}_j^{(k_j-1)}+\frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{(k_j-2)}+\dots+\frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!}\overline{h}_j^{(1)}\right)\exp\{\lambda_jt\},\quad j=1,\dots,\ell.$$

Первые компоненты полученных вектор-функций дают линейно-независимые решения линейного однородного ОДУ (3.62):

$$b_j^{(1)}\exp\{\lambda_jt\},\quad \left(b_j^{(2)}+\frac{t}{1!}b_j^{(1)}\right)\exp\{\lambda_jt\},\ \dots,$$
$$\dots,\left(b_j^{(k_j)}+\frac{t}{1!}b_j^{(k_j-1)}+\frac{t^2}{2!}b_j^{(k_j-2)}+\dots+\frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!}b_j^{(1)}\right)\exp\{\lambda_jt\},\quad j=1,\dots,\ell, \tag{3.65}$$

где $b_j^{(m)}$ – первая компонента числового вектора $\overline{h}_j^{(m)}$. Заметим, что всегда $b_j^{(1)}\neq 0$, поскольку в противном случае система (3.65) будет являться линейно зависимой на любом отрезке. Поэтому в силу линейности и однородности уравнения (3.62) его решениями также будут функции

$$\exp\{\lambda_jt\},\quad t\exp\{\lambda_jt\},\quad \dots,\quad t^{k_j-1}\exp\{\lambda_jt\},\quad j=1,\dots,\ell. \tag{3.66}$$

Лемма 3.8.1. *Система функций (3.66) является линейно независимой на любом отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Предположим, что нетривиальная линейная комбинация функций из системы (3.66) обращается тождественно в ноль на некотором отрезке:

$$\sum_{k=0}^{k_1-1}C_{1,k}t^k\exp\{\lambda_1t\}+\sum_{k=0}^{k_2-1}C_{2,k}t^k\exp\{\lambda_2t\}+\dots+\sum_{k=0}^{k_\ell-1}C_{\ell,k}t^k\exp\{\lambda_\ell t\}\equiv 0,$$

или

$$P_1(t)\exp\{\lambda_1 t\} + P_2(t)\exp\{\lambda_2 t\} + \dots + P_\ell(t)\exp\{\lambda_\ell t\} \equiv 0, \tag{3.67}$$

где степень многочлена $s_j = \deg P_j(t) \leqslant k_j - 1$, $j = 1, \dots, \ell$. Без ограничения общности можно считать, что многочлен $P_\ell(t)$ нетривиален, $P_\ell(t) = p_\ell t^s + \dots$, $s = s_\ell$, $p_\ell \neq 0$. После умножения (3.67) на $\exp\{-\lambda_1 t\}$ получаем

$$P_1(t) + P_2(t)\exp\{(\lambda_2 - \lambda_1)t\} + \dots + P_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell - \lambda_1)t\} \equiv 0.$$

Дифференцируем в последнем равенстве почленно k_1 раз. Так как $\deg P_1(t) \leqslant k_1 - 1$, то $d^{k_1}P_1(t)/dt^{k_1} \equiv 0$. Для преобразования остальных слагаемых заметим, что $(P_j(t)\exp\{\mu t\})' = (\mu P_j(t) + P_j(t)')\exp\{\mu t\}$, $\mu = \lambda_j - \lambda_1 \neq 0$, т.е. при дифференцировании в множителе перед экспонентой остается многочлен той же степени. Тогда

$$\frac{d^{k_1}}{dt^{k_1}}\left(P_j(t)\exp\{(\lambda_j - \lambda_1)t\}\right) = Q_j(t)\exp\{(\lambda_j - \lambda_1)t\},$$
$$\deg Q_j(t) = s_j, \quad Q_j(t) = (\lambda_j - \lambda_1)^{k_1} p_j t^{s_j} + \dots.$$

В результате приходим к равенству

$$Q_2(t)\exp\{(\lambda_2 - \lambda_1)t\} + \dots + Q_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell - \lambda_1)t\} \equiv 0.$$

После умножения на $\exp\{(\lambda_1 - \lambda_2)t\}$ и почленного дифференцирования полученного равенства k_2 раз имеем

$$R_3(t)\exp\{(\lambda_3 - \lambda_2)t\} + \dots + R_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell - \lambda_2)t\} \equiv 0,$$
$$\deg R_j(t) = s_j, \quad R_j(t) = (\lambda_j - \lambda_2)^{k_2}(\lambda_j - \lambda_1)^{k_1} p_j t^{s_j} + \dots, \quad j = 3, \dots, \ell.$$

Продолжая эту процедуру, на последнем этапе получаем

$$S_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell - \lambda_{\ell-1})t\} \equiv 0,$$
$$\deg S_\ell(t) = s_\ell, \quad S_\ell(t) = (\lambda_\ell - \lambda_{\ell-1})^{k_{\ell-1}} \dots (\lambda_\ell - \lambda_2)^{k_2}(\lambda_\ell - \lambda_1)^{k_1} p_\ell t^{s_\ell} + \dots.$$

Однако полученное равенство противоречит нетривиальности многочлена $P_\ell(t)$ со старшим коэффициентом $p_\ell \neq 0$. Полученное противоречие обосновывает справедливость доказываемого утверждения о линейной независимости системы (3.66). □

Доказанное в лемме свойство линейной независимости системы функций (3.66) с учетом того, что эти функции являются решениями линейного однородного ОДУ (3.62), порядок n которого совпадает с количеством рассматриваемых функций, приводит к утверждению следующей теоремы.

Теорема 3.8.4. *Система функций (3.66) составляет фундаментальную систему решений линейного однородного ОДУ с постоянными коэффициентами (3.62) на любом отрезке* $[a, b]$.

Если все коэффициенты уравнения вещественны, $a_j \in \mathbb{R}$, тогда фундаментальную систему решений можно также конструктивно построить в вещественном виде. В этом случае характеристический многочлен в (3.64) имеет вещественные коэффициенты. Как следует из курса линейной алгебры, его комплекснозначные корни (собственные значения) идут комплексно сопряженными парами: $\lambda = \alpha + i\beta$, $\lambda^* = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда в построенной фундаментальной системе решений (3.66) функции, отвечающие вещественным собственным значениям, являются вещественными, а отвечающие комплексным собственным значениям функции встречаются только комплексно сопряженными парами:

$y(t) = t^s \exp\{\alpha t\}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$ и $y^*(t) = t^s \exp\{\alpha t\}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$. Аналогично построению фундаментальной системы решений для линейной однородной системы ОДУ с вещественной матрицей заменим каждую пару таких функций соответствующими действительными и мнимыми частями:

$$y_R(t) = \operatorname{Re} y(t) = t^s \exp\{\alpha t\}\cos\beta t, \quad y_I(t) = \operatorname{Im} y(t) = t^s \exp\{\alpha t\}\sin\beta t$$

Функции $y_R(t), y_I(t)$ являются решениями линейного однородного ОДУ (3.62) как линейные комбинации решений этого уравнения. Построенная таким образом совокупность состоит из n *вещественных* решений линейного однородного ОДУ (3.66) и задает его фундаментальную систему решений над полем вещественных чисел. Линейная независимость доказывается дословно случаю систем (см. п. 3.5.3).

Пример 3.8.2. *Составить линейное однородное ОДУ наименьшего порядка с постоянными вещественными коэффициентами, у которого решениями являются функции* $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \sin(2t)$. *Для решения этой задачи представим функции в виде* $y_1(t) = \exp\{0 \cdot t\}$, $y_2(t) = \operatorname{Im}\exp\{2it\}$. *Так как уравнение имеет вещественные коэффициенты, тогда и функция* $y_3(t) = \operatorname{Re}\exp\{2it\}$ *также является его решением. Комплексная ФСР состоит из функций* $\{\exp\{0 \cdot t\}, \exp\{2it\}, \exp\{-2it\}\}$, *порядок уравнения равен* 3, *корни его характеристического многочлена суть* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$. *По виду многочлена*

$$M(\lambda) = \lambda(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = \lambda^3 + 4\lambda$$

восстанавливаем само дифференциальное уравнение

$$y''' + 4y' = 0.$$

3.9 Построение линейного дифференциального уравнения n-го порядка по его решениям

3.9.1 Построение линейного дифференциального уравнения по его решениям

В этом параграфе мы сначала рассмотрим вопрос о построении линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0, \quad t \in [a, b], \tag{3.68}$$

решением которого являются заданные функции. При этом возникают два вопроса, а именно: существует ли линейное дифференциальное уравнение, имеющее своими решениями заданные функции и единственно ли такое уравнение. Начнем с исследования второго вопроса. Справедлива следующая теорема

Теорема 3.9.1. *Пусть коэффициенты* $a_m(t)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$, $m = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда дифференциальное уравнение (3.68) однозначно определяется фундаментальной системой решений.*

Доказательство. Пусть $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ фундаментальная система решений уравнения (3.68). Предположим, что существует другое дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $b_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots, n$, для которого система $y_k(t)$ также является фундаментальной. Покажем, что в этом случае $a_m(t) = b_m(t)$, $t \in [a, b]$, $m = 1, 2, \ldots, n$.

Действительно, функции $y_k(t)$ являются решениями и того и другого уравнения, то-есть

$$y_k^{(n)}(t) + a_1(t)y_k^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y_k'(t) + a_n(t)y_k(t) = 0, \quad t \in [a,b],$$

и

$$y_k^{(n)}(t) + b_1(t)y_k^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1}(t)y_k'(t) + b_n(t)y_k(t) = 0, \quad t \in [a,b],$$

для $k = 1, 2, \ldots, n$. Вычитая для каждого k одно равенство из другого получим, что

$$(a_1(t) - b_1(t))y_k^{(n-1)}(t) + \cdots + (a_{n-1}(t) - b_{n-1}(t))y_k'(t) + (a_n(t) - b_n(t))y_k(t) = 0,$$

для $t \in [a,b]$ и $k = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что существует точка $t_0 \in (a,b)$ такая, что $a_1(t_0) \neq b_1(t_0)$. Тогда в силу непрерывности функций $a_1(t), b_1(t)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $a_1(t) \neq b_1(t)$ для $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [a,b]$. Поделив на $a_1(t) - b_1(t)$ и обозначив $p_m(t) = (a_m(t) - b_m(t))(a_1(t) - b_1(t))^{-1}$, имеем

$$y_k^{(n-1)}(t) + \cdots + p_{n-1}(t)y_k'(t) + p_n(t)y_k(t) = 0, \quad t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],$$

для $k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, мы получили, что n линейно независимых функций $y_k(t)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения $(n-1)$-го порядка с непрерывными коэффициентами $p_m(t)$. Но из теоремы об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения следует, что уравнение $(n-1)$-го порядка имеет только $n-1$ линейно независимое решение. Полученное противоречие доказывает что $a_1(t) = b_1(t)$, $t \in [a,b]$. Доказательство равенства остальных функций проводится аналогично. Теорема 3.9.1 доказана. □

Рассмотрим теперь вопрос о существовании линейного дифференциального уравнения, решением которого являлась бы заданная система функций.

Теорема 3.9.2. *Пусть n раз непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ таковы, что составленный из них определитель Вронского $\Delta(t) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](t)$ не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a,b]$, $\Delta(t) \neq 0$. Тогда существует линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка такое , что функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ являются его фундаментальной системой решений.*

Доказательство. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка для неизвестной функции $y(t)$

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) & y(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) & y'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & \ldots & y_n''(t) & y''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)}(t) \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \ldots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)}(t) \end{vmatrix} = 0, \quad t \in [a,b]. \tag{3.69}$$

Для того чтобы убедиться в том, что уравнение (3.69) действительно представляет собой линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, достаточно разложить определитель по последнему столбцу. Коэффициент при старшей производной $y^{(n)}(t)$ представляет собой определитель Вронского, составленный из заданных функций $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и по условию теоремы отличен от нуля на $[a,b]$. Поделив на этот определитель, мы получим дифференциальное уравнение вида (3.68) с коэффициентами непрерывными на отрезке $[a,b]$. Все функции $y_k(t)$,$k = 1, 2, \ldots, n$ являются решениями полученного уравнения, так как при подстановке функции $y(t) = y_k(t)$ в уравнение (3.69) мы имеем слева определитель с двумя одинаковыми столбцами. Теорема 3.9.2 доказана. □

Пример 3.9.1. *Составить линейное однородное ОДУ наименьшего порядка, у которого решениями являются функции* $y_1(t) = t$, $y_2(t) = \exp\{t^2\}$, $y_3(t) = t^2$ *и* $y_4(t) = 3t - 2t^2$. *Для решения этой задачи прежде всего заметим, что* $y_4(t) = 3y_1(t) - 2y_3(t)$, *а функции* $y_1(t)$, $y_2(t)$ *и* $y_3(t)$ *имеют отличный от нуля определитель Вронского*

$$\Delta(t) = \det\begin{pmatrix} t & \exp\{t^2\} & t^2 \\ 1 & 2t\exp\{t^2\} & 2t \\ 0 & 2\exp\{t^2\} + 4t^2\exp\{t^2\} & 2 \end{pmatrix} = -2\exp\{t^2\}(2t^4 - t^2 + 1) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Согласно теореме 3.9.2, искомое уравнение третьего порядка имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} t & \exp\{t^2\} & t^2 & y \\ 1 & 2t\exp\{t^2\} & 2t & y' \\ 0 & (2+4t^2)\exp\{t^2\} & 2 & y'' \\ 0 & (12t+8t^3)\exp\{t^2\} & 0 & y''' \end{pmatrix}\Delta^{-1}(t) = 0.$$

Пример 3.9.2. *Составить на отрезке* $[1,2]$ *линейное однородное ОДУ наименьшего порядка, у которого решениями являются функции* $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \cos(t)$, $y_3(t) = \sin^2(t/2)$. *Для решения этой задачи прежде всего заметим, что* $y_3(t) = (y_1(t) - y_2(t))/2$, *а функции* $y_1(t)$ *и* $y_2(t)$ *имеют отличный от нуля определитель Вронского*

$$\Delta(t) = \det\begin{pmatrix} 1 & \cos t \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix} = -\sin t \neq 0, \quad \forall t \in [1,2].$$

Согласно теореме 3.9.2, искомое уравнение второго порядка имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \cos t & y \\ 0 & -\sin t & y' \\ 0 & -\cos t & y'' \end{pmatrix}\Delta^{-1}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' - \mathrm{ctg}(t)\, y' = 0.$$

3.9.2 Формула Остроградского-Лиувилля.

Используя представление линейного дифференциального уравнения в виде (3.69) можно получить формулу для определителя Вронского. При выводе этой формулы мы используем следующее правило дифференцирования функциональных определителей.

Пусть $D(t)$ – определитель n-го порядка, элементами которого являются функции непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$. Производная $D'(t)$ определителя $D(t)$ равна сумме n определителей, каждый из которых получен из $D(t)$ путем замены одной из его строк на строку из производных.

Из этого правила следует простая формула для производной определителя Вронского $\Delta(t)$, составленного из системы n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $y_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$,

$$\Delta'(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_{n-1}(t) & y_n(t) \\ y_1'(t) & y\prime_2(t) & \dots & y_{n-1}'(t) & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & ... & y_{n-1}^{(n-2)}(t) & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & ... & y_{n-1}^{(n)}(t) & y_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}.$$

Действительно. Применим правило вычисления производной функционального определителя к определителю Вронского $\Delta(t)$. Все определители, в которых на производные заменяется любая строка, кроме последней будут равны нулю, как определители, имеющие одинаковые строки. Следовательно, только последний определитель, в котором на производные заменена последняя строка и представляет собой производную $\Delta'(t)$.

Пусть $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, фундаментальная система решений уравнения (3.68). Из теоремы 3.9.1 следует, что это уравнение однозначно определяется своей фундаментальной системой. Значит, поделив уравнение (3.69) на определитель Вронского $\Delta(t)$, мы получим уравнение (3.68). Тогда из записи уравнения (3.69) следует, что коэффициент

$$a_1(t) = -\frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)}.$$

Интегрируя от t_0 до t, получим формулу Остроградского-Лиувилля

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} a_1(\tau) d\tau \right\}, \quad t \in [a, b].$$

Следствие 3.9.1. *Если коэффициент $a_1(t) = 0$, $t \in [a, b]$, то определитель Вронского $\Delta(t)$ постоянен на отрезке $[a, b]$.*