Часть I.
Обыкновенные дифференциальные уравнения

п.1. Понятие дифференциального уравнения. Математические модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Дифференциальное уравнение является основой математического моделирования. Кратко о математическом моделировании. Дифференциальным уравнением называется соотношение между функциями и их производными. Если функции одной переменной, то имеем обыкновенные дифференциальные уравнения, если функции нескольких переменных, то дифференциальное уравнение в частных производных. Наш курс посвящен исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть на отрезке *[0,T]* определена *n* раз дифференцируемая функция $y(t)$ и ее производные $y'(t),\dots y^{(n)}(t)$. Переменные $t, y, y',\dots, y^{(n)}$ образуют *(n+2)* – мерное пространство. Если в области $D \in R_{n+2}$ определена функция $F(t, y, y',\dots, y^{(n)})$, то соотношение

$$F(t, y, y',\dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Решением (1.1) называется *n*-раз дифференцируемая функция $y(t)$, заданная на *[0,T]* и обращающая соотношение (1.1) в тождество. Порядком уравнения называется порядок старшей производной в (1.1). Уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y',\dots, y^{(n-1)})\,. \tag{1.2}$$

Уравнение, разрешенное относительно старшей производной, легко записать в виде системы первого порядка

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = y_2\ ;\\
&\frac{dy_2}{dt} = y_3\ ;\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n\ ;\\
&\frac{dy_n}{dt} = f(t, y_1, y_2, ..., y_n)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Общий вид системы первого порядка, разрешенной относительно производных, называют нормальной системой

$$\frac{dy_m}{dt} = f_m(t, y_1,\dots, y_n)\ ; \qquad m=1,2,\dots,n\,. \tag{1.4}$$

Решением системы (1.4) называют совокупность дифференцируемых функций $\{y_1,\dots, y_n\}$, определенных на отрезке *[0,T],* которые при подстановке в (1.4) обращают их в тождество. При моделировании f_m могут быть непрерывными или разрывными, соответственно определяют функции y_m. Мы будем считать в дальнейшем f_m непрерывными функциями. Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Задача для дифференциального уравнения или системы состоит из уравнения (или системы) и дополнительных условий, которые должны обеспечить существование и единственность решения этой задачи. Обыкновенные дифференциальные уравнения моделируют явления и процессы, которые описываются одной функцией или вектор-функцией одного переменного.

1.1 Временные процессы, где *y(t)* характеризует изменение какого-либо параметра во времени. Обычно математическая модель описывает связь между $y(t)$, скоростью $y'(t)$ и ускорением $y''(t)$ процесса в виде:

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

или более простая модель, связывающая $y(t)$ со скоростью $y'(t)$, в виде:

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Если мы имеем несколько параметров модели $\overline{y}(t) = \{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$, связанных между собой и со скоростью $\overline{y}'(t)$ и ускорением $\overline{y}''(t)$ их изменения, то имеем системы дифференциальных уравнений в виде:

$$\overline{y}''(t) = \overline{F}(t, \overline{y}, \overline{y}') \tag{1.5}$$

или, если связаны $\overline{y}(t)$ и $\overline{y}'(t)$,

$$\overline{y}'(t) = \overline{F}(t, \overline{y}).$$

Система (1.4) является нормальной, а система (1.5) не является нормальной. Систему (1.5) можно перевести в нормальную, если ввести обозначения $\overline{z}(t) = \{z_1, z_2, \ldots, z_{2n}\}$, где

$$z_i(t) = \begin{cases} y_i(t) & i \in [1, n] \\ y'_{i-n}(t) & i \in [n+1, 2n] \end{cases}.$$

Тогда имеем нормальную систему для $\overline{z}(t)$

$$\overline{z}'_i(t) = \begin{cases} \overline{z}_{n+i}(t) & \text{при} \quad i \in [1, n] \\ f_i(t, \overline{z}) & \text{при} \quad i \in [n+1, 2n] \end{cases},$$

где $f_i(t, z) = F_{i-n}\left(t, \overline{z}^{(1)}, \overline{z}^{(2)}\right)$,

$$\overline{z} = \left\{\overline{z}^{(1)}, \overline{z}^{(2)}\right\}, \qquad \overline{z}^{(1)} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \qquad \overline{z}^{(2)} = \left(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n\right).$$

Примеры математических моделей для временных процессов:

1. Радиоактивный распад .

$m(t)$ — масса распадающегося вещества. Количество распавшегося вещества Δm пропорционально количеству $m(t)$ и времени, т.е.

$\Delta m = -\alpha\ m(t)\Delta t \Rightarrow$ при $\Delta t \to 0$ имеем

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha\ m(t). \tag{1.6}$$

Решение дифференциального уравнения $m(t) = Ce^{-\alpha\, t}$. Дополнительно условие – $m(t = t_0) = m_0$, тогда задача

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = -\alpha\ m(t) \quad t \in \left[t_0, t_0 + T\right], \\ m(t_0) = m_0 \ . \end{cases}$$

Решение задачи : $m(t) = m_0 e^{-\alpha\ (t - t_0)}$.

2. Размножение с миграцией.

$N(t)$ – численность популяции, изменяющейся во времени,

$f(t)$ – миграция. Уравнение имеет вид:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha\ N + f(t).$$

Его решение $N(t) = C_0 e^{\alpha\, t} + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) e^{\alpha\ (t-\tau)} d\tau$.

Дополнительные условия: $N(t_0) = N_0$. Тогда задача имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \alpha\ N + f \quad t \in \left[t_0, t_0 + T\right] \\ \qquad N(t = t_0) = N_0 \ . \end{cases};$$

Решение задачи:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha\ (t - t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) e^{\alpha\ (t-\tau)} d\tau .$$

1.2 Пространственные процессы, где *y(x)* описывает распределение параметра процесса вдоль оси *Ox*. Модели

$$\overline{y}''(x) = f\left(x, y(x), \overline{y}'\right) \tag{1.7}$$

или

$$\overline{y}'(x) = \overline{F}\left(x, \overline{y}, \overline{y}'\right). \tag{1.8}$$

П р и м е р   м а т е м а т и ч е с к о й   м о д е л и
п р о с т р а н с т в е н н о г о   п р о ц е с с а:

Равновесие атмосферы в поле сил тяжести.

Давление $p(z)$ и плотность воздуха $\rho(z)$ в атмосфере изменяются с высотой z (z=0 земная поверхность). Если выделить маленький цилиндрический объем в воздухе высотой

dz и площадью сечения S, то его вес равен $P = mg = \rho \cdot S \cdot dz \cdot g$, где g — земное ускорение. На этот цилиндр действует сила $F = -S \cdot dp$ за счет разности давления dp на разных концах цилиндра. Условие равновесия $F = P$ дает соотношение

$$-S \cdot dp = \rho \cdot g \cdot S \cdot dz \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dz} = -g\rho(z).$$

Для того, чтобы получить окончательно дифференциальное уравнение, необходимо из уравнения Клайперона $pV = mRT$, $m = \rho V$ выразить плотность $\rho(z)$ через давление $p(z)$:

$$\rho(z) = p(z)/RT(z); \; T(z) \text{ — температура воздуха.}$$

Откуда имеем

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT(z)} \cdot p(z). \tag{1.9}$$

Решение этого уравнения дает барометрическую формулу

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{R}\int\limits_0^z \frac{dz}{T(z)}}, \quad p_0 = p(z=0), \tag{1.10}$$

которая определяет убывание давления с высотой при известном распределении температуры $T(z)$.

п.2. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши). Понятие корректной постановки задачи. Лемма Гронуолла–Беллмана.

Рассмотрим вначале систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = \overline{f}(t, \overline{y}), \qquad \{t, \overline{y}\} \in D. \tag{2.1}$$

Ее решение $\overline{y} = \overline{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\}$ представляет кривую в *(n+1)*-мерном пространстве $R_{n+1} = \{t, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Эта кривая называется **интегральной кривой**. Подпространство $R_n = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ называют фазовым пространством. Проекция интегральной кривой на это пространство называется **фазовой траекторией** (или просто **траекторией**).(Пример из балистики).

Система (2.1) в каждой точке области *D*, где определена $\overline{f}(t, \overline{y})$, определяет направление $\overline{\tau} = \{1, f_1, \ldots, f_n\}$. Эта область с заданным направлением называется **полем направлений**. Кривые, определенные уравнением $\overline{f}(t, \overline{y}) = const$, называют **изоклинами**. Это кривые в поле направлений выделяют постоянный наклон.

П р и м е р для уравнения I порядка $y' = f(t, y)$; например, $f(t, y) = t^2 + y^2 = const \Rightarrow$ изоклины окружности.

Семейство интегральных кривых однопараметрическое $y = \varphi\,(t, C)$ – это общее решение дифференциального уравнения. Если положить $C = C_1$ (фиксированное значение), то мы получаем частное решение. Для однозначности решения (определение интегральной кривой) надо задать начальную точку, через которую проходит интегральная кривая $y(t=t_0)=y_0$.

Таким образом, задача Коши:

1) для уравнения I порядка

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad (t,y)\in D=\left\{t_0\le t\le t_0+T, a\le y\le b\right\}, \\ y(t=t_0)=y_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

2) для системы уравнений I порядка

$$\begin{cases} \overline{y}' = f(t,\overline{y}), \quad (t,\overline{y})\in D=\left\{t_0\le t\le t_0+T, a_i\le y_i\le b_i\right\}, \\ \overline{y}(t=t_0)=\overline{y}^0, \qquad i\in[1,n], \end{cases} \tag{2.3}$$

3) для уравнения n-го порядка

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t,y,y',\dots,y^{(n-1)}), \\ y(t_0)=y_0,\ \ y'(t_0)=y_0',\dots,y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$D=\left\{t_0\le t\le t_0+T, a_i\le y^{(i)}\le b_i, n\in[0,n-1]\right\}.$$

Корректность постановки задачи (Адамар)

При данной постановке задачи решение должно

1) существовать и

2) быть единственным.

Это определяет математическую разрешимость задачи. Кроме того, должно выполняться условие:

3) решение задачи должно быть устойчивым по отношению к изменениям правой части и начальных данных. Это определяет физическую детерминированность задачи.

Формулировка устойчивости решения: для $\forall\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из условия

$|f_1-f_2|<\delta$ и $|y_{01}-y_{02}|<\delta$ следует $|y_1-y_2|<\varepsilon$, где

$$\begin{cases} y_i'(t)=f_i(t,y_i) \\ y_i(t=t_0)=y_{0i} \end{cases} \quad i\in[1,2].$$

Мы последовательно должны рассмотреть все вопросы корректности задачи Коши.

Л е м м а **Гронуолла – Беллмана**.

Если непрерывная функция *Z(t)* **удовлетворяет условию при** $t\ge t_0$

$$0\le Z(t)\le k\int_{t_0}^{t} Z(\tau)d\tau+g(t); \quad k=const, \tag{2.5}$$

то выполняется оценка

$$0\le Z(t)\le k\int_{t_0}^{t} g(\tau)e^{k(t-\tau)}d\tau+g(t). \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Вначале выведем дифференциальную оценку.

Из $R'(t) \le kR(t) + g(t)$ при $t \ge t_0$ и $\begin{cases} R(t_0) = 0 \\ k = const \end{cases}$ следует

$$R(t) \le \int_{t_0}^{t} g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau . \qquad (2.7)$$

Теперь проведем общее доказательство.

$$R'(t) - kR(t) \le g(t) \Rightarrow \left(R(t)e^{-kt}\right)' e^{kt} \le g(t) \Rightarrow R(t) \le \int_{t_0}^{t} g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau.$$

2) Введем $R(t) = \int_{t_0}^{t} Z(\tau) d\tau$; $R(t_0) = 0$; $R' = Z(t)$.

Подставим в (2.5)

$$0 \le R'(t) \le kR(t) + g(t); \text{ при } \ge t_0 \quad R(t_0) = 0, \quad k = const . \qquad (2.8)$$

Тогда, согласно (2.7), получаем $R(t) \le \int_{t_0}^{t} g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau$

или, подставив в правую часть (2.8) получим неравенство

$$0 \le Z(t) \le k \int_{t_0}^{t} g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau + g(t) .$$

Лемма доказана.

п.3. Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения I-порядка, разрешенного относительно производной.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0 , \end{cases} \qquad (3.1)$$

Л е м м а 3.1. **Задача Коши (3.1) эквивалентна интегральному уравнению**

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau; \qquad t \in [t_0, t_0 + T]. \qquad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $\exists$ решение задачи Коши (3.1) $y = y(t)$. Подставив $y = y(t)$ в (3.1), получим тождество, которое можно проинтегрировать, и тогда имеем (3.2) $\Rightarrow$ решение задачи Коши (3.1) является решением интегрального уравнения (3.2). В обратную сторону,если $\exists$ решение интегрального уравнения (3.2), то в силу непрерывности $f(\tau, t)$ по τ интеграл в (3.2) является дифференциальной функцией. Продифференцировав (3.2), получим (3.1) $\Rightarrow$ решение интегрального уравнения является решением задачи Коши. *Лемма доказана.*

Т е о р е м а 3.1 **Решение задачи Коши (3.1) для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной единственно, если**

1) $f(t, y)$ **непрерывна по** t **и** y **в области**

$R: \; t_0 < t < t_0 + T; \; y_0 - b < y < y_0 + b$**;**

2) $f(t,y)$ **удовлетворяет в области** R **условию Липшица по** y **т.е.**

$$\left| f(t,y_1) - f(t,y_2) \right| \le N \left| y_1 - y_2 \right|, \quad y_1, y_2 \in \left[y_0 - b, y_0 + b \right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы 3.1.

Редуцируем задачу Коши в предположении $\exists$ решения к интегральному уравнению (3.2). Предположим, что оно имеет два решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Тогда их разность $U(t) = y_1(t) - y_2(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{cases} U(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, y_1(\tau)\big) - f\big(\tau, y_2(\tau)\big) \Big) d\tau \\ U(t_0) = 0 \end{cases}.$$

Сделаем оценку, используя условия Липшица

$$\left| U(t) \right| \le \int\limits_{t_0}^{t} \left| f(\tau, y_1) - f(\tau, y_2) \right| d\tau \le N \int\limits_{t_0}^{t} \left| U(\tau) \right| d\tau \quad \text{при } t_0 < t < t_0 + \varepsilon,$$

где ε выбирается так, что $\left| y_m(t) - y_0 \right| \le b, \quad m = 1,2$ и можно использовать условия Липшица. Так как $N = const$, то по лемме Гронуолла - Беллмана при $g(t) \equiv 0$ имеем

$0 \le U(t) \le 0 \;\; \Rightarrow \;\; U(t) \equiv 0 \;\; \Rightarrow \;\; y_1 = y_2$.   *Теорема доказана.*

Дальше можно распространить доказательство на больший интервал по t, пока выполняются условия теоремы. Для линейного уравнения единственность доказывается сразу для всего интервала по t, т.к. условия теоремы по y выполняются на всем интервале $t \in \left[t_0, t_0 + T \right]$.

п.4. Теорема существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Т е о р е м а 4.1**. Решение задачи Коши (3.1) при выполении условий (1) и (2) теоремы 3.1 существует в интервале** $t_0 - h < t < t_0 + h$**, где** $h = \min(T, b/M)$**, где** $\|f\| \le M$ **в R.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как задача Коши эквивалентна интегральному уравнению (3.2), то докажем $\exists$ решения интегрального уравнения. Будем строить решение интегрального уравнения методом последовательных приближений.

$$y_n(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_{n-1}(\tau)) d\tau. \tag{4.1}$$

Легко видеть, что если $y_{n-1}(t) \in R : \left\{ t_0 \le t \le t_0 + T, \left| y - y_0 \right| \le b \right\}$,

то и $y_n(t) \in R$, т.к.

$$\left| y_n - y_0 \right| \le M \left| t - t_0 \right| \le Mh \le b. \tag{4.2}$$

Поскольку $y_0 \in R$, то по методу математической индукции все $y_n \in R$. Теперь докажем, что $\exists$ предел $Y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Представим

$$y_n = y_0 + \sum_{m=1}^{n} (y_m - y_{m-1}). \tag{4.3}$$

П р и з н а к В е й е р ш т р а с с а.

Если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(t)$ определен на $t \in [t_0, t_0 + T]$ и если существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ такой, что для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ и для $\forall k$ справедлива оценка

$$|U_k(t)| \le C_k,$$

то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[t_0, t_0 + T]$.

С л е д с т в и е.

Если $U_k(t)$ – непрерывная функция и ряд сходится равномерно, то предел ряда $V(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(t)$ – непрерывная функция.

Докажем, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} (y_m - y_{m-1})$ сходится, тогда

$$Y(x) = y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (y_m - y_{m-1}).$$

Для этого построим можарантную оценку членов ряда (4.3)

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_0(\tau)) d\tau \right| \le M |t - t_0| \le Mh,$$

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{t_0}^{t} \big(f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_0(\tau)) \big) d\tau \right| \le \qquad \text{(используя условия Липшица)}$$

$$\le N \int_{t_0}^{t} |y_1 - y_0| d\tau \le NM \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0) d\tau \le NM \frac{|t - t_0|^2}{2} \le NM \frac{h^2}{2}$$

и т.д., получим по методу математической индукции

$$|y_m - y_{m-1}| \le MN^{m-1} \frac{h^m}{m!}.$$

Мажорантный ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} MN^{m-1} \frac{h^m}{m!}$ сходится по признаку Даламбера

$$\lim_{m\to\infty} \frac{U_{m+1}}{U_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{Nh}{m+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty}(y_m - y_{m-1})$ сходится абсолютно и равномерно по признаку Вейерштрасса при $|t-t_0| \le h$, и мы имеем предел

$$Y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t), \tag{4.4}$$

причем $Y(t)$ – непрерывная функция. Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{n-1})d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, Y(\tau))d\tau. \tag{4.5}$$

Так как $f(\tau, y_{n-1})$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 3.1, то $|f(t,y') - f(t,y'')| < \varepsilon$, если $|y'-y''| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{N}$ (N – коэффициент Липшица). Тогда $\exists\ n_0$ такое, что при $n-1 > n_0$ имеем из условия $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = Y(t)$, что $|y_{n-1} - Y(t)| < \delta$. Тогда $|f(t,y_{n-1}) - f(t,Y)| \le \varepsilon\ (\delta)$ при $n-1>n_0$, причем $\varepsilon\ (\delta\ ) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{n-1})d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, Y)d\tau.$$

Отсюда следует, что при $n\to\infty$ из

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{n-1}(\tau)d\tau$$

имеем

$$Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, Y(\tau))d\tau.$$

Продифференцировав, получим

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y(t)) \quad \exists Y(t).$$ *теорема доказана.*

n.5 Дифференциальное уравнение I-порядка, неразрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения.

Уравнение

$$F(t,y,y') = 0 \quad \{t,y,y'\} \in D_3 \in R_3. \tag{5.1}$$

Т е о р е м а 5.1. **Если в некотором замкнутом трехмерном параллелепипеде**

$$D_3 : \{t_0 - h < t < t_0 + h,\ y_0 - b < y < y_0 + b,\ y_0' - c < y' < y_0' + c\}$$

с центром в точке (t_0, y_0, y_0'), где y_0' – действительный корень уравнения $F(t_0, y_0, y_0') = 0$, выполнены условия

а) $F(t,y,y')$ **непрерывна по совокупности аргументов вместе с частными производными** $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ **и** $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ **;**

б) $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{t_0,y_0,y_0'} \neq 0$**,**

то в окрестности точки $t=t_0$ **существует единственное решение** $y=y(x)$ **уравнения (5.1), удовлетворяющее начальным условиям** $y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_0'$**.**

Доказательство.
Условия а), б) дают, что в точке (t_0,y_0,y_0') выполнены условия $\exists$ и $!$ неявной функции

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y) \\ y_0'=f(t_0,y_0) \end{cases},$$

причем f – непрерывна по t,y, а $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial y'}$ также непрерывна (это сильнее, чем условие Липшица по y.)
Следовательно, решение $\exists$ и $!$.

Метод введения параметра.

Пусть уравнение разрешено относительно $y(t)$ т.е.

$$F(t,y,y')=y(t)-f(t,y')=0 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y'}\neq 0. \tag{5.2}$$

Обозначим $y'=p(t)$ (это введение параметра). Тогда предполагая $\exists$ $y(t)$ решения уравнения (5.2), получим

$$\frac{dy}{dt}=p(t)=\frac{d}{dt}\big(f(t,p)\big)=\frac{\partial f(t,p)}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt}.$$

Окончательно получаем уравнение для $p(t)$

$$\frac{dp}{dt}=f_1(t,p)=\frac{p(t)-\dfrac{\partial f(t,p)}{\partial t}}{\dfrac{\partial f(t,p)}{\partial p}}. \tag{5.3}$$

Это уравнение разрешено относительно производной. Найдем его общее решение $p=p(t,c)$.

Тогда

$$y(t)=f(t,p(t,c)). \tag{5.4}$$

Решение найдено. С – определено из начальных данных.

Общий случай введения параметра.

Уравнение (5.1). Введем $y'(t)=p(t)\Rightarrow$ имеем

$$F(t,y,p)=0. \tag{5.5}$$

(5.5) определяет поверхность в пространстве (t,y,p). Зададим эту поверхность параметрически

$$\begin{cases} t = T(u,v) \ ; \\ y = Y(u,v) \Rightarrow F(T(u,v),Y(u,v),\mathrm{P}(u,v) = 0 \Rightarrow v = V(u); \\ p = \mathrm{P}(u,v). \end{cases}$$

Найдем уравнение для v от u.

Так как $dy = pdt$, то, подставив

$$dy = \frac{\partial Y}{\partial u}du + \frac{\partial Y}{\partial v}dv; \ \ pdt = \mathrm{P}(u,v)\left(\frac{\partial T}{\partial u}du + \frac{\partial T}{\partial v}dv\right),$$

получим

$$\frac{\partial Y}{\partial u}du + \frac{\partial Y}{\partial v}dv = \mathrm{P}(u,v)\left(\frac{\partial T}{\partial u}du + \frac{\partial T}{\partial v}dv\right).$$

Откуда

$$\frac{dv}{du} = \Phi(u,v) = \frac{\mathrm{P}(u,v)\dfrac{\partial T}{\partial u} - \dfrac{\partial Y}{\partial u}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v} - \mathrm{P}(u,v)\dfrac{\partial T}{\partial v}}. \tag{5.6}$$

Получили уравнение в (u,v), которое разрешено относительно производной $\dfrac{dv}{du}$.

n.6 Особые решения уравнения I-го порядка, неразрешенного относительно производной.

Особым называется такое решение, во <u>всех</u> точках которого нарушается единственность решения задачи Коши.

Рассмотрим вначале уравнение разрешенное относительно производной $y' = f(t,y)$. Нарушение единственности будет там, где нарушаются условия теоремы $\exists$ и !. Если - $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неограничено, то условие Липшица не выполнено и единственность нарушена.

Например :

$$\frac{dy}{dt} = y^{\,2/3}; \ \ \frac{\partial}{\partial \text{y}}\left(y^{\,2/3}\right) = \frac{2}{3}y^{\,-1/3} = \infty \ (y=0).$$

Решение уравнения

$$y = \frac{(t+c)^3}{27}.$$

Функция $y(t) = 0$ является особым решением.

Рассмотрим общий случай

$$F(t,y,y') = 0.$$

Если бы разрешили это уравнение, то для соответствующей ветви мы могли бы вычислить $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$. В соответствии с правилом дифференцирования неявной функции имеем

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial y'}. \qquad (6.1)$$

Если $\partial F/\partial y$ – ограничено, то условием нарушения единственности $\left(\dfrac{\partial y'}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \infty\right)$ будет

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad (6.2)$$

Таким образом, условием (необходимым) существования особого решения есть

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} F(t, y, p) = 0 \\ \dfrac{\partial F(t, y, p)}{\partial p} = 0 \end{cases} \qquad (6.3)$$

Исключив из системы (6.3) p, получим p-дискриминантную кривую $y = y(t)$, которая будет особым решением, если $y = y(t)$ является решением $F(t, y, y') = 0$.

Пример 1.

$$\left(y'\right)^3 - y^2 = 0 \ ; F(y, p) = p^3 - y^2; \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 3p^2$$

Система

$$\begin{cases} p^3 - y^2 = 0 \\ 3p^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ p = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ – особое решение.}$$

Пример 2.

$$\left(y'\right)^2 - ty' + y = 0 \ ; F(y, p) = p^2 - tp + y; \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 2p - t.$$

Система

$$\begin{cases} p^2 - tp + y = 0 \\ 2p - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = t^2/4 \\ p = t/2 \end{cases} \Rightarrow y = t^2/4$$ – особое решение, так как оно удовлетворяет уравнению

$$F\left(t, \frac{t^2}{4}, \frac{t}{2}\right) = 0.$$

Метод получения особых решений при известном общем решении.

Пусть известен общий интеграл уравнения $\Phi(t, y, c) = 0$. Это семейство решений. Особое решение есть огибающая этого семейства, т.е.

$$\begin{cases} \Phi(t, y, c) = 0 \ ; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0. \end{cases}$$

Исключая $c,$ получим c-дискриминантную кривую $\varphi\,(t,y)=0$. Это особое решение, т.к. функция $\varphi\,(t,y)=0$ является решением дифференциального уравнения и в каждой точке нарушается единственность решения.

Для того, чтобы разрешить $\Phi(t,y,c)=0$ относительно $y=y(t,c)$ (или $t=t(y,c)$), необходимо, чтобы одновременно не обращались в ноль $\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ t}$ и $\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ y}$, т.е. должно быть выполнено условие

$$\left(\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ t}\right)^2+\left(\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ y}\right)^2\neq 0.$$

Однако точки $\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ t}=\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ y}=0$ могут входить в огибающую, т.к.

$$d\Phi=\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ t}dt+\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ y}dy+\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ c}dc=0\ \Rightarrow\ \text{при}\quad \frac{\partial\ \Phi}{\partial\ t}=0\quad\text{и}\quad\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ y}=0\ \Rightarrow\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ c}=0.$$

Чтобы исключить эти точки, мы должны записать условия $\exists$ особого решения

$$\begin{cases}\Phi(t,y,c)=0\ ;\\ \frac{\partial\ \Phi}{\partial\ c}=0\ ;\\ \left(\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ t}\right)^2+\left(\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ y}\right)^2\neq 0.\end{cases}\tag{6.4}$$

Пример:

$$(y')^2-ty'+y=0.$$

Общий интеграл

$$\Phi(t,y,c)=y-ct+c^2=0\ \ (\text{т.к. } y=c(t-c))\ ;$$

особое решение находим из системы

$$\begin{cases}y-ct+c^2=0\\ -t+2c=0\\ 1+c^2\neq 0\end{cases}\qquad \frac{\partial\ \Phi}{\partial\ c}=-t+2c,\quad \frac{\partial\ \Phi}{\partial\ t}=-c;\ \ \frac{\partial\ \Phi}{\partial\ y}=1$$

Откуда $c=\frac{t}{2}$, а c – дискретная кривая $y=\frac{t}{2}t-\frac{t^2}{4}=\frac{t^2}{4}$, $y=\frac{t^2}{4}$ – особое решение.

n.7. Общий интеграл уравнения I-го порядка. Интегральный множитель.

Уравнение $y'(t) = f(t,y) = -\dfrac{M}{N} \quad N \neq 0$ всегда можно представить в виде

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0, \quad N \neq 0 \tag{7.1}$$

Если $M = \dfrac{\partial V}{\partial t}$, а $N = \dfrac{dV}{\partial y}$, то (7.1) уравнение в полных дифференциалах и мы имеем

$$Mdt + Ndy = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial y}dy = dV = 0. \tag{7.2}$$

Следовательно, имеем

$$V(t,y) = C. \tag{7.3}$$

Представление (7.3) — общий интеграл уравнения (7.1). Неявно представлено однопараметрическое семейство решений. Оно разрешимо, т.к. $N = \dfrac{dV}{\partial y} \neq 0$, следовательно,

$$y = y(t,C). \tag{7.4}$$

Если мы для уравнения (7.1) имеем задачу Коши $y(t = t_0) = y_0$, то $C = V(t_0, y_0)$ и общее решение

$$V(t,y) = V(t_0, y_0). \tag{7.5}$$

Это другое определение общего решения через задачу Коши для произвольного y_0.

Чтобы найти явное выражение решения (7.3) необходимо, чтобы $N \neq 0$. Если в некоторой точке $N = 0$, а $M \neq 0$, то можно определить

$$t = t(y,C). \tag{7.6}$$

Если в некоторой точке одновременно $N = 0$ и $M = 0$, то это особая точка.

Т е о р е м а 7.1. **Необходимым и достаточным условием представления уравнения (7.1) в полных дифференциалах является условие** $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$ **(если решение ∃).**

1) *Д о к а з а т е л ь с т в о н е о б х о д и м о с т и.*

$$M = \frac{\partial V}{\partial t}; \;\; N = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial y}.$$

2) *Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и.*

Пусть

$$M = \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow V(t,y) = \int_{t_0}^{t} M(t,y)dt + \varphi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial M}{\partial y} dt + \varphi'(y) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial N}{\partial t} dt + \varphi'(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = N(t, y) - N(t_0, y) + \varphi'(y).$$

Возьмем $\varphi\ (y) = \int_{y_0}^{y} N(t_0, y) dy$, тогда $\varphi'\ (y) = N(t_0, y) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = N(t, y)$

(это мы получим из $\frac{\partial V}{\partial t} = M$ и $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$).

Теорема доказана.

Общее решение можно записать в виде:

$$V(t, y) = \int_{t_0}^{t} M(t, y) dt + \int_{y_0}^{y} N(t_0, y) dy = C, \tag{7.7}$$

если $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$.

Предположим, что $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$. Тогда можно поставить вопрос: существует ли такая функция $\mu\ (t, y)$, называемая интегрирующим множетелем, что

$$\mu\ M = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad \mu\ N = \frac{\partial V}{\partial y}. \tag{7.8}$$

Т е о р е м а 7.2. **Если уравнение**

$$Mdt + Ndy = 0$$

имеет общий интеграл $V(t, y) = C$**, то это уравнение имеет интегрирующий множитель**.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Имеем

$$Mdt + Ndy = 0;\ \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t},$$

а из $V(t, y) = C$

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial y} dy = 0.$$

Откуда имеем

$\frac{dy}{dt} = -\frac{M}{N} = -\frac{\partial V / \partial t}{\partial V / \partial y} \Rightarrow \exists\ \mu$ такое что, $\frac{\partial V / \partial t}{M} = \frac{\partial V / \partial y}{N} = \mu \Rightarrow \mu\ M = \frac{\partial V}{\partial t},\ \mu\ N = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow$

уравнение $\mu\ Mdt + \mu\ Ndy = 0$ в полных дифференциалах.

Число интегрирующих множителей бесконечно, т.к. если μ – интегрирующий множитель, то $\mu\ \varphi\ (V)$, также интегрирующий множитель:

$$\mu\ Mdt + \mu\ Ndy = dV \Rightarrow \mu\ \varphi\ (V) Mdt + \mu\ \varphi\ (V) Ndy = \varphi\ (V) dV = dV_1,$$

где $V_1 = \int \varphi\,(V)dV$.

Т е о р е м а 7.3. **Формула** $\mu_1 = \mu\,\varphi\,(V)$ **дает любой интегрирующий множитель уравнения** $Mdt + Ndy = 0$ **(если его решение** $\exists$**).**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть μ и μ_1 два различных интегральных множителя

$$\Rightarrow \quad \mu\,Mdt + \mu\,Ndy = dV = 0$$

$$\mu_1 Mdt + \mu_1\,Ndy = dV_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mu\,M = \frac{\partial V}{\partial\,t};\ \mu\,N = \frac{\partial V}{\partial\,y};\ \mu_1\,M = \frac{\partial V_1}{\partial\,t};\ \mu_1\,N = \frac{\partial V_1}{\partial\,y} \Rightarrow$$

$$\frac{M}{N} = \frac{\partial\,V/\partial\,t}{\partial\,V/\partial\,y} = \frac{\partial\,V_1/\partial\,t}{\partial\,V_1/\partial\,y} \Rightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\,V}{\partial\,t} & \dfrac{\partial\,V}{\partial\,y} \\ \dfrac{\partial\,V_1}{\partial\,t} & \dfrac{\partial\,V_1}{\partial\,y} \end{vmatrix} = 0.$$

Так как Якобиан функции V и V_1 равен нулю, то

$V_1 = \psi\,(V) \Rightarrow \mu_1\,Mdt + \mu_1\,Ndy = dV_1 = \psi'\,dV = \psi'\,(V)\mu\,Mdt + \psi'\,(V)\mu\,Ndy$

$\Rightarrow \quad \mu_1 = \mu\,\psi'\,(V)$ или $\mu_1 = \mu\,\varphi\,(V)$ для $\forall\ \mu, \mu_1$.

С л е д с т в и е. Если известно два интегральных множителя при $\mu/\mu_1 \neq const$, то условие $\dfrac{\mu_1(t,y)}{\mu\,(t,y)} = C$ дает общее решение дифференциального уравнения т.к.

$\dfrac{\mu_1}{\mu} = C \Rightarrow \dfrac{\mu\,\varphi\,(V)}{\mu} = C \Rightarrow \varphi\,(V) = C \Rightarrow V(t,y) = C$ – общее решение.

Как найти $\mu\,(t,y)$?

Пусть

$$\frac{\partial\,M}{\partial\,y} \neq \frac{\partial\,N}{\partial\,t},$$

но $\exists\ \mu$ такое, что

$$\frac{\partial}{\partial\,y}(\mu\,M) = \frac{\partial}{\partial\,t}(\mu\,N).$$

Откуда получим

$$N\frac{\partial\,\mu}{\partial\,t} - M\frac{\partial\,\mu}{\partial\,y} = \mu\,\left(\frac{\partial\,M}{\partial\,y} - \frac{\partial\,N}{\partial\,t}\right)$$

1) Если $\dfrac{\partial\,\mu}{\partial\,y} = 0$ ($\mu = \mu\,(t)$), то

$$\frac{d\mu}{\mu} = f(t)dt = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial\,M}{\partial\,y} - \frac{\partial\,N}{\partial\,t}\right)dt.$$

$\Rightarrow$ Если $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial\,M}{\partial\,y} - \dfrac{\partial\,N}{\partial\,t}\right) = f(t)$ (функция только от *t*), то

$$\mu(t) = e^{\int f(t)dt}. \qquad (7.9)$$

2) Если $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \varphi(y)$ (функция только y), то $\mu = \mu(y)$ – функция только y, и мы имеем

$$\frac{d\mu}{\mu} = \varphi(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \varphi(y)dy}. \qquad (7.10)$$

п.8. Нормальные системы DУ. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы и уравнения *n*-го порядка.

Нормальная система
$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{f}(t,\overline{y}) \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ \overline{y}(t = t_0) = \overline{y}^0 \end{cases} \qquad (8.1)$$

Т е о р е м а 8.1. **Если $\overline{f} = \{f_m(t, y_1, \ldots, y_n)\}$ для всех $m \in [1, n]$ удовлетворяет условиям**

1) непрерывности по всем аргументам в области

$|t - t_0| \le T;\quad |y_m - y_m^0| \le b$ ($b -$ **одно и то же для** $\forall m$) ;

2) условию Липшица по $\overline{y}$, т.е.

$|f_m(t,\overline{y}') - f_m(t,\overline{y}'')| \le K\{|y_1' - y_1''| + \ldots + |y_n' - y_n''|\}$ **для всех** $m \in [1, n]$**,**

то решение задачи Коши $\overline{y}(t)$ для нормальной системы дифференциальных уравнений существует и единственно на отрезке $|t - t_0| < h$, где $h = \min(T, b/M)$, $|f_m| < M$ для $\forall m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Строится эквивалентная система интегральных уравнений

$$y_m(t) = y_m^0 + \int_{t_0}^{t} f_m(\tau, y_1(\tau), \ldots, y_n(\tau))d\tau, \quad m \in [1, n]. \qquad (8.2)$$

1) Доказательство эквивалентности аналогично лемме 3.1.

2) Доказательство единственности аналогично теореме 3.1, но только нужно учитывать векторный характер решения.

Пусть есть два решения

$$\begin{aligned} \overline{y}_1 &= \{y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}\} \\ \overline{y}_2 &= \{y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}\} \end{aligned},$$

у которых не все y_{1k} равны y_{2k}, тогда не равна нулю функция

$$\Phi(t)=\sum_{k=1}^{n}\left|y_{1k}-y_{2k}\right|$$

Из (8.2) следует

$$y_{1k}-y_{2k}=\int_{t_0}^{t}\left(f_k(\tau,\overline{y}_1)-f_k(\tau,\overline{y}_2)\right)d\tau \Rightarrow \left|y_{1k}-y_{2k}\right|\le K\int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)d\tau \Rightarrow$$

Просуммировав по всем “k”, получим

$$0\le\Phi(t)\le Kn\int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)d\tau .$$

Из леммы Гронуолла - Беллмана имеем

$$0\le\Phi(t)\le 0 \Rightarrow \Phi(t)\equiv 0 \Rightarrow \overline{y}_1=\overline{y}_2 .$$

Единственность доказана.

2) Доказательство существования аналогично теореме 4.1.

Строим итерационный процесс

$$\overline{y}^{(s)}(t)=\overline{y}^{(0)}+\int_{t_0}^{t}\overline{f}(\tau,\overline{y}^{(s-1)}_{(\tau)})d\tau \qquad (s \text{ – номер итерации}).$$

Если $\begin{cases}\left|t-t_0\right|\le h\\ h=\min(T,b/M)\end{cases}$, то все $\overline{y}^{(s)}\in D$,

т.е. для $\forall s$ $\left|y_m^{(s)}-y_m^0\right|\le b$,

т.к. $\left|y_m^{(s)}-y_m^0\right|\le\int_{t_0}^{t}\left|f_m(\tau,\overline{y}^{(s-1)}_{(\tau)})\right|d\tau\le M(t-t_0)\le Mh\le b$.

Рассматриваем сходимость ряда $\sum_{s=1}^{\infty}\left(y_m^{(s)}-y_m^{(s-1)}\right)$.

Оценка : $\left|y_m^{(s)}-y_m^{(s-1)}\right|\le M(nK)^{s-1}\dfrac{h^s}{s!}$.

Дальше все аналогично теореме 4.1. Мажорантный ряд сходится по признаку Даламбера. Функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно к непрерывной функции по признаку Вейерштрасса.

$\Rightarrow \lim\limits_{s\to\infty}y_m^{(s)}=Y_m(t)$; т.е. $\lim\limits_{s\to\infty}\overline{y}^{(s)}=\overline{Y}(t)$.

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty}\int_{t_0}^{t}\overline{f}(\tau,\overline{y}^{(s)}_{(\tau)})d\tau=\int_{t_0}^{t}\overline{f}\left(\tau,\overline{Y}(\tau)\right)d\tau \Rightarrow$$

$\exists$ $Y(t)$ такая, что

$$\overline{Y}(t)=\overline{y}^0+\int_{t_0}^{t}\overline{f}(\tau,\overline{Y}(\tau))d\tau .$$

Так как интегральное уравнение эквивалентно решению задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{Y}}{dt} = \overline{f}(t, \overline{Y}(t)) \\ \overline{Y}(t = t_0) = \overline{y}^0 \end{cases},$$

то решение задачи Коши $\overline{y}(t)$ $\exists$.

Существование и единственность решения уравнения *n*-го порядка.

Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) ; \quad t \in \left[t_0, t_0 + T\right] ; \\ \quad y = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0{}^{(n-1)}. \end{cases} \tag{8.3}$$

Т е о р е м а 8.2. **Задача Коши (8.3) для уравнения *n*-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, правая часть которого** $f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ **удовлетворяет условиям:**

1) непрерывности по всем аргументам и

2) условию Липшица по аргументам $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$**, имеет решение и притом единственное.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Сведем (8.3) к задаче Коши для нормальной системы

$$\begin{aligned} &\overline{y}(t) = \left\{y_1 = y(t), y_2 = y'(t), \dots, y_n = y^{(n-1)}(t)\right\}; \ \overline{y}_0 = \left\{y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}\right\} \\ &\overline{f}(t, \overline{y}) = \left\{y_2, y_3, \dots, y_n, f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\right\} \end{aligned}.$$

Тогда имеем нормальную систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{f}(t, \overline{y}), \quad t \in \left[t_o, t_0 + T\right]; \\ \overline{y}(t = t_0) = \overline{y}_0 . \end{cases}$$

Проверяем удовлетворяет ли $\overline{f}(t, \overline{y})$ условиям 1) и 2) теоремы (8.1)? Удовлетворяет. *Следовательно, теорема 8.2 доказана.*

п.9. Непрерывность решений дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам. Регулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений. Понятие о сингулярном возмущении.

Задача Коши как модель. Начальные данные и правая часть зависят от параметров модели.

Задачу всегда можно свести к параметрам в правой части.

Пример $U(t)=U$

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}=F(t,U,\nu_1), & 0<t<T \\ U(t=0)=U_0(\nu_2), & |y-y_0|\le A \end{cases}$$

Введем $y(t)=U(t)-U_0$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=f(t,y,\overline{\mu}), & 0<t<T \\ y(t=0)=0, & |y|\le a \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} f=F(t,y+U_0(\nu_2),\nu_1) \\ \\ \overline{\mu}=(\nu_1,\nu_2) \end{array} \right. \tag{9.1}$$

Достаточно рассмотреть один параметр μ.

Теорема 9.1. **Если в задаче Коши (9.1) $f(t,y,\mu)$ непрерывна по всем аргументам в области $D:\left\{0\le t<T,\ |y|\le a,\ |\mu-\mu_0|\le b\right\}$ и удовлетворяет по переменной "y" условию Липшица**

$$|f(t,y_1,\mu)-f(t,y_2,\mu)|\le K|y_1-y_2|$$

всюду в D, причем K не зависит от t и μ, то решение задачи (9.1) $y=y(t,\mu)$ определено в D и непрерывно по t и μ.

Доказательство

Доказательство опирается на лемму Гронуолла – Беллмана.

Рассмотрим $\Delta y=y(t,\mu+\Delta\mu)-y(t,\mu)$.

$$\frac{dy(t,\mu+\Delta\mu)}{dt}=f\left(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu\right);\ y(t_0,\mu+\Delta\mu)=0;$$

$$\frac{dy(t,\mu)}{dt}=f\left(t,y(t,\mu),\mu\right);\ y(t_0,\mu)=0;$$

откуда

$$\frac{d\Delta y}{dt}=f\left(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu\right)-f\left(t,y(t,\mu),\mu\right)\ \Rightarrow \tag{9.2}$$

Следовательно,

$$\Delta y=\int_{t_0}^{t}\Big\{\big(f(\tau,y(\tau,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(\tau,y(\tau,\mu),\mu+\Delta\mu)\big)+$$
$$+\big(f(\tau,y(\tau,\mu),\mu+\Delta\mu)-f(\tau,y(\tau,\mu),\mu)\big)\Big\}d\tau. \tag{9.3}$$

Используя условия Липшица по y и непрерывность функции $f(t,y,\mu)$ по μ, получим

$$|\Delta y|\le K\int_{t_0}^{t}|\Delta y|\ d\tau+(t-t_0)\varepsilon(\delta)\ ;\ |\Delta\mu|\le\delta;\ \ \varepsilon(\delta)\underset{\delta\to 0}{\to}0.$$

По лемме Гронуолла - Беллмана имеем

$$|\Delta y| \le K\varepsilon(\delta)\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)e^{k(t-\tau)}d\tau + t\varepsilon(\delta) \le C\varepsilon(\delta).$$

Следовательно,

$$|\Delta y| \le C\varepsilon(\delta) \quad \text{при} \quad |\Delta\mu| \le \delta\ , \tag{9.4}$$

теорема доказана.

Изменения параметров задачи можно рассматривать как возмущение задачи. Тогда будем иметь:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y,t,\mu = 0), \quad 0 < t < T, \\ y(t=0) = 0, \end{cases} \qquad \text{невозмущенная задача} \tag{9.5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), \quad 0 < t < T, \\ y(t=0) = 0 \qquad\qquad |\mu| \le \varepsilon\ . \end{cases} \qquad \text{возмущенная задача} \tag{9.6}$$

Как связано возмущенное решение с невозмущенным?

Теория возмущений - исследование асимптотики $y(t,\mu)$ $\mu \to 0$.

Регулярное возмущение: это означает, что $f(y,t,\mu)$ – удовлетворяет условиям теоремы $\exists$ и ! и при $\mu \to 0$ эти условия не нарушаются, а $f(y,t,\mu)$ разлагается в степенной ряд по μ. Для регулярно возмущенных задач выполняются следующие теоремы. (Доказываем для одного уравнения. Легко переносится на системы).

Т е о р е м а 9.2 **Если правая часть в задаче Коши (9.1) $f(t,y,\mu)$ непрерывна по всем переменным вместе с частными производными по y,μ в D, то $\exists$ производная от решения по параметру μ непрерывная в D.**

Д о к а з а т е л ь с т в о

Из (9.2) , разделив на $\Delta\mu$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta y}{\Delta\mu}\right) = \frac{f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu) - f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta\mu} + $$
$$+\frac{f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu) - f(t,y(t,\mu),\mu)}{\Delta\mu}.$$

При $\Delta\mu \to 0$ имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ y}{\partial\ \mu}\right) = \frac{\partial\ f}{\partial\ y}\frac{\partial\ y}{\partial\ \mu} + \frac{\partial\ f}{\partial\ \mu}, \tag{9.7}$$

т.к. $\dfrac{\partial\ f}{\partial\ y}$, $\dfrac{\partial\ f}{\partial\ \mu}$ $\exists$ и непрерывны, то (9.7) есть уравнение для $\dfrac{\partial\ y}{\partial\ \mu} = U$

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial y}U + \dfrac{\partial f}{\partial \mu}, \\ U(t_0) = 0. \end{cases} \tag{9.8}$$

Правая часть линейна по $U \Rightarrow$ решение для (9.8) $\exists$ и ! . Значит $\exists \ \dfrac{\partial y}{\partial \mu} = U$.

Теорема доказана.

Без доказательства приведем теорему о разложении решения возмущенной задачи по малому параметру μ.

Т е о р е м а 9.3. **Пусть в области $D:(t_0 < t < t_0 + T, |y - y_0| \le a, |\mu| \le \varepsilon)$ функция $f(t, y, \mu)$ обладает непрерывными и равномерно ограниченными частными производными по y и μ до порядка** *(n+1)* **включительно. Тогда существует сегмент $[t_0; t_0 + T]$, на котором для решения $y(t,m)$ возмущенной задачи (9.6) справедливо асимптотическое представление**

$$y(t,\mu) = y(t,0) + \mu \frac{\partial y(t,0)}{\partial \mu} + \ldots + \frac{\mu^n}{n!} \frac{\partial^n y(t,0)}{\partial \mu^n} + O(\mu^{n+1}) \tag{9.9}$$

Неравенство Чаплыгина.

Если имеются две задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f_1(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f_2(t, z), \\ z(t_0) = z_0, \end{cases}$$

причем в D выполняются условия

$f_1(t, y) \le f_2(t, y)$ и $y_0 \le z_0$, то при $t_0 < t < t_0 + T$ имеем $y(t) \le z(t)$.

Сингулярное возмущение дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), \quad t \in [0,T], \\ y(t=0) = y_{0,} \qquad |\mu| \le \varepsilon \end{cases}$$

возникает, если $f(y,t,\mu)$ при $\mu \to 0$ имеет нерегулярность, т.е. ведет себя особым (сингулярным) образом. Это, например,

1) $f(y,t,\mu = 0)$ не удовлетворяет условиям теоремы $\exists$ и ! решения

2) $f \to \infty$ при $\mu \to 0$ и т.п.

Наиболее частый и практически важный случай – это малый параметр при старшей производной

$$\mu\, y_{(t)}^{(n)} = F(t, y, y', \ldots y^{(n-1)}) \tag{9.10}$$

или, соответственно, система с малым параметром при одной производной

$$\mu\frac{dy_1}{dt}=F_1(t,\overline{y}) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_1}{dt}=\frac{1}{\mu}F_1(t,y)=f_1(t,y,\mu)\to\infty \quad \text{при} \quad \mu\to 0;$$

$$\frac{dy_2}{dt}=f_2(t,\overline{y}); \tag{9.11}$$

....

$$\frac{dy_n}{dt}=f_n(t,\overline{y}).$$

п.10. Линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка и его свойства. Сведение к нормальной системе первого порядка. Существование решения.

$$L_n(y)=\sum_{k=0}^{n}a_k(t)y^{(n-k)}(t)=f\left(t\right),\ \ a_0(t)\neq 0,\ \ t\in\left[t_0,t_0+T\right]. \tag{10.1}$$

$f(t)\equiv 0$ уравнение однородное,

$f(t)\neq 0$ уравнение неоднородное.

Теорема 10.1. **Линейность уравнения сохраняется при замене переменного** $t=\varphi(\tau),\ \varphi\in C_{n,}\ \varphi'\neq 0$ **и линейном преобразовании функции** $y(t)=\alpha(t)z(t)+\beta(t),\ \alpha,\beta\in C_n,\ \alpha\neq 0.$

Доказательство.

1\. $t=\varphi(\tau)\Rightarrow \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d\tau}{dt}=\dfrac{1}{\varphi'(\tau)}\dfrac{dy}{d\tau};\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{1}{\varphi'(\tau)}\dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{1}{\varphi'(\tau)}\dfrac{dy}{d\tau}\right)$

и т.д. $y^{(k)}$ линейная комбинация $\dfrac{d^k y}{d\tau^k}$.

Следовательно, сохраняется линейность уравнения.

2\. $y=\alpha z+\beta\Rightarrow y'=\alpha z'+\alpha' z+\beta' \Rightarrow y''=\alpha z''+2\alpha' z'+\alpha'' z+\beta''$

и т.д. все линейно. Приведя подобные члены, получим линейное уравнение.

Теорема 10.2. **Для линейного дифференциального уравнения выполняется принцип суперпозиции**

$$L_n\left(\sum_{k=1}^{m}c_k y_k\right)=\sum_{k=1}^{m}C_k L_n(y_k) \tag{10.2}$$

Применение принципа суперпозиции:

1) Для суммы правых частей $f=\sum\limits_{m=1}^{M}f_m$

$$L_n(y_m)=f_m \quad\Rightarrow\quad y=\sum_{m=1}^{M}y_m.$$

Это суммирование источников.

2) Разделение задачи Коши на неоднородную с нулевыми начальными данными и на однородную с начальными данными.

$$\begin{cases} L_n(y) = f \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

$$y = U(t) + V(t)$$

$$\begin{cases} L(U) = f, \\ U(t_0) = 0,\ \dots,\ U^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} L(V) = 0, \\ V(t_0) = y_0,\ \dots,\ V^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

3) Разделение начальных данных для однородного уравнения.

$$\begin{cases} L_n(y) = 0 \\ y(t_0) = y_0,\ \dots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = \sum_{m=1}^{n} U_m(t) y_0^{(m-1)}$$

$$\begin{cases} L(U_m) = 0 \\ U_m^{(k)}(t_0) = 0 \quad k \in [0, n-1],\ k \neq m \\ U_m^{(m)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

4) Комбинация решений однородного уравнения есть решение однородного уравнения.

Теорема 10.3. ($\exists$ и ! решения на всем интервале).

Если коэффициенты $\alpha_k(t)$ и правая часть $f(t)$ есть непрерывные функции при $t \in [t_0, t_0 + T]$, то решение $\exists$и ! на всем интервале $[t_0, t_0 + T]$. (т.к. условия теоремы $\exists$ и ! выполняются на всем интервале).

Линейное дифференциальное уравнение (10.1) сводится к нормальной линейной системе дифференциальных уравнений. Введем вектор-функцию

$$\overline{u}(t) = \left(u_1 = y(t),\ u_2 = y'(t),\ \dots, u_n = y^{(n-1)}(t)\right),$$

для которой получим нормальную линейную систему уравнений

$$u_m'(t) = \begin{cases} u_{m+1}(t) \qquad \text{при} \qquad m \in [1, n-1] \\ \sum_{k=1}^{n} b_k(t) u_{n-k+1}(t) + f(t) \ \text{ при } \ m = n,\ b_k = -\dfrac{a_k(t)}{a_0(t)}. \end{cases} \tag{10.3}$$

В общем случае нормальная линейная система уравнений записывается в виде:

$$\overline{u}'(t) = \hat{A}\overline{u} + \overline{F}\,, \tag{10.4}$$

где матрица $\hat{A} = \{\alpha_{mk}(t)\}$ $\quad m, k \in [1, n]$. В дальнейшем мы будем подробно рассматривать линейную систему дифференциальных уравнений, т.к. уравнение n-го порядка сводится к частному случаю такой системы.

п.11. Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Понижение порядка уравнения. Уравнение Риккати.

Рассмотрим линейное уравнение 2-го порядка

$$y''(t) + a_1(t) y'(t) + a_2(t) y(t) = f(t)\ . \tag{11.1}$$

Оно сводится к системе второго порядка введением вектор-функции $\overline{u}(t) = \left(u_1(t) = y(t), u_2(t) = y'(t)\ \right)$, для которой получаем систему

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = -a_2(t)u_1(t) - a_1(t)u_2(t) + f(t) \end{cases}$$

или

$$\overline{u}'(t) = \hat{A}\overline{u} + \overline{f},\ \ \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix},\ \overline{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \qquad (11.2)$$

У линейного однородного уравнения ($f = 0$) можно понизить порядок, введя новую функцию

$$Z(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}. \qquad (11.3)$$

Тогда

$$y'(t) = Z(t)y(t), \quad y'' = Z'y + Zy' = Z'y + Z^2 y. \qquad (11.4)$$

Подставив (11.4) в (11.1) при $f = 0$, получим

$$Z'(t) + Z^2 + a_1(t)Z + a_2(t) = 0. \qquad (11.5)$$

Полученное уравнение является уравнением Риккати.

Общий вид уравнения Риккати:

$$y'(t) = p(t)y^2 + q(t)y + r(t),$$

которое заменой искомой функции $y = -\dfrac{Z(t)}{p(t)}$ приводится к виду (11.5).

$$Z'(t) + Z^2(t) - \left(q(t) + \frac{p'}{p}\right)Z + r(t)p(t) = 0.$$

В уравнении (11.5) можно убрать член, содержащий Z, не изменяя коэффициента при Z^2 с помощью замены искомой функции

$$Z(t) = u(t) - \frac{a_1(t)}{2}. \qquad (11.6)$$

Тогда из (11.5) получим

$$u'(t) = -u^2(t) + R(t); \quad R(t) = \frac{a_1^2 + 2a_1'}{4} - a_2. \qquad (11.7)$$

Если $R(t) = const = R_0$, то переменные разделяются и мы имеем

$$\frac{du}{R_0 - u^2} = dt$$

или

$$u(t) = \sqrt{R_0} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{R_0}t}}{1 + e^{-2\sqrt{R_0}t}} \qquad (11.8)$$

Тогда, согласно (11.3) и (11.6), получим

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \sqrt{R_0} \cdot \frac{1-e^{-2\sqrt{R_0}t}}{1+e^{-2\sqrt{R_0}t}} - \frac{a_1(t)}{2} = q(t). \tag{11.9}$$

Откуда

$$y(t) = y(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau}. \tag{11.10}$$

п.12. Общая теория однородных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Линейная однородная система

$$\begin{cases} y_i^{/}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(t) y_i(t), \ \ i \in [1,n], \ \ t \in [t_0, t_0+T], \\ y_i(t_0) = y_i^0. \end{cases} \tag{12.1}$$

Если обозначить матрицу $\hat{A} = \{a_{ik}(t)\}$, а $\overline{y}(t) = \begin{Bmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{Bmatrix}$, то задача Коши

$$\begin{cases} \overline{y}(t) = \hat{A}\overline{y}(t), \quad t \in [t_0, t_0+T] \\ \overline{y}(t_0) = \overline{y}^0 \end{cases}, \tag{12.2}$$

$L(\overline{y}) \equiv \overline{y}' - A\overline{y}$ – линейный оператор, следовательно, к нему применим принцип суперпозиции

$$L\left(\sum_{m=1}^{M} C_m^{(m)}\overline{y}\right) = \sum_{m=1}^{M} C_m L({}^{(m)}\overline{y}). \tag{12.3}$$

Через ${}^{(m)}\overline{y}$ – обозначаем m-ое решение, чтобы отличить от m-ой производной $\overline{y}^{(m)}$.

Если $\overline{f}(t) = \sum\limits_{m=1}^{M} a_m \overline{f}^{(m)}$, то $\overline{y}(t) = \sum\limits_{m=1}^{M} a_m^{(m)}\overline{y}$, где $L\left({}^{(m)}\overline{y}\right) = \overline{f}^{(m)}$.

Т е о р е м а 12.1. **Пусть** ${}^{(1)}y(t),...,{}^{(n)}y(t)$ **- "*n*" решений однородной системы**

$$\overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = 0. \tag{12.4}$$

Тогда матрица

$$\hat{W}(t) = \begin{Bmatrix} {}^{(1)}y_1,...,{}^{(n)}y_1 \\ .... \\ {}^{(1)}y_n,...,{}^{(n)}y_n \end{Bmatrix}$$

удовлетворяет матричному уравнению

$$\hat{W}'(t) - \hat{A}\hat{W}(t) = 0 \tag{12.5}$$

и, обратно, если матрица $\hat{W}(t)$ **удовлетворяет уравнению (12.5), то ее столбцы есть вектора, являющиеся решением уравнения** (12.4).

Доказательство проводится покомпонентным дифференцированием.

Т е о р е м а 12.2. **Если $\hat{W}(t)$ - решение (12.5), то $\overline{y} = \hat{W}\overline{C}$ ($\overline{C}$ - постоянный вектор) удовлетворяет системе (12.4), а $\hat{Z} = \hat{W}\hat{C}$ ($\hat{C}$ - постоянная матрица) удовлетворяет матричному уравнению (12.5).**

Доказательство следует из принципа суперпозиций.

О п р е д е л е н и е . Векторные функции ${}^{(1)}y(t),...{}^{(n)}y(t)$ – линейно зависимы на интервале $\tau \; = \{t_0, t_0 + T\}$, если $\exists$ ненулевой постоянный вектор $\overline{C}$ такой, что выполняется тождество

$$\hat{W}\overline{C} \equiv 0 \quad \text{при} \quad \forall t \in \tau . \tag{12.6}$$

Если условие (12.6) выполняется только при $\overline{C} \equiv 0$, то ${}^{(1)}\overline{y}(t),...,{}^{(n)}\overline{y}(t)$ являются линейно независимыми.

О п р е д е л е н и е . Определителем Вронского для системы вектор- функций $\left\{{}^{(i)}y(t)\right\}$, $i \in [1, n]$ называется

$$\Delta(t) = Det\ \hat{W}(t) . \tag{12.7}$$

Т е о р е м а 12.3. **Если решения $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$ $k \in [1, n]$ однородной системы $\overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = 0$ линейно зависимы на $t \in \tau$, то определитель Вронского $\Delta(t) = 0$ для $\forall t \in \tau$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из линейной зависимости следует $\exists \overline{C} \neq 0$ такое, что $\hat{W}\overline{C} = 0$. Это линейно однородная система для $\overline{C}$, следовательно, $Det\ \hat{W} = \Delta(t) = 0.$

Т е о р е м а 12.4. **Если $\Delta(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in \tau$, то $\Delta(t) = 0$ и для $\forall t \in \tau$, и , следовательно, $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$ линейно зависимы на τ .**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть при $t = t_0 \in \tau$ имеем $\Delta(t_0) = 0.$ Тогда $\exists \overline{C} \neq 0$, которые удовлетворяют системе уравнений $\hat{W}(t_0)\overline{C} = 0.$ Возьмем $\overline{y}(t) = \hat{W}(t)\overline{C}.$ Согласно теореме 12.2 $\overline{y}$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} \overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = 0 & t \in \tau \\ \overline{y}(t_0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\overline{y} \equiv 0 \quad \forall t \in \tau$ по теореме единственности решения задачи Коши. Тогда $\hat{W}\overline{C} = 0$ для $\forall t \in \tau \Rightarrow Det\hat{W} = \Delta(t) = 0$ для $\forall t \in \tau.$

Т е о р е м а 12.5 (альтернатива). **Определитель Вронского $\Delta(t)$ для решения $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$ $k \in [1, n]$ однородной системы дифференциальных уравнений или $\Delta(t) \equiv 0$ для $\forall t \in \tau$, что означает линейную зависимость $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$, или $\Delta(t) \neq 0$ для $\forall t \in \tau,$ что означает линейную независимость $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$.**

п.13. Фундаментальная система решений и общее решение для линейной системы дифференциальных уравнений.

Определение. **Фундаментальной системой** решений (Ф.С.Р.) однородной системы уравнений называется "n" линейно независимых решений $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$, $k \in [1,n]$ этой системы, а соответственно матрица $\hat{W} = \left\{{}^{(1)}\overline{y}, {}^{(2)}\overline{y}, ..., {}^{(n)}\overline{y}\right\}$ называется **фундаментальной матрицей системы**.

Фундаментальная матрица является решением матричного уравнения

$$\hat{W}'(t) = \hat{A}\hat{W}(t),$$

причем $Det\hat{W} \neq 0$.

Теорема 13.1**. Фундаментальная матрица существует.**

Доказательство.

Решение задачи Коши

$$\begin{cases} \hat{W}'(t) = \hat{A}\hat{W} & t \in \tau \\ \hat{W}(t_0) = \hat{E} \end{cases}$$

дает фундаментальную матрицу, т.к.

$$\Delta(t_0) = Det\hat{W}(t_0) = Det\hat{E} \neq 0,$$

следовательно, по т.12.2 $\Delta(t) \neq 0$ при $\forall t \in \tau$ и решения $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$ - линейно независимы.

Теорема 13.2. **Если $\hat{W}(t)$ – фундаментальная матрица для однородной системы, то ее общее решение представимо в виде: $\overline{y}(t) = \hat{W}\overline{C}$, где $\overline{C}$ - произвольный постоянный вектор.**

Доказательство.

Согласно т.12.2. $\overline{y}(t) = \hat{W}\overline{C}$ есть решение однородной системы $\overline{y}' = \hat{A}\overline{y}$. Надо показать, что мы можем удовлетворять произвольным начальным данным Коши $\overline{y}(t_0) = \hat{W}(t_0)\overline{C} = \overline{y}^0$, т.к. $Det\hat{W}(t_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \overline{C}$ для $\forall \overline{y}^0$.

Следствие. **Решение задачи Коши для произвольных начальных данных $\overline{y}^0$ представимо в виде**

$$\overline{y}(t) = \hat{Z}(t,t_0)\overline{y}^0,$$

где импульсная функция $\hat{Z}(t,t_0)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \hat{Z}'(t) = \hat{A}Z(t), & t \in \tau, \\ \hat{Z}(t_0) = \hat{E}. \end{cases} \qquad (13.1)$$

Доказательство.

Из теоремы 12.2. следует $\overline{y}(t) = \hat{W}(t)\overline{C}$, где $\hat{W}(t_0)\overline{C} = \overline{y}^0 \Rightarrow \overline{C} = \hat{W}^{-1}(t_0)\overline{y}^0 \Rightarrow \overline{y}(t) = \hat{Z}(t,t_0)\overline{y}^0$, где

$$\hat{Z}(t,t_0)=\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0). \tag{13.2}$$

Легко видеть, что $\hat{Z}(t_0,t_0)=\hat{E}$ и $\hat{Z}(t)$ удовлетворяет (13.1).

п.14. Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений.

Т е о р е м а 14.1. **Если $\hat{W}(t)$ – фундаментальная матрица, а $^{(0)}\overline{y}(t)$ – частное решение уравнения $\overline{y}'=\hat{A}\overline{y}+\overline{f}$, то общее решение неоднородного уравнения представимо в виде:**

$$\overline{y}(t)=\hat{W}(t)\overline{C}+{}^{(0)}\overline{y}(t). \tag{14.1}$$

Т е о р е м а 14.2. **Частное решение неоднородной системы с нулевыми начальными данными выражается через импульсную функцию в виде**:

$$^{(0)}\overline{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{Z}(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau, \tag{14.2}$$

а общее решение задачи Коши с условием $\overline{y}(t)=\overline{y}^0$ представимо в виде

$$\overline{y}(t)=\hat{Z}(t,t_0)\overline{y}^0+\int_{t_0}^{t}\hat{Z}(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau. \tag{14.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) (14.3) получается из (14.1) и (14.2), поэтому надо доказать (14.2).

2) Формула (14.2) получается вариацией постоянной

$$\overline{y}(t)=\hat{W}(t)\overline{C}(t)$$

$$\overline{y}'(t)=\hat{W}'(t)C(t)+\hat{W}(t)\overline{C}'(t)=\hat{A}\hat{W}(t)C(t)+\overline{f},$$

т.к. $\hat{W}'=AW$, то имеем $\hat{W}(t)\overline{C}'(t)=f(t)\Rightarrow\overline{C}'(t)=\hat{W}^{-1}(t)f(t)$.

Т.к. $\overline{y}(t_0)=0=\hat{W}(t_0)\overline{C}(t_0)\Rightarrow\overline{C}(t_0)=0\Rightarrow$

$$\overline{C}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{W}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\Rightarrow\overline{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

что и требовалось доказать, т.к. $\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)=\hat{Z}(t,\tau)$.

п. 15. Построение Ф.С.Р. для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае некратных корней характеристического уравнения.

Частное решение однородной системы $\overline{y}'=\hat{A}\overline{y}$ с постоянными коэффициентами будем искать в виде:

$$\overline{y}(t)=\overline{\alpha}\ e^{\lambda t};\ \overline{\alpha}\ -\ \text{постоянный вектор}. \tag{15.1}$$

Тогда $\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}\right)\overline{\alpha}=0.$

Для того, чтобы $\exists\overline{\alpha}\neq0$, необходимо

$$M(\lambda) = Det\left(\hat{A} - \lambda \hat{E}\right) = 0, \qquad (15.2)$$

где $M(\lambda)$ – характеристический многочлен для системы.

Т е о р е м а 15.1. **Пусть $\{\lambda_k\}$, $k \in [1,n]$ – простые корни характеристического уравнения (15.2), а ${}^{(k)}\overline{y}(t) = {}^{(k)}\overline{\alpha}\ e^{\lambda_k t}$, где ${}^{(k)}\overline{\alpha}$ - нетривиальное решение системы**

$$\left(\hat{A} - \lambda_k \hat{E}\right){}^{(k)}\overline{\alpha} = 0. \qquad (15.3)$$

Тогда ${}^{(k)}\overline{y}(t),\ k \in [1,n]$ образуют Ф.С.Р. системы $\overline{y}' = \hat{A}\overline{y}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Функции $\left\{{}^{(k)}\overline{\alpha}\ e^{\lambda_k t} = {}^{(k)}y(t)\right\}$ $k \in [1,n]$ являются решением системы дифференциальных уравнений, поэтому достаточно доказать их линейную независимость. Доказательство от противного. Пусть они линейно зависимы, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\, {}^{(k)}\overline{\alpha}\ e^{\lambda_k t} = 0 \quad \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \neq 0 \qquad (15.4).$$

Пусть $C_1 \neq 0$ (это не ограничивает общности), тогда запишем (15.4) в виде

$$C_1\, {}^{(1)}\overline{\alpha} e^{(\lambda_1 - \lambda_n)t} + C_2\, {}^{(2)}\overline{\alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_n)t} + \ldots + C_n\, {}^{(n)}\overline{\alpha} = 0 \ .$$

Дифференцируя и умножая на $e^{-(\lambda_{n-1} - \lambda_n)t}$, получаем

$$(\lambda_1 - \lambda_n) C_1\, {}^{(1)}\overline{\alpha} e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})t} + \ldots + C_{n-1}^{(n-1)}\overline{\alpha} = 0\,.$$

Дифференцируя и умножая на $e^{-(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})t}$, получаем

$$(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) C_1\, {}^{(1)}\overline{\alpha}\ e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-2})t} + \ldots + C_{n-2}^{(n-2)}\overline{\alpha} = 0$$

и т.д. Получаем, окончательно

$$(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1})\ldots(\lambda_1 - \lambda_2) C_1\, {}^{(1)}\overline{\alpha}\ e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = 0\,. \qquad (15.5)$$

Т.к. λ_k – различны и ${}^{(1)}\overline{\alpha} \neq 0$, то $C_1 = 0$. Пришли к противоречию $\Rightarrow$ не $\exists C_k$ таких, что выполняется (15.4). $\Rightarrow$ Теорема доказана.

п.16. Построение Ф.С.Р. для системы уравнений при кратных корнях характеристического уравнения.

Пусть λ_k – корень характеристического уравнения $Det(\hat{A} - \lambda \hat{E}) = 0$ имеет кратность m_k. Мы знаем из алгебры, что для матрицы с кратным собственным значением λ_k собственные вектора ${}^{(j)}\overline{e}, j \in [1, m_k]$ находятся из жордановой формы

$$\begin{aligned}
&\hat{A}\,{}^{(1)}\overline{e} = \lambda_k\, {}^{(1)}\overline{e} \\
&\hat{A}\,{}^{(2)}\overline{e} = \lambda_k\, {}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\hat{A}\,{}^{(m_k)}\overline{e} = \lambda_k\, {}^{(m_k)}\overline{e} + {}^{(m_k - 1)}\overline{e}
\end{aligned} \qquad (16.1)$$

где ${}^{(1)}\overline{e}$ – собственный вектор, ${}^{(2)}\overline{e}, {}^{(3)}\overline{e}, \ldots, {}^{(m_k)}\overline{e}$ – присоединенные вектора.

Выберем решения нашей системы таким образом, чтобы для векторов, определяющих решения, получилась жорданова форма. Для этого выберем первое решение в виде ${}^{(1)}\overline{y} = {}^{(1)}\overline{e}e^{\lambda_k t}$, где ${}^{(1)}\overline{e}$ – решение (нетривиальное) $\hat{A}\,{}^{(1)}\overline{e} = \lambda_k\,{}^{(1)}\overline{e}$.

Выберем второе решение для $\lambda = \lambda_k$ в виде:

$${}^{(2)}\overline{y} = ({}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e}t)e^{\lambda_k t} \Rightarrow \hat{A}({}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e}t)e^{\lambda_k t} = \left\{\lambda_k({}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e}t) + {}^{(1)}\overline{e}t\right\}e^{\lambda_k t}$$

или $\hat{A}\,{}^{(2)}\overline{e} + t\hat{A}\,{}^{(1)}\overline{e} = (\lambda_k\,{}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e}) + t\lambda_k\,{}^{(1)}\overline{e}$ (т.к. $\hat{A}\,{}^{(1)}\overline{e} = \lambda_k\,{}^{(1)}\overline{e}$), то получим для определения ${}^{(2)}\overline{e}$ уравнение

$$\hat{A}\,{}^{(2)}\overline{e} = \lambda_k\,{}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e}\,. \tag{16.2}$$

Если записать j - ое решение для λ_k в виде:

$${}^{(j)}\overline{y} = ({}^{(j)}\overline{e} + t\,{}^{(j-1)}\overline{e} + \frac{t^2}{2!}\,{}^{(j-2)}\overline{e} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\,{}^{(1)}\overline{e})e^{\lambda_k t};\, j \in [1, m_k], \tag{16.3}$$

тогда для ${}^{(1)}\overline{e}$ $j \in [1, m_k]$ получим жорданову форму (16.1). В алгебре известно, что если λ_k собственное значение матрицы $\hat{A}$ кратности m_k, то (16.1) дают m_k линейно независимых векторов ${}^{(j)}\overline{e},\ j \in [1, m_k]$. Таким образом, приходим к утверждению

Т е о р е м а 16.1. **Каждому корню характеристического многочлена системы λ_k (кратности m_k) отвечает m_k решений, определенных (16.3), где ${}^{(j)}\overline{e}$ $j \in [1, m_k]$ является решением (16.1).**

Т е о р е м а 16.2. **Решения, определенные в т16.1, взятые для всех $k = 1, \ldots l$ $\left(\sum_{k=1}^{l} m_k = n\right)$ образуют Ф.С.Р.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Составим фундаментальную матрицу из решений ${}^{(j)}\overline{y}_{(k)}$ $k \in [1, l],\ j \in [1, m_k]$

$$\hat{W}(t) = \left\{{}^{(1)}\overline{y}_1(t), \ldots, {}^{(m_1)}\overline{y}_1, {}^{(1)}\overline{y}_2, \ldots, {}^{(m_2)}\overline{y}_2, \ldots, {}^{(1)}\overline{y}_l, \ldots, {}^{(m_l)}\overline{y}_l\right\}.$$

Заметим, что ${}^{(j)}\overline{y}_{(k)}(t=0) = {}^{(j)}\overline{e}_{(k)}$, тогда

$\Delta(t=0) = Det\hat{W}(t=0) = Det\left\{{}^{(J)}\overline{e}_{(k)}\right\} \neq 0$ (т.к. ${}^{(j)}\overline{e}_{(k)}$ - линейно независимы)

$\Rightarrow \Delta(t) \neq 0$ для $\forall t \in \tau \Rightarrow \left\{{}^{(j)}\overline{y}_{(k)}(t)\right\}$ линейно независимы $\Rightarrow$ они составляют Ф.С.Р.

п.17. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Исследование уравнения 2-го порядка. Формула Остроградского-Лиувилля.

$$L_n(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(t) \tag{17.1}$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_n = const.$$

Исследуем однородное уравнение 2-го порядка

$$y''(t) + \alpha\ y'(t) + ky(t) = f(t)\ . \tag{17.2}$$

Сведем уравнение (12.2) к системе двух уравнений с двумя неизвестными функциями $u_1(t) = y(t)$ $, u_2(t) = y(t)$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = -ku_1(t) - \alpha u_2(t) \end{cases},$$

или

$$\overline{u}'(t) = \hat{A}\overline{u}(t), \tag{17.3}$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\alpha \end{pmatrix}. \tag{17.4}$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$M(\lambda) = Det\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & -\lambda - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0.$$

Откуда

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4k}}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4k}}{2}. \tag{17.5}$$

Возможны три случая.

1. $\alpha^2 > 4k$; λ_1, λ_2 – действительные и отрицательные, причем различные. Общее решение $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ т.к. $e^{\lambda_1 t} = y_1(t)$; $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ – линейно независимые функции. Их определитель Вронского

$$\Delta t = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0.$$

При начальных данных y_0 и y_0' получим:

$$y(t) = \frac{\lambda_2 y_0 - y_0'}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 y_0 - y_0'}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}.$$

Эти колебания не осциллирующие, а затухающие (апериодические).

2. $\alpha^2 < 4k$ корни комплексные, сопряженные

$$\lambda_1 = -a + ib; \ \lambda_2 = -a + ib; \ a = \frac{\alpha}{2}; \ b = \frac{\sqrt{4k - \alpha^2}}{2}$$

$$y_1(t) = e^{-at}\cos bt; \ y_2(t) = e^{-at}\sin bt,$$

$y_1(t)$ и $y_2(t)$ – линейно независимые функции, т.к. их определитель Вронского не равен 0:

$$\Delta t = \begin{vmatrix} e^{-at}\cos bt & e^{-at}\sin bt \\ -ae^{-at}\cos bt - be^{-at}\sin bt & -ae^{-at}\sin bt + be^{-at}\cos bt \end{vmatrix} = 2be^{-2at} \neq 0.$$

Общее решение

$$y(t) = (C_1 \cos bt + C_2 \sin bt)e^{-at}.$$

Решение осциллирует и затухает. Если $\alpha = 0$, то $a = 0$ (затухания нет) и имеем $y(t) = C_1 \cos\sqrt{k}t + C_2 \sin\sqrt{k}t)$ – периодические колебания.

3. Если $\alpha^2 - 4k = 0$, то имеем кратные корни

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\alpha}{2} = \lambda.$$

Имеем одно решение $y_1(t) = e^{-\frac{\alpha t}{2}}$.

Другим решением линейно независимым с y_1 является $y_2(t) = te^{-\frac{\lambda t}{2}}$. Их определитель Вронского не равен нулю:

$$\Delta t = \begin{vmatrix} e^{-\frac{\alpha t}{2}} & te^{-\frac{\alpha t}{2}} \\ -\frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha t}{2}} & e^{-\frac{\alpha t}{2}} - \frac{\alpha}{2}te^{-\frac{\alpha t}{2}} \end{vmatrix} = e^{-\alpha t} \neq 0.$$

Общее решение $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}$.

Рассмотрим теперь вывод формулы Остроградского-Лиувилля. Пусть нам известно два независимых решения (17.2) $y_1(t)$ и $y_2(t)$ уравнения

$$y''(t) + p_1(t)y'(t) + p_2(t)y(t) = 0 \tag{17.6}$$

Тогда определитель Вронского

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y'(t)y_2(t).$$

Продифференцировав это выражение, получим

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Подставим вторые производные из уравнения (17.6)

$$y_m'' = -p_1(t)y_m' - p_2(t)y_m, \quad m \in [1,2].$$

Тогда

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = -\left(p_1(t)y_2' + p_2(t)y_2\right)y_1 + \left(p_1(t)y_1' + p_2(t)y_1\right)y_2 =$$
$$= -p_1(t)(y_1y_2' - y_1'y_2) = -p_1(t)\Delta(t)$$

Таким образом, мы получили

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = -p_1(t)\Delta(t). \qquad (17.7)$$

Решение этого уравнения дает выражение определителя Вронского через первый коэффициент дифференциального уравнения $p_1(t)$:

$$\Delta(t) = \Delta(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} P_1(\tau)d\tau} \qquad (17.8)$$

Это формула Остроградского - Лиувилля. $\Delta(t_0)$ находим из начальных данных, а по (17.8) $\Delta(t)$ при $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$. Формула (17.8) позволяет получить общее решение уравнения 2-го порядка, если известно одно частное решение уравнения (17.6). Пусть $y_1(t)$ – известное решение и $y(t)$ – общее решение. Тогда из (17.8) имеем

$$y_1(t)y'(t) - y_1'(t)y(t) = C_1 e^{-\int P_1(t)dt},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{y_1(t)}\right) = \frac{C_1}{y_1^2(t)} e^{-\int P_1(t)dt}.$$

Окончательно,

$$y(t) = y_1(t)\left\{ C_1 \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int P_1(t)dt}}{y_1^2(t)} dt + C_2 \right\}. \qquad (17.9)$$

Формула (17.9) дает выражение для общего решения дифференциального уравнения 2-го порядка через известное одно решение $y_1(t)$ и первый коэффициент уравнения $y_1(t)$.

п.18. Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость решения линейной системы.

Мы рассматривали все свойства дифференциальных уравнений, если решение определено на конечном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$. Возникает вопрос, что будет с непрерывностью по начальным данным при $t \to \infty$. Это и входит в теорию устойчивости.

Имеем задачу Коши $\begin{cases} y'(t) = ay - 1 \\ y(t=0) = \dfrac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow y_0(t) = \dfrac{1}{a}$ – решение.

Изменим начальные данные на малую величину δ

$$\begin{cases} y' = at - 1 \\ y(t_0) = \dfrac{1}{a} + \delta \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{a} + \delta \ e^{at}.$$

Следовательно, $y(t)-y_0=\delta\ \ e^{at}$, при конечном t имеем

$$\left|y(t)-y_0(t)\right| \underset{\delta\to 0}{\to} 0 \quad ,$$

а при $t\to\infty$ для $\forall\delta>0$ имеем $\begin{cases}(y(t)-y_0)\to 0\\ a<0\end{cases}$ и $\begin{cases}(y(t)-y_0)\to\infty\\ a>0\end{cases}$.

Ясно, что безразлично какие начальные t_0. Поэтому в дальнейшем рассматриваем $0\le t<\infty$. Причем, изучаем $\overline{x}(t)=\overline{y}(t)-y(t=0)$, т.е. задача Коши для $\overline{x}(t)$

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{x}}{dt}=\overline{f}(t,\overline{x}(t)), \quad 0\le t<\infty\\ \overline{x}(t=0)=0, \quad (\overline{f}(t,\overline{x}=0)=0)\end{cases} \tag{18.1}$$

т.е. $\overline{x}$=0 является решением (18.1).

Устойчивость определяется поведением решения (18.1) при $t\to\infty$, если в (18.1) возмутить начальное условие $\overline{x}(t=0)=\overline{x}_0$. Таким образом, вопрос об устойчивости связан с тем: остается ли решение на фазовой плоскости в окрестности точки покоя ($\overline{x}$ =*0*) или выходит из нее.

О п р е д е л е н и е.

Решение задачи (18.1) $\overline{x}=0$ называется устойчивым по Ляпунову, если для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\left\|\overline{x}_0\right\|<\delta(\varepsilon)$ для всех $t>0$ справедливо неравенство

$$\left\|\overline{x}(t,x_0)\right\|<\varepsilon \tag{18.2}$$

и асимптотически устойчивым, если кроме устойчивости выполняется условие: $\exists\delta_0>0$ такое, что при $\left\|\overline{x}_0\right\|<\delta_0<\delta(\varepsilon)$

$$\lim_{t\to\infty}\overline{x}(t,x_0)=0. \tag{18.3}$$

Исследуем устойчивость линейной системы с постоянными коэффициентами. Для исследования необходимо иметь некоторые оценки, которые даются в лемме 18.1.

Лемма 18.1.

Справедливы следующие оценки:

1. $\overline{y}(t)=\left\{y_i(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}x_k(t)\right\}=\hat{A}\overline{x}$.

Если $\left|a_{ik}(t)\right|\le a(t)$, то

$$\|\,\overline{y}\,\|\le Ca(t)\,\|\,\overline{x}\,\| \tag{18.4}$$

2. $\overline{y}=\left\{y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{ijl}(t)x_jx_l\right\}$, $\left|a_{ijl}\right|\le a(t)$, тогда

$$\|\,\overline{y}\,\|\le Ca(t)\,\|\,x\,\|^2. \tag{18.5}$$

3. $\|\,\overline{x}+\overline{y}\,\|\le C\big(\|\,\overline{x}\,\|+\|\,\overline{y}\,\|\big)$. (18.6)

4. $\left\| \int_0^t \bar{y}(\tau)d\tau \right\| \le C\int_0^t \| \bar{y}(\tau) \| \, d\tau, \quad 0 \le t \le T.$ (18.7)

5. Для импульсной функции $\hat{Z}(t,t_0) = \hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0)$ формулы (13.2) справедливо неравенство

$$\left| Z_{ij}(t,t_0) \right| = \left| Z_{ij}(t-t_0,0) \right| < Ce^{(p+\gamma)(t-t_0)} \quad , \tag{18.8}$$

где $p = \max\limits_{k\in[1,n]}(\mathrm{Re}\lambda_{\;k}), \;\; \gamma$ – положительная постоянная.

Доказательство.

1. $y_i^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k(t) \right)^2 \le a^2(t)\left(\sum_{k=1}^n \left| x_k(t) \right| \right)^2 \le na^2(t)\left\| \bar{x} \right\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\| \bar{y} \right\|^2 \le n^2 a^2(t)\left\| \bar{x} \right\|^2 \Rightarrow \left\| \bar{y} \right\| \le na(t)\left\| \bar{x} \right\|$

2.
$$y_k^2 = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ijk}(t)x_j x_l \right)^2 \le a^2(t)\left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left| x_j \right| \left| x_l \right| \right)^2 =$$
$$= a^2(t)\left(\sum_{j=1}^n \left| x_j \right| \right)^2 \left(\sum_{l=1}^n \left| x_l \right| \right)^2 \le a^2(t)\left\| \bar{x} \right\|^4 \Rightarrow$$

$\| \bar{y} \|^2 \le n y_k^2 \Rightarrow \;\; \| \bar{y} \|^2 \le na^2(t) \| \bar{x} \|^4 \;\; \Rightarrow \;\; \| \bar{y} \| \le \sqrt{n} a(t) \| \bar{x} \|^2 .$

3. $(x_i + y_i)^2 \le x_i^{\,2} + y_i^{\,2} + 2\left| x_i \right| \left| y_i \right| \le 2(x_i^{\,2} + y_i^{\,2}) \Rightarrow$

$\| \bar{x} + \bar{y} \| \le \sqrt{2}\sqrt{\| \bar{x} \|^2 + \| \bar{y} \|^2} \le \sqrt{2}(\| \bar{x} \| + \| \bar{y} \|)$

4. $\int_0^t y_i(\tau)d\tau \le \int_0^t \left\| \bar{y} \right\| d\tau \Rightarrow \left\| \int_0^t \bar{y}(\tau)d\tau \right\| \le \sqrt{n}\int_0^t \left\| \bar{y} \right\| d\tau$

5. Переходя к новой переменной $\tau = t - t_0$ в задаче $\begin{cases} \hat{Z}' = A\hat{Z} \\ \hat{Z}(t_0) = \hat{E} \end{cases}$,

приходим к $Z_{ij}(t,t_0) = Z_{ij}(t-t_0,0)$.

Тогда $\hat{Z}(t-t_0,0) = \hat{W}(t-t_0)\hat{W}(0) \Rightarrow \left| Z_{ij}(t-t_0,0) \right| \le Ce^{(p+\gamma)(t-t_0)0}$

т.к. $\left| W_{ij}(t-t_0) \right| \le \sum c_k t^j e^{\lambda_k(t-t_0)}$, а $t^j \le e^{\gamma(t-t_0)}, p = \max\limits_k \mathrm{Re}\;\lambda_k$.

Теорема 18.1. **Решение линейной системы с постоянными коэффициентами**

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \hat{A}\bar{x}, \quad t > 0; \;\; \hat{A} = \left\{ a_{ij} \right\}, \;\; a_{ij} = const \\ \bar{x}(t=0) = 0 \end{cases} \tag{18.9}$$

асимптотически устойчивое, если для всех корней характеристического многочлена выполняется условие

$$\mathrm{Re}\lambda_k < 0 \ \textbf{для} \ \forall k, \tag{18.10}$$

и неустойчиво, если хотя бы одно $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$.

Доказательство.

В п.15 и п.16 мы описали, как строится решение для λ_k.

$$^{(m)}\overline{x}_{(k)}(t) = (\overline{c}_1 + \overline{c}_2 t + ... + \overline{c}_{m_k} t^{(m_{k-1})})e^{\lambda_k t}$$

$$\Rightarrow \left\| ^{(m)}\overline{x} \right\| \le Ce^{(p_k+\gamma)t}, \text{ где } p_k = \mathrm{Re}\ \lambda_k.$$

Фундаментальная матрица решений $\hat{W}(t)$ $\begin{cases} \hat{W}' = \hat{A}\hat{W} \\ \hat{W}(t=0) = \hat{E} \end{cases}$

имеет столбцы из фундаментальных решений

$$\Rightarrow \left\|\hat{W}\right\| \le Ce^{(p+\gamma)t}, \text{ где } \quad p = \max_k \mathrm{Re}\ \lambda_k.$$

Если в (18.9) возмутить начальные условия $\overline{x}(t=0) = \overline{\varepsilon}_0$, то решение (18.9) будет $\overline{x}(t) = \hat{W}(t)\overline{\varepsilon}_0 \Rightarrow \ \left\|\overline{x}(t)\right\| \le \left\|\hat{W}\right\| \left\|\overline{\varepsilon}_0\right\| \le C\left\|\overline{\varepsilon}_0\right\| e^{(p+\gamma)t}$.

Если все $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$, то при $t \to \infty$ $\|\overline{x}(t)\| \to 0$.

Если хотя бы одно $\mathrm{Re}\lambda_k = \lambda_0 > 0$, то $\|\overline{x}\| \ge C\|\overline{\varepsilon}_0\| e^{(\lambda_0-\gamma)t} \to \infty$ при $t \to \infty$.

Если $\exists \mathrm{Re}\lambda_k = 0$, а остальные $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$, то вопрос об устойчивости сложен. Возможны разные варианты.

п.19. Исследование устойчивости решения системы по первому приближению.

Рассмотрим нелинейную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}(\overline{x}), \quad t > 0, \ f(0) = 0 \\ \overline{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{19.1}$$

Автономной называется система, правая часть которой не зависит от t**.**

Исследование на устойчивость по первому приближению проводится следующим образом:

1) Разлагаем $\overline{f}(\overline{x})$ в ряд, учитывая, что $\overline{f}(0) = 0$. Тогда

$$\overline{f}(\overline{x}) = \hat{A}\overline{x} + \overline{R} \tag{19.2}$$

где $\hat{A} = \left\{ a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\overline{x}=0} \right\}$, а $\overline{R}$ – остаточный член, который можно представить в виде;

$$\overline{R} = \{R_i\} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_l}\Big|_{\overline{x}=\theta\overline{x}} x_l x_j \ \text{(взяв в средней точке).} \tag{19.3}$$

2) Рассмотрим устойчивость линейной части системы $\frac{d\overline{x}}{dt} = \hat{A}\overline{x}$. Если все $\operatorname{Re}\lambda_k$ матрицы $\hat{A}$ меньше нуля, то решения линеаризованной системы устойчивые.

3) Исследуем как влияет на устойчивость нелинейная поправка $\overline{R}(\overline{x})$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x} + \overline{R}(\overline{x}), \quad t > 0 \\ \overline{x}(t=0) = \overline{x}_0 \end{cases} \tag{19.4}$$

Пусть $\hat{Z}(t,\tau) = \hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)$ – импульсная функция для системы

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \hat{A}\overline{x}.$$

Тогда из (19.4) получим

$$\overline{x}(t) = \hat{Z}(t,0)\overline{x}_0 + \int_0^t \hat{Z}(t,\tau)\overline{R}(\overline{x}(\tau))d\tau. \tag{19.5}$$

Используя лемму 18.1, получим

$$\|\overline{R}\| \le C\|\overline{x}\|^2,$$

Тогда

$$\|\overline{x}\| \le Ce^{-\alpha t}\|x_0\| + C\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|x\|^2 d\tau, \tag{19.6}$$

где $\alpha = -(p+\gamma)$; $p = \max_k \operatorname{Re}\lambda_k < 0$, γ – любое положительное число, $p+\gamma < 0$.

Чтобы из (19.6) получить оценку для $\|\overline{x}\|$ при $t \to \infty$, рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \alpha z + cz^2, \ t > 0 \\ z(0) = z_0 > c\|x_0\|, \ c > 0 \end{cases} \tag{19.7}$$

Сведем к интегральному уравнению, считая $f = cz^2$,

$$z(t) = z_0 e^{-\alpha t} + c\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} z^2(\tau)d\tau. \tag{19.8}$$

Сравнивая (19.6) и (19.8), получаем

$$z(t) > \|\overline{x}\| \text{ при любом } t \ge 0. \tag{19.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

$z(t)$ и $\|\overline{x}(t)\|$ непрерывны и при $t=0$ $z(0) > c\|\overline{x}_0\| = \|\overline{x}(0)\|$. Следовательно, $z(t) > \|\overline{x}(t)\|$ при $0 < t < t_1$. Пусть $z(t_1) = \|\overline{x}(t_1)\|$. Тогда

$$z(t_1) = z_0 e^{-\alpha t_1} + c\int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1-\tau)} z^2(\tau)d\tau >$$

$$> c\|x_0\|e^{-\alpha t_1} + c\int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1-\tau)}\|\overline{x}(\tau)\|d\tau = \|\overline{x}(t_1)\|.$$ То есть, $z(t_1) > \|\overline{x}(t_1)\|$.

Пришли к противоречию. $\Rightarrow z(t) > \| \overline{x}(t) \|$ при $\forall t$.

Теперь оценку $\| \overline{x}(t) \|$ получаем из оценки $z(t)$, для которой имеется аналитическое решение

$$z(t) = \frac{\alpha\, z_0}{cz_0 + (\alpha - cz_0)e^{\alpha\, t}} \tag{19.10}$$

При $z_0 < \dfrac{\alpha}{c}$ имеем $z(t) > 0$ и имеем

$$0 < z(t) \le \frac{\alpha\, z_0}{(\alpha - cz_0)} e^{-\alpha\, t} \Rightarrow \| \overline{x}(t) \| < \frac{\alpha\, z_0}{(\alpha - cz_0)} e^{-\alpha\, t} \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Имеем асимптотическую устойчивость.

Т е о р е м а 19.1. **Пусть в некоторой окрестности точки покоя $\overline{x} = 0$ правая часть автономной системы $\overline{f}(\overline{x})$ непрерывна вместе с производными до 2-го порядка включительно. Тогда, если все λ_k характеристические числа матрицы**

$$\hat{A} = \left\{ a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\overline{x}=0} \right\}$$

удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$, **то тривиальное решение системы** (19.1) **асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно λ_k имеет** $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$, **то решение неустойчиво**.

п.20. Исследование траектории в окрестности точки покоя.

Исследование проводим в двумерном случае $\overline{x} = \{x_1(t), x_2(t)\}$ для системы с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \hat{A}\overline{x};\ \ \hat{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \tag{20.1}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{фазовая траектория} \quad \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2} \tag{20.2}$$

Точка $\overline{x} = 0$ является особой в уравнении (20.1). Предположим, что в системе (20.1) $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения и корни различны $\lambda_1 \ne \lambda_2$. В этом случае общее решение (20.1) имеет вид:

$$\overline{x} = C_1 \overline{\alpha}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \overline{\alpha}^{(2)} e^{\lambda_2 t}\ , \tag{20.3}$$

где $\overline{\alpha}^{(1)}, \overline{\alpha}^{(2)}$ – собственные вектора матрицы $\hat{A}$, соответственно для λ_1 и λ_2.

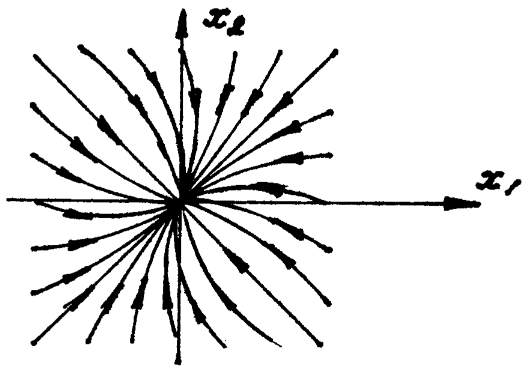
Тогда

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2'(t)}{x_1'(t)} = \frac{C_1\lambda_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t}}{C_1\lambda_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 t}} \quad . \tag{20.4}$$

Рассмотрим различные случаи для разных соотношений между λ_1 и λ_2.

1. Действительные λ одного знака.

1а. $\mathrm{Im}\lambda_1 = \mathrm{Im}\lambda_2 = 0,\ 0 > \lambda_1 > \lambda_2$ (отрицательные характеристические числа). Точка покоя,согласно теореме 19.1, асимптотически устойчива. Если $C_1 \neq 0$, то при $t \to \infty$ $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}} = \beta_1 \Rightarrow$ при $t \to \infty$ имеем асимптотическую прямую $x_2 = \beta_1 x_1$ (проходит через точку покоя). Если $C_1 = 0$, то имеем $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)}} = \beta_2$ (прямая $x_2 = \beta_2 x_1$)



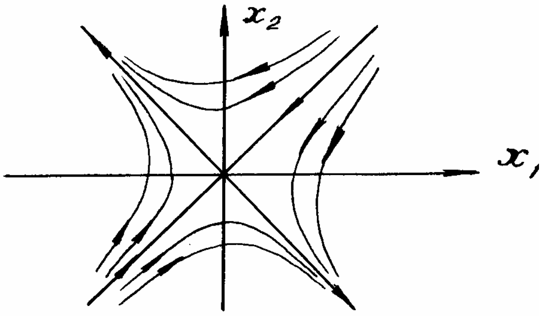
Такая точка покоя называется "узлом".

1б. $\mathrm{Im}\lambda_1 = \mathrm{Im}\lambda_2 = 0,\ \lambda_2 > \lambda_1 > 0$ (положительные характеристические числа). Получается та же картина, но точка покоя неустойчива и "узел" расходящийся (стрелки идут от начала координат).

2. Действительные λ разного знака.

Пусть $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ $(\mathrm{Im}\lambda_1 = 0,\ \mathrm{Im}\lambda_2 = 0)$. Точка покоя, согласно теореме 19.1, неустойчива. Если $C_1 \neq 0$, то $x_2 = \beta_1 x_1$, а, если $C_1 = 0$, то $x_2 = \beta_2 x_1$.

Полученные прямые называются "сепаратрисами".



Точка называется "седлом". Точка вначале идет к центру, но затем переходит на другую прямую и уходит в ∞.

3. Случай разных комплексных характеристических чисел

$$\lambda_1 = \lambda = p + iq; \;\; \lambda_2 = \lambda^* = p - iq.$$

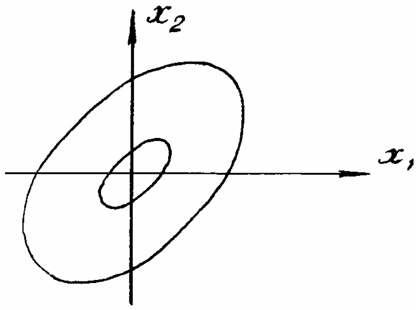
В этом случае решение представляется в виде:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{pt}(\alpha \;\cos qt + \beta \sin qt) \\ x_2(t) = e^{pt}(\gamma \;\cos qt + \delta \sin qt) \end{cases} \qquad (*)$$

причем, из линейной независимости, следует

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \qquad (**)$$

3а. Случай чисто мнимых λ $(p = 0)$.



Тогда из системы (*) находим:

$$\sin qt = \frac{\gamma \; x_1(t) - \alpha \; x_2(t)}{-\alpha\delta + \beta\gamma}$$

$$\cos qt = \frac{+\delta \; x_1(t) - \beta \; x_2(t)}{\alpha \; \delta\text{-}\beta \; \gamma}.$$

Используя тождество $\sin^2 qt + \cos^2 qt = 1$, получим

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_1 - \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_2\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\lambda} x_1 - \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_2\right)^2 = 1.$$

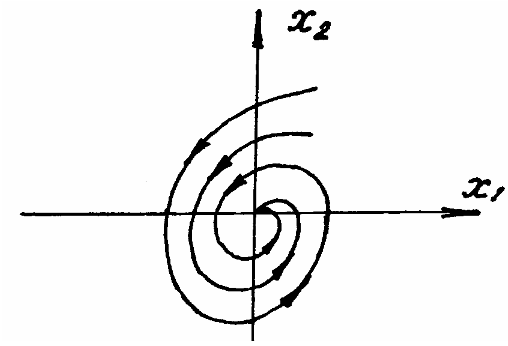
Это эллипсы. Точка покоя устойчива, но не асимптотически. Эта точка называется **"центром"**.

В зависимости от начальных данных точка вращается вокруг центра (точка покоя), что соответствует эллипсу.

3б. $p \neq 0$. Исключая $\cos qt$ и $\sin qt$, получим

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_1-\frac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_2\right)^2+\left(\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_1-\frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_2\right)^2=e^{2pt}.$$

Это **эллиптическая спираль**. При $p<0$ имеем асимптотическую устойчивость, а при $p>0$ – неустойчива. Точка называется **"фокус"**.



Часть II.

Краевые задачи и вариационное исчисление.

п.21. Постановка краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Формула Лагранжа.

1. В краевой задаче условия задают не только в начальной точке $t=t_0$, т.е. задача не локальна. Для уравнения 2-го порядка условие на двух концах $t=t_0$ и $t=t_0+T$.

2. Физически имеем два случая:

– имеется временной отрезок $[t_0, t_0+T]$, надо найти решение задачи, когда при частичных начальных данных в t_0 мы получим решение, обладающее некоторыми данными в конце при t_0+T.

– имеется пространственный отрезок $0<x<l$ и на обоих его концах (краях) заданы условия (граничные). Математически это выглядит одинаково.

3. Для уравнения *n*-го порядка

$$L_n(y)=y^{(n)}(x)+p_1y^{(n-1)}(x)+...+p_ny(x)=f(x),\quad x\in[0,l],$$

при $x=0$ $\gamma_i(y)=\sum_{j=0}^{n-1}a_{ij}y^{(j)}(x=0)=\mu_i,\ i\in[1,m]$, при $x=l \quad \Gamma_i(y)=\sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} y^{(j)}(x=l)=\nu_i, \ i\in[1,s],$

$$m+s=n.$$

4. Для систем дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{y}}{dx}=\hat{A}\overline{y}+f(x), \quad 0<x<l,$$

$$\gamma\ (\overline{y})=\sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j(x=0)=\mu_i, \ i\in[1,m],$$

$$\Gamma(\overline{y})=\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j(x=l)=\nu_i, \ i\in[1,s],$$

$$m+s=n.$$

5. В практике наиболее широко используются уравнения 2-го порядка

$$\begin{cases} L(y)=\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)-q(x)y(x)=f(x), \ x\in[0,l], \ p(x)>0 \\ \gamma\ (y)=\alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=u_0 \\ \Gamma(y)=\alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=u_l. \end{cases} \tag{21.1}$$

Задачу всегда можно свести к неоднородному уравнению с однородным краевым условием. Пусть $\varphi\ (x)$ – некоторая функция, такая, что $\gamma\ (\varphi\ )=u_0,\ \Gamma(\varphi\ )=u_l.$ Тогда введем $u(x)=y(x)-\varphi\ (x)$ и получим

$$\begin{cases} L(u)=\tilde{f}, \ \tilde{f}=f-L(\varphi\ ), \\ \gamma\ (u)=0, \\ \Gamma(u)=0. \end{cases} \tag{21.2}$$

6. Задача на собственные значения (как задача с обратной линейной связью, т.е. $f(x,y)=-\lambda\ \rho\ (x)y(x)$)

$$\begin{cases} L(y)=-\lambda\ \rho\ (x)y(x), \\ \gamma\ (y)=0; \ \Gamma(y)=0. \end{cases} \tag{21.3}$$

Требуется найти такие $\{\lambda_k\}$ (собственные значения), для которых существует нетривиальное решение краевой задачи (21.3) $\{y_k(x)\}$ (собственные функции).

Рассматриваем функции $y(x)$, заданные на $[0,l]$, непрерывные, дифференцируемые и имеющие непрерывную вторую производную, т.е. $y(x)\in C_2$. Решением краевой задачи (21.2) называется $y(x)\in C_2$, которое удовлетворяет уравнению $L(y)=f(x),\ x\in(0,l)$ и краевым условиям $\gamma\ (y)=0$ при $x=0$ и $\Gamma(y)=0$ при $x=l.$

Любые $y(x), z(x) \in C_2$ удовлетворяют тождеству Лагранжа

$$zL(y) - yL(z) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx} \right) \right), \tag{21.4}$$

Т е о р е м а 21.1. **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения $L(y) = 0$, то их определитель Вронского равен**

$$\Delta\left(y_1, y_2\right) = \frac{C}{p(x)}, \tag{21.5}$$

причем при $y_1(x) \neq 0$, общее решение можно представить в виде:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C y_1(x) \int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi) y_1^2(\xi)}. \tag{21.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из тождества Лагранжа (21.4) при $L(y_1) = L(y_2) = 0$ следует

$$p(x)\left(y_2(x)\frac{dy_1}{dx} - y_1(x)\frac{dy_2}{dx} \right) = C, \tag{21.7}$$

следовательно, справедливо (21.5).

Если $y_1(x) \neq 0$, то разделив (21.7) на $y_1^2(x)$, получим (при $y_2(x) = y(x)$), ($y(x)$ – независима от y_1)

$$\frac{y_1(x) y'(x) - y_1'(x) y(x)}{y_1^2(x)} = \frac{C}{p(x) y_1^2(x)}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)} \right) = \frac{C}{p(x) y_1^2(x)}.$$

Проинтегрировав, получим окончательно

$$y(x) = y_1(x)\left(C_1 + C\int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi) y_1^2(\xi)} \right),$$

т.е. получили (21.6). *Теорема доказана.*

п.22. Формула Грина. Построение решения краевой задачи с помощью функции Грина.

Проинтегрируем формулу Лагранжа (21.4) и получим

$$\int_0^l \left(zL(y) - yL(z) \right) dx = \left[p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx} \right) \right] \Bigg|_0^l. \tag{22.1}$$

Это выражение называют формулой Грина. Если $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одним и тем же однородным граничным условиям, то $z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Откуда имеем

$$\int_0^l \big(zL(y) - yL(z)\big)dx = 0 \qquad (22.2)$$

при $\gamma\ (z) = \gamma\ (y) = 0;\ \ \Gamma(z) = \Gamma(y) = 0$.

Функция Грина для краевой задачи, имеющей единственное решение.

Пусть однородная краевая задача $L(y) = 0,\ \gamma(y) = 0,\ \Gamma(y) = 0$ имеет только тривиальное решение, а $p(x) > 0$ (или < 0) на интервале $x \in [0,l]$ (т.е. $p(x) \neq 0$ для $\forall x \in [0,l]$).

Тогда функцией Грина такой задачи называется функция $G(x,\xi\ )$, являющаяся решением следующей задачи:

1. По x $L(G) = 0$ при $x \in (0,\xi)$ и $x \in (\xi,l)$.

2. При $x = 0,\ x = l$ граничные условия

$$\gamma\ (G) = 0,\ \Gamma(G) = 0. \qquad (22.6)$$

3. $G \in C_2$ при $x \in (0,\xi\ )$ и $x \in (\xi,l)$, а при $x = \xi$ условия сопряжения

$$[G]_{x=\xi} = 0,\quad \left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi} = 1\big/p(\xi\ )\ .$$

Следствие. $G(x,\xi\ ) = G(\xi,x)$.

Теорема 22.1. **Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то решение неоднородной краевой задачи $\exists$ для любой непрерывной на $[0,l]$ функции $f(x)$ и выражается через функцию Грина в виде**:

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi\ )f(\xi\ )d\xi\ \ . \qquad (22.7)$$

Доказательство. Доказывается проверкой

$$y(x) = \int_0^x G\big(x,\xi\ \big)f\big(\xi\ \big)d\xi\ + \int_x^l G\big(x,\xi\ \big)f\big(\xi\ \big)d\xi\ \ ,$$

$$y'(x) = \int_0^x \frac{dG\big(x,\xi\ \big)}{dx} f\big(\xi\ \big)d\xi\ + \int_x^l \frac{dG\big(x,\xi\ \big)}{dx} f\big(\xi\ \big)d\xi\ \ ,$$

$$\big(p(x)y'(x)\big)' = \int_0^x \frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right)f\big(\xi\ \big)d\xi\ + \int_x^l \frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right)f\big(\xi\ \big)d\xi\ +$$

$$+p(x)f(x)\frac{dG\big(x,\xi\ \big)}{dx}\Big|_{\xi\ =x-0} - f(x)p(x)\frac{dG\big(x,\xi\ \big)}{dx}\Big|_{\xi\ =x+0}.$$

Учитывая, что $\left[\dfrac{dG}{dx}\right]_{x=\xi} = -\left[\dfrac{dG}{dx}\right]_{\xi=x} = \dfrac{1}{p(x)}$, получим

$$\big(py'\big)' = \int_0^l \frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right)f\big(\xi\ \big)d\xi\ + f(x).$$

Следовательно,

$$L(y)=\int_0^l L\big(G(x,\xi)\big)f(\xi)\,d\xi+f(x)$$

$$\Rightarrow L(y)=f(x).$$

Аналогично, $\gamma(y)=\Gamma(y)=0$, т.к. $\gamma(G)=\Gamma(G)=0$.

Теорема доказана.

п.23. Существование функции Грина. Постановка краевой задачи при существовании решения однородной задачи.

Мы показали, что решение неоднородной краевой задачи выражается формулой (22.7) с помощью функции Грина. Необходимо доказать $\exists$ функции Грина.

Построим 2 решения следующих задач Коши:

а. При $0\le x\le\xi$

$L(y_1)=0$,

$y_1(0)=-\alpha_1$,

$y_1'(0)=\beta_1$.

б. При $\xi\le x\le l$

$L(y_2)=0$,

$y_2(l)=-\alpha_2$,

$y_2'(l)=\beta_2$.

Заметим, что

$\gamma(y_1)=0$, $\qquad\qquad \Gamma(y_2)=0$,

$\alpha_1^2+\beta_1^2\ne0$. $\qquad\qquad \alpha_2^2+\beta_2^2\ne0$.

Функции $y_1(x,\xi)$ и $y_2(x,\xi)$ $\exists$, т.к. есть теорема $\exists$ решения задачи Коши. Представим функцию Грина в виде:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}C_1y_1(x), & 0\le x\le\xi,\\ C_2y_2(x), & \xi\le x\le l.\end{cases}$$

Заметим, что

1. $L(G)=0$ при $x\in[0,\xi]$, $x\in[\xi,l]$.

2. При $x=0$, $x=l$ выполняются краевые условия $\gamma(G)=\Gamma(G)=0$.

3. Осталось доказать, что можно подобрать C_1 и C_2 так, чтобы выполнялись условия сшивания при $x=\xi$:

$$\left[G\right]_{x=\xi}=C_2y_2(\xi)-C_1y_1(\xi)=0,$$

$$\left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi}=C_2y_2'(\xi)-C_1y_1'(\xi)=1/p(\xi)\ .$$

Функции $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимы, т.к. y_1 не удовлетворяет однородному краевому условию $\Gamma(y_1)=0$ при $x=l$, иначе $\exists$ решение однородной краевой задачи. Тогда $\Delta(y_1,y_2)\ne0$, а, согласно теореме 21.1,

$$\Delta(y_1,y_2)p(\xi)=C=const. \tag{23.1}$$

Следовательно, мы имеем:

$$C_1=\frac{y_2(\xi)}{C};\;\; C_2=\frac{y_1(\xi)}{C}.$$

Окончательно, получаем функцию Грина в виде:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{C}, & 0\le x\le \xi,\\[2mm] \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{C}, & \xi\le x\le l,\end{cases} \tag{23.2}$$

где C находится согласно (23.1). Легко видеть, что $G(x,\xi)=G(\xi,x)$. Доказано существование функции Грина для случая, когда однородная задача имеет только тривиальное решение. Функция G единственна, т.к. однородная задача не имеет решений.

II. Рассмотрим теперь случай, когда однородная краевая задача имеет нетривиальное решение, причем других линейно независимых решений нет.

Рассмотрим для простоты I краевую задачу и пусть однородная краевая задача имеет решение $\varphi_0(x)$, т.е.

$$\begin{cases}L(\varphi_0)=0,\; x\in(0,l),\\ \varphi_0(0)=0,\;\; \varphi_0(l)=0\;\; (\gamma(\varphi_0)=0,\ \Gamma(\varphi_0)=0).\end{cases} \tag{23.3}$$

Т.к. любая $\varphi(x)=C\varphi_0(x)$ является решением задачи (23.3), то для единственности требуется дополнительное условие нормировки:

$$\int_0^l \varphi_0^2(x)dx=1. \tag{23.4}$$

*Л е м м а 23.*1. **Необходимым условием разрешимости неоднородной краевой задачи является ортогональность правой части уравнения $f(x)$ к решению однородной задачи (23.3) φ_0.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\begin{cases}L(y)=f\\ \gamma(y)=\Gamma(y)=0\end{cases} \qquad \begin{cases}L(\varphi_0)=0\\ \gamma(\varphi_0)=\Gamma(\varphi_0)=0\\ \int_0^l \varphi_0^2(x)dx=1\end{cases}$$

Применяя формулу Грина и учитывая, что $y(x)$ и $\varphi_0(x)$ удовлетворяют однородному краевому условию, получим:

$$\int_0^l \left(\varphi_0(x)L(y(x))-y(x)L(\varphi_0)\right)dx=0.$$

Откуда

$$\int_0^l f(x)\varphi_0(x)dx=0. \tag{23.5}$$

Л е м м а 23.2. **Однородная краевая задача с дополнительным условием ортогональности решения к $\varphi_0(x)$ имеет только тривиальное решение**, **т.е. задача**

$$\begin{cases} L(y)=0, \\ \gamma\ (y)=\Gamma(y)=0, \\ \int\limits_0^l \varphi_0(x)y(x)dx=0, \end{cases} \tag{23.6}$$

имеет только решение $y\equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Т.к. однородная краевая задача имеет единственное линейно независимое решение $\varphi_0(x)$, то имеем $y(x)=C\varphi_0(x)$. Тогда из условия ортогональности имеем

$$0=\int\limits_0^l y(x)\varphi_0(x)dx=C\int\limits_0^l \varphi_0^2(x)dx=C\ ,$$

$$C=0\Rightarrow y(x)=0.$$

Таким образом, если однородная краевая задача имеет единственное нормированное решение $\varphi_0(x)$

$$\begin{cases} L(\varphi_0)=0, \quad x\in[0,l], \\ \varphi_0(0)=\varphi_0(l)=0, \ \int\limits_0^l \varphi_0^2(x)dx=1, \end{cases}$$

то постановка неоднородной краевой задачи в этом случае будет

$$\begin{cases} L(y)=f(x), \ \ x\in(0,l), \\ y(0)=y(l)=0 \ \ (\gamma\ (y)=0,\ \Gamma(y)=0), \\ \int\limits_0^l f(x)\varphi_0(x)dx=0, \ \int\limits_0^l y(x)\varphi_0(x)dx=0, \end{cases} \tag{23.7}$$

т.е. дополнительные условия ортогональности правой части и решения к $\varphi_0(x)$.

Первое условие согласно лемме 23.1, а второе согласно лемме 23.2. Осталось доказать $\exists$ решения поставленной задачи.

п.24. Обобщенная функция Грина и представление решения с ее помощью.

Обобщенной функцией Грина для краевой задачи, имеющей единственное нормированное решение однородной краевой задачи $\varphi_0(x)$, называется функция $G_0(x,\xi\ )$, удовлетворяющая задаче:

1. По x уравнению $L(G_0)=-\varphi_0(\xi)\varphi_0(x)$, $x\in(0,\xi)$ и $x\in(\xi,l)$.

2. По x граничному условию $G(0,\xi)=G(l,\xi)=0$.

3. В т. $x=\xi$ условию сопряжения

$$\left[G_0\right]_{x=\xi}=0,\ \left[\frac{dG_0}{dx}\right]_{x=\xi}=1/p(\xi).$$

4. Условию ортогональности к $\varphi_0(x)$:

$$\int_0^l G_0(x,\xi)\varphi_0(x)dx=0.$$

Т е о р е м а 24.1. **Обобщенная функция Грина существует и единственна**.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Если было бы две обобщенные функции, то их разность удовлетворяла бы однородной краевой задаче и была бы ортогональна к φ_0. Согласно лемме 23.2 решение такой задачи $\equiv 0 \Rightarrow$ решение единственно.

Докажем теперь $\exists\, G_0(x,\xi)$.

Рассмотрим три функции:

1. $\varphi_0(x);\ L\varphi_0=0;\ \varphi_0(0)=\varphi_0(l)=0,$

2. $\varphi_1(x)$ – линейно независимое с $\varphi_0(x)$ решение уравнения $L(\varphi_1)=0$, причем $\Delta(\varphi_1,\varphi_0)=\varphi_1\varphi'_0\text{-}\varphi'_1\varphi_0{=}1/p(x)$,

3. $\omega(x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} L(\omega)=-\varphi_0(\xi)\varphi_0(x),\ x\in[0,l], \\ \omega(0)=0, \\ \omega'(0)=0. \end{cases} \tag{24.1}$$

Отметим, что $\varphi_1(0)\neq 0$ и $\varphi_1(l)\neq 0,$ иначе в этих точках $\Delta(\varphi_1,\varphi_0)=0$, а функции φ_1 и φ_0 линейно независимы.

Легко показать, что выполняется соотношение

$$\frac{\omega(l)}{\varphi_1(l)}=\varphi_0(\xi). \tag{24.2}$$

Для этого применим к φ_0 и ω формулу Грина

$$\int_0^l(\varphi_0L(\omega)-\omega L(\varphi_0))dx{=}\left\{p(x)\left(\varphi_0\omega'-\varphi'_0\omega\right)\right\}\Big|_0^l.$$

Учитывая свойства φ_0 и ω , получим

$$-\varphi_0(\xi)\int_0^l\varphi_0^2(x)dx=-p(l)\varphi'_0(l)\omega(l)$$

$$\varphi_0(\xi)=p(l)\varphi'_0(l)\omega(l)=\frac{\omega(l)}{\varphi_1(l)}\left(p(l)\varphi'_0(l)\varphi_1(l)\right).$$

Из $\Delta(\varphi_1,\varphi_0){=}1/p(x)\Rightarrow\varphi_1(l)\varphi'_0(l){=}1/p(l)$.

Поэтому имеем (24.2)

$$\varphi_0(\xi)=\frac{\omega(l)}{\varphi_1(l)}.$$

Представим теперь обобщенную формулу Грина в виде:

$$G_0(x,\xi)=\omega(x)+\begin{cases} C_1\varphi_1(x)+C_3\varphi_0(x); & 0\le x\le\xi \\ C_2\varphi_1(x)+C_4\varphi_0(x); & \xi\le x\le l \end{cases}.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению $LG_0=-\varphi_0(\xi)\varphi_0(x)$, а другие условия для G_0 должны быть выполнены подбором $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$.

Граничные условия и условия сопряжения дают:

$$\begin{cases} \omega(0)+C_1\varphi_1(0)+C_3\varphi_0(0)=0 \\ \omega(l)+C_2\varphi_1(l)+C_4\varphi_0(l)=0 \\ C_2\varphi_1(\xi)+C_4\varphi_0(\xi)-C_1\varphi_1(\xi)-C_3\varphi_0(\xi)=0 \\ C_2\varphi'_1(\xi)+C_4\varphi'_0(\xi)-C_1\varphi'_1(\xi)-C_3\varphi'_0(\xi)=1/p(\xi) \end{cases} \tag{24.3}$$

Учитывая, что $\varphi_0(0)=0,\ \varphi_0(l)=0,\ \omega(0)=0,\ \omega'(0)=0$ и $\dfrac{\omega(l)}{\varphi_1(l)}=\varphi_0(\xi)$, получим первые два уравнения системы в виде:

$$C_1\varphi_1(0)=0$$
$$\varphi_0(\xi)\varphi_1(l)+C_2\varphi_1(l)=0.$$

Откуда $C_1=0;\ C_2=-\varphi_0(\xi)$. Тогда вторая пара уравнений системы примет вид:

$$\begin{cases} -\varphi_0(\xi)\varphi_1(\xi)+(C_4-C_3)\varphi_0(\xi)=0 \\ -\varphi_0(\xi)\varphi'_1(\xi)+(C_4-C_3)\varphi'_0(\xi)=\dfrac{1}{p(\xi)}=\varphi_1(\xi)\varphi'_0(\xi)-\varphi'_1(\xi)\varphi_0(\xi) \end{cases}$$

Эти два уравнения эквивалентны и дают:

$$C_4-C_3=\varphi_1(\xi).$$

Таким образом, имеем

$$C_1=0,\ C_2=-\varphi_0(\xi),\ C_4=C_3+\varphi_1(\xi). \tag{24.4}$$

Мы из четырех уравнений получили только три решения, т.к. 3-е и 4-е уравнения были тождественны из-за соотношения (24.2).

Учитывая (24.4), получим $G_0(x,\xi)$ в виде:

$$G_0(x,\xi)=\omega(x)+\begin{cases} C_3\varphi_0(x) & 0\le x\le\xi \\ \varphi_1(\xi)\varphi_0(x)-\varphi_1(x)\varphi_0(\xi)+C_3\varphi_0(x) & \xi\le x\le l. \end{cases}$$

Подставив это выражение в условие ортогональности $G_0(x,\xi)$ к $\varphi_0(x)$, получим:

$$\int_0^l\omega(x)\varphi_0(x)dx+C_3\int_0^l\varphi_0^{\,2}(x)dx+$$

$$+\int_{\xi}^{l}\left(\varphi_1(\xi)\varphi_0(x)-\varphi_1(x)\varphi_0(\xi)\right)\varphi_0(x)dx=0.$$

Откуда находим

$$C_3=\varphi_0(\xi)\int_{\xi}^{l}\varphi_0(x)\varphi_1(x)dx-\varphi_1(\xi)\int_{\xi}^{l}\varphi_0^2(x)dx-\int_0^l\omega(x)\varphi_0(x)dx$$

Функция $G_0(x,\xi)$ полностью определена и удовлетворяет всем условиям задачи. $\exists\, G_0(x,\xi)$ доказано.

Т е о р е м а 24.2. **Необходимым и достаточным условием однозначности и разрешимости неоднородной краевой задачи является условие ортогональности правой части уравнения к собственной функции $\varphi_0(x)$. При этом решение представляется через обобщенную функцию Грина в виде**:

$$y(x)=\int_0^l G_0(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

и оно ортогонально к $\varphi_0(x)$.

Доказательство проводится проверкой удовлетворения $y(x)$ всем условиям задачи, аналогично доказательству теоремы (22.1).

п.25. Задача Штурма-Лиувилля и ее свойства.

Задачей Штурма-Лиувилля называется задача на собственные значения для дифференциального уравнения $L(y)=\left(py'\right)'-qy$, где

$p(x)>0$ – непрерывная дифференцируемая функция,

$q(x)$ – непрерывная функция на $\left[0,l\right]$.

Постановка задачи.

Найти собственные значения $\{\lambda_k\}$, при которых однородная краевая задача

$$\begin{cases} L(y)+\lambda\rho(x)y(x)=0, & x\in\left[0,l\right] \\ \gamma(y(0))=0, \ \Gamma(y(l))=0, & \rho(x)>0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения, $\{y_k(x)\}$ – собственные функции. Предполагаем, что $\lambda=0$ не является собственным значением.

Т е о р е м а 25.1. **Если λ_k собственное значение задачи Штурма-Лиувилля, то ему соответствует единственная собственная функция** $y_k(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Предположим, что существуют две собственные функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$. Тогда они должны быть линейно независимы. Но при $x=0$ выполняется граничное условие

$$\begin{cases} \alpha_1 y_k'(0) + \beta_1 y_k(0) = 0 \\ \alpha_1 z_k'(0) + \beta_1 z_k(0) = 0. \end{cases}$$

Т.к. $\exists$ отличное от нуля решение (α_1, β_1), то однородная алгебраическая система должна иметь определитель, равный нулю. Следовательно,

$\Delta(y_k, z_k) = 0$ при $x = 0 \Rightarrow$

$\Delta(y_k, z_k) = 0$ при $\forall x \in (0, l) \Rightarrow$

$y_k(x),\ z_k(x)$ – линейно зависимы $\Rightarrow$

возможна только одна собственная функция для данного λ_k.

Теорема 25.2. **Собственные функции $y_k(x)$ и $y_m(x)$ для разных собственных значений $\lambda_k \neq \lambda_m$ ортогональны с весом $\rho(x)$, т.е.**

$$\int_0^l \rho(x) y_k(x) y_m(x) dx = 0 \quad k \neq m.$$

Доказательство.

Т.к. $y_k(x)$ и $y_m(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям, то из формулы Грина имеем

$$\int_0^l \left\{ y_k(x) L\left(y_m(x)\right) - y_m(x) L\left(y_k(x)\right) \right\} dx = 0.$$

Подставим $L(y_s) = -\lambda \rho(x) y_s(x)$, получим

$$\left(\lambda_k - \lambda_m\right) \int_0^l \rho(x) y_k(x) y_m(x) dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 25.3. **Для граничных условий I или II рода $y(0) = 0$ (или $y'(0) = 0$); $y(l) = 0$ (или $y'(l) = 0$) и при $q(x) \geq 0$ все собственные значения задачи Штурма - Лиувилля положительны**, $\lambda_n > 0$.

Доказательство.

Умножим уравнение Штурма - Лиувилля при λ_n на $y_n(x)$ и проинтегрируем по x. Тогда

$$\int_0^l y_n(x) \left\{ \frac{d}{dx}\left(p \frac{dy_n}{dx} \right) - q(x) y_n(x) + \lambda_n \rho(x) y_n(x) \right\} dx = 0 .$$

Откуда найдем:

$$\lambda_n = \frac{\int_0^l q(x) y_n^2(x) dx - \int_0^l \frac{d}{dx}\left(p \frac{dy_n}{dx} \right) \cdot y_n(x) dx}{\int_0^l \rho(x) y_n^2(x) dx} .$$

Проинтегрировав по частям и учитывая граничные условия, получим;

$$-\int_0^l \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_n}{dx}\right)y_n(x)=\left(p(x)y_n'(x)y_n(x)\right)\Big|_0^l+\int_0^l p(x)\left[\frac{dy_n}{dx}\right]^2 dx\ .$$

Окончательно получим:

$$\lambda_n=\frac{\int\limits_0^l p(x)\left[y_n'(x)\right]^2 dx+\int\limits_0^l q(x)y_n^2(x)dx}{\int\limits_0^l \rho(x)y_n^2(x)dx}\ ,$$

т.к. $p(x)>0,\ \rho(x)>0,\ q(x)\geq 0$, то имеем $\lambda_k>0$.

Д о п о л н е н и е. Результат теоремы 25.3 $\lambda_k>0$ переносится и на третье краевое условие $\gamma(y)=\alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=0$, если $\beta_1/\alpha_1>0,\ \left(\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0\right)$ и на условие $\Gamma(y)=\alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=0$, если $\beta_2/\alpha_2<0,\ \left(\alpha_2^2+\beta_2^2\neq 0\right)$.

п.26. Редукция задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению.

Запишем задачу Штурма - Лиувилля в виде неоднородной задачи:

$$\begin{cases} L(y)=f,\ f=-\lambda\rho y \\ \gamma(y)=0 \\ \Gamma(y)=0. \end{cases} \tag{26.1}$$

Т.к. $\lambda=0$ не является собственным значением, следовательно, с помощью функции Грина $G(x,\xi)$ (22.7) имеем:

$$y(x)+\lambda\int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)d\xi=0.$$

Если ввести новую функцию $y(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt{\rho(x)}},\quad \rho(x)>0$, то интегральное уравнение запишется в виде:

$$u(x)+\lambda\int_0^l K(x,\xi)u(\xi)d\xi=0 \tag{26.2}$$

$$K(x,\xi)=\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}G(x,\xi).$$

Т.к. $G(x,\xi)=G(\xi,x)$, то ядро $K(x,\xi)=K(\xi,x)$, т.е. (26.2) – интегральное уравнение с симметричным ядром, и мы можем использовать теорию Шмидта.

Интегральное уравнение (26.2) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Интегральное уравнение (26.2) эквивалентно задаче на собственные значения (26.1), т.е. $\forall$ решение (26.2) $\{u_m(x), \lambda_m\}$ является решением (26.1) $\left\{ y_m(x) = \dfrac{u_m(x)}{\sqrt{\rho(x)}}, \lambda_m \right\}$ и наоборот.

Из теории интегральных уравнений с симметричным ядром:

1. Если число собственных значений интегрального уравнения (26.2) конечно, то ядро уравнения называется вырожденным и представимо в виде:

$$K(x,\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{u_m(x)u_m(\xi)}{\lambda_m} . \qquad (26.3)$$

2. Справедлива теорема Гильберта - Шмидта: если правая часть интегрального уравнения

$$u(x) + \lambda \int_0^l K(x,\xi)u(\xi)d\xi = f(x), \qquad (26.4)$$

функция $f(x)$ истокообразно представима, т.е. $\exists h(x) \in C$ такая, что

$$f(x) = \int_0^l K(x,\xi)h(\xi)d\xi \quad , \qquad (26.5)$$

то $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0,l]$ ряд по собственным функциям интегрального уравнения

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m u_m(x); \; u_m(x) + \lambda_m \int_0^l K(x,\xi)u_m(\xi)d\xi = 0 . \qquad (26.6)$$

Т е о р е м а 26.1. **Ядро $K(x,\xi)$ интегрального уравнения (26.2) является невырожденным, а, следовательно, у него и у задачи Штурма - Лиувилля существует бесконечное (счетное) множество собственных значений $\{\lambda_k\}$ и соответствующая им бесконечная последовательность $\{y_n(x)\}$ собственных ортонормированных функций.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Предположим, что ядро $K(x,\xi)$ вырожденное

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}} \sum_{m=1}^{n} \frac{u_m(x)u_m(\xi)}{\lambda_m} . \qquad (26.7)$$

Интегральное уравнение (26.2) имеет собственные функции те же, что и дифференциальное уравнение $\Rightarrow$ они непрерывны и дифференцируемы на $(0,l)$.

Тогда $G(x,\xi)$ из (26.4) тоже непрерывная дифференцируемая функция, но это противоречит условию скачка $G'(x,\xi)$ при $x=\xi$. Следовательно, $K(x,\xi)$ – невырожденное ядро и имеет $\{\lambda_k\}$ и $\{u_k\}$ – счетное число собственных значений и собственных функций. Функции u_k – ортонормированные $\Rightarrow$

$$\int_0^l \rho(x) y_k^2 dx = 1$$

$$\int_0^l \rho\ (x) y_m(x) y_k(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ 1 & m = k \end{cases}$$

Ортогональность с весом $\rho\ (x)$.

п.27. Решение неоднородного интегрального уравнения с симметричным ядром. Теорема Стеклова.

Используя теорему Гильберта-Шмидта, мы можем получить решение неоднородного интегрального уравнения (26.4) в виде разложения по собственным функциям $u_m(x)$. Умножив скалярно (26.4) на $u_m(x)$, получим

$$c_m + \lambda \int_0^l u_m(x) dx \int_0^l K(x,\xi) u(\xi) dx = f_m \ , \tag{27.1}$$

где $c_m = (u, u_m)$; $f_m = (f, u_m)$.

Т.к. ядро симметрично, то, согласно определению собственных функций (26.6), получим:

$$\int_0^l K(x,\xi) u_m(x) dx = \int_0^l K(\xi, x) u_m(x) dx = -\frac{u_m(\xi)}{\lambda_m}. \tag{27.2}$$

Подставив (27.2) в (27.1), найдем

$$c_m - \frac{\lambda}{\lambda_m} \int_0^l u(\xi) u_m(\xi) d\xi = f_m$$

или

$$c_m (1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}) = f_m \ .$$

Откуда получаем

$$c_m = f_m \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda} = f_m + \frac{\lambda}{\lambda_m - \lambda} f_m .$$

Зная c_m, мы можем найти решение неоднородного интегрального уравнения:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m u_m(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_m - \lambda} f_m u_m(x) . \tag{27.3}$$

Эта формула работает для истокообразно представимых $f(x)$.

Разложением решения задачи по $u_m(x)$ можно решать неоднородные дифференциальные уравнения. Обоснованием этого является следующая теорема.

Т е о р е м а 27.1. **Теорема Стеклова.**

Если дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,l]$ функция $z(x)$ удовлетворяет однородным граничным условиям $\gamma\ (z) = 0$ и $\Gamma(z) = 0$, то она

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0,l]$ ряд по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля.

Доказательство.

Т.к. $z(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, то $Lz = f$, где f – непрерывная функция. Т.к. $'z'$ удовлетворяет краевым условиям, то она представима через функцию Грина в виде:

$$z(x) = \int_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi \ ,$$

т.е. $z(x)$ – истокообразованное представление функции $\Rightarrow$ по теореме Гильберта-Шмидта

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n y_n(x),$$

$$z_n = \int_0^l z(x)y_n(x)\rho(x)dx,$$

причем $\int_0^l \rho(x)y_n^2(x)dx = 1$.

Используя теорему Стеклова, мы можем решать неоднородную краевую задачу разложением по собственным функциям.

Имеем задачу

$$L(y) = f,$$
$$\gamma(y) = \Gamma(y) = 0$$

и $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Разложим решение $y(x)$ в ряд по $y_m(x)$:

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} d_m y_m(x).$$

Учитывая, что

$$L(y_m) = -\lambda_m \rho(x) y_m,$$

получим

$$L(y) = -\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \rho\, d_m y_m = f.$$

Откуда находим

$$d_m = -\frac{1}{\lambda_m}\int_0^l f(x)y_m(x)dx$$

или

$$y(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x)}{\lambda_m}\int_0^l f(x)y_m(x)dx.$$

Мы получили выражение для решения нашей задачи через правую часть $f(x)$ и собственные функции, соответствующей задачи Штурма-Лиувилля.

п.28. Поведение решения задачи Штурма-Лиувилля при $x=0$, если $p(x=0)=0$.

Пусть $p(x)=x\varphi(x)$ при $x\to 0$, $\varphi(0)\neq 0$ и $p(x)>0$ при $x\in(0,l]$.

Тогда относительно $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимых решений задачи Штурма - Лиувилля. можно доказать следующее утверждение.

Л е м м а 28.1.

Если $p(x)=x\varphi(x)$ при $x\to 0$ и $\varphi(x)$ – ограничена, $\varphi(0)\neq 0$, $p(x)>0$ при $0<x<l$, а $g(x)=q(x)-\lambda\rho(x)$ ограничено (или может $\to\infty$ при $x\to 0$), то для ограниченного в точке $x=0$ решения задачи Штурма - Лиувилля $y_1(x)$ выполняется условие

$$\lim_{x\to 0} p(x)y_1'(x)=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. $g(x)$ – ограничено. Тогда проинтегрируем уравнение

$$\int_x^{x_1}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right)dx=\int_x^{x_1}g(x)y_1(x)dx,\quad 0<x<x_1<l\ .$$

Откуда

$$p(x)y_1'(x)=p(x_1)y_1'(x_1)-\int_x^{x_1}g(\xi)\,\mathrm{y}_1(\xi)d\xi=Q(x),$$

$$\lim_{x\to 0}p(x)y_1'(x)=\lim_{x\to 0}Q(x)=C.$$

Покажем, что $C=0.$ $Q(x)$ – непрерывно и ограничено на $0<x<x_1$, причем $y_1(x)=y_1(x_1)-\int_x^{x_1}\frac{Q(\xi)d\xi}{p(\xi)}$.

Т.к. $p(\xi)=\xi\varphi(\xi)$, то

$$\lim_{x\to 0}y_1(x)=A<\infty;\ A=y_1(x_1)-\int_0^{x_1}\frac{Q(\xi)d\xi}{\xi\varphi(\xi)}\ .$$

Интеграл сходится, если $Q(\xi)\underset{\xi\to 0}{\to}0$.

2. Случай $g(x)\to\infty$ при $x\to 0$, $p(x)$ – дифференцируемая функция. Легко показать, что ограниченная $y_1(x)$ монотонна при $0<x<x_1$, где $g(x)>0$, (т.к. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$, то $\exists\, x_1$ такое, что $g(x)>0$ при $0<x<x_1$), Если $y_1(x)$ немонотонна при $0<x<x_1$, то она имеет или отрицательный $\min$ или положительный $\max$.

В этой точке $y'=0\Rightarrow$

$$py''+p'y'-g(x)y(x)=0\Rightarrow \frac{y''}{y(x)}=\frac{g(x)}{p(x)},\ \text{но}\ \frac{g(x)}{p(x)}>0\text{, а}$$

$$\frac{y''}{y}<0\begin{cases} y>0,\ y''<0\\ y<0,\ y''>0.\end{cases}$$

Пришли к противоречию $\Rightarrow$ $y_1(x)$ монотонна при $0<x<x_1\Rightarrow$

$Q(x)=p(x_1)y_1'(x_1)-\int\limits_x^{x_1} g(\xi)y_1(\xi)d\xi$ – монотонна ($g>0,\ y_1$ – монотонна) и имеет конечный или бесконечный предел. Если предел $\exists$, то согласно случаю 1 он $=0$! Окончательно

$$\lim_{x\to 0} p(x)y_1'(x)=0.$$

Л е м м а 28.2.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения $L(y)+\lambda\rho y=0$, а $p(x)=x\varphi(x),\ \varphi(x)>0,\ x\in[0,l]$, то, если $y_1(x)$ – ограниченная функция, $\lim\limits_{x\to 0} y_1(x)=C<\infty$, то $y_2(x)$ – неограниченная функция при $x\to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Согласно (22.4) из $\Delta(y_1,y_2)=\dfrac{C}{p(x)}\Rightarrow$

$$y_2(x)=y_1(x)\left\{C_1+C\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{p(\xi)y_1^2(\xi)}\right\}$$

или (т.к. $p(\xi)=\xi\,\varphi(\xi),\ \varphi(\xi)$ – ограничена)

$$y_2(x)=\left[C_1+C\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\xi\,\varphi(\xi)y_1^2(\xi)}\right]:\frac{1}{y_1(x)}.$$

Если $y_1(x)\neq 0$ при $x=0$, то интеграл расходится при $x\to 0,\ y_2(x)$ – неограничена при $x\to 0$. Если $y_1(x)\to 0$ при $x\to 0$, то имеем неопределенность, которую раскрываем по Лопиталю

$$\lim_{x\to 0} y_2(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}\left[C_1 + C\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{p(\xi)y_1^2(\xi)}\right]}{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{y_1(x)}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{C\big/ p(x)y_1^2(x)}{-y_1'\big/ y_1^2(x)} = -C\lim_{x\to 0} \frac{1}{p(x)y'(x)} = \infty \ ,$$

согласно лемме 28.1.

Л е м м а 28.3.

Если в лемме 28.2 функция $y_1(x) = x^n Z(x)$ **при** $x \to 0$**, а** $Z(0) = const \neq 0$**, то**

$$y_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi_1(x)}{x^n};\ \psi_1(0) = const \neq 0,\ n > 0 \\ \psi_2(x)\ln\dfrac{1}{x};\ \psi_2(0) = const \neq 0,\ n = 0 \end{cases}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$y_2(x) = y_1(x)\left\{C_1 + C\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi\ \varphi(\xi)y_1^2(\xi)}\right\} =$$

$$= x^n Z(x)\left\{C_1 + C\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\varphi(\xi)Z^2(\xi)\xi^{2n+1}}\right\} =$$

$$= x^n Z(x)\left\{C_1 + \frac{C}{\varphi(x^*)Z^2(x^*)}\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi^{2n+1}}\right\}$$

по теореме о среднем $0 < x^* < x_0$. Интегрируя получим искомое.

п.29. Уравнение Бесселя. Построение решения в виде степенных рядов.

Уравнением Бесселя называется уравнение

$$\left(xZ_\nu'(x)\right)' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)Z_\nu(x) = 0,\ x \in (0,\infty) \qquad (29.1)$$

$Z_\nu(x)$ – называется цилиндрической функцией ν-го порядка. Т.к. $p(x) = x \Rightarrow p(0) = 0$, то одна цилиндрическая функция ограничена, а другая имеет особенность при $x \to 0$.

Решение уравнения Бесселя легко получить в виде степенного ряда. Из (29.1) имеем

$$x^2 Z_\nu''(x) + x Z_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) Z_\nu = 0.$$

Представим

$$Z_\nu(x) = x^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \,. \qquad (29.2)$$

Подставим в уравнение, тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(\sigma + k)^2 - \nu^2 \right] a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = 0$$

или

$$\left(\sigma^2 - \nu^2 \right) a_0 + \left[(\sigma+1)^2 - \nu^2 \right] a_1 x +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left[(\sigma + k)^2 - \nu^2 \right] a_k + a_{k-2} \right\} x^k = 0 \,.$$

Считая $a_0 \neq 0 \Rightarrow \sigma = \pm\nu$, возьмем $\sigma = \nu$, тогда

$$(2\nu + 1) a_1 = 0; \;\; a_k = \frac{-a_{k-2}}{k(2\nu + k)} \,.$$

Считая $\nu \geq 0$, получим

$$a_1 = 0, \; a_3 = 0 \;\; \text{и т.д.} \;\; a_{2m+1} = 0 \quad m \in \left[0, \infty \right]$$

$$a_0 \neq 0, \; a_2 = -\frac{a_0}{2^2 (\nu + 1)} \;\; \text{и т.д.}$$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m! (\nu + 1)(\nu + 2) ... (\nu + m)} \,.$$

Таким образом Z_ν определяется с точностью до постоянного множителя.

При выборе $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \, \Gamma(\nu + 1)}$ получим Бесселеву функцию первого рода ν -го порядка.

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ – гамма функция

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \; x > 0; \; \Gamma(n+1) = n!, \; \Gamma\left(1/2\right) = \sqrt{\pi} \,.$$

Для $x \leq 0$ берем из $\Gamma(x)\Gamma(-x) = \dfrac{-\pi}{x \sin \pi x}$.

При $x = -n \;\; (n = 0,1,2,...,\infty) \;\; \Gamma(-n) = \pm\infty$,

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+\nu} \, \Gamma(m+1)\Gamma(m + \nu + 1)}$$

имеем

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu} \,.$$

Это при $\nu \geq 0$, а при отрицательных ν имеем $\nu \neq -n$ (n – целое)

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

Это продолжение $\Gamma(x)$ на отрицательное, но нецелое. $J_\nu(x)$ – ограниченное решение, $J_{-\nu}(x)$ – неограниченное решение. Это линейно независимые решения.

Если $\nu=-n$, то легко показать, что $J_{-n}(x)=J_n(x)(-1)^n$,

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n},$$

т.к. $\Gamma(k-n+1)=\pm\infty$ при $k\le n-1$.

Введя $k=m+n$, получим

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}=(-1)^nJ_n(x).$$

При целых $\nu=n$ линейно независимой функцией к $J_n(x)$ является функция Неймана $N_n(x)$ или функция Бесселя второго рода n-го порядка.

п.30. Собственные функции краевой задачи для уравнения Бесселя.

Краевая задача для уравнения Бесселя

$$L(y)=(ty'(t))'-\frac{\nu^2}{t}y(t)=-\lambda\,ty(t),\ t\in(0,l)$$

$y(x=0)$ – ограничена, $y(x=l)=0$ (или $y'(x=l)=0.$)

$$p(t)=t;\ q(t)=\frac{\nu^2}{t};\ \rho(x)=x.$$

Замена переменных $t=x/\sqrt{\lambda}$ приводит к уравнению Бесселя $\Rightarrow$ $y(t)=Z_\nu(\sqrt{\lambda}\,t)$, где $Z_\nu\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)$ – ограниченная цилиндрическая функция, а из условия $Z_\nu\left(\sqrt{\lambda}\,l\right)=0$ (или $Z'_\nu\left(\sqrt{\lambda}\,l\right)=0$) находим $\{\lambda_k\}$ – собственные значения и соответствующие $\varphi_n=Z_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)$ – собственные функции, ортогональные с весом $\rho=x$

$$\int_0^l\varphi_n(x)\varphi_m(x)x\,dx=0,\ \ n\ne m.$$

Рассмотрим следующую задачу Штурма-Лиувиля: найти такие $\{\lambda_k\}$, при которых задача

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy(x)}{dx}\right)=-\lambda xy(x),\ x\in[0,l],\\ y(x=l)=0,\end{cases}\tag{30.1}$$

имеет нетривиальное решение, непрерывное вместе со своими 2-мя производными.

Сделаем замену переменного $x=\frac{t}{\sqrt{\lambda}}$, $y(x=\frac{t}{\sqrt{\lambda}})=Z(t)$.

Тогда придем к уравнению Бесселя нулевого порядка

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}(t\frac{dZ(t)}{dt})+tZ(t)=0\ ,\ t\in\left[0,\sqrt{\lambda}l\right],\\ Z(t=\sqrt{\lambda}l)=0\ .\end{cases}$$

Это уравнение имеет одно ограниченное решение

$$Z(t)=CJ_0(t)\ ;\ y(x)=CJ_0(\sqrt{\lambda}x). \tag{30.2}$$

Краевое условие при $x=l$ дает трансцендентное уравнение для определения собственных значений $\{\lambda_k\}$

$$J_0(\sqrt{\lambda_k}l)=0\ ,\ k\in[1,\infty)\ , \tag{30.3}$$

т.к. функция Бесселя имеет ∞ число корней. Таким образом, мы имеем собственные ортонормированные функции для уравнения (30.1) в виде:

$$y_k=\frac{J_0(\sqrt{\lambda}_k x)}{a_k}\,;\,a_k^2=\int_0^l J_o^2(\sqrt{\lambda}_k x)xdx\,,\,k\in[1,\infty)\ , \tag{30.4}$$

которые ортогональны с весом x:

$$\int_0^l y_k(x)y_m(x)xdx=\begin{cases}0 & k\neq m\\ 1 & k=m\end{cases} \tag{30.5}$$

Любая непрерывная дважды дифференцируемая функция $f(x)$ на отрезке $[0,l]$ может быть разложена в ряд:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k y_k(x), \tag{30.6}$$

где

$$f_k=\int_0^l f(x)y_k(x)xdx\ . \tag{30.7}$$

п.31 Линейные уравнения в частных производных первого порядка.

Рассматривается функция многих переменных

$U(\bar{x})=U(x_1,x_2,\dots,x_n);\quad \frac{\partial U}{\partial x_i}\ ;\ i\in\left[1,n\right]$ – частные производные.

$F(x_1,\dots,x_n,U,\frac{\partial U}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial U}{\partial x_n})=0$ – уравнение в частных производных I порядка.

Линейное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(\bar{x})\frac{\partial U}{\partial x_i}=0,\ \ \bar{x}\in R_n, \tag{31.1}$$

$a_i(\bar{x})$ при $\bar{x}\in G\in R_n$ непрерывные функции со своими первыми частными производными.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(\bar{x}) \neq 0, \quad \bar{x} \in G \tag{31.2}$$

Рассматриваем уравнение (31.1) с условием (31.2)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\bar{x}) \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0; \; \sum_{i=1}^{n} a_i^2(\bar{x}) \neq 0, \; \bar{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Для этого уравнения имеем систему дифференциальных уравнений для фазовых траекторий

$$\frac{dx_1}{a_1(\bar{x})} = \frac{dx_2}{a_2(\bar{x})} = ... = \frac{dx_n}{a_n(\bar{x})}. \tag{31.3}$$

Интегральные кривые системы (31.3) называются характеристиками исходного уравнения. Через каждую точку $M(x_1, \ldots, x_n) \in G$ проходит одна и только одна характеристика.

Т е о р е м а 31.1. **Вдоль характеристики решение $U(\bar{x})$ сохраняет постоянное значение.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Если $\{x_i(t) = x_i\}$ параметрическое задание характеристики, то

$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}\, x_i}{\mathrm{d}\, t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} a_i = 0$ (согласно уравнению 31.1).

Следовательно, $\frac{dU}{dt} = 0$ (вдоль характеристики) $\Rightarrow$

$\Rightarrow U = const$ (вдоль характеристики).

О п р е д е л е н и е. **Первым интегралом уравнения (31.1) называется функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, обращающаяся тождественно в постоянную, когда $M(x_1, \ldots, x_n)$ движется вдоль характеристики** (интегральной кривой системы 31.1).

В частности, пусть $a_n(\bar{x}) \neq 0, \; M \in G$, тогда систему (31.3) можно записать в виде:

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{a_i(\bar{x})}{a_n(\bar{x})} \quad , \; i \in [1, n-1], \tag{31.4}$$

начальные данные $x_i \;\Big|_{x_n = x_n^0} = x_i^0 \quad i \in [1, n-1]$.

Решение системы (31.4)

$$x_i = X_i(x_n, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), \; i \in [1, n-1] \; . \tag{31.5}$$

Функции X_i сопоставляют точки $\{x_i\}$; $\{x_i^0\}$.

Эти точки можно поменять местами, т.е.

$$x_i^0 = X_i(x_n^0, x_1, x_2, ..., x_n), \; i \in [1, n-1], \tag{31.6}$$

Функции $X_i(x_n^0, \bar{x})$ – первые интегралы, т.к. на решении (31.3) обращаются в $x_i^0 = const$.

Взаимная обратимость (31.5) и (31.6) означает неравенство нулю якобиана:

$$\frac{D(X_1, ..., X_{n-1})}{D(x_1, ... x_{n-1})} \neq 0 \quad \text{при } M \in G. \tag{31.7}$$

Это означает, что $X_1,\dots,X_{n-1}$ являются функционально независимыми первыми интегралами.

Т е о р е м а 31.2. **Всякое решение $\Psi(\bar{x})$ уравнения (31.1) является первым интегралом системы (31.4) и, обратно, всякий первый интеграл системы (31.4) $\varphi(\bar{x})$ является решением уравнения (31.1).**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть $\Psi(\bar{x})=U(\bar{x})$ – решение уравнения (31.1) $\Rightarrow$ если $\{x_i = x_i(t)\}$ – уравнение характеристик, то $\dfrac{dU}{dt}=0 \Rightarrow U = const$ на характеристике $\Rightarrow \Psi(\bar{x})$ – первый интеграл.

2. $\varphi(\bar{x})$ – первый интеграл $\Rightarrow \varphi = const$ на характеристике, $\dfrac{d\varphi}{dt}=0$ на характеристике $\Rightarrow \sum\limits_{щ=1} a_i \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0$ на характеристике (т.к. через каждую точку М проходит характеристика) $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0$ всюду в G, т.е. φ – решение (31.1)

Рассмотрим уравнение (31.1) в случае двух независимых переменных $U(x,y)$:

$$A(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}=0,\ \ A,B\in C_1. \tag{31.8}$$

Если ввести вектор $\bar{a}=\{A(x,y),B(x,y)\}$ и $gradU=\left\{\dfrac{\partial U}{\partial x},\dfrac{\partial U}{\partial y}\right\}$, то (31.8) запишется в виде:

$$\bar{a}gradU=0 \tag{31.9}$$

или $\dfrac{\partial U}{\partial a}=0$ (производная по данному направлению $\bar{a}$ равна нулю).

Вектор $\bar{a}=\{A,B\}$ коллинеарен вектору $\bar{k}$, касательному к кривой $U(x,y)=const$ (т.к. $gradU\perp\bar{k}$). Пусть $U(x,y)=const$ дает нам кривую Г, которая задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t). \end{cases} \tag{31.10}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=A(x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=B(x,y), \end{cases} \tag{31.11}$$

т.к. $\bar{k}=\left\{\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right\}$. Система (31.11) определяет кривые (31.10), на которых $u(x,y)=const$.

Фазовые траектории системы (31.11) являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B(x,y)}{A(x,y)} \text{ (или } \frac{dx}{dy}=\frac{A(x,y)}{B(x,y)} \text{)}. \tag{31.12}$$

Интегральные кривые (31.12) называются характеристиками уравнения в частных производных (31.8). Обычно (31.12) записывают в симметричном виде:

$$\frac{dx}{A(x,y)}=\frac{dy}{B(x,y)},\ A^2+B^2\neq 0. \tag{31.13}$$

Т.к. A и B не обращаются одновременно в нуль, то уравнение (31.13) имеет единственное решение задачи Коши. Это означает, что через каждую *точку области G проходит одна и только одна характеристика.*

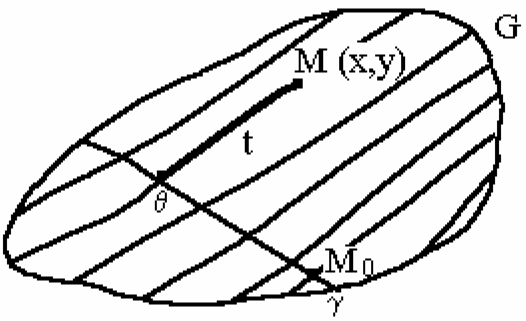
Пусть $U=U(x,y)$ – интегральная поверхность уравнения в частных производных (31.8). Как изменяется U(x,y) вдоль характеристики $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$?

$$U=U(x(t),y(t))\Rightarrow \frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}=A\frac{\partial U}{\partial x}+B\frac{\partial U}{\partial y}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt}\Big|_{x(t),y(t)}=0\Rightarrow U(x,y)=const \text{ на характеристике.}$$

Общее решение уравнения (31.8).

Через любую т. *M(x,y)* проходит характеристика. Пусть γ – кривая, не совпадающая с характеристикой.



Ясно, что характеристики составляют однопараметрическое семейство. Зафиксируем т. M_0 на γ и обозначим расстояние до пересечения характеристики с γ от т. M_0 через θ. Тогда каждой характеристике соответствует свое θ. Если расстояние от М до γ по характеристике обозначим t, то каждой паре (x,y) соответствует своя пара (θ,t), т.е.

$$\begin{cases} x=X(\theta,t) \\ y=Y(\theta,t) \end{cases};\ \begin{cases} \theta=\Theta(x,y) \\ t=T(x,y). \end{cases} \tag{31.14}$$

В переменных θ,t уравнение характеристики

$$\frac{d\theta}{dt}=0, \tag{31.15}$$

т.к. вдоль характеристики при изменении t имеем $\theta = const$. Из (31.15) имеем, что вдоль характеристики

$$\Theta(x, y) = const. \tag{31.16}$$

Выражение (31.16) дает все характеристики, как семейство от параметра θ, т.е. $y = y(x, \theta)$. В переменных (θ, t) легко получить решение уравнения (31.8)

$$U(x, y) = U(X(\theta, t), Y(\theta, t)) = V(\theta, t).$$

На характеристике

$$\frac{dU}{dt} = 0 \text{ и } \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Это означает, что $V = F(\theta)$, где F – произвольная функция. Отсюда получаем, что общее решение уравнения (31.8) представимо в виде:

$$U(x, y) = F(\theta(x, y)), \tag{31.17}$$

где F – произвольная функция, а $\theta(x, y) = const$ на характеристике, $\theta(x, y)$ – первый интеграл.

Достаточно найти такую $\varphi(x, y)$, что на характеристике $\varphi(x, y)\,\Big|_{хар} = const$, тогда общее решение $U(x, y) = F(\varphi(x, y))$.

Задача Коши для уравнения (31.8) ставится следующим образом:

$$\begin{cases} A(x, y)\dfrac{\partial U}{\partial x} + B(x, y)\dfrac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad (x, y) \in G; \\ U(x, y)\,\Big|_{\gamma} = \omega(s); \end{cases} \tag{31.18}$$

где $\gamma = \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$ – кривая, не совпадающая с характеристикой ни на одном интервале положительной длины, а $\omega(s)$ – заданная функция. Если нам известно $\theta(x, y)$, обращающееся в $const$ на характеристике (31.18), то общее решение есть $U = F(\theta(x, y))$. Из начального условия на γ функция F определяется следующим образом:

$\theta(x, y)\,\Big|_{\gamma} = \theta(x(s), y(s)) = \xi(s)$. Разрешив уравнение $\xi(s) = \xi$, получим

$$s = \Omega(\xi) \Rightarrow \Omega(\theta(x, y))\,\Big|_{\gamma} = \Omega(\xi) = S. \tag{31.19}$$

Решение представимо в виде:

$$U(x, y) = \omega(\Omega(\theta(x, y))). \tag{31.20}$$

Это решение уравнения (31.18) и удовлетворяет начальному условию $U\,\Big|_{\gamma} = \omega(s)$, т.к. (31.20), согласно (31.19), на γ дает $\omega(s)$.

п.32 Постановка обратных задач для дифференциального уравнения второго порядка. Неустойчивость задачи определения правой части уравнения.

I Задача определения правой части дифференциального уравнения.

Дана краевая задача для неоднородного уравнения.

$$\left| \begin{array}{l} y''(x) - \omega^2 y(x) = f(x) \quad , \quad x \in [0, H], \\ y(x=0) = 0 \quad , \quad y(x=H) = 0. \end{array} \right. \tag{32.1}$$

Требуется определить $f(x)$ по дополнительному условию

$$y'(x=0) = Z(\omega). \tag{32.2}$$

II Задача определения коэффициентов дифференциального уравнения .

Дана краевая задача для однородного уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} y''(x) - \omega^2 \alpha(x) y(x) = 0 \quad , \quad x \in [0, H], \\ y(x=0) = 1 \quad , \quad y(x=H) = 0 \quad , \quad \alpha(x) > 0; \end{array} \right. \tag{32.3}$$

требуется определить $\alpha(x)$ по дополнительному условию

$$y'(x=0) = Z(\omega). \tag{32.4}$$

Первая задача – линейная, а вторая – нелинейная. Обе задачи неустойчивы. Докажем неустойчивость первой задачи. Для этого редуцируем ее к интегральному уравнению первого рода.

Найдем функцию Грина $G(x, y)$ для задачи (32.1)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2G}{dx^2} - \omega^2 G = 0 \qquad x \in [0, H], x \neq x_0, \\ G \Big|_{x=0} = 0, G \Big|_{x=H} = 0, \\ G(x = x_0 + 0, x_0) - G(x = x_0 - 0, x_0) = 0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x = x_0 + 0} - \dfrac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x = x_0 - 0} = 1. \end{cases} \tag{32.5}$$

Представим функцию Грина в виде:

$$G(x, x_0) = \begin{cases} A(\mathrm{e}^{-\omega x} - \mathrm{e}^{\omega x}) & \text{при} \;\; x \in [0, x_0] \\ B(\mathrm{e}^{-\omega (H-x)} - \mathrm{e}^{\omega (H-x)}) & \text{при} \;\; x \in [x_0, H] \end{cases} \tag{32.6}$$

Подставив в условия при $x = x_0$ в задаче (32.5), получим систему уравнений для определения A и B:

$$B(\mathrm{e}^{-\omega(H-x_0)} - \mathrm{e}^{\omega(H-x_0)}) - A(\mathrm{e}^{-\omega x_0} - \mathrm{e}^{\omega x_0}) = 0,$$
$$B(\mathrm{e}^{-\omega(H-x_0)} + \mathrm{e}^{\omega(H-x_0)}) + A(\mathrm{e}^{-\omega x_0} + \mathrm{e}^{\omega x_0}) = 1/\omega.$$

Откуда находим

$$A = \frac{1}{\omega D}(\mathrm{e}^{-\omega(H-x_0)} - \mathrm{e}^{\omega(H-x_0)}),$$
$$B = \frac{1}{\omega D}(\mathrm{e}^{-\omega x_0} - \mathrm{e}^{\omega x_0}),$$

где

$$D = (\mathrm{e}^{-\omega x_0} + \mathrm{e}^{\omega x_0})(\mathrm{e}^{-\omega(H-x_0)} - \mathrm{e}^{\omega(H-x_0)}) +$$
$$+ (\mathrm{e}^{-\omega x_0} - \mathrm{e}^{\omega x_0})(\mathrm{e}^{-\omega(H-x_0)} + \mathrm{e}^{\omega(H-x_0)}).$$

Подставив найденные A и B в (32.6), найдем

$$G(x,x_0) = \frac{\mathrm{ch}\ \omega(H-x-x_0) - \mathrm{ch}\ \omega(H-|x-x_0|)}{2\omega\,\mathrm{sh}\,\omega H}.$$

Тогда решение краевой задачи (32.1) запишется в виде:

$$y(x) = \int_0^H f(x_0)G(x,x_0)dx_0 \tag{32.7}$$

Подставив (32.7) в дополнительное условие (32.2) и учитывая, что

$$\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{\mathrm{sh}\,\omega(H-x_0)}{\mathrm{sh}\ \omega H},$$

получим:

$$\int_0^H f(x_0)\mathrm{sh}\,\omega(H-x_0)dx_0 = -Z(\omega)\,\mathrm{sh}\,\omega H \tag{32.8}$$

Это — интегральное уравнение I рода для $f(x_0)$ при известном $Z(\omega)$. Покажем неустойчивость интегрального уравнения I рода.

Рассмотрим интегральное уравнение I рода:

$$\int_0^1 K(x,s)y(s)ds = F(x), \quad x \in [0,1]. \tag{32.9}$$

Пусть выполнены условия, при которых решение этого уравнения существует и единственно. Пусть $y_1(s)$ и $y_2(s)$ — непрерывные функции, являющиеся решениями интегрального уравнения (32.9) соответственно для правых частей $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Тогда возьмем:

$$y_2(s) = y_1(s) + A\sin ns. \tag{32.10}$$

Тогда

$$f_2(x)=\int\limits_0^1 K(x,s)(y_1(s)+A\sin ns)ds=$$

$$=f_1(x)+A\int\limits_0^1 K(x,s)\sin ns)ds.$$

Заметим, что $\|y_2(s)-y_1(s)\|_C=\|A\sin ns\|_C=|A|$.

Если $|A|$ велико, то $y_1(s)$ и $y_2(s)$ отличаются сильно, но

$$\|F_2(x)-F_1(x)\|_C=|A|\ \left\|\int\limits_0^1 K(x,s)\sin nsds\right\|_C=\frac{|A|C}{n}<\varepsilon\text{,если } n>N=|A|C/\varepsilon$$

Таким образом, малым изменениям $F(x)$ могут соответствовать большие изменения $y(s)$. Задача неустойчива.

Задачу можно сделать устойчивой, если предположить, что решение принадлежит более узкому классу. Например, пусть априори известно, что $y(s)$ дифференцируема и ее производная ограничена $const=C_0$, а правые части таковы, что они соответствуют этим решениям. Тогда задача станет устойчивой.

$$\|y_2-y_1\|_C=|A|\ ;\|y_2'-y_1'\|_C=n|A|\le C_0\Rightarrow n\le C_0/|A|.$$

$$\|F_2-F_1\|_C=\frac{|A|C}{n}\ge\ \frac{|A|^2 C}{C_0}$$

$$\Rightarrow\|F_2-F_1\|_C\ge\|y_2-y_1\|_C^2\frac{C}{C_0}\Rightarrow$$

Таким образом, если мало $\|F_2-F_1\|_C$ то мало и $\|y_2-y_1\|$.

Именно на этой основе и дано определение корректности задачи по Тихонову:

1. Априори известно, что решение существует и принадлежит более узкому множеству функций Y (называется множеством корректности);

2. Решение единственно;

3. Если правая часть принадлежит F, для которых решение принадлежит Y, то тогда задача устойчива.

п.33. Понятие функционала и вариации. Постановка вариационной задачи. Необходимые условия экстремума.

Функционалом называется отображение множества функций $y\in Y$ в множество чисел (аналогия с функцией, но заданной не на числовом, а на функциональном множестве).

Пример: время, затраченное на прохождение траектории $y=y(x),\ x\in[x_0,x_1]$, если скорость зависит от точки нахождения $v=v(x,y)$

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(x,y)}dx=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx.$$

По аналогии с дифференциалом функции вводится понятие вариации функции.

Вариацией функции $y(x)$ (аргумента функционала) называется разность функций

$$\delta y=y(x)-y_1(x);\ y,y_1\in Y\Rightarrow\delta y=\eta\,(x)\in Y,$$

причем $\eta\,(x_0)=\eta\,(x_1)=0$ – класс с закрепленными концами.

Т.к. в функционал кроме $y(x)$ может входить $y'(x)$ и т.д. до $y^{(k)}(x)$, то кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле k-го порядка ($y\in C_k$), если мало δ_k, где

$$\delta_k=\max_{x\in[x_0-x_1]}\{|y-y_1|,|y'-y_1'|,\ldots,|y^{(k)}-y^{(k)}{}_1|\}.$$

Функционал $\Phi[y(x)]$ называется непрерывным при $y=y_1(x)$ в смысле близости *k*-го порядка, если для любого положительного $\varepsilon>0$ можно найти δ такое, что

$|\Phi(y)-\Phi(y_1)|<\varepsilon$, **если** $\delta_k<\delta$

(функции близости порядка k).

Линейным функционалом называется функционал $L[y]$, удовлетворяющий условиям

$L(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha L(y_1)+\beta L(y_2)$

α,β - $const$.

Пример.

$$L(y)=\int_{x_0}^{x_1}(p(x)y+q(x)y')dx.$$

Вариация функционала – это главная, линейная по отношению к δy, часть приращения функционала

$$\Delta\Phi=\Phi(y+\delta y)-\Phi(y)\xrightarrow[\delta y\to 0]{}\delta\Phi+O(\delta y^2).$$

Другое определение:

$$\varphi\,(\alpha)=\Delta\Phi=\Phi(y+\alpha\,\delta\,y)-\Phi(y)\Rightarrow$$

$$\delta\Phi=\frac{\partial\varphi\,(\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

Вариационные задачи – задачи на экстремум функционала. Например, найти

$$\min_y T=\min_y\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(x,y)}dx,$$

где $v(x,y)$ – задано, а $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$.

Частный случай – задача о брахистроне.

Задача о геофдезических линиях

$$\min l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx\,;\varphi(x,y,z)=0.$$

Необходимое условие экстремума функционала $\delta\Phi(y)=0$.

О п р е д е л е н и е. Функционал $\Phi(y)$ достигает на кривой $y=y_0(x)$ max (или min), если значение функционала $\Phi(y)$ на любой близкой к $y=y_0(x)$ кривой не больше (не меньше), чем $\Phi(y_0)$, т.е.

$\Delta\Phi\Big|_{y_0}\le 0$ (или $\Delta\Phi\Big|_{y_0}\ge 0$).

Т е о р е м а 33.1 **Если функционал $\Phi(y)$, имеющий вариацию, достигает максимума (или минимума) при $y=y_0(x)$, где $y_0(x)$ внутренняя точка области определения функционала, то при $y_0(x)$**

$$\delta\Phi(y)\Big|_{y=y_0(x)}=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

При фиксированных $y_0(x)$ и δy функционал $\Phi(y_0(x)+\alpha\,\delta\,y)=\varphi(\alpha)$. По предположению $\varphi(\alpha)$ достигает max (или min) при $\alpha=0\Rightarrow\varphi'(0)=0\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\Phi(y_0(x)+\alpha\,\delta\,y))\Big|_{\alpha=0}=\delta\Phi=0.$$

Если экстремум достигается для $y(x)$ близких к y_0 нулевого порядка, то **экстремум сильный**, если для близких к y_0 первого (или выше) порядка, то **экстремум слабый.**

Близость в C или в C_k.

п.34. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнения Эйлера.

Л е м м а 34.**1 Основная лемма.**

Если для каждой непрерывной на $[x_0,x_1]$ функции $\eta(x)[\eta(x_0)=\eta(x_1)=0]$ выполняется условие

$$\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\eta(x)dx=0,$$

где $\Phi(x)$ непрерывная на $[x_0,x_1]$ функция, то $\Phi(x)\equiv 0$ при $x\in[x_0,x_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $\exists\ \bar{x} \in [x_0, x_1]$ такое, что $\Phi(\bar{x}) \neq 0$. Тогда из непрерывности $\Phi(x) \Rightarrow$, что $\exists$ окрестность $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ т. $\bar{x}$, где $\Phi(x)$ сохраняет знак.

Взяв

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [\bar{x}_0, \bar{x}_1] \\ \geq 0 & x \in [\bar{x}_0, \bar{x}_1] \end{cases},$$

получим;

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \Phi(x)\eta(x)dx \neq 0.$$

Пришли к противоречию $\Rightarrow \Phi(x) \equiv 0.$

Уравнения Эйлера.

Т е о р е м а 34.1 **Необходимым условием экстремума функционала** $\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ **при** $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ **является выполнение на экстремали** $y(x)$ **уравнения Эйлера.**

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $y(x)$ – экстремаль (т.е. на $y(x)$ достигается экстремум $\Phi(y)$). Тогда зададим параметрическое семейство функций

$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\,\delta y$; $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0.$

На этом семействе имеем $\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \alpha\delta\, y, y' + \alpha\delta\, y')dx.$

Необходимые условия экстремума

$$\delta\Phi = 0 \Rightarrow \varphi'\ (\alpha = 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \{F_y \frac{\partial\, y(x,\alpha)}{\partial\,\alpha} + F_{y'} \frac{\partial\, y'(x,\alpha)}{\partial\,\alpha}\} \Rightarrow$$

$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \{F_y \delta\, y + F_{y'} \delta\, y'\}dx$ – интегрируем по частям:

$$\varphi'(0) = (F_y \delta\, y)\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} [F_y - \frac{dF_{y'}}{dx}]\delta\, y(x)dx = 0 \Rightarrow$$

по основной лемме $F_y - \dfrac{dF_{y'}}{dx} = 0$ (уравнение Эйлера) или

$$\begin{cases} F_y - F_{xy'} - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0\,, x \in [x_0, x_1], \\ y(x_0) = y_0 \;\;,\;\; y(x_1) = y_1, \end{cases}$$

п.35. Функционалы, содержащие производные порядка выше первого и зависящие от нескольких функций. Необходимые условия экстремума.

Функционал от нескольких функций.

$$\begin{cases} \Phi(\overline{y}) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \overline{y}, \overline{y}')dx, \\ \overline{y}(x_0) = \overline{y}^0 \;, \overline{y}(x_1) = \overline{y}^{(1)}, \end{cases}$$

$y = \{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$.

Варьируем $\overline{y} + \delta\overline{y}$; $\delta\overline{y} = \{\delta \mathrm{y}_1, ..., \delta y_n\}$. Так как $\delta\overline{y}_i$ любая непрерывная на $[x_0, x_1]$ функция, обращающая на концах в нуль $\delta y_i(x_0) = \delta y_i(x_1) = 0$, то всегда можно все δy взять равными нулю, кроме δy_i и тогда получим уравнение Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}(F_{y_i'}) = 0 \;\; i \in [1, n]\,.$$

Функционал со старшими производными.

$$\begin{cases} \Phi(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', ..., y^{(n)})dx, \\ y(x_0) = y_0 \,, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(\mathrm{n\text{-}1})}(x_0) = y_0^{(n-1)} \,, \\ y(x_1) = y_1 \,, y'(x_1) = y_1', ..., y^{(\mathrm{n\text{-}1})}(x_1) = y_1^{(n-1)}. \end{cases}$$

Пусть $y(x)$ – экстремаль имеет $2n$ непрерывных производных. Варьируем ее в параметрическом в виде: $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\,\delta y$, причем при x_0 и x_1 имеем

$$\delta y = 0, \delta y' = 0, ..., \delta y^{(n-1)} = 0. \qquad (*)$$

Тогда

$$\varphi(\alpha) = \Phi(y + \alpha\,\delta\, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y + \alpha\,\delta\, y, ..., y^{(n)} + \alpha\,\delta\, y^{(n)})dx,$$

$$\varphi'(\alpha = 0) = \delta\,\Phi = \int\limits_{x_0}^{x_1} \{F_y \delta\, y + F_{y'} \delta\, y' + ... + F_{y^{(n)}} \delta\, y^{(\mathrm{n})}\} dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая (*), получим

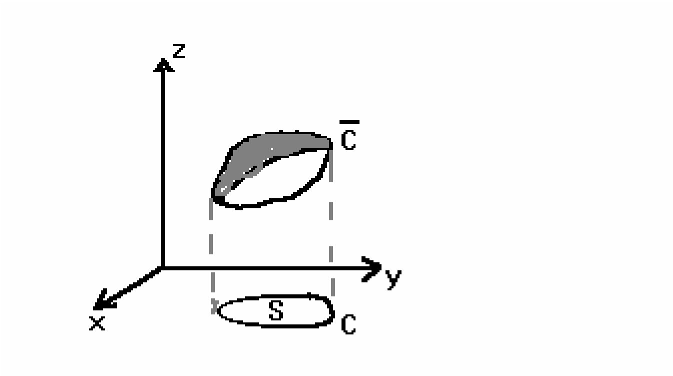
$\delta\,\Phi = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}(F_{y^{(k)}})\delta\, y dx = 0,$ $\quad\delta\, y$ – любая непрерывная функция. Тогда по основной лемме:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}(F_{y^{(k)}}) = 0$$ уравнение Эйлера-Пуассона.

п.36. Многомерные вариационные задачи. Уравнение Эйлера-Остроградского.

Исследуем функционал от функции двух переменных $z(x, y)$, т.е.

$$\Phi(z(x, y)) = \iint\limits_S F(x, y, z, \frac{\partial\, z}{\partial\, x}, \frac{\partial\, z}{\partial\, y})dxdy$$



$$z(x, y)\Big|_{x,\,y \in C} = z_0(x, y).$$

Все допустимые поверхности $z(x, y)$ проходят через контур $\overline{C}$ (его проекция C).

Вариация $z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha\,\delta z(x, y) \quad \delta z(x, y)\Big|_C = 0.$

$$\varphi(\alpha) = \iint\limits_S F(x, y, z + \alpha\,\delta\, z, \frac{\partial\, z}{\partial\, x} + \alpha\,(\delta\, z)_x, \frac{\partial\, z}{\partial\, y} + \alpha\,(\delta\, z)_y)dxdy,$$

$$\delta\,\Phi = \varphi'(\alpha = 0) = \iint\limits_S (\frac{\partial\, F}{\partial\, z}\delta\, z + \frac{\partial\, F}{\partial\, p}\delta\, p + \frac{\partial\, F}{\partial\, q}\delta\, q)dxdy,$$

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta z)=\frac{\partial F_p}{\partial x}\delta z+F_p\delta p\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta z)=\frac{\partial F_q}{\partial y}\delta z+F_q\delta q\ .$$

Откуда

$$\delta\,\Phi=\iint\limits_S\left(\frac{\partial\,F}{\partial\,z}-\frac{\partial\,F_p}{\partial\,x}-\frac{\partial\,F_q}{\partial\,y}\right)\delta\,zdxdy+$$

$$+\iint\limits_S\left(\frac{\partial}{\partial\,x}(F_p\delta\,z)+\frac{\partial}{\partial\,y}(F_q\delta\,z)\right)dxdy$$

По формуле Грина

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial\,N}{\partial\,x}+\frac{\partial\,M}{\partial\,y}\right)dxdy=\oint\limits_C(Ndy-Mdx)\Rightarrow$$

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial}{\partial\,x}(F_p\delta z)+\frac{\partial}{\partial\,y}(F_q\delta z)\right)dxdy=$$

$$=\oint\limits_C(F_p\delta zdy-F_q\delta zdx)=0\quad(\text{т.к. на } C\ \delta z=0)$$

$$\Rightarrow\delta\,\Phi=\iint\limits_S\left(\frac{\partial\,F}{\partial\,z}-\frac{\partial\,F_p}{\partial\,x}-\frac{\partial\,F_q}{\partial\,y}\right)\delta zdxdy\,.$$

Т.к. δz – произвольная непрерывная функция, то по основной лемме уравнение Эйлера-Остроградского

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F_p}{\partial x}-\frac{\partial F_q}{\partial y}=0.$$

Пример:

$$\Phi=\iint\limits_D\left\{\left(\frac{\partial\,z}{\partial\,x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,z}{\partial\,y}\right)^2\right\}dxdy\Rightarrow\frac{\partial^{\,2}z}{\partial\,x^2}+\frac{\partial^{\,2}z}{\partial\,y^2}=\Delta u=0\,.$$

Это уравнение Лапласа.

п.37. Вариационные задачи на условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Найти экстремум функционала, зависящего от нескольких функций.

$$
(*)\begin{cases}
\Phi(\overline{y}) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \overline{y}, \overline{y}')dx \;;\; y = \{y_1, ..., y_n\} \\
\text{при дополнительных условиях} \\
\varphi_i(x, y) = 0 \;\; i \in [1, m], \;\; m < n \\
\overline{y}(x_0) = \overline{y}^0; \; \overline{y}(x_1) = \overline{y}^1; \varphi_i(x_0, \overline{y}^0) = 0; \varphi_i(x_1, \overline{y}^1) = 0
\end{cases}
$$

Уравнения $\varphi_i(x, \overline{y}) = 0$ предполагаются независимыми. Пусть они независимы как функции от первых m переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$, т.е.

$$
\frac{D(\varphi_{1,}\ \varphi_{2,\ \ldots,}\ \varphi_{m})}{D(y_{1,}\ y_{2,\ \ldots,}\ y_m)} \neq 0.
$$

Т е о р е м а 37.**1 Вектор функция $\overline{y}(x)$, реализующая условный экстремум (*), удовлетворяет при соответствующем выборе множителей $\lambda_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ уравнениям Эйлера, составленным для функционала**

$$
\widetilde{\Phi}(\overline{y}) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (F(x, \overline{y}, \overline{y}') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i(x, y))dx
$$

Функции $\lambda_i(x)$ $i \in [1, m]$ и $\overline{y}(x)$ определяется из уравнения Эйлера

$$
\left[\begin{array}{l}
\widetilde{F}_{y_k} - \dfrac{d}{dx}(\widetilde{F}_{y'_k}) = 0, \; k \in [1, n] \\
\varphi_i(x, \overline{y}) = 0, \;\; i \in [1, m]
\end{array}\right., \tag{37.1}
$$

где

$$
\widetilde{F}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}') = F(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i(x, y) \;. \tag{37.2}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\overline{y}$ – экстремаль задачи (*), то

$$
\delta\, \Phi = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} (F_{y_k} \delta\, y_k + F_{y'_k} \delta\, \mathrm{y}'_\mathrm{k})dx = 0 \,.
$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\delta y_k(x_0) = \delta y_k(x_1) = 0$, получим

$$
\int\limits_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} \left(F_{y_k} - \frac{d}{dx}(F_{y'_k}) \right) \delta\, y_k dx = 0. \tag{37.3}
$$

Но применить основную лемму нельзя из-за того, что δy_k не произвольны, т.к. есть связь через условия $\varphi_i = 0$.

Т.к. δy_k малы, то связи можно линеаризовать, разлагая в ряд Тейлора и пренебрегая $(\delta y)^2$. Тогда

$$
\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \delta y_k = 0 \quad , \quad i \in [1, m]. \tag{37.4}
$$

Умножив (37.4) на $\lambda_i(k)$, проинтегрировав по x, просуммировав по i и сложив с (37.3), получим:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_k}\right)\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k}\right)\delta y dx=0$$

или, введя $\tilde{F}$, получим

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\widetilde{F}_{y_k}-\frac{d}{dx}(\widetilde{F}_{y'_k})\right)\right)\delta y_k dx=0\,. \tag{37.5}$$

Пока δy_k не являются независимыми и основную лемму применить нельзя.

Возьмем λ_i $i\in[1,m]$ такими, что удовлетворяется

$$\begin{cases} F_{y_k}-\dfrac{d}{dx}(F_{y'_k})+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}=0 \\ \text{при} \quad k=1,2,...,m \end{cases} \tag{37.6}$$

Это – линейная система с определителем, не равным нулю $\dfrac{D(\varphi_1,...\varphi_m)}{D(x_1,...x_m)}\neq 0$

$\Rightarrow$ система имеет решение, а(37.5) для даннных $\{\lambda_i\}$ имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{k=m+1}^{n}\left(\widetilde{F}_{y_k}-\frac{d}{dx}(\widetilde{F}_{y'_k})\right)\right)\delta y_k dx=0\,.$$

Теперь $\delta_k y$ при $k\in[(m+1),n]$ независимы и можно использовать основную лемму. В результате получим:

$$\widetilde{F}_{y_k}-\frac{d}{dx}(\widetilde{F}_{y'_k})=0 \quad k\in[(m+1),n].$$

Учитывая (37.6), получим окончательно

$$\begin{cases} \widetilde{F}_{y_k}-\dfrac{d}{dx}(\widetilde{F}_{y'_k})=0 & k\in[1,n] \\ \varphi_i(x,\bar{y})=0 & i\in[1,m] \end{cases}$$

Теорема доказана.

Если $\varphi_i(\bar{y})=0$, т.е. нет зависимости от *x,* то $\lambda_i=const$. Задача решается проще.

Мы рассмотрели случай конечных связей, зависящих только от x и y. Такие связи $\varphi_i(x,\bar{y}) = 0$ называются неголономными. Возможны диф. связи:

$$\varphi_i(x,\bar{y},\bar{y}') = 0,$$

которые называются **голономными**. Теорема 37.1 переносится и на случай голономных связей.

Содержание

Часть II. Краевые задачи и вариационное исчисление 51