МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

А.М. ДЕНИСОВ, А.В. РАЗГУЛИН

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 2

МОСКВА — 2009 г.

Пособие отражает содержание второй части лекционного курса "Обыкновенные дифференциальные уравнения", читаемого студентам факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова в соответствии с программой по специальности "Прикладная математика и информатика" .

Оглавление

Глава 1

Зависимость решения задачи Коши от исходных данных и параметров

1.1. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от исходных данных

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \tag{1.1}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{1.2}$$

Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$Q = \{(t, y) : \quad |t - t_0| \leqslant T, \quad A \leqslant y \leqslant B\}.$$

Определение 1.1.1. *Решением задачи Коши (1.1), (1.2) на отрезке* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *называется функция* $y(t)$ *такая, что* $y(t)$ *непрерывно дифференцируема на* $[t_0 - T, t_0 + T]$, $A \leqslant y(t) \leqslant B$ *для* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $y(t)$ *удовлетворяет (1.1), (1.2).*

Решение задачи Коши (1.1), (1.2) зависит от функции $f(t, y)$ и начального состояния y_0, которые можно называть *исходными данными* задачи Коши (1.1), (1.2). Как зависит решение этой задачи от изменения исходных данных, то есть функции $f(t, y)$ и начального состояния y_0? Покажем, что небольшие изменения исходных данных приводят к небольшим изменениям решения задачи Коши. Таким образом, можно говорить о непрерывной зависимости решения задачи Коши от исходных данных.

1.1.1. Непрерывная зависимость от исходных данных

Теорема 1.1.1. *Пусть функции* $f_1(t, y)$ *и* $f_2(t, y)$ *непрерывны в прямоугольнике* Q *и* $f_1(t, y)$ *удовлетворяет в* Q *условию Липшица по* y, *то есть существует константа* $L > 0$ *такая, что*

$$|f_1(t,y) - f_1(t,\widetilde{y})| \leqslant L|y - \widetilde{y}|, \quad \forall (t,y),(t,\widetilde{y}) \in Q.$$

Тогда, если функции $y_1(t)$ *и* $y_2(t)$ *на отрезке* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *являются решениями задач Коши*

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)), \\ y_2(t_0) = y_{02}, \end{cases}$$

то имеет место неравенство

$$\max_{t\in[t_0-T,t_0+T]} |y_1(t) - y_2(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \left(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y)\in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)| \right) \exp\{LT\}. \quad (1.3)$$

Доказательство. Из леммы об эквивалентности задачи Коши интегральному уравнению следует, что функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются решениями интегральных уравнений

$$y_1(t) = y_{01} + \int_{t_0}^{t} f_1(\tau, y_1(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$

$$y_2(t) = y_{02} + \int_{t_0}^{t} f_2(\tau, y_2(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая по модулю, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant |y_{01} - y_{02}| + \left| \int_{t_0}^{t} \big(f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau)) \big) d\tau \right|.$$

Вычитая и прибавляя под знаком интеграла $f_1(\tau, y_2(\tau))$, получим

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant |y_{01} - y_{02}| + \left| \int_{t_0}^{t} \big| f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_1(\tau, y_2(\tau)) \big| d\tau \right| +$$
$$+ \left| \int_{t_0}^{t} \big| f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau)) \big| d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \quad (1.4)$$

Учитывая то, что функция $f_1(t,y)$ удовлетворяет условию Липшица, а также оценку

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t}\big|f_1(\tau,y_2(\tau))-f_2(\tau,y_2(\tau))\big|d\tau\right|\leqslant T\max_{(t,y)\in Q}|f_1(t,y)-f_2(t,y)|,$$

справедливую для всех $t\in[t_0-T,t_0+T]$, неравенство (1.4) можно переписать так:

$$|y_1(t)-y_2(t)|\leqslant\big(|y_{01}-y_{02}|+T\max_{(t,y)\in Q}|f_1(t,y)-f_2(t,y)|\big)+\\ +L\left|\int\limits_{t_0}^{t}\big|y_1(\tau)-y_2(\tau)\big|d\tau\right|,\quad t\in[t_0-T,t_0+T].$$

Применив к функции $|y_1(t)-y_2(t)|$ лемму Гронуолла-Беллмана **??**, при $t\in[t_0-T,t_0+T]$ получим неравенство

$$|y_1(t)-y_2(t)|\leqslant\big(|y_{01}-y_{02}|+T\max_{(t,y)\in Q}|f_1(t,y)-f_2(t,y)|\big)\exp\{L|t-t_0|\},$$

из которого следует оценка (1.3). Теорема 1.1.1 доказана. □

1.1.2. Теорема сравнения

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких условиях решение одной задачи Коши будет больше или равно решению другой задачи Коши. Теоремы такого типа часто называют теоремами сравнения.

Рассмотрим прямоугольник

$$Q_+=\{(t,y):\quad t_0\leqslant t\leqslant t_0+T,\quad A\leqslant y\leqslant B\}.$$

Далее мы используем следующее простое утверждение из математического анализа, представляющее собой формулу конечных приращений в интегральном виде.

Лемма 1.1.1. *Пусть функция $f(t,y)$ непрерывна в Q_+ и имеет в Q_+ непрерывную частную производную $f_y(t,y)$. Тогда для любых (t,y_1), $(t,y_2)\in Q_+$ справедливо равенство*

$$f(t,y_1)-f(t,y_2)=\int\limits_0^1 f_y(t,y_2+\theta(y_1-y_2))d\theta\,(y_1-y_2).\qquad(1.5)$$

Докажем теперь теорему о сравнении решений двух задач Коши, которую также часто называют *неравенством Чаплыгина.*

Теорема 1.1.2. *(Теорема сравнения) Пусть функции* $f_1(t,y)$, $f_2(t,y)$ *непрерывны в* Q_+ *и* $f_1(t,y)$ *имеет в* Q_+ *непрерывную частную производную* $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(t,y)$*. Тогда, если функции* $y_1(t)$, $y_2(t)$ *на отрезке* $[t_0, t_0+T]$ *являются решениями задач Коши*

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)), \\ y_2(t_0) = y_{02}, \end{cases}$$

причем

$$f_1(t,y) \geqslant f_2(t,y), \quad (t,y) \in Q_+, \qquad y_{01} \geqslant y_{02},$$

то справедливо неравенство

$$y_1(t) \geqslant y_2(t), \quad t \in [t_0, t_0+T].$$

Доказательство. Так как функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на отрезке $[t_0, t_0+T]$ являются решениями соответствующих уравнений, то они непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t_0+T]$, $A \leqslant y_i(t) \leqslant B$, $i = 1, 2$, и справедливо равенство

$$y_1'(t) - y_2'(t) = f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)), \quad t \in [t_0, t_0+T]. \tag{1.6}$$

Преобразуем правую часть этого равенства, используя формулу конечных приращений (1.5),

$$f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) =$$
$$= f_1(t, y_1(t)) - f_1(t, y_2(t)) + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)) =$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial y}\big(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t))\big)d\theta\big(y_1(t) - y_2(t)\big) +$$
$$+ f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)).$$

Введем обозначения

$$v(t) = y_1(t) - y_2(t),$$
$$p(t) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial y}\big(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t))\big)d\theta,$$
$$h(t) = f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)).$$

Тогда $f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) = p(t)v(t) + h(t)$, и равенство (1.6) можно переписать так:

$$v'(t) = p(t)v(t) + h(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием $v(t_0) = y_{01} - y_{02}$ имеет вид

$$v(t) = (y_{01} - y_{02}) \exp\Big\{ \int\limits_{t_0}^{t} p(\xi) d\xi \Big\} + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\Big\{ \int\limits_{\tau}^{t} p(\xi) d\xi \Big\} h(\tau) d\tau, \ t \in [t_0, t_0 + T].$$

Так как из условий теоремы следует, что

$$y_{01} - y_{02} \geqslant 0, \quad h(t) \geqslant 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T],$$

то

$$v(t) = y_1(t) - y_2(t) \geqslant 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T],$$

и теорема 1.1.2 доказана. □

1.2. Зависимость решения задачи Коши от параметра

В этом параграфе мы рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, в которой правая часть уравнения и начальное условие зависят от параметра μ, и выясним при каких условиях решение этой задачи Коши будет непрерывно и дифференцируемо по параметру.

Обозначим

$$Q_\mu = \{(t, y, \mu) : \quad |t - t_0| \leqslant T, \quad A \leqslant y \leqslant B, \quad \mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2\}.$$

Пусть функция $f(t, y, \mu)$ определена на множестве Q_μ, а функция $y_0(\mu)$ определена на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(t) = f(t, y(t), \mu), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \tag{1.7}$$
$$y(t_0) = y_0(\mu). \tag{1.8}$$

Так как при различных значениях параметра μ мы будем получать различные решения задачи Коши (1.7), (1.8), то, очевидно, что решение этой задачи зависит не только от переменной t, но и от параметра μ. В связи с этим далее решение задачи Коши (1.7), (1.8) мы будем обозначать $y(t, \mu)$. При каких условиях решение задачи Коши $y(t, \mu)$ будет непрерывно по параметру μ ?

1.2.1. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметра

Теорема 1.2.1. *Пусть функция $f(t, y, \mu)$ непрерывна в Q_μ и удовлетворяет в Q_μ условию Липшица по y, то есть*

$$|f(t, y_1, \mu) - f(t, y_2, \mu)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1, \mu), (t, y_2, \mu) \in Q_\mu,$$

а функция $y_0(\mu)$ непрерывна на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Тогда, если $y(t, \mu)$ – решение задачи Коши (1.7), (1.8) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то функция $y(t, \mu)$ непрерывна по μ при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Доказательство. По условию решение задачи Коши $y(t, \mu)$ существует для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ и $A \leqslant y(t, \mu) \leqslant B$ для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. Пусть μ_0 и $\mu_0 + \Delta\mu$ две произвольные точки отрезка $[\mu_1, \mu_2]$. Рассмотрим решения задачи Коши $y(t, \mu_0)$ и $y(t, \mu_0 + \Delta\mu)$, соответствующие этим значениям параметров. Введем обозначения

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t, \mu_0), \quad & y_2(t) &= y(t, \mu_0 + \Delta\mu), \\ f_1(t, y) &= f(t, y, \mu_0), \quad & f_2(t, y) &= f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu), \\ y_{01} &= y_0(\mu_0), \quad & y_{02} &= y_0(\mu_0 + \Delta\mu). \end{aligned}$$

Для функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ выполнены условия теоремы 1.1.1 о непрерывной зависимости решения задачи Коши от исходных данных. Применяя эту теорему, получим

$$\max_{t\in[t_0-T,t_0+T]}|y(t,\mu_0)-y(t,\mu_0+\Delta\mu)| = \max_{t\in[t_0-T,t_0+T]}|y_1(t)-y_2(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \Big(|y_{01}-y_{02}| + T\max_{(t,y)\in Q}|f_1(t,y)-f_2(t,y)|\Big)\exp\{LT\} =$$
$$= \Big(|y_0(\mu_0)-y_0(\mu_0+\Delta\mu)|+$$
$$+ T\max_{(t,y)\in Q}|f(t,y,\mu_0)-f(t,y,\mu_0+\Delta\mu)|\Big)\exp\{LT\}, \quad (1.9)$$

где $Q=\{(t,y): |t-t_0|\leqslant T, \quad A\leqslant y\leqslant B\}$.

Покажем, что из неравенства (1.9) следует непрерывность функции $y(t,\mu)$ в точке μ_0. Пусть ε – произвольное положительное число. Покажем, что найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $t\in[t_0-T,t_0+T]$

$$|y(t,\mu_0+\Delta\mu)-y(t,\mu_0)|\leqslant\varepsilon \quad (1.10)$$

при $|\Delta\mu|\leqslant\delta(\varepsilon)$.

Так как непрерывная на отрезке $[\mu_1,\mu_2]$ функция $y_0(\mu)$ равномерно непрерывна на этом отрезке, то существует $\delta_1(\varepsilon)$ такое, что

$$|y_0(\mu_0+\Delta\mu)-y_0(\mu_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\exp\{LT\}} \quad (1.11)$$

при $|\Delta\mu|\leqslant\delta_1(\varepsilon)$.

Так как непрерывная на ограниченном замкнутом множестве Q_μ функция $f(t,y,\mu)$ равномерно непрерывна на этом множестве, то существует $\delta_2(\varepsilon)$ такое, что для любых $t\in[t_0-T,t_0+T]$ и $y\in[A,B]$

$$|f(t,y,\mu_0+\Delta\mu)-f(t,y,\mu_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2T\exp\{LT\}} \quad (1.12)$$

при $|\Delta\mu|\leqslant\delta_2(\varepsilon)$.

Из неравенств (1.9), (1.11) и (1.12) следует, что при $|\Delta\mu|\leqslant\delta(\varepsilon)=\min\{\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$ справедливо неравенство (1.10), которое означает непрерывность функции $y(t,\mu)$ по μ. Теорема 1.2.1 доказана. □

Замечание 1.2.1. *В теореме 1.2.1 фактически доказана равномерная на множестве $[t_0-T,t_0+T]\times[\mu_1,\mu_2]$ непрерывность решения задачи Коши по параметру μ. Отсюда нетрудно показать, что функция $y(t,\mu)$ непрерывна по совокупности переменных (t,μ) на множестве $[t_0-T,t_0+T]\times[\mu_1,\mu_2]$.*

1.2.2. Дифференцируемость решения задачи Коши по параметру

Покажем теперь, что при определенных условиях, решение $y(t,\mu)$ задачи Коши (1.7), (1.8) будет дифференцируемым по параметру μ.

Теорема 1.2.2. *Пусть функция $f(t,y,\mu)$ непрерывна в Q_μ и имеет в Q_μ непрерывные частные производные $f_y(t,y,\mu)$, $f_\mu(t,y,\mu)$, а функция $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\mu_1,\mu_2]$.*

Тогда, если $y(t,\mu)$ – решение задачи Коши (1.7), (1.8) на отрезке $[t_0-T,t_0+T]$ для всех $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$, то функция $y(t,\mu)$ имеет при $t\in[t_0-T,t_0+T]$, $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$ производную по μ.

Доказательство. По условию решение задачи Коши $y(t,\mu)$ существует для всех $t\in[t_0-T,t_0+T]$, $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$ и $A\leqslant y(t,\mu)\leqslant B$ для всех $t\in[t_0-T,t_0+T]$, $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$. Пусть μ и $\mu+\Delta\mu$ две произвольные точки отрезка $[\mu_1,\mu_2]$. Рассмотрим соответствующие этим параметрам решения задачи Коши $y(t,\mu)$ и $y(t,\mu+\Delta\mu)$. Определим функцию

$$v(t,\mu,\Delta\mu)=\frac{y(t,\mu+\Delta\mu)-y(t,\mu)}{\Delta\mu},\quad t\in[t_0-T,t_0+T].$$

Так как функции $y(t,\mu+\Delta\mu)$, $y(t,\mu)$ являются решениями уравнения (1.7) на отрезке $[t_0-T,t_0+T]$ при соответствующих значениях параметров, то

$$v'(t,\mu,\Delta\mu)=\frac{f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)}{\Delta\mu}. \tag{1.13}$$

Преобразуем выражение, стоящее в правой части этого равенства

$$\frac{f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)}{\Delta\mu}=$$
$$=\frac{f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)}{\Delta\mu}+$$
$$+\frac{f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)}{\Delta\mu}.$$

Применяя формулу конечных приращений (1.5), получим

$$\frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu)}{\Delta\mu} =$$

$$= \int_0^1 f_y(t, y(t, \mu) + \theta(y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)), \mu + \Delta\mu) d\theta \cdot \frac{y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)}{\Delta\mu}.$$

Введем функции

$$p(t, \mu, \Delta\mu) = \int_0^1 f_y(t, y(t, \mu) + \theta(y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)), \mu + \Delta\mu) d\theta,$$

$$q(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}.$$

Учитывая сделанные обозначения, имеем

$$\frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu} =$$

$$= p(t, \mu, \Delta\mu) v(t, \mu, \Delta\mu) + q(t, \mu, \Delta\mu).$$

Подставляя это равенство в правую часть (1.13), получим, что функция $v(t, \mu, \mu + \Delta\mu)$ является решением линейного дифференциального уравнения первого порядка на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$:

$$v'(t, \mu, \Delta\mu) = p(t, \mu, \Delta\mu) v(t, \mu, \Delta\mu) + q(t, \mu, \Delta\mu). \tag{1.14}$$

Из определения $v(t, \mu, \Delta\mu)$ следует, что она удовлетворяет начальному условию

$$v(t_0, \mu, \Delta\mu) = \frac{y_0(\mu + \Delta\mu) - y_0(\mu)}{\Delta\mu}. \tag{1.15}$$

Решение задачи Коши (1.14), (1.15) имеет вид

$$v(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{y_0(\mu + \Delta\mu) - y_0(\mu)}{\Delta\mu} \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} p(\xi, \mu, \Delta\mu) d\xi \right\} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} q(\tau, \mu, \Delta\mu) \exp\left\{ \int_{\tau}^{t} p(\xi, \mu, \Delta\mu) d\xi \right\} d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \tag{1.16}$$

Для доказательства существования производной $\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)$ достаточно доказать, что функция $v(t,\mu,\Delta\mu)$ имеет предел при $\Delta\mu \to 0$. Покажем, что существует предел правой части формулы (1.16) при $\Delta\mu \to 0$.

Так как функция $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема, то

$$\lim_{\Delta\mu\longrightarrow 0} \frac{y_0(\mu+\Delta\mu)-y_0(\mu)}{\Delta\mu} = \frac{dy_0}{d\mu}(\mu).$$

Найдем предел функции $p(t,\mu,\Delta\mu)$ при $\Delta\mu \to 0$. Из непрерывности в Q_μ частной производной $f_y(t,y,\mu)$ и определения функции $p(t,\mu,\Delta\mu)$ следует, что

$$\lim_{\Delta\mu\to 0} p(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t,\mu),\mu)$$

равномерно по $(t,\mu)\in[t_0-T,t_0+T]\times[\mu_1,\mu_2]$. Из существования частной производной $f_\mu(t,y,\mu)$ имеем

$$\lim_{\Delta\mu\to 0} q(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(t,y(t,\mu),\mu)$$

равномерно по $(t,\mu)\in[t_0-T,t_0+T]\times[\mu_1,\mu_2]$. Следовательно, предел правой части формулы (1.16) существует, и переходя в этой формуле к пределу при $\Delta\mu\to 0$, получим

$$\frac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu) = \lim_{\Delta\mu\to 0} v(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{dy_0}{d\mu}(\mu)\exp\Big\{\int_{t_0}^{t} f_y(\xi,y(\xi,\mu),\mu)d\xi\Big\} +$$
$$+\int_{t_0}^{t} f_\mu(\tau,y(\tau,\mu),\mu)\exp\Big\{\int_{\tau}^{t} f_y(\xi,y(\xi,\mu),\mu)d\xi\Big\}d\tau. \quad (1.17)$$

Теорема 1.2.2 доказана. $\square$

Введем обозначение $z(t,\mu)=\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)$, а через $z'(t,\mu)$ обозначим производную $z(t,\mu)$ по переменной t. Из формулы (1.17) следует, что функция $z(t,\mu)$ является решением задачи Коши на отрезке $[t_0-T,t_0+T]$:

$$z'(t,\mu) = f_y(t,y(t,\mu),\mu)z(t,\mu)+f_\mu(t,y(t,\mu),\mu), \quad (1.18)$$
$$z(t_0,\mu) = y_0'(\mu). \quad (1.19)$$

1.2.3. Метод малого параметра

Во многих случаях не удается явно выписать решение задачи Коши

$$y'(t) = f(t, y(t), \mu), \quad y(t_0) = y_0(\mu) \tag{1.20}$$

для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, хотя при некотором $\mu = \mu_0 \in (\mu_1, \mu_2)$ оно находится относительно легко (например, когда функция $f(t, y, \mu_0)$ линейно зависит от y). Обозначим это решение через $u_0(t)$. Тогда $u_0(t) = y(t, \mu_0)$ является решением задачи Коши

$$u_0'(t) = f(t, u_0(t), \mu_0), \quad u_0(t_0) = y_0(\mu_0). \tag{1.21}$$

Будем предполагать, что решение $u_0(t)$ задачи (1.21) каким-либо способом уже *найдено*, и поставим задачу нахождения *приближенного* вида решения $y(t, \mu)$ задачи (1.20) при всех μ, достаточно близких к μ_0 при выполнении условий теоремы 1.2.2. В силу этой теоремы при каждом $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ решение $y(t, \mu)$ непрерывно дифференцируемо по параметру μ в окрестности μ_0. Поэтому справедлива формула Тейлора (с центром в μ_0) с остаточным членом в форме Пеано:

$$y(t, \mu) = y(t, \mu_0) + \frac{\partial y(t, \mu_0)}{\partial \mu}(\mu - \mu_0) + \bar{o}(\mu - \mu_0).$$

Важно отметить, что для вычисления производной $u_1(t) = \dfrac{\partial y(t, \mu_0)}{\partial \mu}$ не нужно знать решение $y(t, \mu)$ при каких-либо значениях параметра, отличных от $\mu = \mu_0$, поскольку согласно (1.18), (1.19) функция $u_1(t)$ является решением задачи Коши

$$u_1'(t) = a(t)u_1(t) + b(t), \quad u_1(t_0) = y_0'(\mu_0) \tag{1.22}$$

для *линейного* дифференциального уравнения с *известными* непрерывными коэффициентами

$$a(t) = f_y(t, u_0(t), \mu_0), \quad b(t) = f_\mu(t, u_0(t), \mu_0).$$

В результате приходим к асимптотическому при $\mu - \mu_0 \to 0$ представлению искомого решения $y(t, \mu)$ задачи (1.20):

$$y(t, \mu) = u_0(t) + u_1(t)(\mu - \mu_0) + \bar{o}(\mu - \mu_0), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \tag{1.23}$$

где функции $u_0(t)$ и $u_1(t)$ находятся из задач (1.21) и (1.22). Поэтому с точностью до слагаемых $\bar{o}(\mu-\mu_0)$ справедливо приближенное представление $y(t,\mu)\approx u_0(t)+u_1(t)(\mu-\mu_0)$.

Описанная выше процедура представляет собой простейший вариант метода малого параметра, позволяющего с помощью разложения (1.23) выяснить основные качественные и количественные закономерности поведения решения $y(t,\mu)$ при малых $\mu-\mu_0$ на основе известного решения $y(t,\mu_0)$ в предположении существовании непрерывных производных первого порядка $f_y(t,y,\mu)$ и $f_\mu(t,y,\mu)$. Если $f(t,y,\mu)$ имеет производные по y и μ высших порядков, то и разложение (1.23) можно уточнить и получить приближение с более высоким порядком малости остаточного члена.

Пример 1.2.1. *Получить асимптотическое при $\mu\to 0$ разложение решения задачи Коши*

$$y'(t)=y(t)+3\mu y^4(t)+\mu^2 t,\quad y(0)=\exp\{2\mu\}.$$

Имеем $t_0=0$, $\mu_0=0$, $y_0(\mu)=\exp\{2\mu\}$, $y_0'(\mu)=2\exp\{2\mu\}$,

$$f(t,y,\mu)=y+3\mu y^4+\mu^2 t,\ f_y(t,y,\mu)=1+12\mu y^3,\ f_\mu(t,y,\mu)=3y^4+2\mu t,$$
$$f(t,y,0)=y,\ f_y(t,y,0)=1,\ f_\mu(t,y,0)=3y^4,\ y_0(0)=1,\ y_0'(0)=2.$$

Согласно (1.21) при $\mu=0$ функция $u_0(t)=y(t,0)$ является решением задачи Коши

$$u_0'(t)=u_0(t),\quad u_0(0)=1,$$

решение которой легко найти: $u_0(t)=\exp\{t\}$. Поэтому

$$f_y(t,u_0(t),0)=1,\ f_\mu(t,u_0(t),0)=3\exp\{4t\}.$$

Задача Коши (1.22) для $u_1(t)$ принимает вид

$$u_1'(t)=u_1(t)+3\exp\{4t\},\quad u_1(0)=2$$

и имеет решение $u_1(t)=2\exp\{t\}+\exp\{4t\}$. Тогда в силу (1.23) имеет место разложение при $\mu\to 0$:

$$y(t,\mu)=\exp\{t\}+(2\exp\{t\}+\exp\{4t\})\mu+\bar{o}(\mu).$$

Глава 2

Теория устойчивости

2.1. Основные понятия

В теории устойчивости изучается вопрос о зависимости решения задачи Коши для дифференциального уравнения или системы от заданных при $t = t_0$ начальных данных на бесконечном промежутке изменения независимой переменной $t \in [t_0; +\infty)$. Далее без ограничения общности полагаем $t_0 = 0$.

Пример 2.1.1. *Исследовать зависимость решения задачи Коши*

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0$$

от начального состояния y_0 *при* $t \in [0; +\infty)$, *где* $a \in \mathbb{R}$ – *параметр.*

Решение задачи Коши находится по формуле $y(t; y_0) = y_0 \exp\{at\}$ (см. рис. 2.1).

Для $a < 0$ имеем

$$|y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| = |y_0 - \widetilde{y}_0| \exp\{at\} \leqslant |y_0 - \widetilde{y}_0| \to 0$$

при $y_0 - \widetilde{y}_0 \to 0$ равномерно по $t \geqslant 0$, причем $|y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для $a = 0$ имеем

$$|y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| = |y_0 - \widetilde{y}_0| \to 0$$

при $y_0 - \widetilde{y}_0 \to 0$ равномерно по $t \geqslant 0$, но $|y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| \not\to 0$ при $t \to +\infty$.

Для $a > 0$ имеем

$$|y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| = |y_0 - \widetilde{y}_0| \exp\{at\} \to +\infty, \ t \to +\infty,$$

то есть траектории неограниченно расходятся как бы близки они ни были в начальный момент времени.

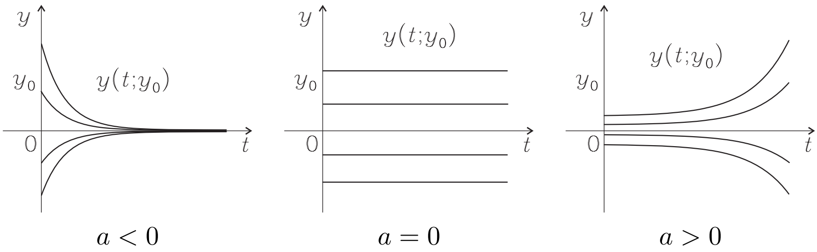

Рис. 2.1. К примеру 2.1.1: вид интегральных кривых решения задачи Коши $y(t;y_0) = y_0 \exp\{at\}$ в зависимости от a.

В тоже время для любого конечного $T > 0$ имеет место непрерывная зависимость от начальных данных на всем отрезке $[0, T]$:

$$\max_{t\in[0,T]} |y(t;y_0) - y(t;\widetilde{y}_0)| \leqslant |y_0 - \widetilde{y}_0| \exp\{|a|T\} \to 0$$

при $y_0 - \widetilde{y}_0 \to 0$. Таким образом, при определении устойчивости на бесконечном промежутке времени необходимо более точно учитывать особенности поведения решений на всей полупрямой $t \geqslant 0$.

2.1.1. Основные понятия теории устойчивости

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно искомой вектор функции $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_1(t), \ldots, y_n(t))^\top$

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(t, \overline{y}(t)), \tag{2.1}$$

$$\overline{y}(t_0) = \overline{y}_0, \tag{2.2}$$

где

$$\overline{f}(t,\overline{y}) = (f_1(t,\overline{y}), f_2(t,\overline{y}), \ldots, f_n(t,\overline{y}))^\top, \quad \overline{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})^\top.$$

Предполагается, что $f_i(t,\overline{y})$ определены и непрерывны вместе с частными производными $\partial f_i(t,\overline{y})/\partial y_j$ на множестве

$$\Pi = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$$

для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда по теореме **??** о существовании и единственности решения задачи Коши для любых начальных данных $\overline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ система (2.1), (2.2) имеет на некотором отрезке $[0, T]$ единственное решение $\overline{y}(t; \overline{y}_0)$, в обозначении которого отражена зависимость от начального состояния $\overline{y}_0$. Если же в начальном условии (2.2) берутся начальные данные $\widetilde{y}_0$, то соответствующее решение обозначается как $\overline{y}(t; \widetilde{y}_0)$. Всюду ниже $\|\overline{y}\| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{1/2}$ обозначает евклидову норму вектора $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2.1.1. *Решение $\overline{y}(t; \overline{y}_0)$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, \overline{y}_0) > 0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0 - \overline{y}_0\| < \delta(\varepsilon, \overline{y}_0)$, соответствующие решения $\overline{y}(t; \widetilde{y}_0)$ задачи Коши для системы (2.1) существуют для всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяют неравенству*

$$\|\overline{y}(t; \widetilde{y}_0) - \overline{y}(t; \overline{y}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall\, t \in [0, +\infty). \tag{2.3}$$

В противном случае решение $\overline{y}(t; \overline{y}_0)$ называется неустойчивым по Ляпунову.

Заметим, что неравенство (2.3) должно быть выполнено сразу для всех $t \geqslant 0$, поэтому вместо (2.3) можно использовать также неравенство

$$\sup_{t \geqslant 0} \|\overline{y}(t; \widetilde{y}_0) - \overline{y}(t; \overline{y}_0)\| < \varepsilon.$$

Определение 2.1.2. *Решение $\overline{y}(t; \overline{y}_0)$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво по Ляпунову и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0 - \overline{y}_0\| < \delta_0$, существует предел*

$$\lim_{t \to +\infty} \|\overline{y}(t; \widetilde{y}_0) - \overline{y}(t; \overline{y}_0)\| = 0. \tag{2.4}$$

Введенные понятия устойчивости и асимптотической устойчивости иллюстрируются на рис. 2.2.

Пример 2.1.2. *В примере 2.1.1 решение $y(t; y_0) = y_0 \exp\{at\}$ асимптотически устойчиво при $a < 0$, устойчиво (не асимптотически) при $a = 0$, неустойчиво – при $a > 0$.*

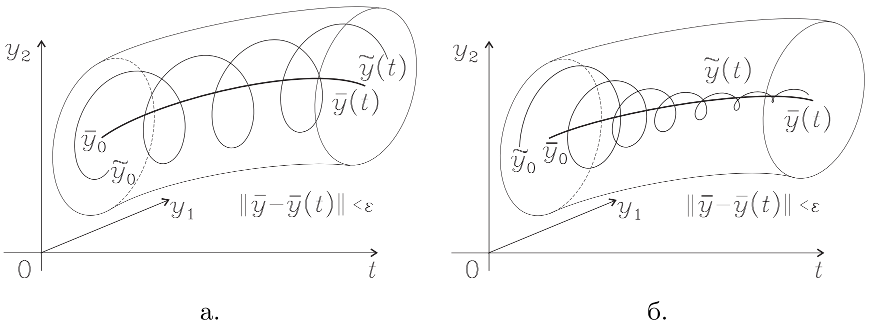

Рис. 2.2. К определениям устойчивости и асимптотической устойчивости решения $\overline{y}(t) = \overline{y}(t;\overline{y}_0)$:
а. в случае устойчивости интегральная кривая решения $\widetilde{y}(t) = \overline{y}(t;\widetilde{y}_0)$ находится в ε-трубке интегральной кривой решения $\overline{y}(t)$ ($\|\overline{y} - \overline{y}(t)\| < \varepsilon$, $t \geqslant 0$);
б. в случае асимптотической устойчивости дополнительно $\|\widetilde{y}(t) - \overline{y}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

2.1.2. Редукция к задаче устойчивости нулевого решения

В случае $\overline{f}(t,0,\ldots,0) = \overline{\theta}$, $\overline{y}_0 = \overline{\theta}$ задача Коши (2.1), (2.2) имеет нулевое решение $\overline{\theta} = (0,\ldots,0)^\top$:

$$\overline{y}(t;\overline{\theta}) = \overline{\theta}, \quad t \geqslant 0.$$

Переформулируем определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости для этого важного для дальнейшего изложения случая.

Определение 2.1.3. *Нулевое решение $\overline{y}(t;\overline{\theta}) = \overline{\theta}$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется* ***устойчивым по Ляпунову****, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$, соответствующие решения $\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)$ задачи Коши для системы (2.1) существуют для всех $t \geqslant 0$ и*

$$\|\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall\, t \in [0,+\infty). \tag{2.5}$$

В противном случае нулевое решение называется неустойчивым по Ляпунову.

Определение 2.1.4. *Нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется* ***асимптотически устойчивым****, если оно устой-*

чиво по Ляпунову и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0\| < \delta_0$, существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} \|\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)\| = 0. \tag{2.6}$$

Проблему устойчивости решения $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ задачи Коши (2.1), (2.2) можно свести к аналогичной проблеме для нулевого решения. Перейдем от системы (2.1) к новой системе, введя новые неизвестные

$$\overline{x}(t) = \overline{y}(t) - \overline{y}(t;\overline{y}_0).$$

Так как $\overline{y}(t)$ – решение (2.1), то для $\overline{x}(t)$ имеем

$$\frac{\overline{x}(t)}{dt} = \frac{\overline{y}(t)}{dt} - \frac{\overline{y}(t;\overline{y}_0)}{dt} = \overline{f}(t;\overline{y}(t)) - \overline{f}(t;\overline{y}(t;\overline{y}_0)) =$$
$$= \overline{f}(t;\overline{x}(t) + \overline{y}(t;\overline{y}_0)) - \overline{f}(t;\overline{y}(t;\overline{y}_0)).$$

Таким образом, вектор функция $\overline{x}(t)$ является решением системы

$$\frac{\overline{x}(t)}{dt} = \overline{f}(t;\overline{x}(t) + \overline{y}(t;\overline{y}_0)) - \overline{f}(t;\overline{y}(t;\overline{y}_0)).$$

Решение $\overline{x}(t;\overline{\theta})$ этой системы с нулевым начальным условием $\overline{x}(0) = \overline{\theta}$ равно нулю: $\overline{x}(t;\overline{\theta}) = \overline{\theta}$, $t \geqslant 0$. Это тривиальное решение соответствует решению $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ исходной системы. Принимая во внимание вышеизложенное, при анализе устойчивости, как правило, ограничиваются исследованием устойчивости нулевого решения.

2.2. Устойчивость нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами

В данном параграфе рассматривается линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными вещественными коэффициентами

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y},$$

где $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$. В зависимости от свойств матрицы A будут доказаны теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения этой системы.

2.2.1. Вспомогательные утверждения

Лемма 2.2.1. *Пусть $B(t) = (b_{ij}(t))$ – функциональная матрица, элементы которой мажорируются одной и той же функцией $b(t)$:*

$$|b_{ij}(t)| \leqslant b(t), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Если вектор-функции $\overline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^\top$, $\overline{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^\top$ связаны соотношением $\overline{y}(t) = B(t)\overline{x}(t)$, то справедлива оценка

$$\|\overline{y}(t)\| \leqslant nb(t)\|\overline{x}(t)\|.$$

Доказательство. Так как $y_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk}(t)x_k(t)$, то, оценивая модули компонент и применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$|y_j(t)| = \sum_{k=1}^{n} |b_{jk}(t)| \cdot |x_k(t)| \leqslant b(t) \sum_{k=1}^{n} |x_k(t)| \leqslant$$
$$\leqslant b(t)\left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t)\right)^{1/2} = b(t)\sqrt{n}\|x(t)\|.$$

Возводя в квадрат обе части полученного неравенства и суммируя по $j = 1, \dots, n$, приходим к утверждению леммы 2.2.1. □

Лемма 2.2.2. *Для любой непрерывной при $t \geqslant 0$ вектор-функции $\overline{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^\top$ справедливо неравенство*

$$\left\|\int_0^t \overline{y}(\xi)d\xi\right\| \leqslant \sqrt{n}\int_0^t \|\overline{y}(\xi)\|d\xi.$$

Доказательство. По определению интеграла от вектор-функции имеем

$$\int_0^t \overline{y}(\xi)d\xi = (I_1(t), \dots, I_n(t))^\top, \quad I_j(t) = \int_0^t y_j(\xi)d\xi, \quad j = 1, \dots, n.$$

При $t \geqslant 0$ справедливы покомпонентные неравенства

$$|I_j(t)| = \left|\int_0^t y_j(\xi)d\xi\right| \leqslant \int_0^t |y_j(\xi)|d\xi \leqslant \int_0^t \|\overline{y}(\xi)\|d\xi.$$

Возводя в квадрат обе части полученного неравенства и суммируя по $j = 1, \dots, n$, приходим к утверждению леммы 2.2.2 $\square$

Лемма 2.2.3. *Пусть $Y(t)$ – фундаментальная матрица линейной однородной системы $d\overline{y}/dt = A\overline{y}$ с постоянными коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ – собственные значения матрицы A с учетом кратностей, $p = \max\limits_{k=1,\dots,n} \operatorname{Re} \lambda_k$.*

Тогда для матрицанта $Z(t, \tau) = Y(t)Y^{-1}(\tau)$ справедливы соотношения

1. $Z(t, \tau) = Z(t - \tau, 0)$;
2. *для любого $\gamma > 0$ найдется $C_\gamma > 0$ такое, что справедливо неравенство*

$$|Z_{ij}(t, \tau)| \leqslant C_\gamma \exp\{(p + \gamma)(t - \tau)\}, \quad \forall\, t \geqslant \tau.$$

Доказательство. Матрицант является решением матричной задачи Коши
$$\frac{dZ(t, \tau)}{dt} = AZ(t, \tau), \quad Z(\tau, \tau) = E.$$
Обозначим $s = t - \tau$, τ – фиксировано, и введем функцию
$$\widetilde{Z}(s) = Z(\tau + s, \tau).$$

Очевидно, что
$$\frac{d\widetilde{Z}(s)}{ds} = A\widetilde{Z}(s), \quad \widetilde{Z}(0) = E.$$
Но тогда в силу единственности решения матричной задачи Коши справедливо равенство $\widetilde{Z}(s) = Z(s, 0)$. Возвращаясь к переменной t, получаем $Z(t, \tau) = Z(t - \tau, 0)$.

Оценим компоненты матрицы $Z(s, 0) = Y(s)Y^{-1}(0)$. Так как столбцы фундаментальной матрицы состоят из вектор-функций фундаментальной системы решений, то компоненты матрицанта $Z(s, 0)$ имеют вид (см. теорему **??**):

$$Z_{ij}(s, 0) = q_{ij}(s) \exp\{\lambda_k s\}, \tag{2.7}$$

где λ_k – одно из собственных значений, а $q_{ij}(s)$ – многочлен степени $\deg q_{ij}(s) \leqslant n - 1$. Для любого $\gamma > 0$ найдутся постоянные $C_{ij} > 0$ такие, что выполнены неравенства

$$|q_{ij}(s)| \leqslant C_{ij} \exp\{\gamma s\}, \quad \forall\, s \geqslant 0.$$

Так как $p = \max\limits_{k=1,\dots,n} \mathrm{Re}\lambda_k$, то

$$|\exp\{\lambda_k s\}| = \exp\{\,\mathrm{Re}\,\lambda_k s\} \leqslant \exp\{ps\}.$$

Учитывая эти неравенства, из (2.7) получаем

$$|Z_{ij}(s,0)| \leqslant |q_{ij}(s)| \cdot |\exp\{\lambda_k s\}| \leqslant C_\gamma \exp\{(p+\gamma)s\}, \quad C_\gamma = \max_{i,j=1,\dots,n} C_{ij}.$$

Полагая $s = t - \tau$, убеждается в справедливости второго утверждения леммы 2.2.3. $\square$

2.2.2. Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными вещественными коэффициентами:

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y}, \tag{2.8}$$

где $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,\dots,n$. Пусть $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – собственные значения матрицы A с учетом их кратностей.

Теорема 2.2.1. *Пусть вещественные части всех собственных значений матрицы A отрицательны:*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0, \qquad \forall\, k = 1,\dots,n.$$

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t;\overline{\theta}) = \overline{\theta}$ системы (2.8) является асимптотически устойчивым.

Доказательство. Пусть $\overline{y}(t) = \overline{y}(t;\overline{y}_0)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y}, \quad \overline{y}(0) = \overline{y}_0.$$

Тогда, используя определение матрицанта, решение этой задачи можно представить в виде

$$\overline{y}(t) = Z(t,0)\overline{y}_0. \tag{2.9}$$

Обозначим $p = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \operatorname{Re} \lambda_k < 0$. Выберем и зафиксируем настолько малое $\gamma > 0$, чтобы

$$\alpha = p + \gamma < 0.$$

Тогда согласно части 2 леммы 2.2.3 найдется константа C_γ такая, что справедлива оценка

$$|Z_{ij}(t,0)| \leqslant C_\gamma \exp\{\alpha t\}, \quad t \geqslant 0.$$

В силу леммы 2.2.1 с $B(t) = Z(t,0)$, $b(t) = C_\gamma \exp\{\alpha t\}$ и $\overline{x}(t) = \overline{y}_0$ из (2.9) следует оценка

$$\|\overline{y}(t)\| \leqslant nC_\gamma \exp\{\alpha t\}\|\overline{y}_0\|.$$

Если положить $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2nC_\gamma}$, то из неравенства $\|\overline{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$ будет вытекать неравенство $\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$. Асимптотическая устойчивость следует из предельного соотношения $\exp\{\alpha t\} \to 0$ при $t \to +\infty$. $\square$

2.2.3. Теорема об устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами

Теорема 2.2.2. *Пусть вещественные части всех собственных значений матрицы A неположительны,*

$$\operatorname{Re} \lambda_k \leqslant 0, \qquad \forall\, k = 1, \ldots, n$$

и существуют собственные значения с нулевой вещественной частью, причем размерность каждого собственного подпространства, отвечающего $\operatorname{Re} \lambda = 0$, *совпадает с его кратностью.*

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t; \overline{\theta}) = \overline{\theta}$ системы (2.8) является устойчивым по Ляпунову, но не асимптотически.

Доказательство. Уточним зависимость матриканта

$$Z(t,0) = Y(t)Y^{-1}(0)$$

от переменной $t \geqslant 0$ в рассматриваемом случае. Для всех элементов $Y_{ij}(t)$ фундаментальной матрицы, отвечающих собственным значениям

с отрицательной вещественной частью, аналогично теореме 2.2.1, справедлива оценка
$$|Y_{ij}(t)| \leqslant C_{ij} \exp\{\alpha t\}, \quad \forall t \geqslant 0,$$
где C_{ij} – постоянные, $\alpha < 0$. Следовательно,
$$|Y_{ij}(t)| \leqslant C_{ij}, \quad \forall t \geqslant 0.$$
По условию теоремы, элементы $Y_{kl}(t)$ фундаментальной матрицы, отвечающие собственным значениям $\lambda = iq$ с нулевой вещественной частью, являются компонентами вектор-функций из фундаментальной системы решений вида
$$\overline{y}(t) = \overline{h_l} \exp\{\lambda t\},$$
где $\overline{h} = (h_{1l}, \ldots, h_{nl})^\top$ – собственный вектор (присоединенные векторы для таких собственных значений отсутствуют). Очевидно, что и в этом случае элементы фундаментальной матрицы также ограничены:
$$|Y_{kl}(t)| = |h_{kl}| \cdot |\exp\{iqt\}| \leqslant C_{kl}, \quad \forall t \geqslant 0.$$
Таким образом, все элементы фундаментальной матрицы $Y(t)$ ограничены. Умножение $Y(t)$ на постоянную матрицу $Y^{-1}(0)$ оставляет коэффициенты произведения матриц ограниченными. Следовательно,
$$|Z_{ij}(t, 0)| \leqslant \widetilde{C}_{ij}, \quad \forall t \geqslant 0.$$
Тогда из представления решения (2.9) в силу леммы 2.2.1 с матрицей $B(t) = Z(t, 0)$, функцией $b(t) = \widetilde{C} = \max\limits_{i,j=1,\ldots,n} \widetilde{C}_{ij}$ и $\overline{x}(t) = \overline{y}_0$ имеет место оценка
$$\|\overline{y}(t)\| \leqslant n\widetilde{C}\|\overline{y}_0\|.$$
Из этой оценки следует устойчивость нулевого решения.

Докажем отсутствие асимптотической устойчивости. Пусть $\overline{h} \in \mathbb{C}^n$ – какой-либо собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = iq$, $q > 0$. Без ограничения общности можем считать, что $\|\overline{h}\| = 1$. Вектор-функция
$$\overline{y}(t) = 0.5\delta_0 \mathrm{Re}\,\overline{h} \exp\{iqt\}, \quad \delta_0 > 0,$$
является решением системы (2.8) как вещественная часть комплексного решения $\overline{h} \exp\{iqt\}$. В начальный момент $t = 0$ имеем
$$\overline{y}(0) = 0.5\delta_0 \mathrm{Re}\,\overline{h}, \quad \|\overline{y}(0)\| \leqslant 0.5\delta_0 \|\overline{h}\| = 0.5\delta_0.$$

Для любого $\delta_0 > 0$ из δ_0-окрестности нулевого решения стартует построенное выше решение $\overline{y}(t)$, но $\overline{y}(t) \not\to \overline{\theta}$ при $t \to +\infty$, поскольку, например, $\overline{y}(t_k) = 0.5\delta_0 \mathrm{Re}\,\overline{h} \neq \overline{\theta}$ при $t_k = 2\pi k/q$, $k \in \mathbb{N}$. Более простой случай $q = 0$ рассматривается аналогично. □

2.2.4. Теорема о неустойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами

Теорема 2.2.3. *Пусть выполнено хотя бы одно из условий:*

1. *матрица A имеет собственное значение с положительной вещественной частью;*
2. *матрица A имеет собственное значение λ_m такое, что*

$$\mathrm{Re}\lambda_m = 0,$$

причем размерность собственного подпространства, отвечающего λ_m, меньше кратности этого собственного значения.

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t;\overline{\theta}) = \overline{\theta}$ неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть у матрицы A имеется собственное значение $\lambda = p + iq$, где $p > 0$, $q > 0$. Обозначим через $\overline{h} = \overline{h}_R + i\overline{h}_I$ соответствующий собственный вектор, где $\overline{h}_R$, $\overline{h}_I$ — линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности можем считать, что $\|\overline{h}\| = 1$. Вектор-функция

$$\overline{y}(t) = 0.5\delta \mathrm{Re}\,\overline{h}\exp\{(p+iq)t\} = \\ = 0.5\delta\exp\{pt\}\big(\overline{h}_R\cos qt - \overline{h}_I \sin qt\big), \quad \delta > 0, \quad (2.10)$$

является решение системы (2.8) как вещественная часть комплексного решения $\overline{h}\exp\{(p+iq)t\}$. В начальный момент $t = 0$ имеем

$$\overline{y}(0) = 0.5\delta\overline{h}_R, \quad \|\overline{y}(0)\| \leqslant 0.5\delta\|\overline{h}\| = 0.5\delta.$$

Для любого $\delta > 0$ из δ-окрестности нулевого решения стартует построенное в (2.10) решение $\overline{y}(t)$, для которого при $t = t_k = 2\pi k/q$, $k \in \mathbb{N}$, $k \to +\infty$ имеем:

$$\overline{y}(t_k) = 0.5\delta\overline{h}_R\exp\{2\pi kp/q\}, \quad \|\overline{y}(t_k)\| = 0.5\delta\|\overline{h}_R\|\exp\{2\pi kp/q\} \to +\infty.$$

Более простой случай $q = 0$ рассматривается аналогично.

Если у матрицы A имеется собственное значение $\lambda = iq$, $q > 0$, кратность которого превосходит размерность собственного подпространства, то для любого $\delta > 0$ существует решение системы (2.8) вида

$$\overline{y}(t) = 0.5\delta \mathrm{Re}\,(\overline{g} + t\overline{h}) \exp\{iqt\} =$$
$$= 0.5\delta\big((\overline{g}_R + t\overline{h}_R)\cos qt - (\overline{g}_I + t\overline{h}_I)\sin qt\big), \quad \delta > 0,$$
$$\overline{y}(0) = 0.5\delta \mathrm{Re}\,\overline{g}, \quad \|\overline{y}(0)\| \leqslant 0.5\delta,$$

где $\overline{h} = \overline{h}_R + i\overline{h}_I$ – собственный вектор, $\overline{g} = \overline{g}_R + i\overline{g}_I$ – присоединенный вектор, $\|\overline{g}\| = 1$. Построенное решение $\overline{y}(t)$ стартует при $t = 0$ из δ-окрестности нулевого решения, а при $t = t_k = 2\pi k/q$, $k \in \mathbb{N}$, $k \to +\infty$ имеем:

$$\overline{y}(t_k) = 0.5\delta(\overline{g}_R + t_k\overline{h}_R), \quad \|\overline{y}(t_k)\| \sim k\|\overline{h}_R\| \to +\infty.$$

Более простой случай $q = 0$ рассматривается аналогично. □

2.3. Исследование на устойчивость по первому приближению (первый метод Ляпунова)

Рассмотрим автономную систему

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)), \tag{2.11}$$

где $\overline{f}(\overline{y}) = (f_1(\overline{y}), f_2(\overline{y}), \ldots, f_n(\overline{y}))^\top$. Предполагается, что

$$\overline{f}(\overline{\theta}) = \overline{\theta}.$$

Тогда система (2.11) имеет нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$. Это решение далее исследуется на устойчивость.

В данном параграфе и ниже в параграфе 2.4 будем считать, что все решения, вышедшие при $t = 0$ из некоторой окрестности нулевого решения, определены при любых $t \geqslant 0$. Этот факт заведомо имеет место в случае, когда компоненты $f_j(\overline{y})$ правой части (2.11) удовлетворяют условию Липшица на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. теорему **??**). Возможны также и другие менее ограничительные случаи.

Пусть функции $f_j(\overline{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат. Тогда имеет место представление

$$\overline{f}(\overline{y}) = A\overline{y} + \overline{R}(\overline{y}), \tag{2.12}$$

где

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0,\ldots,0)\right), \quad i,j = 1,\ldots,n, \quad \overline{R}(\overline{y}) = \bar{o}(\|\overline{y}\|).$$

Напомним, что условие $\overline{R}(\overline{y}) = \bar{o}(\|\overline{y}\|)$ означает, что

$$\forall\,\sigma > 0 \quad \exists\,\rho > 0 : \ \|\overline{y}\| < \rho \ \Rightarrow \ \left\|\overline{R}(\overline{y})\right\| < \sigma\|\overline{y}\|. \tag{2.13}$$

Лемма 2.3.1. *Пусть выполнено условие (2.12) и все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части:*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0, \quad \forall\,k = 1,\ldots,n.$$

Тогда найдутся константы $\delta_0 > 0$ и $\rho_0 \geqslant \delta_0 > 0$ такие, что любое решение $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ задачи Коши

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A\overline{y}(t) + \overline{R}(\overline{y}(t)), \quad \overline{y}(0) = \overline{y}_0, \tag{2.14}$$

где $\|\overline{y}_0\| < \delta_0$, удовлетворяет неравенству

$$\|\overline{y}(t;\overline{y}_0)\| < \rho_0$$

для всех $t \geqslant 0$.

Доказательство. Сначала убедимся в том, что решение $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ задачи Коши (2.14) удовлетворяет векторному интегральному уравнению

$$\overline{y}(t;\overline{y}_0) = Z(t,0)\overline{y}_0 + \int\limits_0^t Z(t,\tau)\overline{R}(\overline{y}(\tau;\overline{y}_0))d\tau. \tag{2.15}$$

Действительно, обозначая

$$\overline{F}(t) = \overline{R}(\overline{y}(t;\overline{y}_0)), \tag{2.16}$$

мы видим, что $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ является решением задачи Коши для линейной неоднородной системы с правой частью $\overline{F}(t)$

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A\overline{y}(t) + \overline{F}(t), \quad \overline{y}(0) = \overline{y}_0.$$

По формуле (**??**), установленной в следствии **??** к теореме **??**, решение этой задачи Коши имеет вид

$$\overline{y}(t) = Z(t,0)\overline{y}_0 + \int\limits_0^t Z(t,\tau)\overline{F}(\tau)d\tau.$$

Учитывая формулу (2.16), приходим к (2.15).

Оценим слагаемые в правой части (2.15). В силу лемм 2.2.1, 2.2.3 аналогично доказательству теоремы 2.2.1 об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы заключаем, что найдутся не зависящие от $\overline{y}_0$ константы $\alpha < 0$ и $M_1 > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$\|Z(t,0)\overline{y}_0\| \leqslant M_1 \exp\{\alpha t\}\|\overline{y}_0\|.$$

Аналогично оценивается подынтегральное выражение в (2.15):

$$\|Z(t,\tau)\overline{R}(\overline{y}(\tau;\overline{y}_0))\| \leqslant M_2 \exp\{\alpha(t-\tau)\}\|\overline{R}(\overline{y}(\tau;\overline{y}_0))\|.$$

Применяя лемму 2.2.2 для оценки нормы интеграла от вектор-функции, приходим к неравенству

$$\|\overline{y}(t;\overline{y}_0)\| \leqslant M \exp\{\alpha t\}\|\overline{y}_0\| + M \int\limits_0^t \exp\{\alpha(t-\tau)\}\|\overline{R}(\overline{y}(\tau;\overline{y}_0))\|d\tau, \quad (2.17)$$

где $M = \max\{M_1, M_2\sqrt{n}\}$.

Зафиксируем величину $\sigma > 0$ настолько малой, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{M\sigma}{|\alpha|} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Для данного σ согласно (2.13) найдется $\rho_0 > 0$ такое, что при $\|\overline{y}\| < \rho_0$ имеет место оценка

$$\|\overline{R}(\overline{y})\| < \sigma\|\overline{y}\|. \quad (2.18)$$

Наконец, положим

$$\delta_0 = \min\left\{\frac{\rho_0}{4M}, \frac{\rho_0}{2}\right\}.$$

Итак, выбор фигурирующих в условии теоремы констант δ_0 и ρ_0 осуществлен.

Пусть решение $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ задачи Коши (2.14) при $t = 0$ удовлетворяет неравенству $\|\overline{y}_0\| < \delta_0$, тогда $\|\overline{y}_0\| < \rho_0$, и в силу непрерывности решения неравенство $\|\overline{y}(t;\overline{y}_0)\| < \rho_0$ будет иметь место на некотором полуинтервале $[0, t_1)$. Остается убедиться, что $t_1 = +\infty$. Предполагая противное, мы для некоторого конечного $t_1 \in (0, +\infty)$ имеем

$$\|\overline{y}(t;\overline{y}_0)\| < \rho_0, \quad \forall t \in [0, t_1), \quad \|\overline{y}(t_1;\overline{y}_0)\| = \rho_0.$$

Тогда в силу (2.18)

$$\|\overline{R}(\overline{y}(\tau;\overline{y}_0))\| \leqslant \sigma \|\overline{y}(\tau;\overline{y}_0)\| \leqslant \sigma\rho_0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t_1.$$

Учитывая то, что

$$\|\overline{y}_0\| \leqslant \delta_0 \leqslant \frac{\rho_0}{4M},$$

в силу (2.17) имеем

$$\rho_0 = \|\overline{y}(t_1;\overline{y}_0)\| \leqslant \frac{\rho_0}{4}\exp\{\alpha t_1\} + M\sigma\rho_0 \int\limits_0^{t_1} \exp\{\alpha(t_1 - \tau)\} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho_0}{4} + \frac{M\sigma\rho_0}{|\alpha|}\big(1 - \exp\{\alpha t_1\}\big) \leqslant \frac{\rho_0}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2.3.1. □

Теорема 2.3.1. *Пусть функции $f_j(\overline{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат, $j = 1, \ldots, n$.*

Если все собственные значения матрицы $A = \big(\partial f_i(0, \ldots, 0)/\partial y_j\big)$ имеют отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad \forall\, k = 1, \ldots, n,$$

то нулевое решение системы (2.11) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Если же найдется хотя бы одно собственное значения матрицы $A = \big(\partial f_i(0, \ldots, 0)/\partial y_j\big)$ с положительной вещественной частью:

$$\exists \lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} :\ \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

то нулевое решение неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Ограничимся доказательством первой части теоремы об устойчивости. Возьмем найденные в доказательстве леммы 2.3.1 константы δ_0 и ρ_0. Возьмем из δ_0-окрестности нулевого решения произвольную начальную точку $\overline{y}_0$. Тогда $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ – решение задачи Коши (2.14) и соответствующего интегрального уравнения (2.15). В силу леммы 2.3.1 при $t \geqslant 0$ справедливо неравенство $\|\overline{y}(t;\overline{y}_0)\| \leqslant \rho_0$ и согласно (2.18) имеет место оценка

$$\|\overline{R}(\overline{y}(\tau;\overline{y}_0))\| < \sigma\|\overline{y}(\tau;\overline{y}_0)\|, \quad \forall\tau \geqslant 0.$$

Тогда в силу (2.17) для всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\|\overline{y}(t;\overline{y}_0)\| \leqslant M\exp\{\alpha t\}\|\overline{y}_0\| + M\sigma\exp\{\alpha t\}\int\limits_0^t \exp\{-\alpha\tau)\}\|\overline{y}(\tau;\overline{y}_0)\|d\tau.$$

Умножив на $\exp\{-\alpha t\}$ и введя обозначение для скалярной функции

$$u(t) = \exp\{-\alpha t\}\|\overline{y}(t;\overline{y}_0)\|,$$

приходим к неравенству

$$0 \leqslant u(t) \leqslant M\|\overline{y}_0\| + M\sigma\int\limits_0^t u(\tau)d\tau, \quad t \geqslant 0.$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана, получаем

$$u(t) \leqslant M\|\overline{y}_0\|\exp\{M\sigma t\}.$$

Возвращаясь к старым обозначениям, с учетом соотношения

$$M\sigma \leqslant \frac{|\alpha|}{4},$$

имеем

$$\|\overline{y}(t;\overline{y}_0)\| \leqslant M\|\overline{y}_0\|\exp\{(M\sigma+\alpha)t\} \leqslant M\|\overline{y}_0\|\exp\{3\alpha t/4\}.$$

В силу отрицательности α отсюда вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения. □

Пример 2.3.1. *Исследуем устойчивость решения* $(0,0)$ *системы*

$$\begin{cases} dy_1/dt = -y_1 - ay_2 + y_2^4, \\ dy_2/dt = y_1 - y_1^5 + y_2^3. \end{cases}$$

Имеем $f_1(y_1, y_2) = -y_1 - ay_2 + y_2^4$, $f_2(y_1, y_2) = y_1 - y_1^5 + y_2^3$,

$$A = \left(\frac{\partial f_i(0,0)}{\partial y_j}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственных значений матрицы A *составим характеристический многочлен*

$$M(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -a \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda + a.$$

Тогда собственные значения $\lambda_{1,2} = 0.5(-1 \pm \sqrt{1-4a})$.

При $a > 0$ *имеем* $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$. *При* $a = 0$ *имеем* $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$. *При* $a < 0$ *имеем* $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. *Таким образом, согласно первому методу Ляпунова, нулевое решение асимптотически устойчиво при* $a > 0$, *неустойчиво при* $a < 0$. *При* $a = 0$ *первый метод Ляпунова неприменим.*

2.4. Исследование на устойчивость с помощью функций Ляпунова (второй метод Ляпунова)

2.4.1. Положительно определенные функции

Определение 2.4.1. *Функция* $V(\overline{y}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется положительно определенной на множестве* Ω *(* $\overline{\theta} \in \Omega$*), если выполнены следующие два условия:*

1. $V(\overline{y}) \geqslant 0$, $\forall\ \overline{y} \in \Omega$;
2. $V(\overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{y} = \overline{\theta}$.

Далее для определенности будем считать, что множество Ω является шаром радиуса $R > 0$ с центром в начале координат:

$$\Omega = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : \|\overline{y}\| \leqslant R\}.$$

Лемма 2.4.1. *Пусть* $V(\overline{y})$ *– непрерывная и положительно определенная на* Ω *функция. Тогда:*

1. *для любого* $\varepsilon_1 > 0$ *существует* $\varepsilon_2 > 0$ *такое, что из условий* $\overline{y} \in \Omega$, $\|\overline{y}\| \geqslant \varepsilon_1$ *вытекает неравенство* $V(\overline{y}) \geqslant \varepsilon_2$;

2. *для любого* $\varepsilon_2 > 0$ *существует* $\varepsilon_3 > 0$ *такое, что из условий* $\overline{y} \in \Omega$, $V(\overline{y}) \geqslant \varepsilon_2$ *вытекает неравенство* $\|\overline{y}\| \geqslant \varepsilon_3$.

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного.

1. Предположим, что первое из доказываемых утверждений неверно. Тогда существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует точка $\overline{y}$ такая, что $\varepsilon_1 \leqslant \|\overline{y}\| \leqslant R$ и $V(\overline{y}) < \varepsilon_2$. В силу произвольности ε_2 можно взять последовательность $0 < \varepsilon_{2k} \to 0$, и тогда найдется последовательность точек $\overline{y}_k$, для которой $\varepsilon_1 \leqslant \|\overline{y}_k\| \leqslant R$, $V(\overline{y}_k) \to 0$. Поскольку последовательность $\overline{y}_k$ принадлежит замкнутому ограниченному множеству, то некоторая ее подпоследовательность является сходящейся, $\overline{y}_{k_m} \to \widetilde{y}$, $\varepsilon_1 \leqslant \|\widetilde{y}\| \leqslant R$. В силу непрерывности $V(\overline{y}_{k_m}) \to V(\widetilde{y}) = 0$, откуда благодаря положительной определенности имеем $\widetilde{y} = \overline{\theta}$. Противоречие.

2. Предположим, что второе из доказываемых утверждений неверно. Аналогично проведенным выше рассуждениям существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для некоторой последовательности $0 < \varepsilon_{3k} \to 0$ найдется последовательность точек $\overline{y}_k$, для которой $\|\overline{y}_k\| \leqslant \varepsilon_{3k}$, $V(\overline{y}_k) \geqslant \varepsilon_2$. В силу непрерывности имеем $V(\overline{y}_k) \to V(0) = 0$, что противоречит предыдущему неравенству. □

Геометрический смысл леммы состоит в том, что поверхность уровня функции $V(\overline{y}) = \varepsilon_2$ находится в шаровом слое, ограниченном изнутри сферой $\|\overline{y}\| = \varepsilon_3$ и снаружи – сферой $\|\overline{y}\| = \varepsilon_1$ (см. рис. 2.3).

Следствие 2.4.1. *Если последовательность точек* $\overline{y}_k \in \Omega$, *то при* $k \to +\infty$

$$\overline{y}_k \to \overline{\theta} \text{ тогда и только тогда, когда } V(\overline{y}_k) \to 0.$$

Если при $t \geqslant 0$ *вектор-функция* $\overline{y}(t) \in \Omega$, *то при* $t \to +\infty$

$$\overline{y}(t) \to \overline{\theta} \text{ тогда и только тогда, когда } V(\overline{y}(t)) \to 0.$$

Доказанные утверждения показывают, что непрерывная положительно определенная функция может использоваться в качестве меры близости точки $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ к началу координат. Ясно, что норма $V(\overline{y}) = \|\overline{y}\|$ является непрерывной положительно определенной функцией вектора $\overline{y}$. Приведем примеры положительно определенных функций, не являющихся нормами.

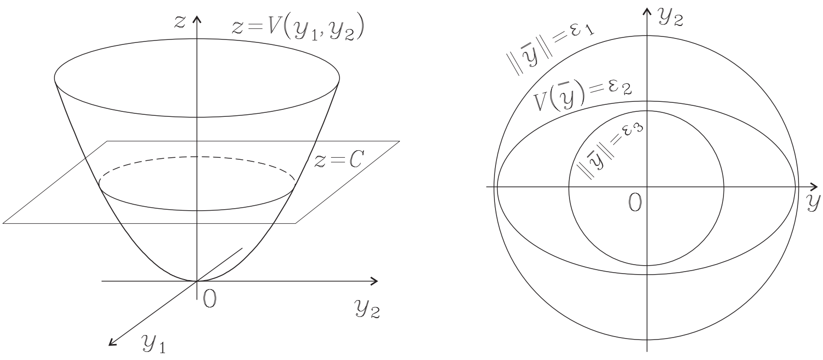

Рис. 2.3. Иллюстрация свойств положительно определенной функции $V(\overline{y})$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$.

Пример 2.4.1. *Функция $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ является положительно определенной, но не удовлетворяет условию однородности для нормы. Вместе с тем, ее линиями уровня являются окружности.*

Пример 2.4.2. *Функция $V(y_1, y_2) = \sqrt{\dfrac{y_1^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2}}$ $(a > 0,\ b > 0,\ a \neq b)$ является положительно определенной, но не удовлетворяет неравенству треугольника для нормы. Линиями уровня этой функции являются эллипсы с длинами полуосей, пропорциональными a, b.*

2.4.2. Функция Ляпунова

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(t, \overline{y}(t)), \quad \overline{y}(0) = \overline{y}_0 \in \Omega, \tag{2.19}$$

где $\overline{f}(t, \overline{y}) = (f_1(t, y_1, \ldots, y_n), f_2(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(t, y_1, \ldots, y_n))^\top$, компоненты $f_j(t, y_1, \ldots, y_n)$ определены и непрерывны на множестве

$$[0; +\infty) \times \Omega,$$

причем

$$f_j(t, 0, \ldots, 0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad t \geqslant 0.$$

Ясно, что система (2.19) имеет нулевое решение $\overline{y}(t; \overline{\theta}) = \overline{\theta}$.

Определение 2.4.2. *Непрерывно дифференцируемая и положительно определенная на Ω функция $V(\overline{y})$ называется* ***функцией Ляпунова*** *системы (2.19), если*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y})}{\partial y_j} f_j(t, \overline{y}) \leqslant 0, \quad \forall \overline{y} \in \Omega,\ t \geqslant 0. \tag{2.20}$$

2.4.3. Теорема об устойчивости

Теорема 2.4.1. *Пусть на множестве Ω существует функция Ляпунова для системы (2.19). Тогда нулевое решение $\overline{y}(t; \overline{\theta}) = \overline{\theta}$ системы (2.19) является устойчивым по Ляпунову.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 \in (0, R)$. В силу леммы 2.4.1 найдется $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$ такое, что как только для $\overline{y} \in \Omega$ выполнено неравенство $\|\overline{y}\| \geqslant \varepsilon_1$, то

$$V(\overline{y}) \geqslant \varepsilon_2. \tag{2.21}$$

В силу непрерывности функции $V(\overline{y})$ в нуле для $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon_2(\varepsilon_1))$ такое, что из неравенства $\|\overline{y}\| < \delta$ вытекает оценка

$$V(\overline{y}) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{2.22}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\delta \leqslant \varepsilon_1$.

Рассмотрим произвольную начальную точку $\overline{y}_0$ из δ-окрестности нулевого решения ($\|\overline{y}_0\| < \delta$) и покажем, что при $t \geqslant 0$ соответствующее решение $\overline{y}(t) = \overline{y}(t; \overline{y}_0)$ системы (2.19) удовлетворяет неравенству

$$\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon_1.$$

При $t = 0$ это неравенство выполнено, $\|\overline{y}(0)\| = \|\overline{y}_0\| < \delta \leqslant \varepsilon_1$, и в силу (2.22) имеем

$$V(\overline{y}(0)) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{2.23}$$

В силу непрерывности неравенство $\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon_1$ остается справедливым на некотором полуинтервале $t \in [0; t_1)$. Если $t_1 = +\infty$, то устойчивость доказана. Если же для некоторого момента $t_1 \in (0, +\infty)$ окажется выполненным противоположное неравенство,

$$\|\overline{y}(t_1)\| \geqslant \varepsilon_1,$$

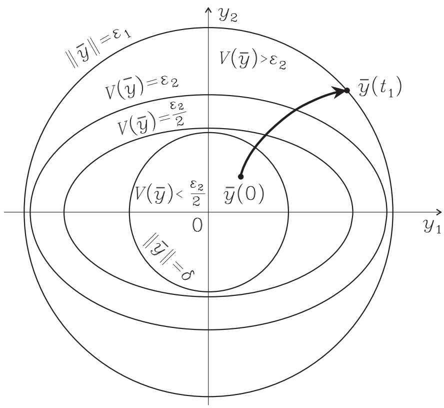

Рис. 2.4. К доказательству теоремы 2.4.1.

то в силу (2.21) получаем (см. рис. 2.4)

$$V(\overline{y}(t_1)) \geqslant \varepsilon_2.$$

Принимая во внимание неравенство (2.23), имеем

$$V(\overline{y}(t_1)) - V(\overline{y}(0)) \geqslant \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0. \tag{2.24}$$

С другой стороны, в силу (2.20)

$$\frac{dV(\overline{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y}(t))}{\partial y_j} \frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t, \overline{y}(t)) \leqslant 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Следовательно, функция $V(\overline{y}(t))$ не возрастает на отрезке $[0, t_1]$, что противоречит (2.24).

Таким образом, по произвольному $\varepsilon_1 > 0$ найдено $\delta = \delta(\varepsilon_1)$ такое, что из неравенства $\|\overline{y}_0\| < \delta$ вытекает оценка $\|\overline{y}(t; \overline{y}_0)\| < \varepsilon_1$ для всех $t \geqslant 0$, означающая устойчивость нулевого решения. □

Пример 2.4.3. *Исследуем устойчивость решения* $(0, 0)$ *системы*

$$\begin{cases} dy_1/dt = -y_1 y_2^4, \\ dy_2/dt = y_1^4 y_2. \end{cases}$$

Имеем $f_1(y_1, y_2) = -y_1 y_2^4$, $f_2(y_1, y_2) = y_1^4 y_2$,

$$A = \left(\frac{\partial f_i(0,0)}{\partial y_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый метод Ляпунова неприменим, так как матрица A *имеет собственные значения* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Положительно определенная функция $V(y_1, y_2) = y_1^4 + y_2^4$ *является функцией Ляпунова рассматриваемой системы, поскольку*

$$\frac{\partial V(y_1, y_2)}{\partial y_1} f_1(y_1, y_2) + \frac{\partial V(y_1, y_2)}{\partial y_2} f_2(y_1, y_2) = 4y_1^3 \cdot (-y_1 y_2^4) + 4y_2^3 \cdot (y_1^4 y_2) \equiv 0.$$

Следовательно, выполнено условие (2.20). Согласно теореме 2.4.1 нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

2.4.4. Теорема об асимптотической устойчивости

Теорема 2.4.2. *Пусть на множестве* Ω *существует функция Ляпунова* $V(\overline{y})$ *системы (2.19), удовлетворяющая неравенству*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y})}{\partial y_j} f_j(t, \overline{y}) \leqslant -W(\overline{y}), \quad \forall \overline{y} \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2.25}$$

где $W(\overline{y})$ *– некоторая непрерывная положительно определенная на* Ω *функция.*

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t; \overline{\theta}) = \overline{\theta}$ *системы (2.19) является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Устойчивость по Ляпунову нулевого решения следует из теоремы 2.4.1. Остается доказать, что для решения $\overline{y}(t) = \overline{y}(t; \overline{y}_0)$ задачи Коши (2.19) выполнено

$$\overline{y}(t) \to \overline{\theta} \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

если только $\overline{y}_0$ находится в некоторой окрестности нулевого решения.

Из доказательства теоремы 2.4.1 вытекает ограниченность траектории $\overline{y}(t)$, поскольку она принадлежит ε_1-окрестности нулевого решения.

Поэтому и функция $V(\overline{y}(t))$, являясь скалярной функцией аргумента t, ограничена снизу и не возрастает благодаря неравенству

$$\frac{dV(\overline{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t, \overline{y}(t)) \leqslant -W(\overline{y}(t)) \leqslant 0,$$

которое следует из (2.25). Тогда существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} V(\overline{y}(t)) = \alpha \geqslant 0.$$

Убедимся, что $\alpha = 0$. Действительно, если $\alpha > 0$, то в силу невозрастания $V(\overline{y}(t))$ из неравенства $V(\overline{y}(t)) \geqslant \alpha$ согласно п. 2 леммы 2.4.1 вытекает оценка $\|\overline{y}(t)\| \geqslant \varepsilon_3 > 0$ для всех $t \geqslant 0$, где $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\alpha)$. Применяя лемму 2.4.1 п. 1 для положительно определенной функции $W(\overline{y})$, убеждаемся в справедливости неравенства $W(\overline{y}(t)) \geqslant \beta$ для всех $t \geqslant 0$, где $\beta = \beta(\varepsilon_3) > 0$. Тогда при $t \to +\infty$ в силу (2.25) и формулы конечных приращений Лагранжа имеем

$$V(\overline{y}(t)) - V(\overline{y}(0)) = \frac{dV(\overline{y}(\xi))}{dt} t \leqslant -W(\overline{y}(\xi))t \leqslant -\beta t \to -\infty,$$

что противоречит положительной определенности $V(\overline{y})$.

Таким образом $V(\overline{y}(t)) \to \alpha = 0$ и, в силу следствия из леммы 2.4.1, окончательно убеждаемся, что $\overline{y}(t) \to \overline{\theta}$ при $t \to +\infty$. □

Пример 2.4.4. *Исследуем устойчивость решения* $(0,0)$ *системы*

$$\begin{cases} dy_1/dt = -y_2 - y_1^3, \\ dy_2/dt = y_1 - y_2^3. \end{cases}$$

Имеем $f_1(y_1, y_2) = -y_2 - y_1^3$, $f_2(y_1, y_2) = y_1 - y_2^3$,

$$A = \left(\frac{\partial f_i(0,0)}{\partial y_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый метод Ляпунова неприменим, так как матрица A *имеет собственные значения* $\lambda_{1,2} = \pm i$. *Для* $V(y_1, y_2) = (y_1^2 + y_2^2)/2$ *имеем*

$$\frac{\partial V(y_1,y_2)}{\partial y_1} f_1(y_1,y_2) + \frac{\partial V(y_1,y_2)}{\partial y_2} f_2(y_1,y_2) =$$
$$= y_1 \cdot (-y_2 - y_1^3) + y_2 \cdot (y_1 - y_2^3) = -(y_1^4 + y_2^4).$$

Следовательно, функция $V(y_1, y_2)$ является функцией Ляпунова, которая удовлетворяет условию (2.25) с непрерывной положительно определенной функцией $W(y_1, y_2) = y_1^4 + y_2^4$. Поэтому, согласно теореме 2.4.2, нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

2.4.5. Теорема Четаева о неустойчивости

Теорема 2.4.3. *Пусть в некотором шаре $\Omega_\varepsilon = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : \|\overline{y}\| < \varepsilon\}$ радиуса $\varepsilon > 0$ найдется область $D \subset \Omega_\varepsilon$ с границей $\Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon$, $\overline{\theta} \in \Gamma_0$, $\|\overline{y}\| = \varepsilon$ при $\overline{y} \in \Gamma_\varepsilon$. Пусть на замыкании $D \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon$ этой области определена непрерывно дифференцируемая функция $U(\overline{y})$, обладающая свойствами:*

1. *$U(\overline{y}) = 0$ при $\overline{y} \in \Gamma_0$, $U(\overline{y}) > 0$ при $\overline{y} \in D$;*
2. *для любого $\alpha > 0$ найдется $\beta = \beta(\alpha) > 0$ такое, что из условий $\overline{y} \in D$ и $U(\overline{y}) \geqslant \alpha$ вытекает неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U(\overline{y})}{\partial y_j} f_j(t, \overline{y}) \geqslant \beta, \quad t \geqslant 0.$$

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t; \overline{\theta}) = \overline{\theta}$ задачи (2.19) неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Предположим противное, то есть нулевое решение устойчиво по Ляпунову. Согласно определению устойчивости по Ляпунову для взятого из условия теоремы $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого решения $\overline{y}(t) = \overline{y}(t; \overline{y}_0)$ задачи Коши (2.19), для которого при $t = 0$ выполнено неравенство $\|\overline{y}_0\| < \delta$, для всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство $\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon$, то есть

$$\overline{y}(t) \in \Omega_\varepsilon. \tag{2.26}$$

Так как $\overline{\theta} \in \Gamma_0$, то можем выбрать $\overline{y}_0 \in D$, и тогда $U(\overline{y}_0) = u_0 > 0$. Рассмотрим скалярную функцию $U(\overline{y}(t))$. Имеем

$$\frac{dU(\overline{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U(\overline{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t, \overline{y}(t)). \tag{2.27}$$

Поэтому при $t = 0$ справедливо неравенство $\dfrac{dU(\overline{y}_0)}{dt} > 0$.

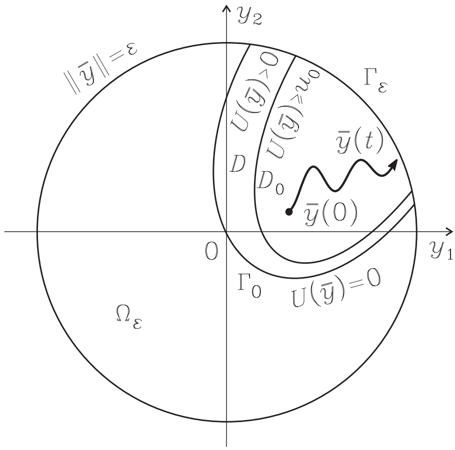

Рис. 2.5. К доказательству теоремы Четаева.

Пока стартовавшая при $t = 0$ из области D траектория $\overline{y}(t)$ остается в этой области ($\overline{y}(t) \in D$), справедливо неравенство

$$\frac{dU(\overline{y}(t))}{dt} > 0.$$

Тогда функция $U(\overline{y}(t))$ возрастает и, следовательно,

$$U(\overline{y}(t)) > U(\overline{y}_0) = u_0 > 0. \tag{2.28}$$

Рассматриваемая траектория не может выйти из области D ни через границу Γ_0 (в силу условия $U|_{\Gamma_0} = 0$), ни через границу Γ_ε (в силу (2.26)). Поэтому

$$\overline{y}(t) \in D, \quad t \geqslant 0, \tag{2.29}$$

и неравенство (2.28) выполнено для всех $t > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $U(\overline{y}(t))$ траектория не может выйти за пределы замкнутого ограниченного множества D_0 (см. рис. 2.5), где

$$D_0 = \{\overline{y} \in D \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon : U(\overline{y}) \geqslant u_0\}.$$

Согласно условию теоремы и в силу (2.27), (2.28) и (2.29) для $\alpha = u_0$ найдется $\beta_0 > 0$ такое, что во всех точках траектории $\overline{y}(t)$ справедливо

неравенство
$$\frac{dU(\overline{y}(t))}{dt} \geqslant \beta_0.$$
Почленно интегрируя на отрезке $[0,t]$ и переходя к пределу при $t \to +\infty$, имеем
$$U(\overline{y}(t)) \geqslant U(\overline{y}_0) + \beta_0 t \to +\infty, \quad \overline{y}(t) \in D_0,$$
что противоречит ограниченности непрерывной функции $U(\overline{y})$ на замкнутом ограниченном множестве D_0. Поэтому исходное предположение неверно. Неустойчивость по Ляпунову нулевого решения доказана. $\square$

Пример 2.4.5. *Исследуем устойчивость решения* $(0,0)$ *системы*
$$\begin{cases} dy_1/dt = y_1 y_2^4, \\ dy_2/dt = y_1^4 y_2. \end{cases}$$
Имеем $f_1(y_1,y_2) = y_1 y_2^4$, $f_2(y_1,y_2) = y_1^4 y_2$,
$$A = \left(\frac{\partial f_i(0,0)}{\partial y_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Первый метод Ляпунова неприменим, так как матрица A *имеет собственные значения* $\lambda_{1,2} = 0$.

Рассмотрим функцию $U(y_1,y_2) = y_1 y_2$. *Пусть* D *– совокупность двух секторов, отсекаемых от единичного круга первой и третьей координатными четвертями, граница* Γ_0 *состоит из лежащих на осях* OY_1 *и* OY_2 *радиусов. Имеем*
$$\frac{\partial V(y_1,y_2)}{\partial y_1} f_1(y_1,y_2) + \frac{\partial V(y_1,y_2)}{\partial y_2} f_2(y_1,y_2) = y_2 \cdot y_1 y_2^4 + y_1 \cdot y_1^4 y_2 =$$
$$= y_1 y_2 (y_1^4 + y_2^4) = y_1 y_2 ((y_1^2 - y_2^2)^2 + 2(y_1 y_2)^2) \geqslant 2(y_1 y_2)^3 \geqslant 2\alpha^3$$
при условии $y_1 y_2 \geqslant \alpha > 0$. *Таким образом, выполнены условия теоремы 2.4.3 с* $\beta(\alpha) = 2\alpha^3$, *и нулевое решение неустойчиво по Ляпунову.*

2.4.6. Устойчивость точек покоя

Точка $\overline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой покоя (положением равновесия) автономной системы
$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)), \tag{2.30}$$

если $\overline{f}(\overline{y}_0) = \overline{\theta}$. Таким образом, координаты точек покоя находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ \ldots \\ f_n(y_1, \ldots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Если $\overline{y}_0$ – точка покоя, то функция $\overline{y}(t) = \overline{y}_0$ является не зависящим от переменной t решением системы (2.30). Траектория такого решения представляет собой прямую линию в пространстве $(t, y_1, \ldots, y_n)$, а в фазовом пространстве переменных $(y_1, \ldots, y_n)$ – одну точку. Будем называть точку покоя $\overline{y}_0$ устойчивой, асимптотически устойчивой или неустойчивой по Ляпунову, если соответствующее решение $\overline{y}(t) = \overline{y}_0$ устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво по Ляпунову.

Для исследования устойчивости точки покоя можно сделать замену переменных $\overline{y}(t) = \widehat{y}(t) + \overline{y}_0$ и перейти к исследованию устойчивости нулевого решения системы

$$\frac{d\widehat{y}(t)}{dt} = \overline{F}(\widehat{y}(t)), \quad \overline{F}(\widehat{y}) = \overline{f}(\widehat{y} + \overline{y}_0).$$

Для применения теоремы 2.3.1 вычислим элементы матрицы производных $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, \ldots, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{y}_0).$$

В результате приходим к утверждению об устойчивости по первому приближению произвольной (не обязательно нулевой) точки покоя.

Теорема 2.4.4. *Пусть $\overline{y}_0$ – точка покоя системы (2.30), функции $f_j(\overline{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $\overline{y}_0$, $j = 1, \ldots, n$.*

Если все собственные значения матрицы $A = \big(\partial f_i(\overline{y}_0)/\partial y_j\big)$ имеют отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \quad \forall\, k = 1, \ldots, n,$$

то точка покоя $\overline{y}_0$ асимптотически устойчива по Ляпунову.

Если же найдется хотя бы одно собственное значения матрицы $A = \big(\partial f_i(\overline{y}_0)/\partial y_j\big)$ с положительной вещественной частью:

$$\exists \lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} : \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

то точка покоя $\overline{y}_0$ неустойчива по Ляпунову.

2.5. Классификация точек покоя

Доказанные выше теоремы 2.2.1-2.2.3 позволяют исследовать на устойчивость точки покоя линейной системы с постоянными коэффициентами и ответить на вопрос, что происходит со стартующей из окрестности точки покоя траекторией: остается ли она в этой окрестности при $t \to +\infty$, либо покидает ее за конечное время. Вместе с тем часто бывает необходимо уточнить характерный вид траекторий в окрестности точки покоя и, по возможности, вне ее. В данном параграфе мы приведем классификацию точек покоя линейной системы на плоскости ($n = 2$).

2.5.1. Классификация точек покоя линейной системы

Рассмотрим линейную систему с постоянными вещественными коэффициентами относительно вектор-функции $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Нас будут интересовать фазовые (то есть в плоскости (y_1, y_2)) траектории системы (2.31). Заметим, что фазовые траектории этой системы являются интегральными кривыми обыкновенного дифференциального уравнения, полученного после исключения переменной t из (2.31)

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}. \tag{2.32}$$

Точка покоя $(0, 0)$ является особой для уравнения (2.32), поскольку в ней нарушены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Поэтому через точку $(0, 0)$ может проходить как несколько фазовых кривых, так и ни одной. Таким образом, точка покоя $(0, 0)$ исходной системы (2.31) является особой точкой уравнения (2.32) в фазовых переменных.

Классификацию точек покоя будем проводить в зависимости от собственных значений и собственных векторов матрицы A. В рассматриваемом случае $n = 2$ имеется два собственных значения λ_1, λ_2. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то соответствующие собственные векторы

$$\overline{h}_1 = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix}, \quad \overline{h}_2 = \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}$$

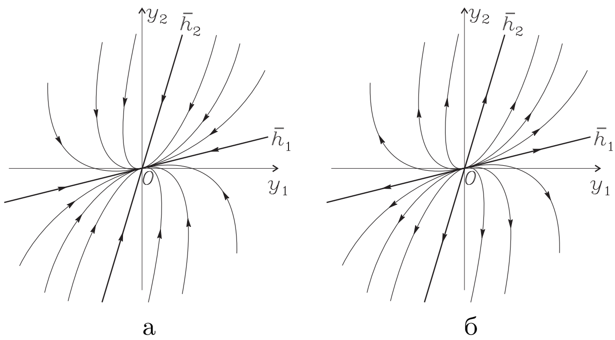

Рис. 2.6. Узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

линейно независимы и составляют базис в $\mathbb{C}^2$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то возможно существование как двух, так и одного линейно независимого собственного вектора; в последнем случае существует один присоединенный вектор, линейно независимый с собственным. Рассмотрим типы точек покоя в случае невырожденной матрицы A ($\det A \neq 0$).

2.5.2. Узел ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$)

Общее решение системы (2.31) имеет вид

$$\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} \exp\{\lambda_1 t\} + C_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} \exp\{\lambda_2 t\},$$
$$\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

Рассмотрим сначала случай, когда собственные значения отрицательны: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Тогда нулевая точка покоя асимптотически устойчива по Ляпунову и называется устойчивым узлом. Фазовые кривые при $t \to +\infty$ стремятся к устойчивому узлу: $\overline{y}(t) \to \overline{\theta}$. Выясним, по какому направлению фазовые траектории входят в узел. Для этого вычислим производную

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1 h_{11} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_{12} \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 h_{21} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_{22} \lambda_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{C_1 h_{11} \lambda_1 + C_2 h_{12} \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{C_1 h_{21} \lambda_1 + C_2 h_{22} \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}. \quad (2.34)$$

Так как $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, то при $C_1 \neq 0$ имеем $\dfrac{dy_1}{dy_2} \to \dfrac{h_{11}}{h_{21}}$ при $t \to +\infty$, то есть касательный вектор фазовой траектории в пределе коллинеарен собственному вектору $\overline{h}_1$. Если же $C_1 = 0$, то

$$\overline{y}(t) = C_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

Значит, фазовая траектория лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_2$, и приближается к точке покоя при $t \to +\infty$.

Выясним направление фазовых траекторий при $t \to -\infty$. В этом случае фазовые траектории, отличные от точки покоя, стремятся к бесконечно удаленной точке. В силу (2.33) при $C_2 \neq 0$ имеем

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1 h_{11} \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 h_{12} \lambda_2}{C_1 h_{21} \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 h_{22} \lambda_2} \to \frac{h_{12}}{h_{22}}, \quad t \to -\infty, \quad (\lambda_1 - \lambda_2 > 0),$$

то есть траектории в окрестности бесконечно удаленной точки выстраиваются параллельно вектору $\overline{h}_2$. Если же $C_2 = 0$, то

$$\overline{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t},$$

и фазовая траектория лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_1$. Проведенные выкладки иллюстрируются на рис. 2.6, изображающем фазовые траектории в случае устойчивого узла, стрелки на траекториях указывают направление движения при увеличении t.

Для положительных собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ точка покоя называется неустойчивым узлом, расположение и вид траекторий остаются теми же, что и для отрицательных собственных значений, но направление движения по траекториям меняется на противоположное.

Полезно помнить следующее правило узла: фазовые траектории входят в узел, касаясь собственного вектора с наименьшим по модулю собственным значением.

2.5.3. Дикритический узел ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\dim\ker(A - \lambda_1 E) = 2$)

В случае дикритического узла двукратному собственному значению $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ отвечают два линейно независимых собственных вектора $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$ матрицы A. Тогда выражение (2.33) для общего решения принимает вид

$$\overline{y}(t) = (C_1 \overline{h}_1 + C_2 \overline{h}_2) \exp\{\lambda t\}$$

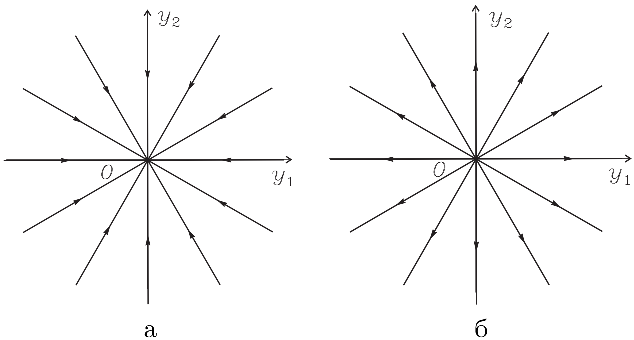

Рис. 2.7. Дикритический узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

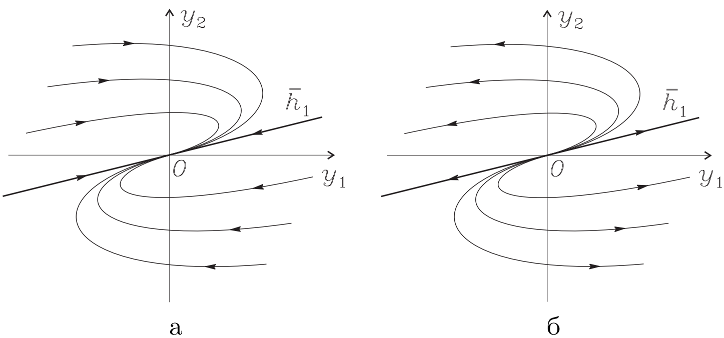

Рис. 2.8. Вырожденный узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

и определяет на плоскости (y_1, y_2) совокупность всевозможных лучей, входящих в точку покоя для $\lambda < 0$ (устойчивый дикритический узел) и выходящих из точки покоя для $\lambda > 0$ (неустойчивый дикритический узел), если $t \to +\infty$ (см. рис. 2.7).

2.5.4. Вырожденный узел ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\dim\ker(A - \lambda_1 E) = 1$)

Вырожденный узел устойчив, если $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, и неустойчив, если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. В случае вырожденного узла двукратному собственному значению $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ отвечают один собственный вектор $\overline{h}_1$ матрицы

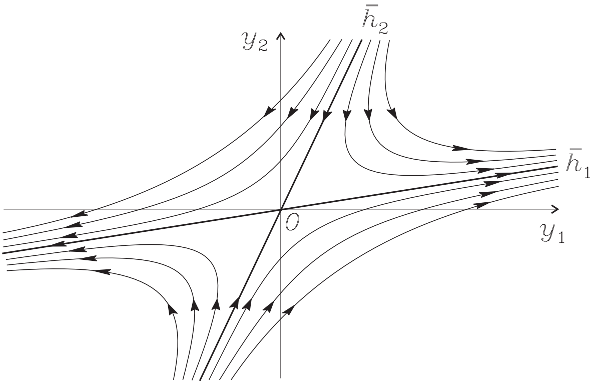

Рис. 2.9. Седло.

A и один присоединенный вектор $\overline{p}_1$. Общее решение системы (2.31) записывается в виде

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 \exp\{\lambda t\} + C_2(\overline{p}_1 + t\overline{h}_1) \exp\{\lambda t\}.$$

Если $C_2 = 0$, то фазовые траектории решения $\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 \exp\{\lambda t\}$ состоят из двух лучей, входящих в точку покоя для $\lambda < 0$ (выходящих из точки покоя для $\lambda > 0$) при $t \to +\infty$ по направлению собственного вектора. Если $C_2 \neq 0$, то

$$\overline{y}(t) = t \exp\{\lambda t\}(C_2\overline{h}_1 + \overline{o}(1)), \quad t \to +\infty.$$

Видно, что решение касается собственного вектора в точке покоя при $t \to +\infty$ для $\lambda < 0$ либо при $t \to -\infty$ для $\lambda > 0$. На бесконечности при $t \to -\infty$ для $\lambda > 0$ либо при $t \to +\infty$ для $\lambda < 0$ фазовая траектория опять выстраивается по направлению собственного вектора, но в противоположном направлении благодаря смене знака множителя t. Типичная картина фазовых траекторий для вырожденного узла приведена на рисунке 2.8.

2.5.5. Седло ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$)

Ясно, что седло является неустойчивой точкой покоя. Воспользуемся для анализа поведения траекторий формулой (2.33). Для $C_1 \neq 0$ при

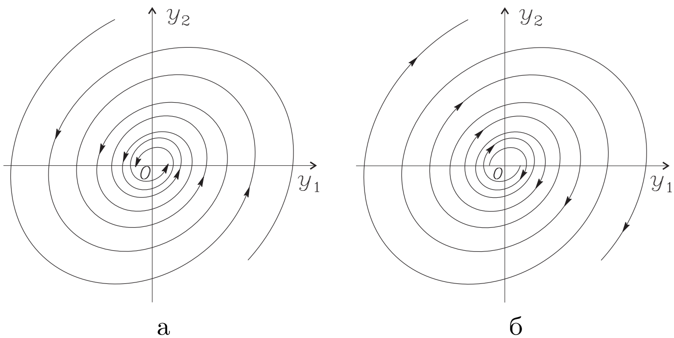

Рис. 2.10. Фокус: а – устойчивый, б – неустойчивый.

$t \to +\infty$ получаем представление

$$\overline{y}(t) = \exp\{\lambda_1 t\}\Big(C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} \exp\{(\lambda_2 - \lambda_1)t\}\Big) =$$

$$= \exp\{\lambda_1 t\}\Big(C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} + \overline{o}(1)\Big).$$

Кроме того, из (2.34) нетрудно видеть, что $\dfrac{dy_1}{dy_2} \to \dfrac{h_{11}}{h_{21}}$, то есть фазовые траектории при $t \to +\infty$ стремятся к бесконечно удаленной точке и имеют асимптоту, задаваемую собственным вектором $\overline{h}_1$. Если же $C_1 = 0$, то $\overline{y}(t) = C_2\overline{h}_2 \exp\{\lambda_2 t\}$, и фазовая траектория лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_2$, приближаясь к точке покоя при $t \to +\infty$.

Для $t \to -\infty$ картина противоположная: фазовые траектории стремятся к бесконечно удаленной точке при $C_2 \neq 0$ и имеют асимптоту, задаваемую вектором $\overline{h}_2$. Если $C_2 = 0$, то $\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 \exp\{\lambda_1 t\}$, и фазовая траектория лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_1$, приближаясь к точке покоя при $t \to -\infty$. Проведенные выкладки иллюстрируются рисунком 2.9.

2.5.6. Фокус ($\lambda_{1,2} = \delta \pm i\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, $\delta \neq 0$)

Точка покоя называется фокусом, если матрица A имеет комплексно сопряженные собственные значения с ненулевыми действительной и мнимой частями. Пусть $\overline{h} = \overline{h}_1 + i\overline{h}_2$ – собственный вектор с линейно независимыми $\overline{h}_{1,2}$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = \delta + i\omega$. Тогда действительная и мнимая части комплекснозначной вектор функции $\overline{z}(t) = \overline{h}\exp\{\lambda_1 t\}$ составляют вещественную фундаментальную систему решений системы:

$$\overline{y}_1(t) = \operatorname{Re}\overline{z}(t) = \exp\{\delta t\}\big(\overline{h}_1\cos\omega t - \overline{h}_2\sin\omega t\big),$$
$$\overline{y}_2(t) = \operatorname{Im}\overline{z}(t) = \exp\{\delta t\}\big(\overline{h}_1\sin\omega t + \overline{h}_2\cos\omega t\big).$$

Поэтому общее вещественное решение имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{y}_1(t) + C_2\overline{y}_2(t) =$$
$$= \exp\{\delta t\}\big(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\big)\overline{h}_1 + \exp\{\delta t\}\big(C_2\cos\omega t - C_1\sin\omega t\big)\overline{h}_2.$$

Обозначая $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \neq 0$ и вводя вспомогательный угол ψ из условий

$$\sin\psi = \frac{C_1}{C}, \quad \cos\psi = \frac{C_2}{C},$$

приходим к разложению решения по базису, составленному из векторов $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$:

$$\overline{y}(t) = \xi_1(t)\overline{h}_1 + \xi_2(t)\overline{h}_2.$$

Коэффициенты разложения определяются из соотношений

$$\xi_1(t) = C\exp\{\delta t\}\sin(\omega t + \psi), \quad \xi_2(t) = C\exp\{\delta t\}\cos(\omega t + \psi),$$

задающих логарифмическую спираль, которая при $t \to +\infty$ скручивается для $\delta < 0$ (устойчивый фокус, $\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) \to 0$) и раскручивается для $\delta > 0$ (неустойчивый фокус, $\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) \to +\infty$). Характерное поведение фазовых кривых в случае фокуса приведено на рисунке 2.10.

2.5.7. Центр ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$)

Точка покоя называется центром, если матрица A имеет чисто мнимые комплексно сопряженные собственные значения. Таким образом, центр – устойчивая точка покоя, не являющаяся асимптотически устойчивой. С помощью комплекснозначного собственного вектора $\overline{h} = \overline{h}_1 + i\overline{h}_2$ с линейно независимыми вещественными составляющими $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$ аналогично случаю фокуса запишем общее решение в виде разложения $\overline{y}(t) = \xi_1(t)\overline{h}_1 + \xi_2(t)\overline{h}_2$ с коэффициентами

$$\xi_1(t) = C\sin(\omega t + \psi), \quad \xi_2(t) = C\cos(\omega t + \psi),$$

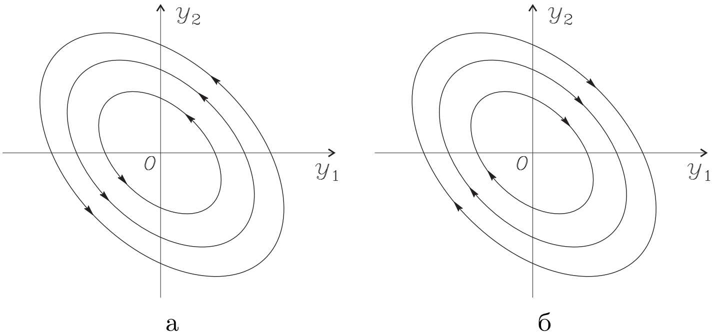

Рис. 2.11. Центр.

удовлетворяющими равенству $\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) = C^2$. Тогда вектор коэффициентов $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ описывает периодическое движение по окружности, которому в исходных координатах соответствует в общем случае движение по эллипсу (см. рис. 2.11).

2.5.8. Случай вырожденной матрицы A ($\det A = 0$)

У вырожденной матрицы одно или оба собственных значения равны нулю. Рассмотрим возникающие здесь случаи.

Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, и $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ – соответствующие линейно независимые собственные векторы. Тогда общее решение имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 + C_2\overline{h}_2 \exp\{\lambda_2 t\}.$$

Вся прямая, проходящая через начало координат параллельно вектору $\overline{h}_1$, состоит из точек покоя. Из остальных точек плоскости движение происходит по прямым, параллельным второму собственному вектору $\overline{h}_2$, приближаясь к точке покоя при $t \to +\infty$ в случае $\lambda_2 < 0$ и при $t \to -\infty$ в случае $\lambda_2 > 0$. Характер фазовых траекторий представлен на рисунках 2.12a и 2.12b.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\dim\ker A = 2$, то есть существуют линейно независимые собственные векторы $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$. Тогда матрица A состоит из одних нулей, а общее решение (2.31) имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 + C_2\overline{h}_2.$$

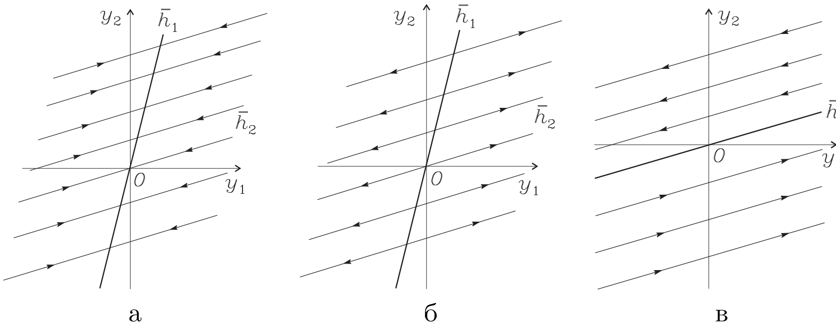

Рис. 2.12. Случай вырожденной матрицы.

Все точки плоскости являются точками покоя в рассматриваемом случае.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\dim\ker A = 1$, то есть существует один линейно независимый собственный вектор $\overline{h}$. Тогда найдется соответствующий присоединенный вектор $\overline{p}$. Общее решение (2.31) имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h} + C_2(\overline{p} + t\overline{h}) = (C_1 + C_2 t)\overline{h} + C_2\overline{p}.$$

Вся прямая, проходящая через начало координат параллельно собственному вектору $\overline{h}$, состоит из неустойчивых точек покоя. Из остальных точек плоскости движение происходит по прямым, параллельным собственному вектору $\overline{h}$, причем направление движения противоположно в полуплоскостях, отвечающих $C_2 > 0$ и $C_2 < 0$. Характер фазовых траекторий представлен на рисунке 2.12в.

2.5.9. Классификация точек покоя нелинейной системы

Точку покоя $\overline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ автономной системы

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)) \tag{2.35}$$

будем называть грубой, если матрица производных

$$A = \big(a_{ij}\big), \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{y}_0), \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{2.36}$$

имеет ровно n попарно различных собственных значений с ненулевой вещественной частью. Устойчивость по Ляпунову грубой особой точки всегда однозначно определяется с помощью первого метода Ляпунова согласно теореме 2.4.4. Оказывается, что и качественное поведение фазовых траекторий системы (2.35) достаточно полно описывается с помощью линейной системы

$$\frac{d\widehat{y}(t)}{dt} = A\widehat{y}(t) \tag{2.37}$$

в малой окрестности каждой грубой точки покоя.

На плоскости ($n = 2$) грубой точке покоя соответствует линейная система вида (2.37), имеющая нулевую точку покоя только одного из следующих типов: узел, седло или фокус. Будем называть грубую точку покоя нелинейной системы узлом, седлом или фокусом, если этот тип имеет нулевая точка покоя соответствующий линейной системы (2.37) с матрицей (2.36).

Пример 2.5.1. *Определить тип точек покоя системы*

$$\begin{cases} dy_1/dt = y_1 - 1, \\ dy_2/dt = y_1^2 - y_2^2. \end{cases}$$

Точки покоя определяются из алгебраической системы

$$\begin{cases} y_1 - 1 = 0, \\ y_1^2 - y_2^2 = 0, \end{cases}$$

имеющей два решения: $(1, \pm 1)^\top$. Так как для данной системы

$$f_1(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2, \quad f_2(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2,$$

то

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 2y_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -2y_2.$$

Для точки покоя $(1, 1)^\top$ матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Тогда $(1, 1)^\top$ – седло.

Для точки покоя $(1, -1)^\top$ матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тогда $(1, -1)^\top$ – неустойчивый узел.

Глава 3

Краевые задачи для дифференциального уравнения второго порядка

3.1. Постановка краевых задач

В предыдущих параграфах много внимания было уделено исследованию задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В задаче Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, в качестве дополнительных условий для выделения единственного решения задаются значения функции и ее производных до $(n-1)$-го порядка в некоторой точке. Возможны и другие постановки задач, в которых дополнительные условия задаются при двух значениях независимой переменной. Приведем два примера.

Рассмотрим движение материальной точки единичной массы вдоль прямой y. Движение определяется известной силой F, зависящей от времени t, положения точки $y(t)$ и ее скорости $y'(t)$. В соответствии с законом Ньютона, получим дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестной функции $y(t)$

$$y''(t) = F(t, y(t), y'(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{3.1}$$

Если мы знаем положение точки в начальный момент времени и конечный момент времени, то

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1. \tag{3.2}$$

Таким образом, нам нужно решить следующую задачу: найти функцию $y(t)$, удовлетворяющую обыкновенному дифференциальному уравнению (3.1) и краевым условиям (3.2).

Другим примером краевой задачи может служить задача, описывающая распределение температуры $u(x)$ в тонком стержне

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.3}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(l) = 0. \tag{3.4}$$

Краевое условие $u(0) = u_0$ соответствует тому, что на левом конце стержня известна температура, а краевое условие $u'(l) = 0$ означает, что правый конец стержня теплоизолирован. Функции $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ заданы. Нужно найти распределение температуры в стержне $u(x)$, то есть решить краевую задачу (3.3), (3.4).

В общем случае, краевой задачей для дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, рассматриваемого на отрезке $[0, l]$, называется задача, в которой значения неизвестной функции $y(x)$, ее производных или их линейная комбинация задаются как в точке $x = 0$, так и в точке $x = l$.

Мы ограничимся исследованием краевых задач для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Важной особенностью краевых задач является то, что их решение не всегда существует, а если существует, то может быть неединственно. Действительно, рассмотрим уравнение

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \tag{3.5}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = y_1. \tag{3.6}$$

Общее решение уравнения (3.5) имеет вид $c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Из краевого условия $y(0) = 0$ получим, что $y(x) = c_1 \sin x$. Если $y_1 \neq 0$, то решение задачи (3.5), (3.6) не существует. Если же $y_1 = 0$, то решением задачи (3.5), (3.6) является функция $y(x) = c_1 \sin x$, где c_1 – произвольная постоянная, то есть решение краевой задачи неединственно. Отметим, что решение задачи Коши для уравнения (3.5) с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ существует и единственно при любых фиксированных y_0, y_1 и $x_0 \in [0, \pi]$.

3.1.1. Преобразование уравнения

Рассмотрим краевую задачу для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.7}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = u_0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = u_1, \tag{3.8}$$

где функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, $f_1(x)$ и постоянные $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ заданы. Требуется найти функцию $y(x) \in C^2[0, l]$, удовлетворяющую (3.7), (3.8). Далее предполагаем, что функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, $f_1(x)$ непрерывны на отрезке, $a_0(x) \neq 0$, а постоянные $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ таковы, что $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1, 2$.

Преобразуем уравнение (3.7). Сначала почленно разделим его на $a_0(x)$, а затем умножим на $p(x) = \exp\left(\int\limits_0^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right)$. Выделяя полную производную, получаем

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.9}$$

где $p(x)$ – непрерывно дифференцируема на $[0, l]$, $p(x) > 0$, а функции

$$q(x) = -\frac{p(x)a_2(x)}{a_0(x)}, \quad f_2(x) = \frac{p(x)f_1(x)}{a_0(x)}$$

являются непрерывными на $[0, l]$.

3.1.2. Редукция к однородным краевым условиям

Рассмотрим краевые условия (3.8). Если $u_0 = u_1 = 0$, то краевые условия называются однородными, в противном случае – неоднородными. Покажем, что задачу (3.9), (3.8) можно свести к задаче с однородными краевыми условиями. Пусть $y(x)$ – решение задачи (3.9), (3.8). Рассмотрим функцию $z(x) = y(x) - v(x)$, где $v(x)$ – известная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая краевым условиям (3.8). Подставив в (3.9), (3.8) $y(x) = z(x) + v(x)$, получим для функции $z(x)$ краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) - q(x)z = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$\alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0, \quad \alpha_2 z'(l) + \beta_2 z(l) = 0,$$

где

$$f(x) = f_2(x) - \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dv}{dx}\right) + q(x)v.$$

Функцию $v(x)$, удовлетворяющую неоднородным краевым условиям (3.8), можно выбрать различными способами, одним из самых простых является ее поиск в виде многочлена.

Мы показали, что краевую задачу можно свести к краевой задаче с однородными краевыми условиями

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.10}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0. \tag{3.11}$$

Далее эту задачу будем называть основной краевой задачей. Краевая задача (3.10), (3.11) называется *однородной*, если $f(x) = 0$ и *неоднородной* в противном случае.

3.1.3. Тождество Лагранжа и его следствие

Выведем некоторые соотношения, которые будут нам полезны в дальнейшем. Введем дифференциальный оператор

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y.$$

Пусть функции $y(x) \in C^2[0, l]$ и $z(x) \in C^2[0, l]$, тогда можно вычислить Ly и Lz, а также выражение

$$z(x)Ly - y(x)Lz = z(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - y(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right).$$

Так как

$$z(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - y(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z(x)\frac{dy}{dx} - y(x)\frac{dz}{dx}\right)\right],$$

то

$$z(x)Ly - y(x)Lz = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z(x)\frac{dy}{dx} - y(x)\frac{dz}{dx}\right)\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3.12}$$

Это равенство называется тождеством Лагранжа.

Получим одно важное следствие из тождества Лагранжа. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения $Ly = 0$, то есть $Ly_1 = Ly_2 = 0$. Записывая для функций $y_1(x), y_2(x)$ тождество Лагранжа (3.12), получим

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(y_1(x)\frac{dy_2}{dx} - y_2(x)\frac{dy_1}{dx}\right)\right] = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3.13}$$

Следовательно, для определителя Вронского

$$W[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

справедлива формула $p(x)W[y_1, y_2](x) = c$, $0 \leqslant x \leqslant l$, где c – постоянная, или

$$W[y_1, y_2](x) = \frac{c}{p(x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3.14}$$

3.1.4. Формула Грина и ее следствие

Интегрируя тождество Лагранжа (3.12) от 0 до l, получим

$$\int\limits_0^l (z(x)Ly - y(x)Lz)\,dx = p(x)\big(z(x)y'(x) - y(x)z'(x)\big)\Big|_{x=0}^{x=l}. \tag{3.15}$$

Эта формула называется формулой Грина.

Покажем, что, если функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям (3.11), то справедливо равенство

$$\int\limits_0^l (z(x)Ly - y(x)Lz)\,dx = 0. \tag{3.16}$$

Действительно, из формулы Грина следует, что достаточно доказать равенство

$$p(l)\big(z(l)y'(l) - y(l)z'(l)\big) - p(0)\big(z(0)y'(0) - y(0)z'(0)\big) = 0.$$

Покажем, что

$$z(0)y'(0) - y(0)z'(0) = 0. \tag{3.17}$$

Если $\alpha_1 = 0$, то $\beta_1 \neq 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, и (3.17) выполнено. При $\alpha_1 \neq 0$ запишем граничные условия

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0,$$

умножим первое равенство на $z(0)$, второе – на $y(0)$. Вычитая почленно полученные равенства, имеем

$$\alpha_1(z(0)y'(0) - y(0)z'(0)) = 0,$$

откуда вытекает (3.17). Аналогично доказывается, что

$$z(l)y'(l) - y(l)z'(l) = 0.$$

Тем самым равенство (3.16) доказано.

3.2. Функция Грина. Существование решения краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$Ly \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.18}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \tag{3.19}$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \tag{3.20}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – известные функции, а α_1, β_1, α_2, β_2 – известные постоянные такие, что $p(x) \in C^1[0,l]$, $p(x) > 0$, $x \in [0,l]$, $q(x), f(x) \in C[0,l]$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1, 2$.

Определение 3.2.1. *Функция $y(x)$ называется решением краевой задачи (3.18)-(3.20), если $y(x) \in C^2[0,l]$ и удовлетворяет (3.18)-(3.20).*

3.2.1. Функция Грина

Введем функцию Грина, которая далее будет использована для решения краевой задачи (3.18)-(3.20).

Определение 3.2.2. *Функция $G(x,\xi)$ называется функцией Грина краевой задачи (3.18)-(3.20), если она определена в квадрате $[0,l] \times [0,l]$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1) *Для любого $\xi \in (0,l)$ функция $G(x,\xi)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x на множестве $[0,\xi) \cup (\xi,l]$ и удовлетворяет однородному уравнению*

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right) - q(x)G(x,\xi) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad x \neq \xi.$$

2) *Функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет однородным краевым условиям по переменной x:*

$$\alpha_1 G_x(0,\xi) + \beta_1 G(0,\xi) = 0, \quad \alpha_2 G_x(l,\xi) + \beta_2 G(l,\xi) = 0, \quad \forall \xi \in (0,l).$$

3) Функция $G(x,\xi)$ непрерывна в квадрате $[0,l]\times[0,l]$, а частная производная $G_x(x,\xi)$ при $x=\xi$ имеет конечные предельные значения

$$G_x(\xi+0,\xi)=\lim_{x\to\xi+0}G_x(x,\xi),\quad G_x(\xi-0,\xi)=\lim_{x\to\xi-0}G_x(x,\xi),$$

связанные соотношением

$$G_x(\xi+0,\xi)-G_x(\xi-0,\xi)=\frac{1}{p(\xi)},\quad \forall\xi\in(0,l).$$

3.2.2. Существование и единственность функции Грина

Теорема 3.2.1. *Если однородная краевая задача*

$$Lv=0,\quad \alpha_1 v'(0)+\beta_1 v(0)=0,\quad \alpha_2 v'(l)+\beta_2 v(l)=0 \tag{3.21}$$

имеет только нулевое решение, то функция Грина краевой задачи (3.18)-(3.20) существует и единственна.

Доказательство. Определим функцию $y_1(x)$ как решение задачи Коши

$$Ly_1=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad y_1(0)=-\alpha_1,\quad y_1'(0)=\beta_1,$$

а функцию $y_2(x)$ как решение задачи Коши

$$Ly_2=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad y_2(l)=-\alpha_2,\quad y_2'(l)=\beta_2.$$

Очевидно, что функция $y_1(x)$ удовлетворяет краевому условию (3.19), а $y_2(x)$ краевому условию (3.20):

$$\alpha_1 y_1'(0)+\beta_1 y_1(0)=0,\quad \alpha_2 y_2'(l)+\beta_2 y_2(l)=0. \tag{3.22}$$

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, так как в противном случае однородная краевая задача имела бы ненулевое решение.

Будем искать функцию Грина в следующем виде:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} c_1(\xi)y_1(x), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ c_2(\xi)y_2(x), & \xi\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

где $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ неизвестные функции. Из этого представления следует, что функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) определения функции Грина. Выберем $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ так, чтобы выполнялось и условие 3). Из непрерывности $G(x,\xi)$ в точке $x=\xi$ следует, что

$$c_1(\xi)y_1(\xi)=c_2(\xi)y_2(\xi).$$

Из условия разрыва производной $G_x(x,\xi)$ в точке $x=\xi$ имеем

$$c_2(\xi)y_2'(\xi) - c_1(\xi)y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Таким образом, мы получили систему двух уравнений относительно неизвестных функций $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$. Решив эту систему, найдем, что

$$c_1(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}, \quad c_2(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)},$$

где $W(\xi) = y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi)$ – определитель Вронского. Как следует из формулы (3.14), $W(\xi)p(\xi) = g_0$ – известная постоянная. В результате получим окончательную формулу для функции Грина

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\[2ex] \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{g_0}, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{3.23}$$

Мы доказали существование функции Грина. Докажем теперь ее единственность. Предположим, что существуют две функции Грина: $G(x,\xi)$ и $\widehat{G}(x,\xi)$. Пусть ξ – произвольная фиксированная точка из интервала $(0,l)$. Рассмотрим функцию $z(x) = G(x,\xi) - \widehat{G}(x,\xi)$. Эта функция непрерывна на отрезке $[0,l]$ и имеет на нем непрерывную производную $z'(x)$, поскольку $G_x(x,\xi)$ и $\widehat{G}_x(x,\xi)$ имеют в точке $x=\xi$ один и тот же разрыв. Записывая далее из уравнения $Lz=0$, $x \neq \xi$, выражение

$$z''(x) = \frac{q(x)z(x) - p'(x)z'(x)}{p(x)},$$

убеждаемся в непрерывности второй производной при $x=\xi$ благодаря равенству ее предельных значений при $x \to \xi \pm 0$. Тогда функция $z(x)$ является решением уравнения также и при $x=\xi$,

$$Lz = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

и удовлетворяет условиям (3.19), (3.20). По условию теоремы однородная краевая задача на отрезке $[0,l]$ имеет только тривиальное решение. Поэтому $z(x)=0$, а значит $G(x,\xi) = \widehat{G}(x,\xi)$, и теорема 3.2.1 доказана. $\square$

Пример 3.2.1. *Построить функцию Грина для краевой задачи*

$$y''(x) + a^2 y(x) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0,$$

где $a \neq \pi n l^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Возьмем $y_1(x) = \sin ax$, а $y_2(x) = \sin a(x - l)$. Очевидно, что

$$y_i''(x) + a^2 y_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad y_1(0) = y_2(l) = 0.$$

Постоянная

$$g_0 = p(x)W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = a \sin al.$$

Из формулы (3.23) следует, что для данной краевой задачи функция Грина равна

$$G_a(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax \sin a(\xi - l)}{a \sin al}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\[2ex] \dfrac{\sin a\xi \sin a(x - l)}{a \sin al}, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{3.24}$$

3.2.3. Нахождение решения неоднородной краевой задачи с помощью функции Грина

Докажем теорему существования и единственности решения краевой задачи (3.18)-(3.20).

Теорема 3.2.2. *Если однородная краевая задача (3.21) имеет только нулевое решение, то решение краевой задачи (3.18)-(3.20) существует, единственно и задается формулой*

$$y(x) = \int\limits_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3.25}$$

Доказательство. Покажем, что функция $y(x)$, определяемая формулой (3.25), является решением краевой задачи (3.18)-(3.20).

Из формулы (3.23) для функции Грина следует, что

$$y(x) = \frac{y_2(x)}{g_0} \int\limits_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{y_1(x)}{g_0} \int\limits_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi. \tag{3.26}$$

После дифференцирования и приведения подобных слагаемых получаем

$$y'(x) = \frac{y_2'(x)}{g_0} \int\limits_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{y_1'(x)}{g_0} \int\limits_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi. \tag{3.27}$$

Вычислим

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\big(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\big)p(x)}{g_0} f(x) +$$

$$+ \frac{1}{g_0}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_2}{dx}\right) \int\limits_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{g_0}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right) \int\limits_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Так как $Ly_1 = Ly_2 = 0$, а $\big(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\big)p(x) = g_0$, то

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y(x) =$$

$$= f(x) + \frac{Ly_2}{g_0} \int\limits_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{Ly_1}{g_0} \int\limits_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi = f(x).$$

Следовательно, $y(x)$ является решением уравнения (3.18).

Убедимся в выполнении краевых условий (3.19), (3.20). Из формул (3.26), (3.27) и (3.22) следует, что

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = \frac{\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0)}{g_0} \int\limits_0^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi = 0.$$

Аналогично проверяется (3.20).

Докажем единственность полученного решения. Пусть имеется еще одно решение $\widetilde{y}(x)$ краевой задачи (3.18)-(3.20). Тогда их разность $v(x) = y(x) - \widetilde{y}(x)$ будет решением однородной краевой задачи (3.21) на отрезке $[0, l]$ и по условию теоремы равна нулю, то есть $y(x) - \widetilde{y}(x) \equiv 0$, и теорема 3.2.2 доказана. $\square$

3.2.4. О применении функции Грина в нелинейных дифференциальных уравнениях

Приведем пример применения функции Грина для доказательства существования и единственности решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения.

Рассмотрим краевую задачу

$$y''(x) + a^2y(x) = F(x, y(x)), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.28}$$

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{3.29}$$

Теорема 3.2.3. *Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна при $x \in [0, l]$ и $y \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условию Липшица по y:*

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad \forall x \in [0, l], \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Если $lL(a|\sin al|)^{-1} < 1$, то решение краевой задачи (3.28), (3.29) существует и единственно.

Доказательство. Пусть $y(x)$ - решение краевой задачи (3.28), (3.29). Введем функцию $f(x) = F(x, y(x))$. Тогда функция $y(x)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} &y''(x) + a^2y(x) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ &y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \end{aligned}$$

Функция Грина для решения этой задачи имеет вид (3.24). Применяя функцию Грина, получим

$$y(x) = \int\limits_0^l G_a(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Учитывая определение функции $f(x)$, имеем

$$y(x) = \int\limits_0^l G_a(x, \xi) F(\xi, y(\xi)) d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3.30}$$

Таким образом, мы показали, что, если функция $y(x)$ – решение краевой задачи (3.28), (3.29), то она является решением интегрального уравнения (3.30).

Справедливо и обратное. Пусть функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$ и является решением интегрального уравнения (3.30). Из формул (3.24), (3.30) следует, что функция $y(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.29). Дифференцируя уравнение (3.30) два раза и подставляя $y(x)$

и $y''(x)$ в уравнение (3.28), легко убедиться в том, что $y(x)$ является решением этого уравнения. Следовательно, непрерывное решение уравнения (3.30) является решением краевой задачи (3.28), (3.29). Таким образом, мы показали, что краевая задача (3.28), (3.29) эквивалентна интегральному уравнению (3.30).

Докажем существование решения уравнения (3.30), непрерывного на отрезке $[0, l]$. Рассмотрим последовательность функций $y_0(x) = 0$,

$$y_{n+1}(x) = \int\limits_0^l G_a(x,\xi)F(\xi, y_n(\xi))d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.31}$$

Все функции $y_n(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[0, l]$.

Покажем, что справедлива оценка

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leqslant M\left(\frac{lL}{a|\sin al|}\right)^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.32}$$

где

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |y_1(x)| = \max_{0 \leqslant x \leqslant l}\left|\int\limits_0^l G_a(x,\xi)F(\xi, 0)d\xi\right|.$$

Действительно, при $n = 0$ она верна. Пусть она верна при $n = m - 1$. Покажем, что она справедлива и при $n = m$. Оценим $|y_{m+1}(x) - y_m(x)|$. Так как

$$|G_a(x,\xi)| \leqslant (a|\sin al|)^{-1}, \quad 0 \leqslant x, \xi \leqslant l,$$

то

$$|y_{m+1}(x) - y_m(x)| \leqslant \int\limits_0^l |G_a(x,\xi)||F(\xi, y_m(\xi)) - F(\xi, y_{m-1}(\xi))|d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{a|\sin al|}\int\limits_0^l |y_m(\xi) - y_{m-1}(\xi)|d\xi \leqslant M\left(\frac{lL}{a|\sin al|}\right)^m, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Следовательно, оценка (3.32) доказана по индукции.

Так как

$$y_k(t) = \sum_{n=1}^k (y_n(t) - y_{n-1}(t)),$$

то равномерная сходимость последовательности $y_k(t)$ на отрезке $[0, l]$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(y_n(t) - y_{n-1}(t)).$$

Из оценки (3.32) и признака Вейерштрасса следует, что этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0, l]$. Следовательно, последовательность функций $y_k(x)$ также сходится равномерно на отрезке $[0, l]$ к некоторой функции $y(x)$. Так как все функции $y_k(t)$ непрерывны, то и $y(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$. Переходя в формуле (3.31) к пределу при n стремящемся к бесконечности, получим, что функция $y(x)$ является решением уравнения (3.30). Следовательно, она является решением краевой задачи (3.28), (3.29).

Докажем единственность решения краевой задачи (3.28), (3.29). Для этого достаточно доказать, что уравнение (3.30) имеет единственное непрерывное решение. Предположим, что это не так и существуют две непрерывные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, являющиеся решениями уравнения (3.30). Тогда

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_0^l G_a(x,\xi)\big[F(\xi, y_1(\xi)) - F(\xi, y_2(\xi))\big]d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Используя оценку для функции Грина $G_a(x, \xi)$, получим

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant \int_0^l |G_a(x,\xi)|L|y_1(\xi)) - y_2(\xi)|d\xi <$$
$$< \max_{0\leqslant x\leqslant l}|y_1(x) - y_2(x)|, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Из этого неравенства вытекает что $y_1(x) = y_2(x)$. Таким образом, решение краевой задачи единственно и теорема 3.2.3 доказана. $\square$

3.3. Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.33}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \tag{3.34}$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \tag{3.35}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – известные действительные функции, α_1, β_1, α_2, β_2 – известные действительные постоянные такие, что $p(x) \in C^1[0,l]$, $p(x) > 0$, $x \in [0,l]$, $q(x) \in C[0,l]$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1,2$ и λ – комплексный параметр.

Очевидно, что при любом значении параметра λ краевая задача (3.33)-(3.35) имеет решение $y(x) = 0$.

Определение 3.3.1. *Если для некоторого λ_1 краевая задача (3.33)-(3.35) имеет нетривиальное решение $y_1(x)$, то λ_1 называется* ***собственным значением****, а $y_1(x)$* ***собственной функцией****.*

Задача поиска собственных значений и собственных функций называется задачей Штурма-Лиувилля.

Очевидно, что собственные функции определены с точностью до произвольной постоянной, а именно, если $y(x)$ – собственная функция, то и $cy(x)$, где c – произвольная отличная от нуля постоянная, является собственной функцией.

Задача решения уравнения (3.33) представляет собой задачу поиска собственных значений и собственных функций дифференциального оператора L. Важно отметить, что без краевых условий (3.34), (3.35) эта задача бессмысленна. Действительно, уравнение $Ly = -\lambda y(x)$ при любом λ имеет нетривиальное решение, поскольку при любом λ оно является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка.

Из курса алгебры известно, что собственные значения и собственные векторы действительной матрицы могут быть комплекснозначными. Так и в случае задачи Штурма-Лиувилля, вообще говоря, возможно появление комплекснозначных собственных значений и собственных функций. Поэтому мы должны рассматривать комплекснозначные значения параметра λ и комплекснозначные решения задачи (3.33)-(3.35).

Установим некоторые свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.

Теорема 3.3.1. *Все собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля действительны.*

Доказательство. Пусть λ_1 – собственное значение, а $y_1(x)$ – соответствующая ему собственная функция. Предположим, что они комплекснозначные, то есть $\lambda_1 = a + ib$, $y_1(x) = u(x) + iv(x)$. Так как функция

$y_1(x)$ является решением уравнения (3.33), то $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x)$. Записывая это равенство отдельно для действительных и мнимых частей, получим

$$Lu = -au(x) + bv(x), \tag{3.36}$$

$$Lv = -bu(x) - av(x). \tag{3.37}$$

Так как функция $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.34), (3.35), то и функции $u(x)$, $v(x)$ удовлетворяют этим краевым условиям.

Умножим уравнение (3.36) на $v(x)$, а уравнение (3.37) на $u(x)$, проинтегрируем затем оба уравнения от 0 до l и вычтем из первого второе. В результате получим

$$\int\limits_0^l \big(v(x)Lu - u(x)Lv\big)dx = b\int\limits_0^l \big(u^2(x) + v^2(x)\big)dx.$$

Применяя следствие из формулы Грина

$$\int\limits_0^l \big(v(x)Lu - u(x)Lv\big)dx = 0, \tag{3.38}$$

имеем

$$b\int\limits_0^l \big(u^2(x) + v^2(x)\big)dx = 0.$$

Следовательно, $b = 0$. Значит λ_1 действительно и $y_1(x)$ также действительна. □

Теорема 3.3.2. *Каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.*

Доказательство. Пусть собственному значению λ соответствуют две собственные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$. Это значит, что они являются решениями уравнения (3.33) и удовлетворяют краевым условиям (3.34), (3.35). Из краевого условия (3.34) следует, что определитель Вронского $W[y_1, y_2](0) = 0$. Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ – решения одного и того же линейного однородного дифференциального уравнения (3.33), то $y_2(x) = cy_1(x)$. □

Введем скалярное произведение функций $v(x)$ и $w(x)$

$$(v,w)=\int\limits_0^l v(x)w(x)dx.$$

Будем называть функции $v(x)$ и $w(x)$ *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, то есть $(v,w)=0$.

Теорема 3.3.3. *Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1\neq\lambda_2$ – различные собственные значения, а $y_1(x)$, $y_2(x)$ – соответствующие им собственные функции. Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ удовлетворяют краевым условиям (3.34), (3.35), то из следствия из формулы Грина (3.16) получим, что

$$(Ly_1,y_2)-(y_1,Ly_2)=\int\limits_0^l \big(y_2(x)Ly_1-y_1(x)Ly_2\big)dx=0.$$

Так как $Ly_1=-\lambda_1y_1(x)$, $Ly_2=-\lambda_2y_2(x)$, то

$$(\lambda_1-\lambda_2)(y_1,y_2)=\lambda_1(y_1,y_2)-\lambda_2(y_1,y_2)=$$
$$=(\lambda_1y_1,y_2)-(y_1,\lambda_2y_2)=-(Ly_1,y_2)+(y_1,Ly_2)=0.$$

Следовательно, $(\lambda_1-\lambda_2)(y_1,y_2)=0$, а значит $(y_1,y_2)=0$ и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ ортогональны. □

Теорема 3.3.4. *Пусть $\alpha_1=\alpha_2=0$. Тогда, если λ – собственное значение, то*

$$\lambda\geqslant\min_{0\leqslant x\leqslant l}q(x). \tag{3.39}$$

Доказательство. Предположим, что λ_1 – собственное значение, $y_1(x)$ – соответствующая собственная функция и

$$\lambda_1<\min_{0\leqslant x\leqslant l}q(x).$$

Тогда $q(x)-\lambda_1>0$ на отрезке $[0,l]$. Из уравнения (3.33) следует, что

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right)=(-\lambda_1+q(x))y_1(x).$$

Интегрируя от 0 до x, получим

$$p(x)y_1'(x) = p(0)y_1'(0) + \int_0^x (q(s) - \lambda_1)y_1(s)ds. \tag{3.40}$$

Так как $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.34), (3.35) и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то $y_1(0) = y_1(l) = 0$. Так как $y_1(x)$ – ненулевое решение (3.33), то $y_1'(0) \neq 0$. Пусть для определенности $y_1'(0) > 0$. Тогда $y_1'(x) > 0$ при $x \in [0, l]$. Предположим, что это не так. Обозначим через x_0 минимальное число, при котором $y_1'(x_0) = 0$. Тогда для $x \in [0, x_0)$ производная $y_1'(x) > 0$, а значит и $y_1(x) > 0$ при $x \in (0, x_0)$. Положив в (3.40) $x = x_0$ и учитывая положительность $q(x) - \lambda_1$, получим, что $y_1'(x_0) > 0$. Это противоречие доказывает положительность $y_1'(x)$ при $x \in [0, l]$. Но тогда $y_1(x) > 0$ при $x \in (0, l]$, что противоречит краевому условию $y_1(l) = 0$. Следовательно, исходное предположение неверно и неравенство (3.39) доказано. □

Рассмотрим простой пример задачи Штурма-Лиувилля.

Пример 3.3.1. *Пусть $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $l = \pi$. Тогда задача Штурма-Лиувилля приобретает следующий вид*

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{3.41}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{3.42}$$

Требуется найти собственные значения и собственные функции этой задачи.

Пусть $\lambda = -\mu$ меньше нуля. Тогда общее решение уравнения (3.41) имеет вид

$$y(x) = c_1 \exp\{\sqrt{\mu}x\} + c_2 \exp\{-\sqrt{\mu}x\}.$$

Положив $x = 0$, $x = l$ и использовав краевые условия (3.42), получим систему уравнений для определения c_1 и c_2

$$c_1 + c_2 = 0,$$
$$c_1 \exp\{\sqrt{\mu}\pi\} + c_2 \exp\{-\sqrt{\mu}\pi\} = 0,$$

из которой следует, что $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом отрицательные λ не являются собственными значениями. Отметим, что этот факт следует из теоремы 3.3.4. Легко видеть, что $\lambda = 0$ также не является собственным значением.

Пусть λ больше нуля. Тогда общее решение уравнения (3.41) имеет вид

$$y(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x.$$

Из краевого условия в нуле следует, что $c_2 = 0$. Тогда из краевого условия в π получим уравнение для определения собственных значений $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. Его решениями являются собственные значения

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Соответствующие им собственные функции

$$y_n(x) = c \sin nx,$$

где c – произвольная отличная от нуля постоянная.

3.3.1. Теорема Стеклова

Сформулируем теорему, подчеркивающую важность задачи Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (3.33)-(3.35). Можно показать, что их счетное число. Следовательно все их можно занумеровать $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Чтобы устранить неопределенность, связанную с тем, что они содержат произвольный сомножитель, будем считать, что

$$\int\limits_0^l (y_n(x))^2 dx = 1.$$

Пусть $f(x)$ некоторая непрерывная на $[0, l]$ функция. Введем обозначение

$$f_n = \int\limits_0^l f(x) y_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Сформулируем теорему, имеющую важное значение во многих областях математики и ее приложений.

Теорема 3.3.5. *(Теорема Стеклова) Если $f(x) \in C^2[0, l]$ и удовлетворяет краевым условиям (3.34), (3.35), то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$$

сходится равномерно на отрезке $[0, l]$ *к функции* $f(x)$*, то есть*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Глава 4

Уравнения в частных производных первого порядка

4.1. Первые интегралы нормальной системы

4.1.1. Определение первого интеграла

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), \end{cases} \tag{4.1}$$

где функции $f_i(t, \overline{x})$ являются непрерывными в области $D_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ вместе со всеми частными производными $\partial f_i(t, \overline{x})/\partial x_j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Обозначим через $C^1(D_1)$ множество непрерывно дифференцируемых в D_1 функций.

Определение 4.1.1. *Первым интегралом системы (4.1) в области D_1 называется функция $v(t, x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_1)$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой лежащей в D_1 интегральной кривой системы (4.1).*

Таким образом, для каждого решения $\overline{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ системы (4.1) найдется константа C такая, что

$$v(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv C. \tag{4.2}$$

В физических моделях первые интегралы возникают как отражения различных законов сохранения (энергии, импульса и т.д.).

4.1.2. Производная первого интеграла в силу системы

Дадим определение производной в силу системы для общего случая нормальной системы (4.1).

Определение 4.1.2. *Производной функции* $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ *в силу системы (4.1) называется функция*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.1)} = \frac{\partial v(t,\overline{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,\overline{x})}{\partial x_j} f_j(t,\overline{x}), \quad (t,\overline{x}) \in D_1.$$

Лемма 4.1.1. *Функция* $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ *является первым интегралом системы (4.1) в области* D_1 *тогда и только тогда, когда ее производная в силу системы (4.1) равна нулю в* D_1*:*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.1)} = 0, \quad \forall (t,\overline{x}) \in D_1. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть функция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (4.1) в области D_1. Тогда на лежащей в D_1 интегральной кривой $(t, \overline{x}(t))$, где $\overline{x}(t)$ – решение (4.1), справедливо равенство (4.2). Дифференцируя (4.2) почленно по t и подставляя выражения для производных $dx_j(t)/dt$ из (4.1), имеем

$$0 \equiv \frac{\partial v(t,\overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,\overline{x}(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j(t)}{dt} =$$

$$= \frac{\partial v(t,\overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,\overline{x}(t))}{\partial x_j} f_j(t,\overline{x}(t)).$$

Таким образом, производная в силу системы (4.1) равна нулю вдоль интегральной кривой. Так как через любую точку $(t_0, \overline{x}_0) \in D_1$ по теореме существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы (4.1) с начальным условием $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ проходит единственная интегральная кривая, то (4.3) выполнено для любой точки D_1.

Обратно, пусть для некоторой функции $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ справедливо (4.3). В частности, (4.3) будет выполнено и на любой интегральной кривой $(t, \overline{x}(t)) \in D_1$. Тогда

$$0 \equiv \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial x_j} f_j(t, \overline{x}(t)) =$$

$$= \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\big(v(t, \overline{x}(t))\big).$$

Производная непрерывно дифференцируемой функции $v(t, \overline{x}(t))$ скалярного аргумента t равна нулю только когда функция является константой, то есть $v(t, \overline{x}(t)) \equiv C$. Поэтому $v(t, \overline{x})$ – первый интеграл системы (4.1). $\square$

4.1.3. Геометрический смысл первого интеграла

Пусть функция $v(t, x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (4.1) в области D_1, C_0 – любое значение, которое эта функция принимает в D_1, и для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$ производная $\partial v(t, \overline{x})/\partial x_j \neq 0$ в D_1. Покажем, что уравнение $v(t, x_1, \ldots, v_n) = C_0$ определяет в $\mathbb{R}^{n+1}$ n-мерную поверхность, целиком состоящую из интегральных кривых системы (4.1). Пусть точка $(t_0, \overline{x}_0) \in D_1$ лежит на поверхности

$$v(t, \overline{x}) = C_0,$$

то есть $v(t_0, \overline{x}_0) = C_0$. В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы (4.1) с начальным условием $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ существует единственная интегральная кривая $(t, \overline{x}(t))$, проходящая через точку $(t_0, \overline{x}_0)$. Так как $v(t, \overline{x})$ – первый интеграл, то на рассматриваемой интегральной кривой справедливы равенства

$$v(t, \overline{x}(t)) = v(t_0, \overline{x}(t_0)) = v(t_0, \overline{x}_0) = C_0,$$

показывающие, что при всех допустимых $t \neq t_0$ интегральная кривая остается на поверхности $v(t, \overline{x}) = C_0$.

4.1.4. Независимые первые интегралы

Пусть $v_1(t, \overline{x}), \ldots, v_k(t, \overline{x})$ – первые интегралы системы (4.1). Тогда для любой непрерывно дифференцируемой в $\mathbb{R}^k$ функции $\varphi(y_1, \ldots, y_k)$

суперпозиция

$$\Phi(t,\overline{x}) = \varphi(v_1(t,\overline{x}),\dots,v_k(t,\overline{x}))$$

также является первым интегралом системы (4.1).

Определение 4.1.3. *Первые интегралы $v_1(t,\overline{x}),\dots,v_k(t,\overline{x})$ системы (4.1) называются* ***функционально независимыми*** *в области D_1, если ранг матрицы производных равен количеству функций k:*

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial v_i(t,\overline{x})}{\partial x_j}\right) = k, \quad \forall (t,\overline{x}) \in D_1.$$

Важность функционально независимых интегралов для решения нормальной системы проясняет следующая теорема.

Теорема 4.1.1. *Пусть в области D_1 существует n функционально независимых первых интегралов $v_1(t,\overline{x}),\dots,v_n(t,\overline{x})$ системы (4.1). Тогда для любой точки $(t_0,\overline{x}_0) \in D_1$ решение $\overline{x}(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ задачи Коши*

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(t, x_1(t),\dots,x_n(t)), \quad k=1,\dots,n, \quad \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 \tag{4.4}$$

однозначно определяется как неявная функция из системы уравнений

$$\begin{cases} v_1(t,\overline{x}) = c_1^0, \\ \quad\vdots \\ v_n(t,\overline{x}) = c_n^0, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $c_j^0 = v_j(t_0,\overline{x}_0)$, $j=1,\dots,n$.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (4.5) в окрестности точки $(t_0,\overline{x}_0)$. В самой точке уравнения очевидно удовлетворяются, причем в силу функциональной независимости первых интегралов (см. определение 4.1.3 при $k=n$) якобиан по переменным $(x_1,\dots,x_n)$ отличен от нуля:

$$\det\left(\frac{\partial v_i(t_0,\overline{x}_0)}{\partial x_j}\right) \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявных функциях (см. теорему А.1.1 в дополнении) в некоторой окрестности точки t_0 существуют непрерывно дифференцируемые функции

$$x_j(t) = g_j(t, c_1^0,\dots,c_n^0), \quad j=1,\dots,n$$

такие, что при подстановке $\overline{g}(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$ в (4.5) получается тождество:

$$\begin{cases} v_1(t, \overline{g}(t)) = c_1^0, \\ \quad\vdots \\ v_n(t, \overline{g}(t)) = c_n^0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Пусть $\overline{x}(t)$ – решение задачи Коши (4.4). По определению первых интегралов имеем

$$v_j(t, \overline{x}(t)) = v_j(t_0, \overline{x}(t_0)) = v_j(t_0, \overline{x}_0) = c_j^0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, $\overline{x}(t)$ удовлетворяет той же самой системе функциональных уравнений (4.6), что и $\overline{g}(t)$. В силу единственности неявной функции в окрестности t_0 найденные функции совпадают: $\overline{x}(t) \equiv \overline{g}(t)$. $\square$

Имеет место следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства.

Теорема 4.1.2. *В случае автономной системы (4.1), то есть*

$$f_j = f_j(\overline{x}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

в окрестности любой точки $\overline{x}_0$, для которой

$$\sum_{j=1}^{n} f_j^2(\overline{x}_0) \neq 0,$$

существует ровно $(n-1)$ не содержащих переменную t функционально независимых первых интегралов системы (4.1).

4.2. Уравнения в частных производных первого порядка

4.2.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Пусть $u(\overline{x}) = u(x_1, \ldots, x_n)$ – функция от $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D_0$, D_0 – область в $\mathbb{R}^n$. Уравнение

$$F\Big(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0$$

называется дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, если заданная функция $F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ существенно зависит от последних n аргументов.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка называется *квазилинейным*, если в это уравнение частные производные входят линейно, то есть

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \ldots, x_n, u(\overline{x}))\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j} = b(x_1, \ldots, x_n, u(\overline{x})),$$

где функции $a_j(\overline{x}, u) = a_j(x_1, \ldots, x_n, u)$, $b(\overline{x}, u) = b(x_1, \ldots, x_n, u)$ считаются заданными на некотором множестве $D_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, причем всюду в D_1 выполнено условие $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}, u) \neq 0$.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка называется *линейным однородным*, если коэффициенты этого уравнения не зависят от u, а правая часть равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x})\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j} = 0,$$

где функции $a_j(\overline{x})$ заданы на некотором множестве $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, причем всюду в D_0 выполнено условие $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}) \neq 0$. Очевидно, что линейное однородное уравнение в частных производных является частным случаем квазилинейного уравнения.

Определение 4.2.1. *Функция $u(\overline{x})$ называется решением квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в области $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, если*

1. *$u(\overline{x})$ непрерывно дифференцируема в D_0 (то есть $u(\overline{x}) \in C^1(D_0)$);*

2. *для любого $\overline{x} \in D_0$ точка $(\overline{x}, u(\overline{x})) \in D_1$;*

3. *при подстановке функции $u(\overline{x})$ в обе части квазилинейного уравнения получается тождество в области D_0.*

4.2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в области $D_0 \subset \mathbb{R}^n$

$$a_1(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_n(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{4.7}$$

$$a_j(\overline{x}) \in C^1(D_0),\ j = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}) \neq 0, \quad \forall \overline{x} \in D_0. \tag{4.8}$$

По коэффициентам уравнения (4.7) построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = a_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)). \end{cases} \tag{4.9}$$

Определение 4.2.2. *Решения $\overline{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ системы (4.9) определяют фазовые кривые в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые называются* характеристиками *уравнения в частных производных (4.7).*

Связь системы (4.9) и уравнения (4.7) проясняется в следующей лемме.

Лемма 4.2.1. *Функция $u(\overline{x}) \in C^1(D_0)$ является решением линейного однородного уравнения в частных производных (4.7) тогда и только тогда, когда $u(\overline{x})$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.9) в области D_0.*

Доказательство. Пусть $u(\overline{x})$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.9) в области D_0. Тогда по лемме 4.1.1 о свойствах первого интеграла его производная в силу системы (4.9) равна нулю в области D_0:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{(4.9)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j} a_j(\overline{x}) = 0, \quad \forall \overline{x} \in D_0.$$

Поэтому $u(\overline{x})$ – решение уравнения в частных производных (4.7).

Обратно, пусть $u(\overline{x})$ – решение уравнения в частных производных (4.7). Тогда его левая часть представляет собой выражение для производной $u(\overline{x})$ в силу системы (4.9), и это выражение равно нулю в области D_0. Согласно лемме 4.1.1 отсюда заключаем, что $u(\overline{x})$ является первым интегралом (4.9) в области D_0. □

Теорема 4.2.1. *Пусть в области D_0 система (4.9) имеет ровно $n-1$ не содержащих t функционально независимых первых интегралов*

$$v_1(x_1, \dots, x_n), \quad v_2(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad v_{n-1}(x_1, \dots, x_n).$$

Тогда в некоторой окрестности произвольной точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D_0$ общее решение линейного однородного уравнения в частных производных (4.7) имеет вид

$$u(\overline{x}) = F(v_1(\overline{x}), v_2(\overline{x}), \dots, v_{n-1}(\overline{x})), \tag{4.10}$$

где $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. Если $v_j(\overline{x})$ – первые интегралы системы (4.9), $j = 1, \dots, n-1$, то для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ функция $u(\overline{x})$, определенная формулой (4.10), также является первым интегралом, не зависящим от t. Тогда по лемме 4.2.1 $u(\overline{x})$ – решение линейного однородного уравнения в частных производных (4.7).

Убедимся, что формулой (4.10) описываются все решения линейного однородного уравнения (4.7) в окрестности каждой точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D_0$. Пусть $u(\overline{x})$ – произвольное фиксированное решение уравнения (4.10). Так как функции $v_1(\overline{x}), \dots, v_{n-1}(\overline{x})$ являются первыми интегралами системы (4.9), то согласно лемме 4.2.1 эти функции являются решениями уравнения (4.7). Таким образом,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}) \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j} = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}) \frac{\partial v_1(\overline{x})}{\partial x_j} = 0, \\ \qquad \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}) \frac{\partial v_{n-1}(\overline{x})}{\partial x_j} = 0, \end{cases} \qquad \forall \overline{x} \in D_0. \tag{4.11}$$

В силу условия (4.8) в каждой точке $\overline{x} \in D_0$ система (4.11) представляет собой имеющую нетривиальное решение $a_1(\overline{x}), \ldots, a_n(\overline{x})$ однородную систему линейных алгебраических уравнений. Тогда определитель этой системы, представляющий собой определитель функциональной матрицы, равен нулю

$$\frac{D(u, v_1, \ldots, v_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0, \quad \forall \overline{x} \in D_0.$$

При этом в силу функциональной независимости $v_1(\overline{x}), \ldots, v_{n-1}(\overline{x})$ соответствующий минор порядка $(n-1)$ отличен от нуля. Тогда по теореме о функциональных матрицах в окрестности каждой точки M_0 найдется непрерывно дифференцируемая функция $F(y_1, \ldots, y_{n-1})$ такая, что в окрестности M_0 справедливо равенство (4.10). $\square$

4.2.3. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка в области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$$a_1(\overline{x}, u(\overline{x}))\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\overline{x}, u(\overline{x}))\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\cdots + a_n(\overline{x}, u(\overline{x}))\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\overline{x}, u(\overline{x})), \quad (4.12)$$

$$a_j(\overline{x}, u),\ b(\overline{x}, u) \in C^1(D), \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}, u) \neq 0, \quad \forall (\overline{x}, u) \in D.$$

По коэффициентам и правой части уравнения (4.12) построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $(n+1)$-го порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(\overline{x}, u), \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(\overline{x}, u), \\ \dfrac{du}{dt} = b(\overline{x}, u). \end{cases} \quad (4.13)$$

Определение 4.2.3. *Решения* $(x_1(t), \ldots, x_n(t), u(t))$ *системы (4.13) определяют фазовые кривые в пространстве* $\mathbb{R}^{n+1}$, *которые называются характеристиками уравнения в частных производных (4.12).*

Связь первых интегралов системы (4.13) и квазилинейного уравнения (4.12) проясняется в следующей теореме.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $v(\overline{x}, u)$ *– не содержащий* t *первый интеграл системы (4.13) в области* D, *и в некоторой точке* $N_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) \in D$ *выполнены условия*

$$v(N_0) = C_0, \quad \frac{\partial v(N_0)}{\partial u} \neq 0. \tag{4.14}$$

Тогда в некоторой окрестности точки N_0 *уравнение*

$$v(x_1, \ldots, x_n, u) = C_0 \tag{4.15}$$

определяет неявную функцию $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, *являющуюся решением квазилинейного уравнения (4.12).*

Доказательство. Пусть $v(\overline{x}, u)$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.13). Тогда по лемме 4.1.1 о свойствах первого интеграла его производная в силу системы (4.13) равна нулю в области D:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.13)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(\overline{x}, u)}{\partial x_j} a_j(\overline{x}, u) + \frac{\partial v(\overline{x}, u)}{\partial u} b(\overline{x}, u) = 0,$$

$$\forall (\overline{x}, u) \in D. \tag{4.16}$$

Для функционального уравнения (4.15) в силу (4.14) по теореме о неявной функции существует окрестность точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, в которой определена непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, обращающая уравнение (4.15) в тождество в этой окрестности:

$$v(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) \equiv C_0.$$

По формуле дифференцирования неявной функции имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = -\frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

После подстановки этих равенств в (4.16) и деления на $\partial v/\partial u \neq 0$ приходим к равенству

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}, u(\overline{x}))\frac{\partial u}{\partial x_j} = b(\overline{x}, u(\overline{x}))$$

в рассматриваемой окрестности точки M_0. То есть $u(\overline{x})$ – решение квазилинейного уравнения в частных производных (4.12). □

Система характеристик квазилинейного уравнения в частных производных (4.13) имеет порядок $(n+1)$. Поэтому, согласно теореме 4.1.2 о первых интегралах автономной системы, в окрестности каждой точки области D существует ровно n не содержащих t функционально независимых первых интегралов

$$v_1(\overline{x}, u), \quad \ldots, \quad v_n(\overline{x}, u).$$

Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(y_1, \ldots, y_n)$ суперпозиция

$$w(\overline{x}, u) = F(v_1(\overline{x}, u), \ldots, v_n(\overline{x}, u))$$

также является первым интегралом системы характеристик (4.13). В силу теоремы 4.2.2 при выполнении условия $\partial w/\partial u \neq 0$ неявная функция $u(\overline{x})$, полученная из функционального уравнения

$$F(v_1(\overline{x}, u), \ldots, v_n(\overline{x}, u)) = 0, \tag{4.17}$$

также является решением квазилинейного уравнения в частных производных (4.12). Можно показать, что формула (4.17) задает общее решение квазилинейного уравнения в частных производных (4.12) в окрестности каждой точки N_0.

4.2.4. Геометрический смысл квазилинейного уравнения в частных производных

График решения $u = f(x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_0)$ квазилинейного уравнения в частных производных (4.12) является n-мерной поверхностью в пространстве $(x_1, \ldots, x_n, u)$. Уточним структуру этой поверхности.

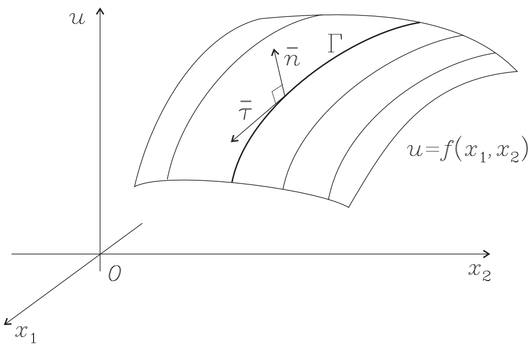

Рис. 4.1. К доказательству теоремы 4.2.3.

Теорема 4.2.3. *Функция $u = f(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_0)$ является решением квазилинейного уравнения в частных производных (4.12) тогда и только тогда, когда задаваемая этой функцией поверхность целиком состоит из характеристик, определяемых системой (4.13) (то есть через любую точку поверхности проходит характеристика, целиком лежащая на этой поверхности).*

Доказательство. Пусть через любую точку поверхности

$$\mathcal{P} = \{u = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in D_0\}, \tag{4.18}$$

задаваемой с помощью некоторой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_0)$, проходит характеристика

$$\Gamma = \{(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))\} \subset \mathcal{P},$$

целиком лежащая на этой поверхности. В каждой точке характеристики ее касательный вектор в силу (4.13) имеет вид

$$\overline{\tau} = \Big(\frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt}, \frac{du(t)}{dt}\Big) = \\ = (a_1(\overline{x}(t), u(t)), \dots, a_n(\overline{x}(t), u(t)), b(\overline{x}(t), u(t))),$$

где $u(t) = f(\overline{x}(t))$. Поскольку характеристика лежит на поверхности $\mathcal{P}$, то построенный вектор $\overline{\tau}$ является касательным одновременно и к поверхности $\mathcal{P}$. Тогда этот вектор ортогонален к вектору нормали

$$\overline{n} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}(t)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}(t)), -1\Big).$$

Так как $(\overline{\tau}, \overline{n})_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$, то

$$a_1(\overline{x}, u)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}) + \cdots + a_n(\overline{x}, u)\frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}) - b(\overline{x}, u) = 0, \quad \forall (\overline{x}, u) \in \Gamma. \quad (4.19)$$

Полученное равенство показывает, что $u = f(\overline{x})$ удовлетворяет квазилинейному уравнению в частных производных (4.12) в каждой точке характеристики Γ. Поскольку по условию через каждую точку поверхности проходит некоторая характеристика, то (4.12) выполнено во всех точках D_0.

Обратно, пусть $u = f(\overline{x})$ – решение квазилинейного уравнения в частных производных (4.12) в D_0. Покажем, что через любую точку $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) \in \mathcal{P}$ проходит лежащая в $\mathcal{P}$ характеристика с касательным вектором $\overline{\tau}(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$. Рассмотрим задачу Коши с начальными данными $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(\overline{x}, f(\overline{x})), \quad x_1(t_0) = x_1^0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(\overline{x}, f(\overline{x})), \quad x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases} \quad (4.20)$$

которая имеет единственное решение $\overline{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. По этому решению построим кривую

$$\Gamma = \{(x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t), u(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)))\}. \quad (4.21)$$

По построению $\Gamma \subset \mathcal{P}$. Убедимся, что Γ – характеристика, то есть удовлетворяет системе (4.13). Первые n уравнений этой системы выполнены в силу (4.20). Осталось проверить последнее равенство в (4.13). Учитывая то, что $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, являются решениями системы (4.20), а $u = f(\overline{x})$ является решением квазилинейного уравнения (4.12), имеем

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}(t)) \cdot \frac{dx_j}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{x}(t))}{\partial x_j} a_j(\overline{x}(t), u(t)) = b(\overline{x}(t), u(t)).$$

Следовательно, кривая Γ – характеристика. Итак, показано, что через любую точку поверхности $\mathcal{P}$ проходит принадлежащая этой поверхности характеристика Γ. $\square$

4.2.5. Задача Коши для квазилинейного уравнения в частных производных

Рассмотрим в случае $n = 2$, который имеет наиболее наглядную геометрическую интерпретацию, квазилинейное уравнение в частных производных

$$a_1(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y, u), \tag{4.22}$$

где $b(x, y, u), a_j(x, y, u) \in C^1(D)$, $j = 1, 2$, D – область из $\mathbb{R}^3$,

$$a_1^2(x, y, u) + a_2^2(x, y, u) \neq 0, \quad \forall (x, y, u) \in D.$$

Задача Коши для квазилинейного уравнения в частных производных (4.22) состоит в нахождении поверхности $u = f(x, y)$, задаваемой решением квазилинейного уравнения в частных производных (4.22) и проходящей через заданную линию

$$\ell = \{(x, y, u) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)),\ s \in [s_1, s_2]\} \subset D,$$

то есть

$$\psi_3(s) = f(\psi_1(s), \psi_2(s)), \quad \forall s \in [s_1, s_2]. \tag{4.23}$$

Теорема 4.2.4. *Пусть выполнено условие*

$$\det\begin{pmatrix} a_1(s) & \psi_1'(s) \\ a_2(s) & \psi_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in [s_1, s_2], \tag{4.24}$$

где $a_j(s) = a_j(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s))$, $j = 1, 2$.

Тогда в некоторой окрестности каждой точки линии ℓ существует единственное решение задачи Коши (4.22), (4.23).

Доказательство. Рассмотрим систему характеристик для квазилинейного уравнения в частных производных (4.22):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(x, y, u), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a_2(x, y, u), \\[2ex] \dfrac{du}{dt} = b(x, y, u). \end{cases} \tag{4.25}$$

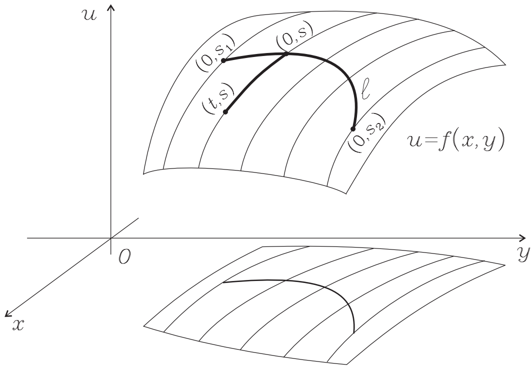

Рис. 4.2. К доказательству теоремы 4.2.4.

Задача Коши для системы (4.25) с начальными при $t = 0$ данными на кривой ℓ

$$x|_{t=0} = \psi_1(s), \quad y|_{t=0} = \psi_2(s), \quad u|_{t=0} = \psi_3(s) \tag{4.26}$$

имеет единственное решение

$$x = \varphi_1(t, s), \quad y = \varphi_2(t, s), \quad u = \varphi_3(t, s). \tag{4.27}$$

В силу (4.26), (4.27) имеем

$$\varphi_1(0, s) = \psi_1(s),\ \varphi_2(0, s) = \psi_2(s),\ \varphi_3(0, s) = \psi_3(s),\ \forall s \in [s_1, s_2]. \tag{4.28}$$

Формула (4.27) задает параметрическое представление некоторой поверхности $\mathcal{P}$. Линия ℓ лежит на этой поверхности по построению в силу (4.26) (см. рис. 4.2).

Покажем, что в окрестности каждой точки линии ℓ эта состоящая из характеристик поверхность может быть записана в виде $u = f(x, y)$, и тогда, по теореме 4.2.3, $f(x, y)$ – решение уравнения в частных производных (4.22). Для этого достаточно в вытекающей из (4.27) системе функциональных уравнений

$$x = \varphi_1(t, s), \quad y = \varphi_2(t, s), \tag{4.29}$$

выразить параметры (t, s) как непрерывно дифференцируемые функции от (x, y). Имея в виду применение теоремы о неявных функциях, вычислим значения частных производных на линии ℓ, то есть при $t = 0$. В силу (4.25) имеем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(0, s) = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = a_1(s), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(0, s) = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = a_2(s).$$

Из равенств (4.26) находим, что

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(0, s) = \psi_1'(s), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}(0, s) = \psi_2'(s).$$

Тогда для якобиана в силу условия (4.24) справедливо соотношение

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial s} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial s} \end{pmatrix} (0, s) = \det \begin{pmatrix} a_1(s) & \psi_1'(s) \\ a_2(s) & \psi_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in [s_1, s_2].$$

Следовательно, по теореме о неявных функциях в окрестности точки $(x_0, y_0) = (\varphi_1(0, s), \varphi_2(0, s))$ существуют единственным образом определенные непрерывно дифференцируемые функции

$$t = t(x, y), \quad s = s(x, y),$$

обращающие уравнения (4.29) в тождества. После подстановки в третье уравнение в (4.27) приходим к искомому представлению

$$u = \varphi_3(t(x, y), s(x, y)) = f(x, y).$$

Единственность вытекает из того, что удовлетворяющая квазилинейному уравнению в частных производных поверхность, согласно теореме 4.2.3, состоит из характеристик (то есть выполнены соотношения (4.27)), а вблизи кривой ℓ единственность решений обеспечивается теоремой о неявных функциях. $\square$

Условие (4.24) имеет следующий геометрический смысл. Так как вектор $\overline{\tau} = (a_1, a_2, b)$ касается характеристики, а вектор $(\psi_1', \psi_2', \psi_3')$ касается кривой ℓ, на которой задаются начальные данные для задачи Коши, то условие (4.24) есть условие неколлинеарности проекций (a_1, a_2) и (ψ_1', ψ_2') рассматриваемых векторов на плоскость (x, y). Другими словами, проекции линии ℓ и пересекающих ее характеристик не должны касаться друг друга (см. рис. 4.2).

Глава 5

Основы вариационного исчисления

5.1. Основные понятия вариационного исчисления

Рассмотрим множество M, являющееся некоторым подмножеством множества непрерывных на отрезке функций $C[x_0, x_1]$.

Определение 5.1.1. *Функционалом называется отображение множества M в множество действительных чисел.*

Приведем некоторые примеры.

Пусть множество M совпадает со всем множеством $C[x_0, x_1]$. Определим функционал $\Phi[y(x)]$ следующим образом: $\Phi[y(x)] = y(x_0)+2y(x_1)$. Другим примером функционала, определенного на этом множестве, является

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)dx.$$

Приведем еще один пример. Пусть множество M представляет собой множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[x_0, x_1]$ функций таких, что $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, где y_0, y_1 – заданные постоянные. Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \big(y(x) + 2(y'(x))^2\big)dx.$$

5.1.1. Вариация функционала

Определение 5.1.2. *Допустимой вариацией функции $y_0(x) \in M$ называется любая функция $\delta y(x)$ такая, что $y_0(x) + \delta y(x) \in M$.*

Далее для простоты будем считать, что множество M обладает тем свойством, что если $\delta y(x)$ – допустимая вариация функции $y_0(x)$, то $t\delta y(x)$ также является допустимой вариацией функции $y_0(x)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 5.1.3. *Вариацией* $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ *функционала* $\Phi[y(x)]$ *на функции* $y_0(x) \in M$ *называется*

$$\frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Приведем примеры, показывающие, что вариация функционала может существовать, а может и не существовать.

Пусть $M = C[x_0, x_1]$. Рассмотрим

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y(x))^2 dx.$$

Тогда

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{x_0}^{x_1} [y_0(x) + t\delta y(x)]^2 dx\Big|_{t=0} = 2\int\limits_{x_0}^{x_1} y_0(x)\delta y(x) dx,$$

и вариация функционала $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ существует для любой $y_0(x)$. Если же мы на том же самом множестве рассмотрим функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} |y(x)| dx$$

и возьмем $y_0(x) = 0$, а $\delta y(x) = 1$, то

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x_1 - x_0)|t|\Big|_{t=0},$$

и вариация функционала не существует.

5.1.2. Экстремум функционала

Определение 5.1.4. *Функционал* $\Phi[y(x)]$ *достигает на функции* $y_0(x) \in M$ *глобального минимума (максимума) на множестве* M*, если для любой* $y(x) \in M$ *выполнено неравенство* $\Phi[y_0(x)] \leqslant \Phi[y(x)]$ *(*$\Phi[y_0(x)] \geqslant \Phi[y(x)]$*).*

Пусть на множестве M введена некоторая норма функции $y(x)$, например

$$\|y(x)\| = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y(x)|.$$

Определение 5.1.5. *Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального минимума (максимума) на множестве M, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой $y(x) \in M$ и удовлетворяющей неравенству $\|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$, справедливо $\Phi[y_0(x)] \leqslant \Phi[y(x)]$ ($\Phi[y_0(x)] \geqslant \Phi[y(x)]$).*

Максимумы и минимумы функционала называются *экстремумами* функционала. Задачи отыскания экстремумов функционалов и функций, на которых они достигаются, называются задачами вариационного исчисления.

Докажем теорему о необходимом условии экстремума функционала.

Теорема 5.1.1. *Если функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального максимума или минимума на множестве M и вариация функционала на $y_0(x)$ существует, то вариация функционала $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ равна нулю для любой допустимой вариации $\delta y(x)$.*

Доказательство. Пусть функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума. Рассмотрим $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$, где $\delta y(x)$ произвольная вариация $y_0(x)$. При фиксированных $y_0(x)$ и $\delta y(x)$ функционал $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$ является функцией переменной t :

$$\varphi(t) = \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)].$$

Так как функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума, то у функции $\varphi(t)$ точка $t = 0$ является точкой локального экстремума. Следовательно, если производная $\varphi'(0)$ существует, то $\varphi'(0) = 0$. Существование производной $\varphi'(0)$ следует из существования вариации функционала $\Phi[y(x)]$ на $y_0(x)$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Следовательно,

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = 0$$

для любой $\delta y(x)$. Теорема 5.1.1 доказана. □

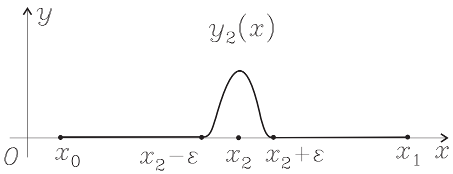

Рис. 5.1. К доказательству леммы 5.1.1.

5.1.3. Основная лемма вариационного исчисления

Докажем лемму, которую в связи с ее важностью при исследовании задач вариационного исчисления, называют основной леммой вариационного исчисления.

Напомним, что $C^n[x_0, x_1]$, $n \in \mathbb{N}$ обозначает множество n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[x_0, x_1]$ функций. Пусть $C_0^n[x_0, x_1]$ — множество функций $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$ таких, что

$$y^{(m)}(x_0) = y^{(m)}(x_1) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Лемма 5.1.1. *Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[x_0, x_1]$ функция такая, что*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)y(x)dx = 0$$

для любой $y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$. Тогда $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[x_0, x_1]$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ отлична от нуля на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда существует точка $x_2 \in (x_0, x_1)$ такая, что $f(x_2) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_2) > 0$. В силу непрерывности $f(x)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$f(x) \geqslant \frac{f(x_2)}{2} > 0, \quad \forall x \in [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon] \subset (x_0, x_1).$$

Рассмотрим функцию $y_2(x)$ следующего вида (см. рис. 5.1):

$$y_2(x) = \begin{cases} (x - (x_2 - \varepsilon))^{n+1}((x_2 + \varepsilon) - x)^{n+1}, & x \in [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]; \\ 0, & x \notin [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Функция $y_2(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$ и $y_2(x) > 0$ при $x \in (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$. Следовательно,

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)y_2(x)dx = \int\limits_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} f(x)y_2(x)dx > 0,$$

что противоречит условию леммы. Лемма 5.1.1 доказана. $\square$

5.2. Уравнение Эйлера

Рассмотрим множество M непрерывно дифференцируемых на $[x_0, x_1]$ функций $y(x)$ таких, что $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \tag{5.1}$$

где $F(x, y, p)$ – заданная функция трех переменных.

Получим необходимое условие экстремума функционала на множестве M.

Теорема 5.2.1. *Предположим, что при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p) \in \mathbb{R}^2$ у функции $F(x, y, p)$ существуют непрерывные вторые частные производные. Если функционал (5.1) достигает локального экстремума на функции $y_0(x) \in M$, имеющей непрерывную вторую производную на отрезке $[x_0, x_1]$, то функция $y_0(x)$ является решением дифференциального уравнения*

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1. \tag{5.2}$$

Доказательство. Найдем вариацию функционала (5.1) на $y_0(x)$. Из определения множества M следует, что допустимой вариацией $\delta y(x)$ функции $y_0(x)$ является любая непрерывно дифференцируемая на отрезке $[x_0, x_1]$ функция, обращающаяся в ноль на концах этого отрезка (см. рис. 5.2). То есть $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$.

Используя определение вариации функционала, получим

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} =$$

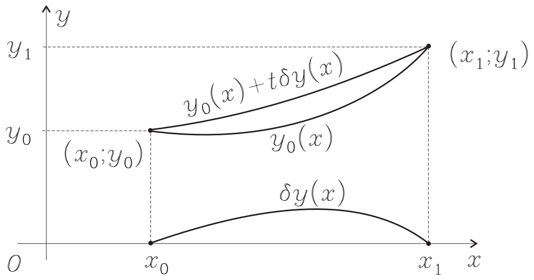

Рис. 5.2. К доказательству теоремы 5.2.1.

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_y(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))\delta y(x) +$$

$$+ F_p(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))(\delta y)'(x)\Big\} dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x) + F_p(x, y_0(x), y_0'(x))(\delta y)'(x)\Big\} dx$$

Из теоремы о необходимом условии экстремума следует, что вариация функционала на $y_0(x)$ должна равняться нулю, то есть

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x)dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} F_p(x, y_0(x), y_0'(x))(\delta y)'(x)dx = 0.$$

Интегрируя по частям второй интеграл и учитывая то, что

$$\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0,$$

получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x, y_0(x), y_0'(x))\Big\} \delta y(x)dx = 0.$$

Это равенство выполнено для любой функции $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$. Применяя основную лемму вариационного исчисления, имеем

$$F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1.$$

Следовательно, функция $y_0(x)$ является решением уравнения (5.2) и теорема 5.2.1 доказана. □

Уравнение (5.2) называется уравнением Эйлера для функционала (5.1). Так как функция $y_0(x)$, на которой достигается экстремум функционала (5.1), принадлежит множеству M, то она является решением следующей краевой задачи

$$\begin{aligned} &F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ &y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим пример применения доказанной теоремы.

Во многих приложениях, например, при обработке изображений, требуется приблизить некоторую функцию $f(x)$ более гладкой функцией $y(x)$. Это означает, что производная $y'(x)$ не должна иметь слишком большие значения. Для решения подобных задач может быть применено вариационное исчисление. Пусть $f(x)$ такова, что $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Рассмотрим задачу нахождения минимума следующего функционала

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} (y(x) - f(x))^2 dx + \alpha \int\limits_{x_0}^{x_1} (y'(x))^2 dx, \tag{5.3}$$

где α – положительный параметр. Минимизация первого интеграла обеспечивает близость функции $y(x)$ к исходной $f(x)$, а минимизация второго интеграла приводит к тому, что значения производной $y'(x)$ не будут слишком большими.

Для решения задачи минимизации функционала (5.3) на множестве функций $y(x)$ таких, что $y(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $y(x_0) = y(x_1) = 0$, запишем уравнение Эйлера для функционала (5.3). Так как в этом случае

$$F(x, y, p) = (y - f(x))^2 + \alpha p^2, \; F_y(x, y, p) = 2(y - f(x)), \; F_p(x, y, p) = 2\alpha p,$$

то уравнение Эйлера имеет вид

$$2(y(x) - f(x)) - \frac{d}{dx}(2\alpha y'(x)) = 0.$$

Преобразуя это уравнение и учитывая краевые условия, получим краевую задачу для определения функции $y(x)$

$$y''(x) - (\alpha)^{-1}y(x) = -(\alpha)^{-1}f(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \tag{5.4}$$

$$y(x_0) = y(x_1) = 0. \tag{5.5}$$

Так как уравнение Эйлера дает необходимое условие экстремума, то можно утверждать, что, если минимум функционала (5.3) достигается на дважды непрерывно дифференцируемой функции, то эта функция является решением краевой задачи (5.4), (5.5). Заметим, что однородная ($f(x) = 0$) краевая задача (5.4), (5.5) имеет только нулевое решение, следовательно, решение краевой задачи (5.4), (5.5) существует и единственно для любой $f(x)$. Можно доказать, что это решение будет минимизировать функционал (5.3).

5.3. Необходимые условия экстремума для некоторых функционалов

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые функционалы и получим для них необходимые условия экстремума.

5.3.1. Функционал, зависящий от производных порядка выше первого

Рассмотрим множество M функций $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$ таких, что

$$y(x_0) = y_{00},\ y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}, \tag{5.6}$$

$$y(x_1) = y_{10},\ y'(x_1) = y_{11},\ y''(x_1) = y_{12},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_1) = y_{1n-1}. \tag{5.7}$$

Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx, \tag{5.8}$$

где функция $F(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ определена и непрерывна при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Получим необходимое условие экстремума функционала (5.8) на множестве M.

Теорема 5.3.1. *Пусть функция $F(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ имеет при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ непрерывные частные производные порядка $2n$. Если функция $\bar{y}(x) \in M$, $\bar{y}(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$, и на ней достигается экстремум функционала (5.8) на множестве M, то $\bar{y}(x)$ является решением уравнения*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{p_1} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{p_n} = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \tag{5.9}$$

где $F = F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))$.

Доказательство. В силу необходимого условия экстремума вариация функционала (5.8) на функции $\bar{y}(x)$ должна обращаться в ноль для любой допустимой вариации $\delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$.

По определению вариации функционала имеем

$$\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[\bar{y}(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}(x) + t\delta y(x), \bar{y}'(x) + t(\delta y)'(x), \ldots, \bar{y}^{(n)}(x) + t(\delta y)^{(n)}(x))dx\Big|_{t=0}.$$

Дифференцируя интеграл по параметру t, полагая затем $t = 0$ и приравнивая вариацию к нулю, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \big(F_y\delta y(x) + F_{p_1}(\delta y)'(x) + \cdots + F_{p_n}(\delta y)^{(n)}(x)\big)dx = 0.$$

Интегрируя по частям и учитывая то, что функция $\delta y(x)$ и ее производные обращаются в ноль на концах отрезка, имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big(F_y - \frac{d}{dx}F_{p_1} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{p_n}\Big)\delta y(x)dx = 0.$$

Так как это равенство выполнено для любой функции $\delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$, то, применяя основную лемму вариационного исчисления, получим, что функция $\bar{y}(x)$ является решением дифференциального уравнения (5.9). Теорема 5.3.1 доказана. □

Таким образом, мы показали, что, если на функции $\bar{y}(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$ достигается экстремум функционала (5.8) на множестве M, то эта функция является решением краевой задачи (5.9), (5.6), (5.7).

В качестве примера применения доказанной теоремы рассмотрим задачу приближения функции $f(x)$ более гладкой функцией $y(x)$. В отличие от примера из предыдущего параграфа будем требовать, чтобы значения не только первой производной, но и второй производной функции $y(x)$, были невелики.

Рассмотрим задачу нахождения минимума функционала

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \bigl(y(x) - f(x)\bigr)^2 dx + \alpha \int\limits_{x_0}^{x_1} \bigl((y'(x))^2 + (y''(x))^2\bigr) dx, \tag{5.10}$$

где α – положительный параметр. Будем предполагать, что функция $f(x)$ такова, что $f(x_0) = f(x_1) = 0$, $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$ и рассмотрим задачу минимизации функционала (5.10) на множестве функций $y(x)$ таких, что $y(x) \in C^2[x_0, x_1]$, $y(x_0) = y(x_1) = 0$, $y'(x_0) = y'(x_1) = 0$. Так как в этом случае функция

$$F(x, y, p_1, p_2) = (y - f(x))^2 + \alpha p_1^2 + \alpha p_2^2,$$

то уравнение (5.9) имеет вид

$$2(y(x) - f(x)) - \frac{d}{dx}(2\alpha y'(x)) + \frac{d^2}{dx^2}(2\alpha y''(x)) = 0.$$

Преобразуя это уравнение и учитывая краевые условия $y(x_0) = y(x_1) = 0$, $y'(x_0) = y'(x_1) = 0$, получим краевую задачу для определения функции $y(x)$

$$\begin{gathered} y^{(4)}(x) - y''(x) + (\alpha)^{-1} y(x) = (\alpha)^{-1} f(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0, \quad y(x_1) = y'(x_1) = 0. \end{gathered}$$

5.3.2. Функционал, зависящий от функции двух переменных

Задачи вариационного исчисления можно рассматривать и для функционалов, зависящих от функции двух переменных. Рассмотрим функционал, зависящий от функции $u(x, y)$ и ее частных производных первого порядка

$$\Phi[u(x, y)] = \iint\limits_D F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy, \tag{5.11}$$

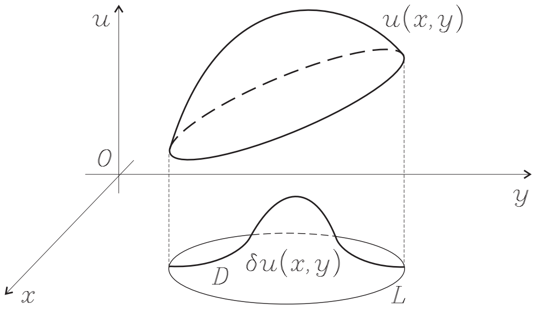

Рис. 5.3.

где $F(x, y, u, p, q)$ – заданная функция, а D – область, ограниченная контуром L. Будем предполагать, что функция $F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x, y) \in \overline{D} = D \cup L$, $(u, p, q) \in \mathbb{R}^3$.

Пусть M – множество функций $u(x, y)$, имеющих в $\overline{D}$ непрерывные частные производные и принимающих на L заданные значения $u(x, y) = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in L$. Вариация функции $u(x, y)$, не выводящая ее из множества M, – это функция $\delta u(x, y)$, имеющая в $\overline{D}$ непрерывные частные производные и обращающаяся в ноль на L, то есть $\delta u(x, y) = 0$, $(x, y) \in L$ (см. рис. 5.3).

Получим необходимое условие экстремума функционала (5.11). Для этого нам потребуется лемма, аналогичная основной лемме вариационного исчисления

Лемма 5.3.1. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$. Если*

$$\iint\limits_D f(x, y)v(x, y)dxdy = 0$$

для любой функции $v(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные в $\overline{D}$ и обращающейся в ноль на контуре L, то $f(x, y) = 0$, $(x, y) \in \overline{D}$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x, y)$ отлична от нуля в $\overline{D}$. Тогда существует точка $(x_0, y_0) \in D$ такая, что $f(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0, y_0) > 0$. Из непрерывности $f(x, y)$ в точке

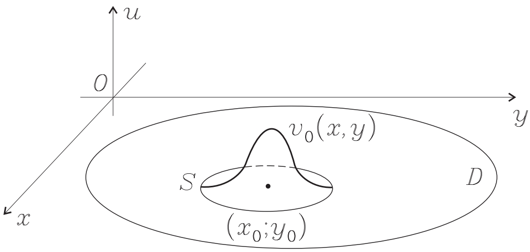

Рис. 5.4. К доказательству леммы 5.3.1.

(x_0, y_0) следует, что существует круг

$$S = \{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

такой, что $f(x,y) \geqslant \dfrac{f(x_0,y_0)}{2} > 0$ при $(x,y) \in S \subset \overline{D}$. Рассмотрим функцию $v_0(x,y)$ такую, что (см. рис. 5.4)

$$v_0(x,y) = \begin{cases} \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - \varepsilon^2\right)^2, & (x,y) \in S; \\ 0, & (x,y) \in \overline{D} \backslash S. \end{cases}$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y) v_0(x,y) dxdy = \iint\limits_S f(x,y) v_0(x,y) dxdy \geqslant$$
$$\geqslant \frac{f(x_0,y_0)}{2} \iint\limits_S v_0(x,y) dxdy > 0,$$

что противоречит условию леммы. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение было неверно. Лемма 5.3.1 доказана. □

Теорема 5.3.2. *Предположим, что функция $F(x,y,u,p,q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x,y) \in \overline{D}$, $(u,p,q) \in \mathbb{R}^3$. Если экстремум функционала (5.11) достигается на функции $\bar{u}(x,y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\overline{D}$, то эта функция является решением уравнения в частных производных*

$$F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in D. \tag{5.12}$$

Доказательство. Пусть экстремум функционала (5.11) достигается на функции $\bar{u}(x,y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\overline{D}$. Из необходимого условия экстремума следует, что вариация функционала (5.11) на этой функции равна нулю

$$\delta\Phi[\bar{u}(x,y), \delta u(x,y)] = \frac{d}{dt}\Phi[\bar{u}(x,y) + t\delta u(x,y)]\Big|_{t=0} = 0,$$

то есть

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_D F(x,y,w(x,y,t), w_x(x,y,t), w_y(x,y,t))dxdy\Big|_{t=0} = 0,$$

где $w(x,y,t) = \bar{u}(x,y) + t\delta u(x,y)$. Дифференцируя по t под знаком интеграла и полагая t равным нулю, получим

$$\iint\limits_D F_u(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)\delta u(x,y)dxdy + \\ + \iint\limits_D \Big\{F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) + \\ + F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y)\Big\}dxdy = 0. \quad (5.13)$$

Преобразуем это равенство. Очевидно, что

$$F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\big(F_p\delta u\big) - \frac{\partial F_p}{\partial x}\cdot\delta u,$$
$$F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(F_q\delta u\big) - \frac{\partial F_q}{\partial y}\cdot\delta u.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D \Big\{F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) + F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y)\Big\}dxdy = \\ = \iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(F_p\delta u\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(F_q\delta u\big)\Big)dxdy - \iint\limits_D \Big(\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y}\Big)\delta u\,dxdy.$$

Применяя формулу Грина к интегралу

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta u)\Big)dxdy$$

и учитывая то, что $\delta u(x,y) = 0$, $(x,y) \in L$, получим

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(F_p \delta u\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(F_q \delta u\big)\Big) dxdy = \oint\limits_L \big(F_p \delta u dy - F_q \delta u dx\big) = 0.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D \big\{F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) + F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y)\big\} dxdy =$$

$$= -\iint\limits_D \Big(\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y}\Big)\delta u\, dxdy,$$

и равенство (5.13) принимает вид

$$\iint\limits_D \Big\{F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_p - \frac{\partial}{\partial y}F_q\Big\}\delta u(x,y)\, dxdy = 0,$$

где F_u, F_p, F_q вычисляются в точке $(x,y,\bar{u}(x,y),\bar{u}_x(x,y),\bar{u}_y(x,y))$. Так как полученное равенство выполнено для любой допустимой вариации $\delta u(x,y)$, то, применяя лемму 5.3.1, получаем, что функция $\bar{u}(x,y)$ является решением уравнения (5.12). Теорема 5.3.2 доказана. $\square$

Следовательно, если функция $\bar{u}(x,y)$ такова, что $\bar{u} \in M$, имеет в $\overline{D}$ непрерывные вторые частные производные и на ней достигается экстремум функционала (5.12), то эта функция является решением следующей задачи:

$$F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in D,$$
$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in L.$$

Приведем еще один пример вариационной задачи, связанной со сглаживанием функции двух переменных. Пусть нам нужно приблизить функцию двух переменных $f(x,y)$, заданную в некоторой области D более гладкой функцией $u(x,y)$. Предположим, что функция $f(x,y)$ на границе L области D обращается в ноль. Для решения задачи рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\iint\limits_D \Big\{(u(x,y) - f(x,y))^2 + \alpha\big((u_x(x,y))^2 + (u_y(x,y))^2\big)\Big\} dxdy$$

Записывая для этого функционала уравнение (5.12), получим, что, если минимум достигается на функции $\bar{u}(x, y)$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\overline{D}$ и обращающейся в ноль на L, то эта функция является решением уравнения в частных производных

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) - \alpha^{-1}u(x, y) = -\alpha^{-1}f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

5.4. Вариационная задача на условный экстремум

Рассмотрим два функционала

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \tag{5.14}$$

и

$$\Psi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x))dx, \tag{5.15}$$

где $F(x, y, p)$, $G(x, y, p)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу. Пусть требуется найти функцию $\bar{y}(x)$, на которой достигается экстремум функционала (5.14) на множестве функций

$$M_\Psi = \left\{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : \ y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1, \ \Psi[y(x)] = \ell\right\}. \tag{5.16}$$

Таким образом, нам нужно найти экстремум функционала (5.14) на множестве функций определяемом тем условием, что функционал (5.15) принимает на этом множестве постоянное значение. Вариационные задачи такого типа называются задачами на *условный экстремум.*

Найдем вариацию функционала (5.15) на множестве функций

$$M = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1\}.$$

Пусть $\delta y(x)$ – допустимая вариация функции на M, то есть

$$\delta y(x) \in C^1[x_0, x_1], \quad \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0.$$

Тогда вариация функционала $\Psi[y(x)]$ на функции $\tilde{y}(x) \in M$ равна

$$\delta\Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Psi[\tilde{y}(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, получаем

$$\delta\Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] = \\ = \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ G_y(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))\delta y(x) + G_p(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))(\delta y)'(x) \Big\} dx. \quad (5.17)$$

Сформулируем условие, необходимое для того, чтобы на функции $\bar{y}(x)$ достигался экстремум функционала (5.14) на множестве M_Ψ.

Теорема 5.4.1. *Пусть на функции $\bar{y}(x) \in M_\Psi$, $\bar{y}(x) \in C^2[x_0, x_1]$, достигается экстремум функционала (5.14) на множестве M_Ψ. Если существует функция*

$$\delta y_0(x) \in C^1[x_0, x_1], \quad \delta y_0(x_0) = \delta y_0(x_1) = 0$$

такая, что вариация $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0$, то найдется число λ такое, что $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}L_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad (5.18)$$

где

$$L(x, y, p) = F(x, y, p) + \lambda G(x, y, p). \qquad (5.19)$$

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\delta y(x)$ такую, что $\delta y(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$. Рассмотрим функции

$$\varphi(t, \tau) = \Phi[\bar{y}(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)],$$

$$\psi(t, \tau) = \Psi[\bar{y}(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)],$$

где t, τ – произвольные действительные числа.

Из определения функций $\varphi(t, \tau)$ и $\psi(t, \tau)$ следует, что

$$\varphi(0, 0) = \Phi[\bar{y}(x)], \quad \psi(0, 0) = \Psi[\bar{y}(x)],$$

$$\varphi_t(0, 0) = \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)], \quad \varphi_\tau(0, 0) = \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)],$$

$$\psi_t(0,0) = \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)], \quad \psi_\tau(0,0) = \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)].$$

Покажем, что для любых $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$ якобиан

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(t,\tau)}\Big|_{t=\tau=0} = \det\begin{pmatrix} \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)], & \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \\ \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)], & \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} = 0. \quad (5.20)$$

Предположим, что это не так и существует $\delta\tilde{y}(x)$ такая, что для нее якобиан

$$\det\begin{pmatrix} \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta\tilde{y}(x)], & \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \\ \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta\tilde{y}(x)], & \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда из теоремы о неявных функциях следует, что при $\delta y(x) = \delta\tilde{y}(x)$ система

$$\varphi(t,\tau) = u, \quad \psi(t,\tau) = v$$

однозначно разрешима для (u, v), находящихся в достаточно малой окрестности (u_0, v_0), где $u_0 = \varphi(0,0)$, $v_0 = \psi(0,0)$.

Пусть, для определенности, $\bar{y}(x)$ – функция, на которой достигается локальный минимум задачи на условный экстремум. Рассмотрим систему

$$\varphi(t,\tau) = \varphi(0,0) - \varepsilon = \Phi[\bar{y}(x)] - \varepsilon,$$

$$\psi(t,\tau) = \psi(0,0) = \Psi[\bar{y}(x)] = \ell,$$

где ε – достаточно малое положительное число. Так как

$$(\varphi(0,0) - \varepsilon, \psi(0,0))$$

находится в достаточно малой окрестности точки (u_0, v_0), то по теореме о неявной функции система имеет единственное решение t_ε, τ_ε. Это означает, что

$$\varphi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Phi[\bar{y}(x) + t_\varepsilon\delta\tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon\delta y_0(x)] = \Phi[\bar{y}(x)] - \varepsilon,$$

$$\psi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Psi[\bar{y}(x) + t_\varepsilon\delta\tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon\delta y_0(x)] = \ell.$$

Следовательно, на функции $\bar{y}(x) + t_\varepsilon\delta\tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon\delta y_0(x)$, принадлежащей множеству M_Ψ, функционал (5.14) принимает значение меньшее, чем на $\bar{y}(x)$. Это противоречит тому, что на функции $\bar{y}(x)$ достигается локальный минимум. Из полученного противоречия следует справедливость равенства (5.20).

Раскрывая определитель, входящий в равенство (5.20), получаем

$$\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)]\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] - \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = 0$$

для всех $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$. По условию теоремы $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0$. Поделив на $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]$ и обозначив через

$$\lambda = -\frac{\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]}{\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]},$$

получим

$$\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] + \lambda\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = 0.$$

Учитывая формулы для $\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)]$ и $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)]$, это равенство можно переписать так:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + \lambda G_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \Big\} \delta y(x) dx +$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + \lambda G_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \Big\} \delta y'(x) dx = 0.$$

Интегрируя по частям второй интеграл и учитывая определение (5.19) функции $L(x, y, p)$, имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ L_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \frac{d}{dx} L_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))] \Big\} \delta y(x) dx = 0,$$
$$\forall \delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1].$$

Применяя основную лемму вариационного исчисления, получим, что функция $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению (5.18). Теорема 5.4.1 доказана. $\square$

Из теоремы 5.4.1 следует, что для определения функции, которая может являться решением задачи на условный экстремум, нужно решить уравнение (5.18). Это дифференциальное уравнение второго порядка, и его решение зависит, вообще говоря, от двух произвольных постоянных и вспомогательного параметра λ. Эти постоянные и параметр могут быть найдены из краевых условий $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, а также условия $\Psi[y(x)] = \ell$.

5.5. Вариационное свойство собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля. Требуется найти значения λ, при которых краевая задача

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5.21}$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{5.22}$$

имеет ненулевое решение. Эти значения λ_n называются собственными значениями, а соответствующие им решения $y_n(x)$ – собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля. Собственные функции определены с точностью до произвольного постоянного сомножителя. Чтобы устранить эту неоднозначность, введем следующее условие:

$$\int\limits_0^l (y_n(x))^2 dx = 1. \tag{5.23}$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_0^l \left(k(x)(y'(x))^2 + q(x)(y(x))^2\right) dx. \tag{5.24}$$

Покажем, что, если $y_n(x)$ – собственная функция задачи Штурма-Лиувилля (5.21), (5.22), соответствующая собственному значению λ_n, то

$$\Phi[y_n(x)] = \lambda_n. \tag{5.25}$$

Действительно, так как

$$\int\limits_0^l k(x)(y_n'(x))^2 dx = \int\limits_0^l k(x)y_n'(x)y_n'(x)dx =$$

$$= k(x)y_n'(x)y_n(x)\Big|_{x=0}^{x=l} - \int\limits_0^l (k(x)y_n'(x))'y_n(x)dx = -\int\limits_0^l (k(x)y_n'(x))'y_n(x)dx,$$

то

$$\Phi[y_n(x)] = \int\limits_0^l \left(k(x)(y_n'(x))^2 + q(x)(y_n(x))^2\right) dx =$$

$$= -\int\limits_0^l \left((k(x)y_n'(x))' - q(x)y_n(x)\right) y_n(x)dx = \lambda_n \int\limits_0^l (y_n(x))^2 dx = \lambda_n.$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала (5.24) на множестве функций, удовлетворяющих условиям (5.22) и (5.23). Запишем условие (5.23) в виде

$$\Psi[y(x)] = 1, \qquad \Psi[y(x)] = \int\limits_0^l (y(x))^2 dx.$$

Пусть минимум достигается на функции $\bar{y}(x) \in C^2[0,l]$. Из необходимого условия для решения задачи на условный экстремум получим, что $\bar{y}(x)$ является решением уравнения

$$L_y - \frac{d}{dx}L_p = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5.26}$$

где $L(x,y,p) = k(x)p^2 + q(x)y^2 - \lambda y^2$. Перепишем уравнение (5.26), учитывая вид функции $L(x,y,p)$:

$$2q(x)y(x) - 2\lambda y(x) - 2(k(x)y'(x))' = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Таким образом, функция $\bar{y}(x)$ является решением уравнения (5.21) и удовлетворяет условиям (5.22). Кроме того, она не равна тождественно нулю, поскольку удовлетворяет условию (5.23). Следовательно, $\bar{y}(x)$ является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля (5.21), (5.22). Обозначим ее $y_1(x)$, λ_1 – соответствующее ей собственное значение. Из (5.25) следует, что $\Phi[y_1(x)] = \lambda_1$.

Таким образом, мы показали, что решение задачи на условный экстремум (5.24), (5.23) является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля, а соответствующее собственное значение представляет собой величину функционала (5.24) на этой собственной функции.

Приложение А

Неявные функции и функциональные матрицы

А.1. Теорема о неявных функциях

Рассмотрим систему из m функциональных уравнений относительно $m+n$ аргументов $(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$:

$$\begin{cases} F_1(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ F_m(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{A.1}$$

Нас интересует вопрос о разрешимости системы функциональных уравнений (А.1) относительно $u_1, \ldots, u_m$. Под решением системы (А.1) понимается совокупность определенных в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ функций

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad u_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) \tag{A.2}$$

таких, что при подстановке этих функций в систему (А.1) все уравнения этой системы обращаются в тождества:

$$F_i(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in D, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Якобианом функций $F_1, \ldots, F_m$ по переменным $u_1, \ldots, u_m$ называется следующий функциональный определитель

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{pmatrix},$$

являющийся скалярной функцией аргументов $(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема А.1.1. *Пусть* m *функций*

$$F_1(u_1,\ldots,u_m,x_1,\ldots,x_n),\quad \ldots,\quad F_m(u_1,\ldots,u_m,x_1,\ldots,x_n)$$

дифференцируемы в некоторой окрестности точки

$$N_0 = N_0(u_1^0,\ldots,u_m^0,x_1^0,\ldots,x_n^0),$$

частные производные $\partial F_i/\partial u_j$ *непрерывны в точке* N_0, $i,j=1,\ldots,m$. *Тогда, если выполнены условия*

$$F_i(N_0)=0,\quad i=1,\ldots,m,\quad \frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(u_1,\ldots,u_m)}(N_0)\neq 0,$$

то для достаточно малых чисел $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$ *найдется такая окрестность точки* $M_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, *что в пределах этой окрестности существуют единственные* m *функций (А.2), которые удовлетворяют условиям* $|u_i-u_i^0|<\varepsilon_i$, $i=1,\ldots,m$ *и являются решением системы уравнений (А.1), причем это решение непрерывно и дифференцируемо в указанной окрестности точки* M_0.

Доказательство теоремы можно найти в [2], гл. 13, §2.

А.2. Зависимость функций и функциональные матрицы

Рассмотрим m функций от n переменных

$$\begin{cases} u_1=\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\\ \ldots\\ u_m=\varphi_m(x_1,\ldots,x_n). \end{cases} \tag{А.3}$$

Предполагается, что функции $\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=1,\ldots,m$, определены и дифференцируемы в некоторой открытой n-мерной области D. Напомним определение зависимости функций. Пусть $k\in\{1,\ldots,m\}$ – фиксированный индекс.

Определение А.2.1. *Функция* u_k *зависит в области* D *от остальных функций из (А.3), если сразу для всех точек* $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in D$

$$u_k(\overline{x})=\Phi(u_1(\overline{x}),\ldots,u_{k-1}(\overline{x}),u_{k+1}(\overline{x}),\ldots,u_m(\overline{x})), \tag{А.4}$$

где Φ – некоторая функция, определенная и дифференцируемая в соответствующей области изменения своих аргументов. Функции

$$u_1, \dots, u_m$$

называются зависимыми в области D, если одна из этих функций зависит в области D от остальных.

Если не существует дифференцируемой функции Φ такой, что сразу для всех точек области D справедливо тождество вида (A.4) хотя бы для одного $k \in \{1, \dots, m\}$, то функции $u_1, \dots, u_m$ называются *независимыми в области D*.

Теорема А.2.1. *Пусть m функций от $n \geqslant m$ переменных вида (A.3) определены и дифференцируемы в окрестности точки*

$$M_0 = M_0(x_1^0, \dots, x_n^0).$$

Тогда, если якобиан из этих функций по каким-либо m переменным отличен от нуля в точке M_0, то эти функции независимы в некоторой окрестности точки M_0.

Пусть теперь $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, причем все частные производные первого порядка от этих функций непрерывны в самой точке M_0. Составим из частных производных функций (A.3) функциональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

содержащую m строк и n столбцов.

Теорема А.2.2. *Пусть у функциональной матрицы (A.5)*

1) *некоторый минор r-го порядка отличен от нуля в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$;*

2) *все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю в некоторой окрестности точки M_0 (если $r = \min(m, n)$, то это требование следует опустить).*

Тогда r функций, представленных в указанном миноре r-го порядка, независимы в окрестности точки M_0, а каждая из остальных функций зависит в этой окрестности от указанных r функций.

Доказательство этих теорем можно найти в [2], гл. 13, §3.

Литература

1. *Дмитриев В.И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во КДУ, 2007.

2. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Часть 1. М.: Изд-во МГУ, 1985.

3. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2003.

4. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.

5. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

6. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2004.

7. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: Изд-во РХД, 2000.

8. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2002.