Упражнения к главе 5

1. Доказать, что при $\alpha \neq 0$ метод Рунге — Кутта

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1-\alpha) f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, y_i)\right)$$

имеет второй порядок аппроксимации на решении уравнения

$$\frac{du}{dx} = f(x, u).$$

Решение. По определению погрешность аппроксимации равна

$$\psi = -\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + (1-\alpha) f(x, u) + \alpha f\left(x + \frac{h}{2\alpha}, u + \frac{h}{2\alpha} f(x, u)\right)$$

Обозначая $\beta = {}^{h}\!/_{2\alpha}$, получим

$$f\left(x + \beta, u + \beta f(x, u)\right) = f\left(x, u\right) + \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \beta f \frac{\partial f}{\partial u} + O(h^2).$$

Из уравнения $\frac{du}{dx} = f(x, u)$ получаем

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Поэтому

$$f\left(x + \beta, u + \beta f(x, u)\right) = f\left(x, u\right) + \beta \frac{d^2 u}{dx^2} + O(h^2).$$

Далее,

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2} u''(x) + O(h^2),$$

следовательно,

$$\psi = -u'(x) - \frac{h}{2} u''(x) + (1-\alpha) f(x, u) + \alpha \left(f\left(x, u\right) + \beta u''(x)\right) + O(h^2) =$$

$$= \left(-u'(x) + f\right) - \frac{h}{2} u'' + \alpha {}^{h}\!/_{2\alpha} u'' + O(h^2) = O(h^2).$$

2. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + x u^2 = 0, \quad u(1) = 1.$$

Сделать для нее один шаг по методу Рунге — Кутта с $\alpha = 0,5$. Сравнить результат с точным решением.

Решение. Другая запись семейства методов Рунге — Кутта второго порядка точности:

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha}k_1\right), \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1-\alpha)k_1 + \alpha k_2.$$

В данном случае $\alpha = 0,5$ и метод формулируется как

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f\left(x_i + h, y_i + hk_1\right), \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = 0,5(k_1 + k_2).$$

Дано, что $f(x,u) = -xu^2$ и $x_0 = 1$, $u(1) = 1$, то есть $y_0 = 1$. Требуется найти $y_1 = y(1+h)$. Имеем

$$\begin{aligned} &k_1 = f(x_0, y_0) = -1, \\ &k_2 = f\left(x_0 + h, y_0 + hk_1\right) = -(x_0 + h)(y_0 + hk_1)^2 = -(1+h)(1-h)^2 \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} y_1 = y_0 + 0,5h(k_1 + k_2) = 1 + 0,5h\left(-1 - (1+h)(1-h)^2\right) = \\ = 1 - h + 0,5h^2 + 0,5h^3 - 0,5h^4. \end{aligned}$$

Точным решением исходной задачи является функция $u(x) = 2/(1+x^2)$. Для нее

$$u(1+h) = \frac{2}{1 + (1+h)^2} = 1 - h + 0,5h^2 - 0,25h^4 + O(h^5)$$

Погрешность $y(1+h) - u(1+h) \approx 0,5h^3$.

Ответ.

$$y(1+h) = 1 - h + 0,5h^2 + 0,5h^3 - 0,5h^4,$$

$$u(1+h) = \frac{2}{1+(1+h)^2}, \quad y(1+h) - u(1+h) \approx 0,5h^3.$$

3. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + xu^2 = 0, \quad u(1) = 1.$$

Сделать для нее один шаг по методу Рунге — Кутта с $\alpha = 1$. Сравнить результат с точным решением.

Решение. По аналогии с предыдущей задачей имеем

$$\alpha = 1$$

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = k_2.$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad f(x, u) = -xu^2,$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = -1,$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) =$$

$$= -\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\left(y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)^2 = -\left(1 + \frac{h}{2}\right)\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2$$

$$y_1 = y_0 + hk_2 = 1 - h\left(1 + \frac{h}{2}\right)\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2 = 1 - h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4} - \frac{h^4}{8}$$

$$u(x) = \frac{2}{1 + x^2}$$

$$u(1 + h) = \frac{2}{1 + (1 + h)^2} = 1 - h + 0,5h^2 - 0,25h^4 + O(h^5)$$

$$y(1 + h) - u(1 + h) \approx 0,25h^3$$

Ответ.

$$u(1 + h) = \frac{2}{1 + (1 + h)^2},$$

$$y(1 + h) = 1 - h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4} - \frac{h^4}{8}, \quad y(1 + h) - u(1 + h) \approx 0,25h^3$$

4. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + (1 + x)u^3 = 0, \quad u(0) = 1.$$

Сделать для нее один шаг по методу Рунге — Кутта с $h = 0,05$ при $\alpha = 1$.

Решение.

$$\alpha = 1$$

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = k_2.$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad f(x, u) = -(1+x)u^3,$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = -1,$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = -\left(1 + x_0 + \frac{h}{2}\right)\left(y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)^3 =$$

$$= -\left(1 + \frac{h}{2}\right)\left(1 - \frac{h}{2}\right)^3$$

$$y_1 = y_0 + hk_2 = 1 - h\left(1 + \frac{h}{2}\right)\left(1 - \frac{h}{2}\right)^3 = 0,95250$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x}, \quad u(h) = \frac{1}{1+h} = 0,95238$$

$$y(h) - u(h) \approx 1,175 \cdot 10^{-4}$$

Ответ.

$$u(h) = 0,95238, \quad y(h) = 0,95250, \quad y(h) - u(h) \approx 1,175 \cdot 10^{-4}$$

5. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + xu^2 = 0, \quad u(1) = 1.$$

Сделать для нее два шага по методу Рунге — Кутта с $h = 0,1$ при $\alpha = 1$.

Решение. Общие формулы

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1-\alpha)f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha}f(x_i, y_i)\right)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha}k_1\right),$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1-\alpha)k_1 + \alpha k_2, \quad y_0 = 1, \quad x_0 = 1$$

В данном случае

$$\alpha = 1$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = k_2, \quad y_0 = 1, \quad x_0 = 1, \quad f(x, y) = -xy^2$$

Расчет первого шага

$$i = 0$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = -1, \quad k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) =$$

$$= -\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\left(y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)^2 = -\left(1 + \frac{h}{2}\right)\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2,$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = k_2, \quad y_0 = 1, \quad x_0 = 1$$

Продолжение расчета первого шага

$$y_1 = y_0 + hk_2 = 1 - h\left(1 + \frac{h}{2}\right)\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{10}\cdot\left(1 + \frac{1}{20}\right)\left(1 - \frac{1}{20}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{21}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^2 = 1 - \frac{21\cdot 19^2}{10\cdot 20^3} = 1 - \frac{21\cdot 19^2}{8\cdot 10^4} = \frac{8\cdot 10^4 - 21\cdot 361}{8\cdot 10^4} =$$

$$= \frac{80000 - 7581}{8\cdot 10^4} = \frac{7242}{8000} = \frac{3621}{4000} = 0,905$$

Расчет второго шага

$$i = 1, \quad x_1 = 1 + h = 1,1, \quad y_1 = 0,905$$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = -x_1 y_1^2 = -(1,1)\,[0,905]^2 = -0,819$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = -\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)\left(y_1 + \frac{h}{2}k_1\right)^2 =$$

$$= -(1,1 + 0,05)\,(0,905 - 0,05\cdot 0,819)^2 = -0,859,$$

Тем самым

$$y_2 = y_1 + hk_2 = 0,905 - 0,1\cdot 0,859 = 0,819$$

Точное решение

$$u(x) = \frac{2}{1 + x^2},$$

$$u(1 + 2h) = u(1,2) = \frac{2}{1 + (1,2)^2} = 0,819672 \approx 0,820$$

Ответ.

$$y(1 + 2h) = 0,819, \quad u(1 + 2h) = 0,820$$

6. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + \frac{x}{u + 1} = 0, \quad u(1) = 0$$

Сделать для нее два шага по методу Рунге — Кутта с $h = 0,1$ при $\alpha = 1$.

Решение. Общие формулы

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = (1-\alpha)f(x_i,y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha}f(x_i,y_i)\right)$$

$$k_1 = f(x_i,y_i), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha}k_1\right),$$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = (1-\alpha)k_1 + \alpha k_2, \quad y_0 = 1, \quad x_0 = 1$$

В даннем случае

$$\alpha = 1$$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = k_2, \quad y_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad f(x,y) = -\frac{x}{1+y}$$

Расчет первого шага

$$i = 0$$

$$k_1 = f(x_0,y_0) = -1, \quad k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) =$$

$$= -\frac{x_0 + \frac{h}{2}}{1 + y_0 + \frac{h}{2}k_1} = -\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}} = -\frac{1,05}{0,95} = -1,10526,$$

$$y_1 = y_0 + hk_2 = -0,11053$$

Расчет второго шага

$$i = 1, \quad x_1 = 1 + h = 1,1, \quad y_1 = -0,11053$$

$$k_1 = f(x_1,y_1) = -\frac{x_1}{1+y_1} = -\frac{1,1}{1-0,11053} = -1,23669$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = -\frac{x_1 + \frac{h}{2}}{1 + y_1 + \frac{h}{2}k_1} =$$

$$= -\frac{1,15}{1 - 0,110526 - 0,05 \cdot 1,23669} = -1,3895$$

$$y_2 = y_1 + hk_2 = -0,11053 - 0,13895 = -0,24948$$

Точное решение

$$u(x) = \sqrt{2-x^2} - 1,$$

$$u(1+2h) = u(1,2) = \sqrt{2-(1,2)^2} - 1 \approx -0,251669$$

Ответ.

$$y(1+2h) = --0,249, \quad u(1+2h) = -0,252$$

7. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + xu = 0, \quad u(1) = 1.$$

Сделать для нее один шаг по методу Рунге — Кутта с $h = 0,1$ при $\alpha = 1$. Сравнить результат с точным решением.

Решение.

$$\alpha = 1, \quad h = 0,1$$
$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = k_2, \quad y_0 = 1 \quad x_0 = 1, \quad f(x,u) = -xu$$
$$i = 0, \quad k_1 = f(x_0, y_0) = -x_0 y_0 = -1$$
$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = -\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\left(y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) =$$
$$= -(1 + 0.05)(1 - 0,05) = -0,9975$$
$$y_1 = y_0 + hk_2 = 1 - 0,1 \cdot 0,9975 = 0,90025$$
$$x_1 = 1,1, \quad 1 - x_1^2 = 1 - (1,1)^2 = -0,21$$
$$u(x) = e^{0,5(1-x^2)}, \quad u(x_1) = e^{-0,5 \cdot 0,21} = 0.900325$$

Ответ.

$$y(x_1) = 0,90025, \quad u(x_1) = 0.900325, \quad u(x_1) - y(x_1) = -7,5 \cdot 10^{-5}$$

8. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + (1 + x)u = 0, \quad u(0) = 1.$$

Сделать для нее три шага по методу Эйлера, найти погрешность решения.

Решение. Схема Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),, \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 1, \quad f(x,y) = -(1+x)y$$

Первый шаг

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 - h,$$

Второй шаг

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = (1 - h) - h(1 + x_1)y_1 = (1 - h) - h(1 + h)(1 - h) =$$
$$= 1 - 2h + h^3$$

Третий шаг

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = (1 - 2h + h^3) - h(1 + x_2)y_2 =$$
$$= (1 - 2h + h^3) - h(1 + 2h)(1 - 2h + h^3) = (1 - 2h + h^3)(1 - h(1 + 2h)) =$$
$$= 1 - 3h + 5h^3 - h^4 - 2h^5$$

Точное решение

$$u(x) = e^{-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)}$$

Таким образом,

$$y(3h) = 1 - 3h + 5h^3 - h^4 - 2h^5,$$
$$u(3h) = e^{-\left(3h+\frac{9h^2}{2}\right)} = 1 - 3h + 9h^3 - \frac{27}{4}h^4 - \frac{243}{20}h^5 + O(h^6)$$

Ответ.

$$\begin{aligned} &y(3h) = 1 - 3h + 5h^3 - h^4 - 2h^5, \\ &u(3h) = 1 - 3h + 9h^3 - \frac{27}{4}h^4 - \frac{243}{20}h^5 + O(h^6), \\ &u(3h) - y(3h) = O(h^3) \end{aligned}$$

9. Для уравнения

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \lambda = \mathrm{const}$$

построить трехэтапный метод Рунге — Кутта третьего порядка точности и исключить промежуточные значения. Показать, что схема с исключенными промежуточными значениями имеет третий порядок аппроксимации.

Решение. Для уравнения $u'(t) = f(t, u)$ рассмотрим трехэтапный метод

$$\begin{aligned} &k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + 0,5\tau, y_n + 0,5\tau k_1), \\ &k_3 = f(t_n + \tau, y_n - \tau k_1 + 2\tau k_2), \\ &\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right). \end{aligned}$$

В данном случае $f(t, y) = \lambda y$, поэтому

$$\begin{aligned} &k_1 = \lambda y, \quad k_2 = \lambda(y + 0,5\tau k_1) = \lambda(1 + 0,5\tau\lambda)y, \quad y = y_n, \\ &k_3 = \lambda(y - \tau k_1 + 2\tau k_2) = \lambda(y - \tau\lambda y + 2\tau\lambda(1 + 0,5\tau\lambda)y) = \\ &= \lambda(1 - \tau\lambda + 2\tau\lambda(1 + 0,5\tau\lambda))y = \lambda(1 + \tau\lambda + \tau^2\lambda^2)y, \\ &\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right) = \frac{1}{6}\left(\lambda y + 4\lambda(1 + 0,5\tau\lambda)y + \lambda(1 + \tau\lambda + \tau^2\lambda^2)y\right) = \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + 4(1 + 0,5\tau\lambda) + (1 + \tau\lambda + \tau^2\lambda^2)\right)\lambda y = \left(1 + \frac{\tau\lambda}{2} + \frac{\tau^2\lambda^2}{6}\right)\lambda y \end{aligned}$$

Итак, схема с исключенными промежуточными значениями имеет вид

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \left(1 + \frac{\tau\lambda}{2} + \frac{\tau^2\lambda^2}{6}\right)\lambda y_n.$$

Погрешность аппроксимации определяется как функция

$$\psi = -\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + \left(1 + \frac{\tau\lambda}{2} + \frac{\tau^2\lambda^2}{6}\right)\lambda u_n$$

Учтем разложение

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}=u'+\frac{\tau}{2}u''+\frac{\tau^2}{6}u'''+\frac{\tau^3}{24}u^{(4)}+O(\tau^4).$$

Тогда получим

$$\psi=-u'-\frac{\tau}{2}u''-\frac{\tau^2}{6}u'''-\frac{\tau^3}{24}u^{(4)}+\lambda u+\frac{\tau}{2}\lambda^2u+\frac{\tau^2}{6}\lambda^3u+O(\tau^4)=$$
$$=(-u'+\lambda u)+\frac{\tau}{2}\left(-u''+\lambda^2u\right)+\frac{\tau^2}{6}\left(-u'''+\lambda^3u\right)-\frac{\tau^3}{24}u^{(4)}+O(\tau^4)=O(\tau^3),$$

поскольку

$$-u'+\lambda u=0,\quad 0=-u''+\lambda u'=-u''+\lambda^2u,\quad -u'''+\lambda^3u=0.$$

Ответ.

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}=\left(1+\frac{\tau\lambda}{2}+\frac{\tau^2\lambda^2}{6}\right)\lambda y_n.$$

10. Доказать, что метод

$$k_1=f(t_n,y_n),\quad k_2=f\left(t_n+\frac{\tau}{2},y_n+\frac{\tau}{2}k_1\right),$$
$$k_3=f\left(t_n+\tau,y_n-\tau k_1+2\tau k_2\right),\quad \frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}=\frac{k_1+4k_2+k_3}{6}$$

имеет третий порядок аппроксимации на решении уравнения

$$\frac{du}{dt}=f(t,u).$$

Решение. По определению

$$\psi=-\frac{\hat{u}-u}{\tau}+\frac{1}{6}\left(k_1(u)+4k_2(u)+k_3(u)\right),$$

где $u=u_n$, $\hat{u}=u_{n+1}$. Согласно формуле Тейлора для двух переменных, имеем

$$f(t+\Delta t,u+\Delta u)=f(t,u)+\left[\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+\Delta u\frac{\partial}{\partial u}\right]f(t,u)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+\Delta u\frac{\partial}{\partial u}\right]^2f(t,u)+\frac{1}{6}\left[\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+\Delta u\frac{\partial}{\partial u}\right]^3f(t,u)+O(\tau^4).$$

Здесь

11. Показать, что метод из задачи 10 имеет четвертый порядок аппроксимации на решении уравнения

$$\frac{du}{dt}=f(t).$$

12. Доказать, что для задачи

$$\frac{du}{dt} = u^2, \quad 0 < t < \frac{1}{u_0}, \quad u(0) = u_0 > 0$$

разностная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = y_n y_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = u_0 > 0$$

является точной, то есть $y_n = u(t_n)$ для всех $t \in (0, u_0^{-1})$.

Решение. Дифференциальная задача имеет решение $u(t) = \frac{u_0}{1-tu_0}$. Для того чтобы получить решение разностной задачи, поделим разностное уравнение на $y_n y_{n+1}$, тогда получим уравнение

$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_{n+1}} = \tau,$$

линейное относительно переменной $v_n = (y_n)^{-1}$. Суммируя уравнения $v_j - v_{j+1} = \tau$ по j от 0 до $n-1$, получим $v_0 - v_n = \tau n$, следовательно

$$\frac{1}{y_n} = \frac{1}{u_0} - t_n$$

и

$$y_n = \frac{u_0}{1 - t_n u_0} = u(t_n).$$