Вопросы к зачету по мат.анализу и ТФКП
4 семестр.

1. Теорема о непрерывности собственного интеграла зависящего от параметра.

$\Omega = \{x \in [a,b], y \in [c,d]\}$, $a = \varphi(y), b = \psi(y)$

$f(x,y)$ — определена на Ω и $\forall y \in [c,d]$ интегрируема по $[\varphi(y), \psi(y)]$

$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$ — собственный интеграл, зависящий от параметра

Теор. $f(x,y) \in C(\Omega)$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[c,d] \Rightarrow F(y) \in C[c,d]$

2. Теорема о предельном переходе в собственном интеграле зависящем от параметра.

Теор. $f(x,y) \in C(\Omega)$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[c,d] \Rightarrow$

$y_0 \in (c,d) : \lim\limits_{y \to y_0} F(y) = F(y_0) = \int\limits_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)dx$

3. Теорема о дифференцируемости собственного интеграла зависящего от параметра.

Теор. $\exists f'_y(x,y) \in C(\Omega)$, $\varphi(y), \psi(y) \in D[c,d] \Rightarrow F(y) \in D[c,d]$,

$$F'(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y)$$

4. Теорема об интегрируемости собственного интеграла зависящего от параметра.

Теор. $f(x,y) \in C(\{x \in [a,b], y \in [c,d]\}) \Rightarrow F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ интегрируема на сегменте $[c,d]$. Кроме того, справедлива формула

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx \right] dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

5. Определение несобственного интеграла зависящего от параметра.

$f(x,y)$ — интегрируема в $[a,+\infty) \times [c,d]$

$\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = I(y)$ — несобственный интеграл, зависящий от параметра

6. Определение равномерной сходимости интеграла зависящего от параметра.

Несобственный интеграл $I(y)$ сходится равномерно $\forall y \in [c,d]$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A(\varepsilon) \ge a : \forall R \ge A(\varepsilon) \ \forall y \in [c,d] \Rightarrow \left| \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$

7. Критерий Коши равномерной сходимости интеграла зависящего от параметра.

Теор. $I(y)$ сходится равномерно $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A(\varepsilon) \ge a : \ \forall R', R'' \ge A \ \ \forall y \in [c,d] \ \Rightarrow \left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

8. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла зависящего от параметра.

Теор. Пусть выполнено:

1) $f(x,y)$ — интегрируема по $[a,R]$ $\forall R \ge a$ $\forall y \in [c,d]$;

2) $\exists g(x) : |f(x,y)| \le g(x)$ $\forall (x,y) \in P_\infty = [a,+\infty) \times [c,d]$;

3) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ — сходится.

$\Rightarrow I(y)$ сходится равномерно.

9. Признак Дини равномерной сходимости интеграла зависящего от параметра.

Теор. Пусть выполнено:

1) $f(x,y)$ — непрерывна, $f(x,y) \geq 0$ на P_∞;

2) $I(y)$ — сходится $\forall y \in [c,d]$;

3) $I(y)$ — непрерывна $\forall y \in [c,d]$.

$\Rightarrow I(y)$ сходится равномерно.

10. Признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости интеграла зависящего от параметра.

Теор. Пусть выполнено:

1) $f(x,y)$ — интегрируема по $[a,R]$ $\forall R \geq a$ $\forall y \in [c,d]$;

2) $\exists M > 0 : \left| \int\limits_a^x f(t,y)dt \right| \leq M$, $\forall (x,y) \in P_\infty$;

3) $g(x)$ монотонно не возрастает, $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

$\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x)dx$ сходится равномерно.

11. Теорема о непрерывности несобственного интеграла зависящего от параметра.

Теор. Пусть выполнено:

1) $f(x,y)$ — непрерывна в $[a,+\infty) \times [c,d]$;

2) $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ — равномерно сходится $\forall y \in [c,d]$.

$\Rightarrow I(y)$ непрерывна.

12. Теорема о дифференцируемости несобственного интеграла зависящего от параметра.

Теор. Пусть выполнено:

1) $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ — непрерывны в $[a,+\infty) \times [c,d]$;

2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ — сходится $\forall y \in [c,d]$;

3) $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$ — сходится равномерно $\forall y \in [c,d]$.

$\Rightarrow \exists I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$

13. Формула Фруллани.

$f(x) \in C$, $\int\limits_A^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} dx$ — имеет смысл $\forall A > 0$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a},\ a>0, b>0$$

14. Теорема об интегрируемости несобственного интеграла зависящего от параметра.

<u>Теор.</u> Пусть $f(x,y) \in C\{x \in [a,+\infty), y \in [c,d]\}$, $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $\exists \int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy$.

<u>Теор.</u> Пусть $f(x,y) \in C\{x \in [a,+\infty), y \in [c,d]\}$, $f(x,y) \geq 0$, $I(y) \in C[c,d]$. Тогда $\exists \int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy$.

<u>Теор.</u> Пусть $f(x,y) \in C\{x \in [a,+\infty), y \in [c,+\infty]\}$, $f(x,y) \geq 0$,

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \in C[c,+\infty),\ K(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy \in C[a,+\infty)$$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} K(x)dx = \int_c^{+\infty} I(y)dy$ при сходимости одного из них.

15. Интеграл Эйлера-Пуассона.

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

16. Интеграл Лапласа.

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$$

17. Интеграл Френеля.

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

18. Интеграл Дирихле.

$$D(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$$

19. Определение Г-функции.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\ x>0$$

20. Определение В-функции

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\ x,y>0$$

21. Свойства Г-функции.

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2) $\Gamma(n) = (n-1)!$
3) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$
4) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$

22. Свойства В-функции.

1) $\mathrm{B}(x, y)=\mathrm{B}(y, x)$

2) $\mathrm{B}(x, y+1)=\dfrac{y}{x+y}\mathrm{B}(x, y)$

3) $\mathrm{B}(x+1, y)=\dfrac{x}{x+y}\mathrm{B}(x, y)$

4) $\mathrm{B}(x, y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

23. Теорема о разложении функции в ряд Фурье.

Теор. Пусть $f(x)$, $f'(x)$ — кусочно-непрерывные функции на $(-l, l)$. Пусть точки разрыва функции $f(x)$ ξ_k регулярны, т.е. $f(\xi_k)=\dfrac{f(\xi_k+0)+f(\xi_k-0)}{2}$. Тогда

$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{\pi nx}{l}+b_n\sin\dfrac{\pi nx}{l}\right)$ — тригонометрический ряд Фурье,

где $a_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{\pi nx}{l}dx$, $b_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{\pi nx}{l}dx$

24. Теорема о разложении четной функции в ряд Фурье.

Если $f(x)$ — четная функция. Тогда

$a_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{\pi nx}{l}dx=\dfrac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\cos\dfrac{\pi nx}{l}dx,$, $b_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{\pi nx}{l}dx=0$ и

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}$$

25. Теорема о разложении нечетной функции в ряд Фурье.

Если $f(x)$ — нечетная функция. Тогда

$a_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{\pi nx}{l}dx=0,$, $b_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{\pi nx}{l}dx=\dfrac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\sin\dfrac{\pi nx}{l}dx$ и

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}$$

26. Теорема о представлении функции интегралом Фурье.

Теор. Пусть $f(x)$, $f'(x)$ — кусочно-непрерывные функции на R, точки разрыва $f(x)$ регулярны, $f(x)$ — интегрируема по Риману на $\forall[a, b]\subset(-\infty, +\infty)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ — сходится. Тогда $f(x)=\int\limits_{0}^{\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda$ — интеграл Фурье, где

$a(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x dx$, $b(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x dx$

27. Теорема о представлении четной функции интегралом Фурье.

Если $f(x)$ — четная функция. Тогда $b(\lambda)=0$, $f(x)=\int\limits_{0}^{\infty}a(\lambda)\cos\lambda x d\lambda$.

28. Теорема о представлении нечетной функции интегралом Фурье.

Если $f(x)$ — нечетная функция. Тогда $a(\lambda)=0$, $f(x)=\int\limits_{0}^{\infty}b(\lambda)\sin\lambda x d\lambda$.

29. Определение комплексного числа.

Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел $z = (x, y)$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $x, y \in R$

30. Определение суммы, произведения, частного комплексных чисел.

$$z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2) \Rightarrow$$
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

31. Определение комплексно-сопряженного числа.

$$z = (x, y) \Rightarrow \bar{z} = (x, -y)$$
$$\bar{\bar{z}} = z,\ z\bar{z} = |z|^2,\ z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z,\ z - \bar{z} = 2\operatorname{Im} z$$

32. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

$$\rho = |z|,\ \varphi = \operatorname{Arg} z \Rightarrow z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

33. Экспоненциальная форма записи комплексного числа.

$$\rho = |z|,\ \varphi = \operatorname{Arg} z \Rightarrow z = \rho e^{i\varphi}$$

34. Формула Эйлера.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

35. Формула Муавра.

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

36. Вычисление корня комплексного числа.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),\ k = 0,1,\ldots,n-1$$

37. Определение внутренней точки комплексной области.
Точка z называется внутренней точкой области, если существует ε-окрестность точки z, все точки которой принадлежат этой области.

38. Определение внешней точки комплексной области.
z — внешняя точка, если она не принадлежит области вместе с некоторой окрестностью.

39. Определение граничной точки комплексной области.
z — граничная точка, если в любой ε-окрестности этой точки найдутся как внешние, так и внутренние точки.

40. Определение односвязной области.
Любые две точки области можно соединить ломанной, все точки которой принадлежат области.

41. Определение замкнутой области.
Область, содержащая все свои предельные точки.

42. Определение предела функции комплексного переменного.
$$A = \lim_{z \to z_0} f(z) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) : |z - z_0| < \delta, z \neq z_0 \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$$

43. Определение непрерывной функции комплексного переменного.
$f(z)$ непрерывна в точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

44. Определение равномерно-непрерывной функции комплексного переменного.
$f(z)$ равномерно непрерывна в G, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)$:
$\forall z', z'' \in G : |z' - z''| < \delta \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon$

45. Определение сходимости ряда комплексных чисел.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ — частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ряд сходится, если $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$

46. Определение абсолютной сходимости ряда комплексных чисел.

Ряд $\sum a_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum |a_k|$

47. Определения элементарных функций комплексной переменного.

Линейная функция: $w = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$

Дробно-линейная функция: $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$

Функция Жуковского: $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

Степенная функция: $w = z^n$, $n \in N, n > 1$

Показательная функция: $w = e^z$

Тригонометрические и гиперболические функции:

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$ $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$

$\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$

Функция $w = \sqrt[n]{z}$, $n \in N, n > 1$

Логарифмическая функция: $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, $z \neq 0$

Обратные тригонометрические функции

48. Определение производной комплексной функции.

Производная функции комплексной переменной $f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$

если он существует.

49. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости комплексной функции.

<u>**Теор.**</u> $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 $\Leftrightarrow$ $\Delta f = A\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z)\Delta z$, где $A = const$, $\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

50. Геометрический смысл производной комплексной функции.

$f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow$

$|f'(z_0)|$ — коэффициент растяжения в точке z_0 под действием $w = f(z)$;

$\operatorname{Arg} f'(z_0)$ — угол поворота кривой, проходящей через точку z_0, под действием $w = f(z)$.

51. Определение конформного отображения.

Локальная конформность: Отображение, осуществляемое непрерывной функцией $w = f(z)$, конформно в точке z_0, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через эту точку.

Глобальная конформность: Пусть $w = f(z)$ отображает область G в область $F = f(G)$. Это отображение конформно, если соответствие между точками G и F взаимнооднозначно и $w = f(z)$ конформно в каждой точке $z_0 \in G$.

52. Определение аналитической функции.

$f(z) \in A(G)$ (аналитическая в области G), если $\exists f'(z), z \in G$ и $f'(z) \in C(G)$.

53. Свойства линейной функции комплексного переменного.

$w = az + b$; $z = re^{i\varphi}$; $a = \rho e^{i\psi}$; $b = x + iy$

$w = \rho r e^{i(\varphi+\psi)} + x + iy$

фигура на плоскости z переходит в подобную фигуру на плоскости w

54. Свойства обратной функции комплексного переменного.

$w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} e^{-i\varphi}$

зеркальное отражение (инверсия) в единичном круге

окружности на плоскости z переводит в окружности на плоскости w

окружность на плоскости z , проходящие через O , переводит в прямую на плоскости w

точки, симметричные относительно окружности, переводит в точки, симметричные относительно образа.

55. Свойства степенной функции комплексного переменного.

$w = z^n$; $z = re^{i\varphi}$; $w = r^n e^{in\varphi}$

сектор на плоскости z переходит в сектор на плоскости w

56. Свойства дробно-линейной функции комплексного переменного.

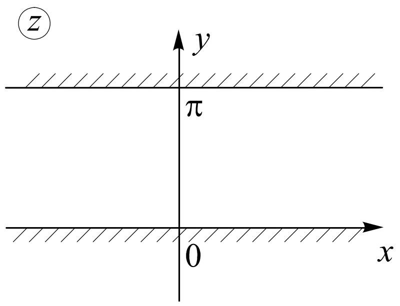
$w = \dfrac{a + bz}{c + dz}$; $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

$w = \lambda \dfrac{\alpha + z}{\beta + z} = \dfrac{\alpha - \beta + z + \beta}{\beta + z} \lambda = \dfrac{\lambda(\alpha - \beta)}{\beta + z} + \lambda \Rightarrow$ верны свойства $w = \dfrac{1}{z}$ (см. п. 54)

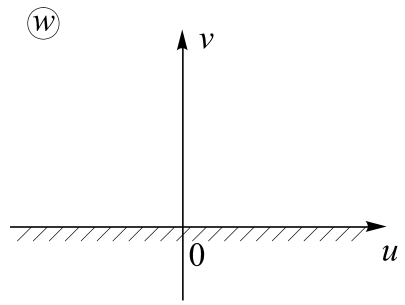
$w' = \lambda \dfrac{\beta - \alpha}{(\beta + z)^2} \neq 0$

57. Свойства функции комплексного переменного e^z .

Переводит полосу $\{-\infty < x < \infty; 0 < y < \pi\}$ в верхнюю полуплоскость

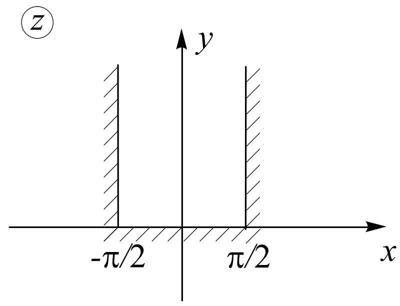


$w = e^z \Rightarrow$

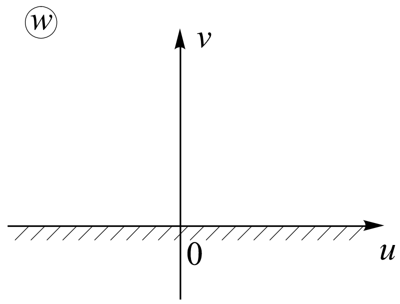


58. Свойства функции комплексного переменного $\sin z$.

Переводит полуполосу $\left\{-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2};\ y > 0\right\}$ в верхнюю полуплоскость



$w = \sin z \Rightarrow$



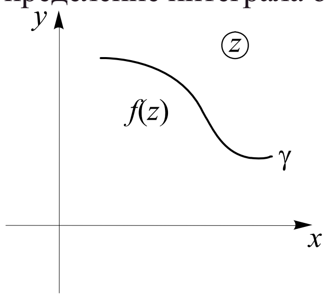
59. Свойства функции Жуковского.

$w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ — аналитическая на $\mathbf{C}$

$w' = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right) \Rightarrow$ конформное отображение в окрестности любой точки z , кроме точек ± 1 .

производит конформное отображение области внутри единичного круга $|z| < 1$ на плоскости z на плоскость w, разрезанную по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси. Аналогично область $|z| > 0$ вне единичного круга на плоскости z отображается на второй экземпляр плоскости w, разрезанной по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси.

60. Определение интеграла от функции комплексного переменного.



$$\gamma : \begin{cases} \xi = \xi(t) \\ \eta = \eta(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$$

$t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$

$\zeta_i = \zeta(t_i)$

$\Delta\zeta_i = \zeta_{i+1} - \zeta_i$

$d = \max\limits_i |\Delta\zeta_i|$ — диаметр разбиения

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i^*)\Delta\zeta_i\,,\ \zeta_i^* = \zeta_i(t^*)\,,\ t^* \in [t_i, t_{i+1}]$$

$\int\limits_\gamma f(\zeta)d\zeta = \lim\limits_{d\to 0}\sigma$, если он существует и не зависит от разбиения и выбора ζ_i^*

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \int_\gamma (u+iv)d(\xi(t)+i\eta(t)) = \int_\gamma ud\xi - vd\eta + i\int_\gamma ud\eta + vd\xi$$

61. Теорема Коши.

<u>Теор.</u> $f(z) \in A(G)$, $C \in G \;\Rightarrow\; \oint\limits_C f(z)dz = 0$

62. Теорема о первообразной комплексной функции.

<u>Теор.</u> $f(z) \in C(G)$, $\forall C \in G:\ \oint\limits_C f(z)dz = 0 \;\Rightarrow$

$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\ \ (z, z_0 \in G):\ \Phi(z) \in A(G)$, $\Phi'(z) = f(z)$

63. Формула Коши.

<u>Теор.</u> $f(z) \in A(G)$, $C \in G$, $z_0 \in \operatorname{int} C \;\Rightarrow\; f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta$

64. Теорема о максимуме аналитической функции.

<u>Теор.</u> $f(z) \in A(G)$, $f(z) \in C(\overline{G}) \;\Rightarrow$ либо $f(z) = const$, либо $\max|f(z)|$ достигается на границе

65. Формула для производных аналитической функции.

<u>Теор.</u> $f(z) \in A(G)$ и $f(z) \in C(\overline{G})$, $\Gamma = \partial G \;\Rightarrow\; \forall z \in G$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

$\exists$ производная $\forall$ порядка:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

66. Теорема Морера.

<u>Теор.</u> $f(z) \in C(G)$, $\forall C \subset G:\ \oint\limits_C f(\zeta)d\zeta = 0 \;\Rightarrow\; f(z) \in A(G)$

67. Теорема об ограниченной в **C** аналитической функции.

<u>Теор.</u> $f(z)$ — аналитическая в **C**, $|f(z)|$ — равномерно ограничен $\Rightarrow\; f(z) \equiv const$

68. Теорема Жордана.

<u>Теор.</u> $f(z)$ — непрерывна в $|z| \ge R_0$, $f(z) \to 0$ при $z \to \infty \;\Rightarrow\; \forall m > 0\ \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma_R} e^{imz} f(z)dz = 0$,

где Γ_R — дуга $|z| = R$.

69. Разложение элементарных функций комплексного переменного в степенные ряды.

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$; $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n}$;

$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} z^n + ...$;

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

70. Теорема Абеля о комплексных степенных рядах.

<u>Теор.</u> Если ряд сходится в $z_1 \neq z_0$ $\Rightarrow$ абсолютно сходится $\forall z$: $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ и сходится равномерно $\forall z$: $|z - z_0| \le \rho < |z_1 - z_0|$

71. Теорема о радиусе сходимости комплексного степенного ряда.

$\sum c_n (z - z_0)^n$ $\Rightarrow$ радиус сходимости $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$

72. Теорема Тейлора для функции комплексного переменного.

<u>Теор.</u> $f(z)$ — аналитическая в $|z - z_0| < R$ $\Rightarrow$ $f(z)$ может быть однозначно представлена сходящимся степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,\ \rho < R$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

73. Теорема о счетном числе нулей аналитической функции.

<u>Теор.</u> $f(z) \in A(G)$, $f(z) \not\equiv 0$ $\Rightarrow$ всякий компакт $F \subset G$ содержит лишь конечное число нулей функции $f(z)$.

74. Определение нуля комплексной функции *к-го* порядка.

$f(z)$ имеет 0 *к-го* порядка в точке z_0, если $c_0 = c_1 = ... = c_{k-1} = 0$ при разложении в точке z_0, $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, $g(z_0) \neq 0$

75. Определение ряда Лорана.

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ — ряд Лорана

76. Теорема о разложении комплексной функции в ряд Лорана.

<u>Теор.</u> $f(z)$ — аналитическая в $R_2 < |z - z_0| < R_1$, однозначно представляется рядом Лорана: $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$, $R_2 = \overline{\lim\limits_{n\to-\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$

77. Определение изолированной особой точки.

z_0 — изолированная особая точка, если $f(z)$ аналитическая в $0 < |z - z_0| < R$ и z_0 — особая точка.

78. Определение устранимой особой точки.

$c_{-n} = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$ — устранимая особая точка

79. Теорема об устранимой особой точке.

<u>Теор.</u> $f(z)$ — аналитическая в $0 < |z - z_0| < R$ и ограниченная $\Leftrightarrow$ z_0 — устранимая особая точка.

80. Определение полюса *к-го* порядка.

$c_{-n} = 0$, $\forall n \ge k + 1$ — полюс *к-го* порядка

81. Теорема о полюсе *к-го* порядка.

<u>Теор.</u> $f(z)$ — неограниченно возрастает при любом стремлении $z \to a \Leftrightarrow a$ — полюс функции.

82. Определение существенной особой точки.

$\forall n > 0 \;\; \exists k > n : c_{-k} \neq 0$ — существенно особая точка

83. Теорема о существенной особой точке.

<u>Теор.</u> При различном стремлении $z \to a$ можно получить $\forall z_0 \in \mathbf{C} \Leftrightarrow a$ — существенно особая точка.

84. Классификация бесконечно-удаленной особой точки.

1° $c_n = 0$, $\forall n \geq 0$ — устранимая особая точка

2° $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{k} c_n z^n \;\; (k > 0)$ — полюс порядка k

3° $\forall n \;\; \exists k > n > 0 : c_k \neq 0$ — существенно особая точка

85. Определение вычета.

Вычет аналитической функции в изолированной особой точке z_0:

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(\zeta)d\zeta$$

86. Теорема о вычетах комплексной функции.

<u>Теор.</u> $f(z)$ — аналитическая в $\overline{G}$ ($\gamma^+ = \partial G$) за исключением изолированных особых точек $z_k \in \operatorname{int} G$, $k = 1,...,N \Rightarrow \oint\limits_{\gamma^+} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k]$

87. Вычисление вычета в полюсе 1-го порядка.

z_0 — полюс 1-го порядка $\Rightarrow \operatorname{res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$

88. Вычисление вычета в полюсе m-го порядка.

z_0 — полюс m-го порядка $\Rightarrow \operatorname{res}[f(z), z_0] = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z \to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z - z_0)^m f(z)\right]$

89. Вычисление интеграла $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$ с помощью вычетов.

$$z = e^{i\varphi} \Rightarrow \varphi \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow |z| = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

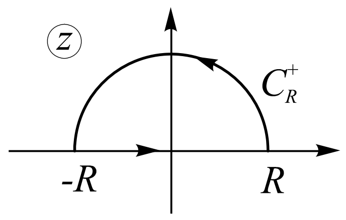
$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$dz = ie^{i\varphi}d\varphi = zd\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}$$

$$I = \frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{z}R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)dz = \frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1}\widetilde{R}(z)dz = 2\pi\sum_{j=1}^{k}\operatorname{res}[\widetilde{R}(z), z_j]$$

90. Вычисление интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ с помощью вычетов.

<u>Теор.</u> $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$, $\delta > 0$, $|z| > R_0$, $\operatorname{Im} z \geq 0 \Rightarrow$



$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^+} f(z)dz = 0$$

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\mathrm{res}[f(z), z_j],$$

$\operatorname{Im} z_j > 0$

91. Вычисление интегралов с помощью теоремы Жордана.

<u>Лемма</u> $|f(z)| \in C(D)$, где $D = \{|z| \geq R_0 > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Если $a > 0$, то $J = \int_{C_R^+} e^{iaz} f(z)dz \to 0$ при $R \to \infty$.

<u>Теор.</u> $f(z) \in A(P_+ = \{\operatorname{Im} z > 0\})$ и $f(z) \in C\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ за исключением особых точек $z_1, z_2, ..., z_n \in P_+$. Пусть $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Если $a > 0$, то

$$(v.p.)I = (v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}[e^{iaz} f(z), z_k]$$