Теория функций комплексного переменного

Лектор — Александр Сергеевич Романов

1. Аналитические функции комплексного переменного

Комплексные числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Предел последовательности комплексных чисел. Открытые, замкнутые, ограниченные и компактные множества на комплексной плоскости. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Компактификация комплексной плоскости. Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Дифференцирование по комплексному переменному. Условия Коши — Римана. Аналитические функции. Сопряженные гармонические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения. Дробно-линейные функции. Основные элементарные функции комплексного переменного: многочлены, рациональные функции, экспонента, гиперболические и тригонометрические функции. Теорема об обратной функции. Многозначные функции и точки ветвления. Ветви функций $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$. Понятие римановой поверхности.

2. Интегрирование функций комплексного переменного

Интеграл функции комплексного переменного по ориентированной кривой. Общие свойства интеграла функции комплексного переменного по ориентированной кривой, связь с криволинейными интегралами. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Интегральные представления для производных. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Первообразная аналитической функции. Формула Ньютона — Лейбница. Теорема Мореры. Принцип максимума модуля аналитической функции. Интегральная формула Пуассона. Задача Дирихле для гармонических функций в круге.

3. Ряды аналитических функций. Степенные ряды

Числовые ряды. Функциональные ряды в комплексной области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Комплексные степенные ряды: первая теорема Абеля, круг и радиус сходимости, аналитичность суммы степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда в граничной точке круга сходимости — вторая теорема Абеля. Ряд Тейлора. Теорема единственности. Разложение основных элементарных функций. Ряд Лорана, кольцо сходимости. Теорема о разложении функции в ряд Лорана. Единственность разложения в ряд Лорана. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля.

4. Особые точки и теория вычетов

Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Понятие о целых и мероморфных функциях. Нули аналитической функции. Поведение функции в окрестности изолированной существенно особой точки. Вычет в конечной особой точке. Основная теорема теории вычетов. Формула для нахождения вычета в полюсе. Бесконечно удалённая особая точка. Вычет в бесконечно удалённой точке. Обращение степенного ряда. Интегрирование рационально-тригонометрических функций. Интегрирование рациональных функций. Преобразование Фурье рациональной функции. Лемма Жордана. Интегрирование рациональных выражений со степенным «весом». Интегралы типа бета-функции. Вычисление интегралов с логарифмическими особенностями. Принцип аргумента. Теорема Руше. Доказательство «основной теоремы алгебры». Понятие аналитического продолжения. Степенные ряды как средство аналитического продолжения функций. Аналитическое продолжение гамма-функции. Интегралы, зависящие от параметра.

5. Преобразование Лапласа

Оригиналы и изображения. Аналитичность изображения. Линейность преобразования Лапласа. Формула обращения. Теорема подобия. Смещение изображения. Преобразование Лапласа производных и интегралов. Дифференцирование и интегрирование изображений. Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Запаздывание оригинала. Свёртка оригиналов. Теорема Бореля об умножении изображений. Формула Дюамеля.

6. Асимптотические методы

Асимптотические сравнения и асимптотическая эквивалентность функций. Примеры асимптотических оценок. Асимптотические последовательности и ряды. Единственность асимптотического разложения. Арифметические операции с асимптотическими разложениями. Степенные асимптотические разложения. Асимптотические разложения аналитических функций. Идея метода Лапласа. Принцип локализации. Лемма Морса. Лемма Ватсона. Нахождение главного члена асимптотики интеграла Лапласа в типичных случаях. Асимптотика гамма-функции. Идея метода стационарной фазы. Метод стационарной фазы: вклад от концов промежутка интегрирования. Лемма Эрдейи. Метод стационарной фазы: вклад от невырожденной стационарной точки. Идея метода перевала. Перевальный контур. Принцип максимума для гармонических функций. Лемма о линии наискорейшего спуска. Нахождение главного члена асимптотики.

Литература

1. *Александров В. А.* Преобразование Лапласа: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1992[1].
2. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.
3. *Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970.
4. *Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И., Бежанов К. А.* Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1972.
5. *Зорич В. А.* Математический анализ. М.: Наука, 1984. Т. 2.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
7. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963.
8. *Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С.* Задачи по теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГУ, 1992.

[1]Шифр библиотеки НГУ — В17 П723.

9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967. Т. 1, 2.
10. *Привалов В. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.
11. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
12. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Ч. 1.

План семинаров

1. Комплексные числа. Стереографическая проекция.
Функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана 2 ч.
2. Дробно-линейные функции 2 ч.
3. Элементарные функции комплексного переменного: многочлены, экспонента, гиперболические и тригонометрические функции. Логарифм, обратные гиперболические и обратные тригонометрические функции: выделение ветвей. Построение римановых поверхностей простейших аналитических функций 4 ч.
4. Интегрирование функций комплексного переменного. Первообразная аналитической функции.
Интегральная теорема Коши и формула Коши 2 ч.
5. Степенные ряды. Ряд Тейлора 2 ч.
6. Ряд Лорана. Вычеты 2 ч.
7. Вычисление интегралов с помощью вычетов: от рациональных и рационально-тригонометрических функций, от рациональных выражений со степенным «весом». Вычисление интегралов типа бета-функции и интегралов с логарифмическими особенностями 6 ч.
8. Применения принципа аргумента и теоремы Руше 1 ч.
9. Преобразование Лапласа: оригиналы и изображения, теоремы подобия и смещения, дифференцирование и интегрирование изображений и оригиналов. Запаздывание и свёртка оригиналов, теорема Бореля, формула Дюамеля, формула обращения 4 ч.
10. Преобразование Лапласа: решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2 ч.
11. Асимптотические формулы и действия с ними.
Простейшие асимптотические разложения 2 ч.
12. Метод Лапласа 3 ч.
13. Метод стационарной фазы 2 ч.

Программу лекций и план семинаров
по ТФКП составил доцент А. С. Романов

Задания по теории функций комплексного переменного

Задание 1 *(сдать до 10 октября)*

1. Вычислить произведение $(1-i)^{40}\,(1+i\sqrt{3})^{30}\,(1+i)^{-100}$.

2. Найти все значения выражения

$$\Big(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\Big)^{1+i}.$$

3. Доказать неравенство

$$|z_1+z_2| \ge \frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\Big|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\Big|.$$

4. При каком преобразовании сферы Римана образ точки z переходит в образ точки $1/z$?

5. Опишите и нарисуйте множество точек комплексной плоскости, которое задается уравнением $\operatorname{Re} z^{-1} = 1$.

6. Найти все корни уравнения $\sin z - \cos z = 3$.

7. Найти суммы

$$1)\ \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi; \quad 2)\ \frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi.$$

8. Выяснить, при каких действительных значениях p сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\, e^{in}.$$

9. Исследуйте, во что функция w преобразует полукруг K^+, если

$$w = \frac{2z-i}{2+iz}, \qquad K^+ = \{|z|<1, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

10. Найти общий вид дробно-линейных отображений полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ с вырезанным кругом $|z-d| \le d$ на вертикальную полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$.

11. Найти множество точек, симметричных относительно единичной окружности точкам линии $|z-1| = 1$.

12. Выяснить, допускают ли указанные функции выделение однозначных ветвей в окрестности точки z_0:

$$1)\ \sqrt[3]{z-1}, \qquad z_0 = 1; \qquad 2)\ \sqrt{z^2-1}, \quad z_0=\infty;$$

$$3)\ \sqrt{\frac{z-1}{z(z+1)}}, \quad z_0=\infty; \quad 4)\ \ln\frac{(z-2)(z+i)}{(z-i)(z-4)}, \quad z_0=\infty.$$

13. Вычислить интеграл функции $z\,|z|$ вдоль замкнутого контура, состоящего из верхней части окружности $|z| = a > 0$ и отрезка действительной оси $|\operatorname{Re} z| \le a,\ \operatorname{Im} z = 0$.

14. Согласно теореме Лиувилля, функция $f\,(z)$, аналитическая и ограниченная на всей плоскости, является постоянной. Доказать эту теорему, вычислив интеграл

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}$$

$(|a| < R,\ |b| < R)$ и произведя его оценку при $R \to \infty$.

Задание 2 *(сдать до 20 ноября)*

1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} \qquad (0 < \varphi < \pi).$$

3. Считая, что $\sqrt{i} = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$, разложить функцию $\sqrt{z+i}$ в степенной ряд с центром в точке $z_0 = 0$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4. Разложить функцию $\sin(2z - z^2)$ в ряд по степеням $z-1$ и найти радиус сходимости ряда.

5. Найти максимум модуля функции $\sin z$ на замкнутом единичном круге $|z| \le 1$.

6. Функцию $(z^2+1)^{-2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точек $z = i$ и $z = \infty$. Определить области, в которых разложения имеют место.

7. Выяснить, допускают ли функции разложение в ряд Лорана в окрестности соответствующих точек

$$1)\ \cos\frac{1}{z}, \quad z=0; \qquad 2)\ \frac{1}{\sin z - 3}, \quad z=\infty; \qquad 3)\ \ln\frac{z-1}{z+i}, \quad z=\infty.$$

8. Найти особые точки функций

$$1)\ \frac{1}{z^3\,(2-\cos z)}, \qquad 2)\ \frac{1-e^z}{2+e^z},$$

выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности.

9. Для каждой из указанных ниже функций найти ее вычеты относительно всех ее изолированных особых точек:

$$1)\ \frac{z^5}{(1-z)^2}; \qquad 2)\ \frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}; \qquad 3)\ \sin\frac{z}{z+1}.$$

10. Найти вычеты каждой из ветвей многозначной функции

$$\frac{1}{1+\sqrt{2-z}}$$

относительно точки $z = 1$.

11. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \frac{z^2\,dz}{z^4+1}\ ,$$

где C — окружность $x^2+y^2 = 2x$, пробегаемая против часовой стрелки.

12. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{\cos z},$$

где C — граница полуполосы $\{\operatorname{Re} z < 0,\ |\operatorname{Im} z| < a\}$.

13. Вычислить интегралы:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2} \quad (a>0,\ b>0); \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4\,dx}{x^8+1}; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{1+x^4}.$$

14. Вычислить интегралы:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x^2+1}; \quad \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x\,(1-x)^3}}{(x+1)^3}\,dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)^2}\,dx.$$

15. Пусть $0<p<1$. Доказать формулу дополнения:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = B(p,1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

16. Интегрируя по границе области $\{r<|z|<R,\ -\pi/2<\arg z<0\}$, функцию $z^{p-1}e^{-iz}$, доказать, что при $0<p<1$ справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\sin x\,dx = \Gamma(p)\,\sin\frac{\pi p}{2}.$$

17. Используя теорему Руше и формулы Виета, доказать, что при любом комплексном значении α и при целом $n\ge 2$ уравнение

$$1+z+\alpha z^n = 0$$

имеет хотя бы один корень в круге $|z|\le 2$.

18. Найти количество корней уравнения $z^4+z^3+4z^2+2z+3=0$ в правой полуплоскости.

Задание 3 *(сдать до 20 декабря)*

1. Найти изображения следующих оригиналов:

$$1)\ f(t) = te^{-t}\cos t;\ 2)\ f(t) = \frac{\cos t - 1}{t};\ 3)\ \mathrm{si}\,(t) = -\int_t^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

2. Используя формулу обращения для преобразования Лапласа, вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{\lambda z}\,dz}{z^2\,(z^2+1)},\quad \alpha>0.$$

3. Применяя теорему Бореля об умножении изображений, найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}.$$

4. Используя преобразование Лапласа, решить дифференциальное уравнение

$$y^{(4)}(t)+2y''(t)+y(t)=\sin t,\qquad y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0.$$

5. Используя преобразование Лапласа, решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1''+y_2'+y_1=e^t,\\ y_1'+y_2''=1,\end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(0)=1,\ y_2(0)=0,\ y_1'(0)=1,\ y_2'(0)=-1$.

6. Применяя преобразование Лапласа, решить интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$x(t)-e^{-2t}\int\limits_0^t e^{2s}x(s)\,ds=1+t,\quad t>0.$$

7. Пусть $f(x)\simeq\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{-n}$ при $x\to+\infty$, а g есть многочлен. Проверить, что первые члены асимптотического ряда по последовательности $\{x^{-n}\}$ при $x\to\infty$ для функции $g(f(x))$ имеют вид

$$g(f(x))=g(a_0)+a_1g'(a_0)\frac{1}{x}+\left(\frac{a_1^2g''(a_0)}{2!}+a_2g'(a_0)\right)\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

8. Используя интегрирование по частям, найти асимптотическое разложение при $x\to+\infty$ интеграла

$$\int\limits_x^{+\infty}e^{it^2}\,dt.$$

9. Используя лемму Ватсона, найти асимптотическое разложение при $\lambda \to +\infty$ интеграла

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{1 - cosx}{x} e^{-\lambda x}\, dx.$$

10. Найти при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$\int\limits_0^{1} x^{\lambda} \cos^n \pi x\, dx.$$

11. Используя тождество

$$k! n^{-k-1} = \int\limits_0^{\infty} e^{-nx} x^k\, dx,$$

найти главный член асимптотики суммы

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k!\, n^{-k}.$$

12. Сделав подходящую замену переменной, найти при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$\int\limits_0^{1} e^{-(\lambda x + 1/x)}\, dx.$$

13. Найти при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$\int\limits_0^{\pi} e^{i\lambda \cos x} \cos^2 x\, dx.$$

14. Пусть J_n — функция Бесселя целого порядка n. Считая, что $x > 1$, найти главный член асимптотики $J_n(nx)$ при $n \to +\infty$.

Задания по ТФКП
составил доцент А. С. Романов