МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Практическое пособие для студентов

Специальность "Прикладная математика и информатика" (010200)

Воронеж
2003

Утверждено научно-методическим советом факультета ПММ
("23"декабря 2003 г., протокол № 3)

Составитель Украинский П.С.

Практическое пособие подготовлено на кафедре дифференциальных уравнений факультета Прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов первого курса дневного отделения факультета ПММ ВГУ и его филиалов.

Введение

Исследование сходимости числовых, а особенно исследование на равномерную сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов представляет довольно трудную задачу из-за большого числа признаков сходимости и множества применяемых приемов. Целью настоящей методической разработки является показ на конкретных примерах основных способов исследования. В данной разработке из теоретического материала приведены только основные определения, теоремы и признаки сходимости. За полным изложением теории отсылаем читателя к соответствующим учебникам или курсу лекций.

В § 1 приводятся основные определения и свойства числовых рядов. В § 2 рассматривается сходимость положительных числовых рядов. В § 3 излагаются способы исследования сходимости знакопеременных рядов. В § 4 изучается поточечная сходимость функциональных рядов. В § 5 рассмотрена поточечная и равномерная сходимости функциональных последовательностей. § 6 посвящен изучению равномерной сходимости функциональных рядов.

§ 1. Числовые ряды

Пусть имеем некоторую числовую последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, тогда выражение (или символ) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется ***числовым рядом***. Сокращенная запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ***Частичной суммой ряда*** назовем сумму n первых членов $S_n = a_1 + {}_2 + \cdots + a_n$.

Определение 1. *Ряд называют сходящимся, если существует (конечный) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – не существует или бесконечен, то ряд называют* ***расходящимся****.*

Теорема 1 (необходимое условие сходимости). *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Обратное утверждение неверно. Например, ряд $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{4} + \cdots$ расходится, тогда как $\frac{1}{n} \to 0$.

Доказательство теоремы – см. учебник [1].

С помощью необходимого условия нельзя доказать сходимость ряда. Но если необходимое условие не выполнено, то ряд расходится. Например, исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Решение $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ – не существует. Необходимое условие не выполнено. Ряд расходится. Ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется ***остатком ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Теорема 2. *Ряд и его остаток сходятся или расходятся одновременно.*

Дальнейшее изучение сходимости рядов делится на две ветви: ряды положительные и ряды знакопеременные.

§ 2. Положительные числовые ряды

Назовем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительным, если для некоторого n_0, при $n \geqslant n_0$ выполнено $a_n \geqslant 0$. Поскольку при изучении сходимости ряда всегда можно изучать сходимость некоторого остатка, то будем считать, что $a_n \geqslant 0$ при $n \geqslant 1$.

Приведем основные признаки сходимости положительных рядов.

Признак сравнения 1 (с неравенством).

Пусть даны два ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд A и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряд B.

Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, $n = 1, 2, \dots$, тогда из сходимости ряда B вытекает сходимость ряда A, из расходимости ряда A вытекает расходимость ряда B.

Признак сравнения 2 (с пределом).

Пусть существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=L$, тогда:

1) если $0<L<+\infty$, то ряды A и B или оба сходятся или оба расходятся;

2) если $L=0$, то из сходимости ряда B вытекает сходимость ряда A;

3) если $L=+\infty$, то из расходимости ряда B вытекает расходимость ряда A.

Признак Даламбера (предельная форма).

Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Тогда при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ ряд расходится, при $q=1$ ответа нет.

Признак Коши (предельная форма).

Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=q$. Тогда при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ ряд расходится, при $q=1$ ответа нет.

Интегральный признак сходимости.

Если функция $f(x)$ неотрицательна и убывает на полупрямой $x\geqslant 1$, то для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}f(x)dx$.

Для пользования признаками сравнения нужен некоторый запас рядов с известной сходимостью. Такими рядами являются обобщенно гармонические ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$. При $p>1$ ряд сходится, при $p\leqslant 1$ ряд расходится. Доказательство проводится с помощью интегрального признака сходимости, см. [1].

В первую группу примеров включим ряды, общий член которых зависит от степени переменной n.

<u>1.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{3n^2+n-1}$, <u>2.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$, <u>3.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+n=1}$,

<u>4.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1}$, <u>5.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n}}{2n+1}$.

Для выбора ряда для сравнения применяют "правило старшей степени".

Ряд 1 сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится. По признаку сравнения 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{3n^2+n+1}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}.$$

$L=\dfrac{2}{3}\neq 0$. Получили, что ряды ведут себя одинаково, следовательно, ряд расходится.

Замечание. Если при применении признака сравнения с пределом получается, что $L = 0$ или $L = \infty$, то это может означать, что ряд для сравнения выбран неудачно. Но если ответ получен, то с этим можно мириться (см. пример 10).

Ряд 2 сравнить по признаку сравнения 2 с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Ответ:* сходится.

Ряд 3 сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. *Ответ:* сходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+2}$ из примера 4 сначала надо преобразовать так, чтобы убрать неопределенность $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+2} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{(n+2)\left(\sqrt{n+1}=\sqrt{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(n+2)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}.$$

Далее сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Ряд сходится.

Ряд 5 сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$. *Ответ:* расходится.

Для следующей группы примеров применяются эквивалентные бесконечно малые.

<u>**Определение.**</u> *Пусть при $x \to x_0$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми. Тогда $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются* ***эквивалентными****, если* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Приведем список основных эквивалентных бесконечно малых при $x \to 0$.

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \ln(1+x) \sim \operatorname{arctg} x \sim \operatorname{sh} x \sim (e^x - 1).$$

Для поиска ряда для сравнения функцию заменяют на более простую эквивалентную бесконечно малую.

<u>Пример 6.</u>

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n}$ сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Ряды ведут себя одинаково. Ряд сходится.

Пример 7.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{2\pi}{n}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2\sin^2\frac{\pi}{n}$. Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. *Ответ:* сходится.

Пример 8.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+4}{n^2+3}$.

Т.к. $\ln\frac{n^2+4}{n^2+3} = \ln\frac{n^2+3+1}{n^2+3} = \ln(1+\frac{1}{n^2+3}) \sim \frac{1}{n^2+3} \sim \frac{1}{n^2}$. Данный ряд сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ по признаку сравнения с пределом. *Ответ:* сходится.

Пример 9.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}-1\right)^{\alpha}$.

Решение: $e^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}-1 \sim \operatorname{tg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$. исходный ряд сравним с $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. При $\alpha>1$ ряд сходится, при $\alpha\leqslant 1$ ряд расходится.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(e^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}-1)^{\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(e^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}-1)\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\operatorname{tg}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}\right)^{\alpha} = 1.$$

Ряды ведут себя одинаково. Ответ: при $\alpha>1$ сходится, при $\alpha\leqslant 1$ расходится.

Пример 10.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+1}$.

Решение. Известно, что $\ln n$ растет медленнее, чем n^p, где $p>0$. Поэтому следует ожидать сходимости ряда, т.к. в знаменателе n^2. Надо сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$, где $1<q<2$, например, с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. Применим признак сравнения с пределом.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}\ln n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2nn}{n^{\frac{1}{2}}+n^{-3/2}} = \begin{pmatrix}\text{по правилу Лопиталя,}\\ \text{считая } n\in R\end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}n^{-\frac{5}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}n^{-\frac{3}{2}}} = 0.$$

В этом случае (см. п. 2 признака) из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ следует сходимость исходного ряда.

Пример 11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}.$$

Для доказательства сходимости сравнить со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где $p > 1$. Например, с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. применить признак сравнения с пределом.

Признак Даламбера применяют к рядам, общий член которых содержит $n!$, a^n или аналогичные по скорости роста функции.

Признак Коши применяют, если общий член ряда содержит a^n, n^n или аналогичные по скорости роста функции.

Пример 12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}.$$

Решение. По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n!}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= 3\cdot\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1,$$

следовательно, ряд расходится.

Пример 13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(3-\frac{1}{n})^n}.$$

По признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{(3-\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{n}}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{3\ln n}{n}} = \begin{pmatrix}\text{по правилу Лопиталя,}\\ \text{считая } n\in R\end{pmatrix} = e^{3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

Пример 14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3\cdot(-1)^n}{2^n}.$$

Ряд положительный. Имеем $\dfrac{5+3(-1)^n}{2^n} \leqslant \dfrac{8}{2^n}$. Ряд $8 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии (или по признаку Коши). По первому признаку сравнения ряд сходится.

§ 3. Знакопеременные ряды

Пусть дан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где члены a_n произвольного знака. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Известно, что если ряд из модулей сходится, то сходится и исходный ряд (см. учебник). В этом случае сходимость ряда называют абсолютной. Если ряд из модулей расходится, а исходный сходится, то ряд называют условно сходящимся.

Для исследования на абсолютную сходимость применяют признаки сходимости для положительных рядов. Для исследования на неабсолютную сходимость применяют признаки Лейбница и Дирихле.

Признак Лейбница

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если

1) знаки a_n чередуются, ($a_n = (-1)^n |a_n|$ при $n > n_0$),

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$,

3) $|a_n| \geqslant |a_{n+1}|$ при $n \geqslant n_0$,

то ряд сходится.

Признак Дирихле

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если

1) существует M такое, что для всех N

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\right| \leqslant M,$$

2) b_n – монотонная последовательность,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Пример 15.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Начнем с исследования на абсолютную сходимость. Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Имеем $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ для $n \geqslant 3$. Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ и первого признака сравнения следует, что абсолютной сходимости нет. Далее по признаку Лейбница

1. Ряд знакочередующийся.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = \left(\begin{smallmatrix}\text{по правилу Лопиталя,}\\ \text{считая } n\in R\end{smallmatrix}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$

3. Для проверки монотонности рассмотрим функцию $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ для $x \geqslant 1$. Найдем производную $y' = \dfrac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}$. Если $2 - \ln x < 0$, откуда $x > e^2$, то $y'(x) < 0$ и функция убывает. Вместе с ней при $n > e^2$ последовательность $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ монотонно убывает. Ряд сходится по признаку Лейбница. Сходимость условная.

Пример 16.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\sin\frac{1}{n}$.

Решение. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\pi n\right) = (-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{1}{n} > 0$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$. Сравним с расходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ по признаку сравнения с пределом. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. Ряды ведут себя одинаково. Абсолютной сходимости нет. Далее по признаку Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\sin\frac{1}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$$

1) Чередование знаков есть;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n\sin\frac{1}{n}| = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0$.

3) Так как $0 < \frac{1}{n} < 1$, а $\sin x$ для $0 < x < \frac{\pi}{2}$ монотонно возрастает, то из неравенства $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}$ следует $\sin\frac{1}{n} > \sin\frac{1}{n+1}$. По признаку Лейбница ряд сходится. Сходимость условная.

Напомним два важных равенства из элементарной тригонометрии.

$$\sum_{n=1}^{N}\sin n\alpha = \frac{\sin\big((N+1)\alpha/2\big)\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\cos n\alpha = \frac{\cos\big((n+1)\alpha/2\big)\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)},$$

где $\alpha \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Из равенств очевидным образом следует два неравенства:

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} \sin n\alpha\Big| \leqslant \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|} \qquad (S)$$

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} \cos n\alpha\Big| \leqslant \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}, \qquad (C)$$

где $\alpha \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Пример 17.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$, $(0 < x < \pi)$. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

Решение. По признаку Дирихле и неравенству (S) имеем:

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\Big| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}, \quad \text{где} \quad 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \ \ (\text{по неравенству} S)$$

$\dfrac{1}{n} \to 0$ монотонно. Очевидно. Ряд сходится.

Докажем, что абсолютной сходимости нет. Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big|\dfrac{\sin nx}{n}\Big|$. Из неравенства $|\sin nx| \geqslant \sin^2 nx$ следует

$$\frac{|\sin nx|}{n} \geqslant \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1-\cos 2nx}{2n} \qquad (1.16)$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-\cos 2nx}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{2n}$ расходится, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{2n}$ сходится по признаку Дирихле, а ряд $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. В силу неравенства (1.16) и первого признака сравнения ряд из модулей расходится.

Пример 18.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+10}\cos n$. Исследовать на сходимость.

По признаку Дирихле, используя неравенство (C)

1) $\Big|\sum\limits_{n=1}^{N} \cos n\Big| \leqslant \dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{2}}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+10} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+\dfrac{10}{\sqrt{n}}} = 0$,

3) Для доказательства монотонности рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+10}$ для $x \geqslant 1$.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x+10}{2\sqrt{x}}}{(x+10)^2} = \frac{10-x}{2\sqrt{x}(x+10)^2}.$$

Если $10 - x < 0$ откуда $x > 10$, то $f'(x) < 0$ и $f(x)$ убывает. Вместе с $f(x)$ последовательность $\dfrac{\sqrt{n}}{n+10}$ монотонно убывает для $n > 10$. То, что монотонность не для всех n, не опасно. Можно рассмотреть остаток ряда для $n \geqslant 11$. Ряд сходится. Абсолютной сходимости нет. Доказательство от противного, как в предыдущем примере.

Пример 19.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$. Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$. Имеем

$$\frac{1}{n\ln(n+1)} > \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Применим интегральный признак сходимости

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_1^{R}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_1^{R}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(\ln\ln(x+1)\Big|_1^R\right) = \lim_{R\to+\infty}(\ln\ln(R+1) - \ln\ln 2) = +\infty.$$

Интеграл расходится, вместе с ним ряд расходится. Из неравенства вытекает, что ряд из модулей расходится. Абсолютной сходимости нет. Исследуем на условную сходимость. Непосредственная проверка показывает, что знаки членов изменяются так: $- - + + - - + + - - \cdots$. Применим признак Дирихле.

$$\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right| \leqslant 2.$$

$$\frac{1}{n\cdot\ln(n+1)} > \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)} = 0.$$

По признаку Дирихле ряд сходится. Сходимость условная.

§ 4. Функциональные ряды. Поточечная сходимость

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, где $U_n(x)$ – функции, заданные на общем множестве $\mathcal{D}$. При фиксированном x функциональный ряд превращается в числовой. Совокупность всех x, при которых ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда. При разных x ряд может быть знакопостоянным или знакопеременным. Далее применяют соответствующие признаки.

Известные признаки Даламбера и Коши имеют одно полезное следствие.

Следствие 4.1 *Пусть члены ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *положительны,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ *и* $q > 1$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. *Другими словами, если ряд расходится по признаку Даламбера, то для ряда не выполнено необходимое условие сходимости.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, то по свойству предела последовательности $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n > n_0$ получим $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Откуда $a_{n+1} > a_n$ и $a_{n+1} > a_{n_0} > 0$.

Следствие 4.2 *Пусть* $a_n > 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.
Доказательство аналогично предыдущему.

Пример 4.1. Найти область абсолютной и условной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^n$

Решение. Пусть $x \neq -2$. Ряд может быть и положительным и знакопеременным. Начнем с исследования абсолютной сходимости, т.к. если ряд окажется положительным, то сходимость ряда равносильна абсолютной сходимости.

Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left|\dfrac{x}{x+2}\right|^n$. По признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\left|\frac{x}{x+2}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\left|\dfrac{x}{x+2}\right|} = \left|\frac{x}{x+2}\right|.$$

($\sqrt[n]{n} \to 1$, см. пример 2.13). Если $\left|\dfrac{x}{x+2}\right| < 1$, то ряд сходится. Неравенство $\left|\dfrac{x}{x+2}\right| < 1$ решаем методом интервалов: $|x| < |x+2|$

1) Если $x < -2$, то $-x < -x-2$, $0 < -2$. Решений нет.

2) Если $-2 \leqslant x < 0$, то $-x < x+2$, $2x > -2$, $x > -1$ с учетом условия получим $x \in (-1; 0)$.

3) Если $x \geqslant 0$, то $x < x+2$, $0 \leqslant 2$ верно при всех $x \in [0, +\infty)$.

Получим при $x \in (-1, +\infty)$ ряд сходится абсолютно.

Пусть $\left|\frac{x}{x+2}\right| > 1$. Решая аналогично, получим при $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1)$ абсолютной сходимости нет. По следствию 4.2 $\left|\frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+2}\right)^n\right| \nrightarrow 0$. Откуда $\frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+2}\right)^n \nrightarrow 0$. Необходимое условие сходимости ряда не выполнено. Ряд расходится. Пусть $\left|\frac{x}{x+2}\right| = 1$, откуда $x = -1$. Признак Коши ответа не дает. При $x = -1$ исходный ряд примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$. Такой ряд абсолютно расходится. Сходимость условия по признаку Лейбница.

Ответ: При $x \in (-1; +\infty)$ ряд сходится абсолютно, при $x = -1$ ряд сходится условно, при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$ ряд расходится.

§ 5. Функциональные последовательности

Рассмотрим последовательность функций $f_n(x)$, заданных на общем для всех множестве $\mathcal{D}$. Зафиксируем $x \in \mathcal{D}$. Если числовая последовательность $f_n(x)$ имеет конечный предел, то говорят, что последовательность $f_n(x)$ сходится в точке x. Множество таких x называют областью сходимости функциональной последовательности $f_n(x)$.

Определение 5.1 *Последовательность $f_n(x)$ называется сходящейся к $f(x)$ (поточечно) на множестве X, если $\forall\, x \in X$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для $\forall\, n > n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Заметим, что $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, а $f(x)$ называют предельной функцией.*

Пример 5.1. Исследовать на сходимость и найти предельную функцию для $f_n(x) = x^n$ при $x \in [-1; 2]$.

Решение. Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть $x = -1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ – не существует.

2. Пусть $|x| < 1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

3. Пусть $x = 1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$.

4. Пусть $1 < x \leqslant 2$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$.

Ответ: Последовательность сходится для $x \in (-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Замечание. Т.к. при фиксированном x $f_n(x)$ превращается в числовую последовательность, то для вычисления предельной функции надо использовать способы, применяемые к числовым последовательностям.

Пример 5.2. Найти предельную функцию для $f_n(x) = \dfrac{x^2 + 2nx}{1 + 3n + x^2}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+2nx}{1+3n+x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{n}+2x}{\dfrac{1}{n}+3+\dfrac{x^2}{n}}=\frac{2}{3}x.$$

Ответ: $f(x)$ существует для $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{3}x$.

Пример 5.3. Найти предельную функцию для $f_n(x)=n\cdot\sin\frac{x}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{x}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\sin\dfrac{x}{n}}{x\dfrac{1}{n}}=x. \qquad f(x)=x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Пример 5.4. Найти предельную функцию для $f_n(x)=\frac{\ln nx}{2n+3x}$, где $x\in(0,+\infty)$, n – натуральное.

Решение. При $n\to\infty$ имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы воспользоваться правилом Лопиталя, будем считать, что $n\in\mathbb{R}^+$ и x фиксировано. Применим правило Лопиталя.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln nx}{2n+3x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{nx}\cdot x}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

Ответ: $f(x)\equiv 0$, для $x\in(0,+\infty)$.

Переходим к понятию равномерной сходимости. Это частный случай поточечной сходимости. Пусть $f(x)$ – предельная функция последовательности $f_n(x)$ в смысле поточечной сходимости для $x\in X$.

Определение 5.2 *Последовательность* $f(x)$ *равномерно сходится к* $f(x)$ *для* $x\in X$, *если* $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_0=n_0(\varepsilon,)$ $\forall\, n>n_0$ *и* $\forall\, x\in X$:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Критерий 5.1 равномерной сходимости $f_n(x)$ *равномерно сходится к* $f(x)$ *для* $x\in X$ *тогда и только тогда, если*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

Замечание. Критерий 3.1 позволяет доказывать как наличие равномерной сходимости, так и ее отсутствие.

Пример 5.5. $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$, $x\in\mathbb{R}$. Исследовать на равномерную сходимость.

Решение. Найдем сначала предельную функцию.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin nx=0.$$

(Произведение бесконечно малой $\frac{1}{n}$ на ограниченную $\sin nx$.) Получили $f(x)\equiv 0$. Далее по определению 5.2 возьмем $\varepsilon>0$.

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|=\frac{|\sin nx|}{n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Решаем последнее в цепочке неравенство $\frac{1}{n}<\varepsilon$, $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Положим $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тем самым найден номер n_0, зависящий только от ε. Определение 5.2 выполнено.

<u>Пример 5.6.</u> $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx}$. Исследовать на равномерную сходимость.

а) $0<\delta\leqslant x<+\delta$, б) $0<x<+\infty$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{n}+x}=1.\qquad f(x)\equiv 1\quad\text{для}\quad 0<x<+\infty.$$

В случае а)

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+nx}-1\right|=\left|\frac{nx-1-nx}{1+nx}\right|=\frac{1}{1+nx}\leqslant\frac{1}{nx}\leqslant\frac{1}{n\delta}<\varepsilon.$$

$\frac{1}{n\delta}<\varepsilon$ откуда $n>\frac{1}{\varepsilon\delta}$. Положим $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right]$. По определению сходится равномерно.

В случае б) воспользуемся критерием 5.1.

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{1+nx}.$$

Для $x\in(0,+\infty)$ $\dfrac{1}{1+nx}$ монотонно убывает, поэтому

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\frac{1}{1+nx}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+nx}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\frac{1}{1+nx}=\lim_{n\to\infty}1=1.\quad 1\neq 0.$$

Равномерной сходимости нет.

<u>Пример 5.7.</u> $f_n(x)=nx\cdot e^{-nx}$. Исследовать на равномерную сходимость.

а) $0<x<1$, б) $x\geqslant 1$.

Решение. Для нахождения предельной функции временно будем считать, что $n\in\mathbb{R}^+$, и применим правило Лопиталя по переменной n.

$$\lim_{n\to\infty}nx\cdot e^{-nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{e^{nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{e^{nx}\cdot x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{nx}}=0.\qquad f(x)\equiv 0.$$

$$|f_n(x)-f(x)|=|nxe^{-nx}|=nx\cdot e^{-nx}=r_n(x).$$

Для нахождения $\sup r_n(x)$ изучим $r_n(x)$ как функцию от x при фиксированном n.

$r_n'(x)=ne^{-nx}-n^xe^{-nx}=ne^{-nx}(1-nx)$.

$r_n'(x)=0$, если $1-nx=0$, то критическая точка $x=\dfrac{1}{n}$.

При $0<x<\dfrac{1}{n}$ $r_n'(x)>0$ и $r_n(x)$ возрастает от 0 до e^{-1}.

При $\dfrac{1}{n}<x+\infty$ $r_n'(x)<0$ и $r_n(x)$ убывает от e^{-1} до 0.

Имеем $x=\dfrac{1}{n}$ точки локального максимума, $\dfrac{1}{n}\in(0,1)$ при $n\geqslant 2$.

$$\max_{x\in(0,1)} r_n(x)=\sup_{x\in(0,1)} r_n(x)=e^{-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)} r_n(x)=\lim_{n\to\infty} e^{-1}=e^{-1}\neq 0.$$

Равномерной сходимости нет.

Во втором случае при $x\geqslant 1$ $r_n(x)$ монотонно убывает. Максимум будет при $x=1$.

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geqslant 1} r_n(x)=\lim_{n\to\infty} r_n(1)=\lim_{n\to\infty} n\cdot e^{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=0$$

По критерию 5.1 сходимость равномерная.

Примеры 5.8 – 5.10. Исследовать на равномерную сходимость.

5.8. $\quad f_n(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n^2+x^2},\quad x\in\mathbb{R}.$

Указание. Воспользоваться определением равномерной сходимости и ограниченностью $\operatorname{arctg} x$. Сходится равномерно.

5.9. $\quad f_n(x)=\sin(ne^{-nx}),\quad x\in[1,+\infty).$

Указание. $|\sin(ne^{-nx})|\leqslant ne^{-nx}$. Далее по критерию 5.1. Сходится равномерно.

5.10. $\quad f_n(x)=\dfrac{nx^2}{n^3+x^3},\quad$ а) $0\leqslant x\leqslant 1$; б) $x\geqslant 1$.

Указание. Найти $\max|f_n(x)-f(x)|$, считая n фиксированным. Обратите внимание, где лежит точка $\max$. Далее по критерию 5.1. Ответ: а) сходится равномерно; б) сходится неравномерно.

§ 6. Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение 6.1. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *называется равномерно сходящимся на множестве* X, *если* $S_n(x)$ *равномерно сходится к* $S(x)$, *где* $S_n(x)$ *– частичная сумма ряда, а* $S(x)$ *– сумма ряда.*

Легко доказать следующую теорему.

Теорема 6.1. *Для того чтобы ряд сходился равномерно на множестве* X, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность остатков ряда* $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)$ *равномерно сходилась к функции тождественно равной нулю на* X.

Свойство 6.1. *Равномерная сходимость ряда и его остатка происходит одновременно.*

Приведем два основных признака равномерной сходимости.

Признак Вейерштрасса

Если существует последовательность чисел $c_n \geqslant 0$ такая, что $|U_n(x)| \leqslant \leqslant c_n$ для $x \in X$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходится равномерно на X.

Признак Дирихле

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на множестве X, если выполнены следующие условия:

1) $\exists\, M > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in X:\ \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M.$

2) Последовательность $b_n(x)$ монотонно и равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е.

$$b_n(x) \geqslant b_{n+1}(x), \qquad b_n(x) \rightrightarrows 0, \quad \text{при} \ \ x \in X, \ \ n \to \infty.$$

Напомним, что значит $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на X.

Определение 6.3. $b_n(x) \rightrightarrows 0$ *при* $n \to \infty$ *и* $x \in X$, *если* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon),\ \forall\, n > n_0$ *и* $\forall\, x \in X:\ |b_n(x)| < \varepsilon$

Пример 6.1. Доказать, что для $-1 < x < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится, но не равномерно.

Решение. Рассмотрим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^n|$. По признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|} = |x|.$$

Если $|x| < 1$, то ряд сходится. Поточечная сходимость доказана.

Рассмотрим остаток ряда. По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии находим

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^n = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Для равномерной сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы $r_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ и $x \in (-1;1)$. Воспользуемся критерием 5.1 равномерной сходимости.

Т.к. $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty$, то и $\sup\limits_{|x|<1} \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty$ отсюда $r_n(x)$ не сходится равномерно к нулю. Равномерной сходимости ряда нет.

<u>Примеры 6.2. – 6.6.</u> Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость рядов.

Замечание. Для получения мажорирующего ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ используют очевидные или известные неравенства. В более трудных случаях функцию $U_n(x)$ мажорируют (ограничивают сверху) ее максимумом или $\sup U_n(x)$.

<u>6.2.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 2nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}, \ -\infty < x < +\infty.$

Решение: $\left|\dfrac{\sin^2 2nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^2}} \leqslant \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ сходится. Исходный ряд сходится равномерно.

<u>6.3.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{x^4+n\sqrt{n}}, \ -\infty < x < +\infty.$

Решение: $\left|\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{x^4+n\sqrt{n}}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{x^4+n\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится. Исходный ряд сходится равномерно.

<u>6.4.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{1+n^{3/2}x^2}, \ -\infty < x < +\infty.$

Решение: $\left|\dfrac{x^2}{1+n^{3/2}x^2}\right| = \dfrac{x^2}{1+n^{3/2}x^2} \leqslant \dfrac{x^2}{n^{3/2}x^2} = \dfrac{1}{n^{3/2}}.$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится. Исходный ряд сходится равномерно.

<u>6.5.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1+n^5x^2}, \ -\infty < x < +\infty.$

Напомним известное неравенство для $a > 0, \ b > 0$.

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Применяя к знаменателю, получим

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \frac{n \cdot |x|}{1+n^5x^2} \leqslant \frac{n \cdot |x|}{2\sqrt{n^5x^2}} = \frac{n \cdot |x|}{2n^{5/2}\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{3/2}}$ сходится. Исходный ряд сходится равномерно.

<u>6.6.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nxe^{-x^2n^5}$, $0 \leqslant x < +\infty$.

Рассмотрим $U_n(x) = nxe^{-x^2n^5}$ для $x \geqslant 0$ и будем искать максимум функции при фиксированном n.

$$U_n'(x) = ne^{-x^2n^5} + nx\cdot e^{-x^2n^5}(-2xn^5) = n\cdot e^{-x^2n^5}(1-2n^5x^2).$$

Приравняем нулю, решим уравнение, получим $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n^5}}$ – критическая точка. $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2n^5}}$ не рассматриваем по условию. Производная меняет знак с $+$ на $-$, значит, это точка максимума. С учетом того, что $U_n(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$, имеем

$$U_{n,\max} = U_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2n^5}}\Big) = n\frac{1}{2n^5}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}\,\frac{1}{n^{3/2}}$$

Ряд $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится. Исходный ряд сходится равномерно.

<u>6.7.</u> Пользуясь признаком Дирихле, доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $\frac{\pi}{6} < x < \pi$.

Решение. Используя неравенство (S) § 3, получим

$$\Big|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\Big| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}, \qquad \text{т.к.}\ \ \frac{\pi}{12} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+x}} > \frac{1}{\sqrt{n+1+x}}\,, \qquad \text{очевидно.}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+x}} \equiv 0$. Равномерное стремление к нулю докажем по определению 6.3.

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{n+x}}\Big| = \frac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon. \qquad \text{Откуда } n > \frac{1}{\varepsilon^2}\,.$$

Положим $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon^2}]$. все условия признака Дирихле выполнены. Сходимость равномерная.

<u>6.8.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\pi n/3)}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $-\infty < x < +\infty$.

Решение. По признаку Дирихле

$$\Big|\sum_{n=1}^{N}\cos(\pi n/3)\Big| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}, \qquad \text{по неравенству (C).}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ равномерно и монотонно стремится к нулю. Доказательство аналогично предыдущему.

6.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{x+\ln n}$, $x \geqslant 1$.

Решение. По признаку Дирихле

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} = |-1+1-1+1-\ldots+(-1)^n| \leqslant 1.$$

$$\frac{1}{x+\ln n} > \frac{1}{x+\ln(n+1)}. \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x+\ln n} = 0.$$

$$\left|\frac{1}{x+\ln n}\right| = \frac{1}{x+\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} < \varepsilon.$$

Решая последнее в цепочке неравенство, получим $n > \exp(\frac{1}{\varepsilon})$. Положим $n_0 = \big[\exp(\frac{1}{\varepsilon})\big]$. Сходимость равномерная.

Литература

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М., 2002. – 558 с.

2. Фихтенгольц Г.Н. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т./ Г.Н. Фихтенгольц. – Спб., 1997. – Т. 2. – 800 с.

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. кудрявцев. – М., 1981. – Т. 1. – 687 с.

4. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов и др. – М., 1986. – 528 с.

Составитель: Украинский Павел Сергеевич
Редактор Тихомирова О.А.