Дифференцирование под знаком интеграла

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)\,dx = f(\Psi(y),y)\Psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\Psi(y)} f'_y(x,y)\,dx,\ b<y<B$$

$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$ — *сходится равномерно, если*

1. $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно*
2. $g(x,y)$ *ограничена и монотонна по x.*

Дифференцирование по параметру:

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx,\ y_1<y<y_2$$

1. $f(x,y)$ — *непрерывна вместе со своей производной*
2. $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится.*
3. $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ *сходится равномерно.*

Интеграл Фруллани:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}\ (a>0, b>0),$$

где $f(x)$ — *непрерывная функция и* $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ *имеет смысл* $\forall A>0$

Интеграл Эйлера-Пуассона:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Интеграл Дирихле:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,sign\,\beta$$

Интегралы Френеля:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Интегралы Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt\,(p>0) = \ \ldots$$

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \quad , \quad f(t)=t^n$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\mathrm{p}\sqrt{p}} \quad , \quad f(t)=\sqrt{t}$$

$$\frac{1}{p-\alpha} \ \ \textit{при}\ p>\alpha \quad , \quad f(t)=e^{\alpha t}$$

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \quad , \quad f(t)=t\,e^{-\alpha t}$$

$$\frac{p}{p^2+1} \quad , \quad f(t)=\cos t$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \quad , \quad f(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}$$

$$\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2\mathrm{p}\sqrt{p}}e^{\frac{-\alpha^2}{4\mathrm{p}}} \quad , \quad f(t)=\sin\alpha\sqrt{t}$$

Гамма-функции. При x > 0 имеем:

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$$

$$\textit{Если}\ n-\textit{целое положительное число}:$$

$$\Gamma(n)=(n-1)! \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1*3*\ldots*(2\mathrm{n}-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\textit{При}\ x\ \textit{не равном целому числу}:$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma}(x+y)$$

Ряды Фурье.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx \quad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

Если f(x) – чётная:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}$$

Если f(x) – нечётная:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Интегральная формула Фурье.

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda \qquad (1)$$

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi \qquad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi$$

В точках разрыва левая часть формулы (1) должна быть заменена на $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Если f(x) – чётна:

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda\ , \quad a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi$$

Если f(x) – нечётна:

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda\ , \quad b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi$$