① Ильин, Моисеев. Лекции по рядам Фурье
③ Ильин, Позняк.

[Лекция 1]
ГЛАВА 6. 08.02.06

Интегралы, зависящие от параметра (ИЗП)

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$

$\{y_k(x)\}$ - фунд. система.

$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,t) f(t)\,dt.$

пример инт-ла, завис. от параметра.

$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt}\,dt.$

$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt}\,dt, \; p \in \mathbb{C}$

Рассм. $f(x,y)$ на пр-ке $P = \{(x,y): x \in [a,b], y \in [c,d]\}$ и

$\exists \forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ инт-ма по x на $[a,b]$.

$\forall y$ став. в соотв-е $\int_a^b f(x,y)\,dx$

Опр $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ (1) - собств. интеграл, завис. от параметра

$Q(y) = \{(x,y): x \in [a(y), b(y)], y \in [c,d]\}$

$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ (2)

§1 Собственные инт-лы, завис. от параметра

п.1. Случай постоянн. пределов инт-я.

Пример 1) $\int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx$, $y\in\mathbb{R}$.

Теор. 1 $\exists f(x,y)$ непр. на пр-ке P ⇒ ф-я $I(y)$ явл. непрерывной на $[c,d]$, её можно инт-ть и справедлива ф-ла

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy. \quad (1)$$

□ ① Фикс. $\forall y\in[c,d]$

Δy: $y+\Delta y\in[c,d]$

$$\Delta I(y) = I(y+\Delta y) - I(y) = \int_a^b \big(f(x,y+\Delta y) - f(x,y)\big)\,dx$$

f - непр. на P ⇒ равномерно непр.

Фикс. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall x\in[a,b]$, $\forall y, y+\Delta y\in[c,d]$: $|\Delta y|<\delta$ $|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

$$\Rightarrow |\Delta I(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b 1\,dx = \varepsilon$$

Т.е., для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall|\Delta y|<\delta$ $|\Delta I(y)|<\varepsilon$.

Значит, $I(y)$ непр. в т. y. Т.к. y - $\forall$ ⇒ $I(y)$ непр. на всём отр. $[c,d]$

② f - непр. на P ⇒ $\exists \int_a^b f(x,y)\,dx$, $\int_c^d f(x,y)\,dy$

$\exists \iint_P f(x,y)\,dxdy$ ⇒ по т. о переходе к однократн. инт-м

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

⇒ (1). ■

Замечание ① Вместо $[c,d]$ можно инт-ть по отр. $[c_1,d_1]\subset[c,d]$.

② Для справедливости ф-лы (1) достаточно, чтобы $\exists\iint_P f(x,y)\,dxdy$ и наличие существ. $\exists\int_a^b f(x,y)\,dx$ и $\exists\int_c^d f(x,y)\,dy$

Прим. 1) $I(y) = \int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dy$, $y\in\mathbb{R}$.

$\exists y\neq0$, напр. $y\in(0,1]$

Фикс. $\forall$ т. $y\in(0,1]$ ⇒ $\exists r>0$: $r\le y<1$

$\exists P=[0,1]\times[r,1]$.

$\ln(x^2+y^2)$ - непр. ф-я на P ⇒ $[r,1]$ ⇒ $I(y)$ - непр. ф-я в т. y.

⇒ $I(y)$ непр. на $(0,1]$.

Аналогично для $\forall[c,d]$: $0\notin[c,d]$.

$\exists y=0$. Вычислим $I(y)$

$$I(0) = \int_0^1 \ln x^2\,dx = 2\int_0^1 \ln(x)\,dx = 2x\ln x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{x}\,dx =$$

$$= 0-0-2 = -2$$

$$I(y)\Big|_{y\neq0} = \int_0^1\ln(x^2+y^2)\,dx = x\ln(x^2+y^2)\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{x\cdot 2x}{x^2+y^2}\,dx =$$

$$= \ln(y^2+1) - 2\int_0^1\frac{x^2+y^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx = \ln(y^2+1) - 2 + 2y^2\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Big|_0^1$$

$= \ln(1+y^2) - 2 + 2y\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\Big|_0^1 =$

$= \ln(1+y^2) - 2 + 2y\,\mathrm{arctg}\frac{1}{y}$

$I(y) \underset{y\neq 0}{=} \ln(1+y^2) + 2y\,\mathrm{arctg}\frac{1}{y} - 2$

$I(y) \xrightarrow[y\to 0\pm 0]{} 0 - 2 + 2\cdot 0\cdot\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = -2.$

Зн., ф-я $I(y)$ непр. в т. $y=0$.

<u>Теор 2.</u> Пусть ф-я $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ - непр. на пр-ке P ⇒ ф-я $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и справедлива след. ф-ла

$$I'(y) = \frac{dI(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx \quad (4) \text{ для } \forall y\in[c,d]$$

- правило Лейбница

□ $\varphi(x)$ - непр. ⇒ $\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt$ - диффер. ф-я.

$\left\{ \left(\Phi(x)-\Phi(x_0)\right)'_x = \Phi'(x) = \varphi(x) \right\}$

$g(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ выразим $g(y)$ через $I(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. ⇒ {т. 1} ⇒ $g(y)$ - непр. ф-я и справедл. (3)

Фикс. $\forall y\in[c,d]$. Интегр. g по отр. $[c,y]$

$\int_c^y g(t)dt = \int_c^y dt\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx = \int_a^b dx\int_c^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt =$

$= \int_a^b f(x,t)\Big|_{t=c}^{y}dx = \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,c)dx = I(y) - I(c)$

⇒ $I(y) = \int_c^y g(t)dt + I(c)$

g - непр. на $[c,d]$ ⇒ $I(y)$ дифферен-ма на $[c,d]$

и $I'(y) = g(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$, что и тр. д-ть.

($I'(y)$ - непр.)

■

Прим. $I(y) = \int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx$

$\forall [c,d]$ $0\notin[c,d]$ $P = [0,1]\times[c,d]$

f - непр. на P.

$\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$ - непр. на P

⇒ {т. 2} $I(y)$ диффер-ма и $I'(y) = 2y\int_0^1\frac{dx}{x^2+y^2} =$

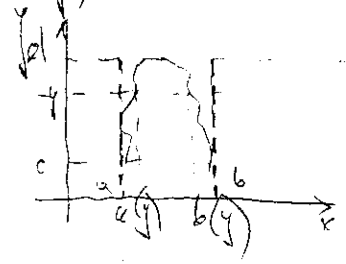
$= \frac{2y}{y}\int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = 2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{1}$

$I'(y) = 2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{y}$ $\forall$ т. $y\neq 0$.

$I'(0)$ не определена

п. 2 <u>Случай переменных пределов инт-я</u>

$f(x,y)$ на $D = \{(x,y): x\in[a(y),b(y)],\ y\in[c,d]\}$



$\exists$ для $\forall y\in[c,d]$ $\exists \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$

$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ (2) - ИЗП

$P: D \subseteq P = [a,b] \times [c,d]$

Теор. 3 Пусть $f(x,y)$ непр. на P и $a(y)$, $b(y)$ непр. на $[c,d]$.

Тогда $I(y)$ непр. на $\mathcal{D}(P)$.

□ Фикс. $\forall$ т. $y_0 \in [c,d]$. $I(y) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx + \int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x,y)dx =$

$= \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f dx - \int_{a(y_0)}^{a(y)} f dx = \tilde{I}(y) + B(y) - A(y)$

$\tilde{I}(y)$: f - непр. на $P \Rightarrow$ {т. 1} $\Rightarrow \tilde{I}(y)$ непр. на $[c,d]$ и

$\tilde{I}(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} \tilde{I}(y_0) = I(y_0)$

$|B(y)| \le M \left|\int_{b(y_0)}^{b(y)} 1\, dx\right| = M\,|b(y) - b(y_0)| \xrightarrow[y \to y_0]{} 0$,

$\left(M = \max_P |f(x,y)|\right)$ т.к. $b(y)$ непр. на $[c,d]$

$A(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} 0$ аналогично.

Зн., $I(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} I(y_0) \Rightarrow I(y)$ непр. в т. $y_0 \Rightarrow$ непр. на всём отрезке ■

Теор. 4 Пусть $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непр. в пр-ке P: $D \subseteq P$, $a(y)$, $b(y)$ - дифференц-мы на $[c,d] \Rightarrow I(y)$ - дифференц-на на $[c,d]$ и верно

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx + b'(y) f(b(y), y) - a'(y) f(a(y), y) \quad (5)$$

□ $I(y) = \tilde{I}(y) + B(y) - A(y)$ (см. теор. 3), $\forall$ т. $y_0 \in [c,d]$

По т. 2 $\tilde{I}(y)$ - дифференц. ф-я и $\tilde{I}(y)' = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$, для $\forall y \in [c,d]$.

Найдём $\frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow[y \to y_0]{}$?

$\frac{B(y)}{y - y_0}$; $\frac{A(y)}{y - y_0}$ $\quad (B(y_0) = A(y_0) = 0)$.

$\frac{B(y)}{(y - y_0)} = \frac{1}{y - y_0} \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx =$ {т. о среднем} $=$

$= \frac{1}{y - y_0} f(\hat{x}, y)\,(b(y) - b(y_0))$

f - непр. $\Rightarrow$ $\hat{x}$ между $b(y_0)$ и $b(y)$.

$f(\hat{x}, y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f(b(y_0), y_0)$

$b(y)$ дифф. $\Rightarrow$ $\frac{B(y) - B(y_0)^{=0}}{y - y_0} \to f(b(y_0), y_0)\, b'(y_0)$

Аналогично $A(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f(a(y_0), y_0)\, a'(y_0)$

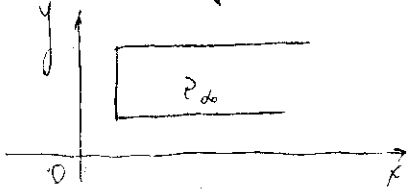
$$\frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow[y \to y_0]{} \underbrace{\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y} dx}_{\tilde{I}'(y_0)} + f(b(y_0), y_0)\, b'(y_0) - f(a(y_0), y_0)\, a'(y_0)$$

т.к. $\mathcal{F}$ y_0 - $\forall$ $\Rightarrow$ $\exists\, I'(y)$ на всем отр. $[c,d]$ и выполн. (5)

Пример 2. $\left(\int\limits_{\sin y}^{e^y} \ln(x^2+y^2)\,dx\right)' = \int\limits_{\sin y}^{e^y} \frac{2y}{x^2+y^2}\,dx +$
$y \neq 0$
$+ e^y \ln(e^{2y}+y^2) - \cos y \ln(\sin^2 y + y^2) = \dots$

§2. Несобств. интегралы завис. от параметра

$P_\infty = \{(x,y):\ x \in [a,+\infty),\ y \in [c,d]\}$



$\exists\, f(x,y)$ опр. на P_∞

$\forall y \in [c,d]$ инт. по x (несобств. смысле) на $[a,\infty)$

$y \to \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$

$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx \quad (1)$ — несобст. ин-л I-го рода завис. от параметра

Ин-л (1) назыв. сходящимся:

для $\forall y \in [c,d]$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$: $\forall R \geq A$

$\left|\int\limits_R^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$. $\quad \boxed{A = A(\varepsilon, y)}$

п.1. Критерий Коши равном. сх-ти несобств. ИЗП.

Опр. Ин-л (1) назыв. равном. сх-ся на $[c,d]$, если он сх-ся в кажд. точке $y \in [c,d]$ и для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$: $\forall R \geq A$, $\forall y \in [c,d]$

$\left|\int\limits_R^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \quad (2) \qquad \boxed{A = A(\varepsilon)}$

Теор. 6 (критерий Коши)

Для того, чтобы несобств. ин-л (1) сходился равномерно на $[c,d]$ $\Leftrightarrow$ чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$: $\forall R', R'' \geq A$,

$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \quad (3)$

□ $(\Rightarrow)$ $\exists$ (1) $\rightrightarrows$ (т.е. верно (2)) д-м (3)

(2) $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$: $\forall R \geq A$: $\left|\int\limits_R^\infty f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall y \in [c,d]$

$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx\right| = \left|\int\limits_{R'}^{\infty} f\,dx - \int\limits_{R''}^{\infty} f\,dx\right| \leq$

$\leq \left|\int\limits_{R'}^{\infty} f\,dx\right| + \left|\int\limits_{R''}^{\infty} f\,dx\right| \underset{R', R'' \geq A}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $\forall y \in [c,d]$

$\Rightarrow$ (3) верно.

$(\Leftarrow)$ (3) $\Rightarrow$ (2) — д-ть.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$ $\forall R', R'' \geq A$ $\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall y \in [c,d]$.

Фикс. $\forall y \in [c,d]$ $\Rightarrow$ по крит. Коши для НИ (без параметра) ин-л (1) сх-ся для данного y $\Rightarrow$ $I(y)$ сх-ся для всех отр. $[c,d]$. $\forall y$ - $\forall$

т.е. R'' - $\forall$, но R'' устремим $\to \infty$

Предел в лев. части ∃ ⇒

$\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ для $\forall y \in [c,d] \Rightarrow (1)$

■

п. 2 Признаки равномерной сходимости

Теор. 6 (Признак Вейерштрасса)

Рассм. ин-л (1). Пусть $f(x,y)$ определена на P_∞ и для $\forall y \in [c,d]$ ин-ма по x по к отрезку вида $[a,R]$.

∃ $g(x) \ge 0$, определена на $[a,\infty)$ и $\int_a^\infty g(x)\,dx$ сходится,

чтобы $|f(x,y)| \le g(x)$ для $\forall (x,y) \in P_\infty$, то $(1) \rightrightarrows$ на $[c,d]$.

□ $\forall R', R'' > a$, $R' < R''$

$\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx\right| \le \int_{R'}^{R''} |f(x,y)|\,dx \le \int_{R'}^{R''} g(x)\,dx < \varepsilon,$

для $\forall \varepsilon > 0$ ∃ $A > a$: $\forall R', R'' \ge A$, $\forall y \in [c,d]$ верно

$\Rightarrow$ по т. 5 $(1) \rightrightarrows$ на $[c,d]$.

■

Параллельно д-но, что $\int |f|\,dx \rightrightarrows$.

Теор. 7 (признак Дирихле-Абеля)

Δ $\int_a^\infty f(x,y)\,g(x)\,dx$ (4)

∃ $f(x,y)$ определена на P_∞ и для $\forall y \in [c,d]$ ин-ма по x на $[a,R]$.

и ∃ $M = const > 0$: $\left|\int_a^x f(t,y)\,dt\right| < M$ $\forall (x,y) \in P_\infty$.

$g(x)$ определена на $[a,\infty)$ и монотонно не возрастая $\to 0$ при $x \to +\infty$.

Тогда $(4) \rightrightarrows$ на $[c,d]$.

□ $\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,g(x)\,dx\right| < \varepsilon$ — д-ть

$\forall R', R'' > a$; $R' < R''$

$\forall \alpha, \beta \ge a$ $\alpha < \beta$: $\left|\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_a^\beta f\,dx - \int_a^\alpha f\,dx\right| \le$
$\le \left|\int_a^\beta f\,dx\right| + \left|\int_a^\alpha f\,dx\right| \le 2M$ для $\forall y \in [c,d]$.

$\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,g(x)\,dx\right| \underset{\substack{\text{Бонне} \\ \exists \xi \in [R',R'']}}{\overset{\text{по ф-ле}}{=}} \left| g(R') \int_{R'}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(R'') \int_{\xi}^{R''} f(x,y)\,dx \right| \le \{ g(x) \ge 0, \text{ т.к. } g(x) \searrow 0 \} \le$

$\le g(R') \left|\int_{R'}^{\xi} f\,dx\right| + g(R'') \left|\int_{\xi}^{R''} f\,dx\right| \le$

$\le 2M\,(g(R') + g(R'')) \le 4M\,g(R') < \varepsilon$ для $\forall y \in [c,d]$.

$g(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ ∃ $A > a$: $\forall x \ge A$ $g(x) < \frac{\varepsilon}{4M}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ ∃ $A > a$: $\forall R', R'' \ge A$ верно

$\left|\int_{R_1}^{R''} fg\,dx\right| < \varepsilon \ \forall y \Rightarrow$ {т.б} $\Rightarrow (1) \rightrightarrows$

■

Замечания

1) $g(x)$ монотонно $\to 0$ при $x\to\infty$ — теорема 7 также верна.

2) $g = g(x,y)$ опред. на P_∞ монот. $\forall y \in [c,d]$ $g(x,y) \rightrightarrows 0$ по y
(тогда $\xi = \xi(y)$)

Теор. 8 (признак Дини)

Рассм. ин-л (1) на $[c,d]$.

Пусть ин-л (1) сх-ся на $[c,d]$, $f(x,y)\ge 0$ и $f(x,y)$ непр. в P_∞ и $I(y)$ — непрерывна на $[c,d]$.

$\Rightarrow$ инт. (1) сх. равном. на $[c,d]$

□ Рассм. Ф.П. $I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx$.

$f(x,y)$ на $P = [a,a+n]\times[c,d]$ для $\forall$ фикс (n).

f непр. на P. Ин-л — собств. $\Rightarrow_{т.1}$ $I_n(y)$ непр. по y на $[c,d]$.

$f\ge 0 \Rightarrow \{I_n(y)\}$ монот. неубыв. для $\forall y$

$I_n(y)\to I(y)$ при $n\to\infty$ $\underset{\text{пр-к Дини для ФП}}{\Rightarrow}$ $I_n(y) \rightrightarrows I(y)$ на $[c,d]$.

Значит для $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$, $\forall n\ge N$ $|\underbrace{I(y)-I_n(y)}_{\int_{a+n}^{\infty} f(x,y)dx}| < \varepsilon$ для $\forall y\in[c,d]$.

$A = a+N \Rightarrow \forall R\ge A$ $\left|\int_R^{\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$, $\forall y\in[c,d]$ $\underset{\text{по опр.}}{\Rightarrow}$

(1) $\rightrightarrows$ на $[c,d]$

■

п.3. Функциональные свойства несобств. ин. в ЗП

Теор. 9 Пусть ин-л (1) сх-ся равномерно на $[c,d]$, $f(x,y)$ непрерывна в P_∞ $\Rightarrow$

$I(y)$ непрерывна на $[c,d]$, её можно инт-ть на $[c,d]$ и справедлива ф-ла

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dx \quad (5)$$

□ $\angle$ ФП $I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx \rightrightarrows I(y)$ на $[c,d]$, т.к. $\forall \varepsilon>0$ $\exists A>a$: для $\forall R\ge A$ $\left|\int_R^{\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ для $\forall y\in[c,d]$.

$a+n\ge A$, $n\ge A-a$, $\exists N = [A-a]+1 \Rightarrow \forall n\ge N$

$\underbrace{\left|\int_{a+n}^{\infty} f(x,y)\,dx\right|}_{|I(y)-I_n(y)|} < \varepsilon$ для $\forall y\in[c,d]$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow I_n(y)\rightrightarrows I(y)$ на $[c,d]$

$I_n(y) \rightrightarrows I(y)$ на $[c,d]$. По теор. 1 $\forall n\in N$ $I_n(y)$ непр. на $[c,d]$, т.к. $f(x,y)$ непр. на $P = [a,a+n]\times[c,d]$ при фикс. (n)

$\underset{\text{по теор. для ФП}}{\Rightarrow}$ $I(y)$ — непр. на $[c,d]$

Д-ть: $\int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy$ — сх. и $= \int_c^d I(y)\,dy$, т.е.

для $\forall \varepsilon>0$ $\exists A>a$: $\forall R\ge A$ $\left|\int_c^d I(y)\,dy - \int_a^R dx \int_c^d f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon$

т.к. f непр. на $P = [a,R]\times[c,d]$ и для $R>a$, то по т. 1 $\int_a^R dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^R f(x,y)dx$;

по усл. (1) сх-ся равномерно на $[c,d]$ ⇒ для $\forall\varepsilon>0\ \exists A>a\ \forall R\geq A$ $\left|\int_R^\infty f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$ (6)

$$\left|\int_c^d I(y)dy - \int_a^R dx\int_c^d f(x,y)dy\right| = \left|\int_c^d dy\int_a^\infty f(x,y)dx - \int_c^d dy\int_a^R f(x,y)dx\right| =$$

$$= \left|\int_c^d dy\left(\int_a^\infty f dx - \int_a^R f dx\right)\right| = \left|\int_c^d dy\int_R^\infty f(x,y)dx\right| \leq$$

$$\leq \int_c^d \left|\int_R^\infty f(x,y)dx\right| dy \underset{(6)}{\overset{R\geq A}{<}} \frac{\varepsilon}{d-c}\int_c^d 1\,dy = \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon$$, ч.т.д.

■

Следствие. При усл-и т. Дини справедлива ф-ла (5) ($f\geq 0$, f-непр., $I(y)$-непр.)

Теор. 10. $\int f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определены и непр. на P_∞, $\int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ - сх. равн. на $[c,d]$ ⇒

инт. (1) сх. равн. на $[c,d]$, ф-я $I(y)$ - дифферен. и $I'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ (7)

□ $I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)dx$

$\{I_n(y)\}$ п. для $y\in[c,d]$.

$f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непр. на $P = [a,a+n]\times[c,d]$ при фикс. n ⇒ {т. 2} ⇒ $I_n(y)$ дифферен. и $I_n'(y) = \int_a^{a+n}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$

⇒ {н. Коши - сх. выше} ⇒ $I_n'(y) \rightrightarrows \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}dx$

⇒ {по т. о дифферен. ФП} ⇒

⇒ $I_n(y) \rightrightarrows I(y)$ на $[c,d]$ (⇔ (1) $\rightrightarrows$ на $[c,d]$) ф-я $I(y)$ дифферен-ма и $I'(y) = \lim_{n\to\infty} I_n'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$, ч.т.д.

■

[Лекция 3] 1.03.06

Теор. 11 (т. о несобств. интегр-и НИ)

$f(x,y)\geq 0$ и непр. на $x\geq a$, $y\geq c$. Пусть функции $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ и $K(x) = \int_c^\infty f(x,y)dy$ непрерывны при $y\geq c$, $x\geq a$.

и пусть хотя бы один из НИ $\int_c^\infty I(y)dy$ или $\int_a^\infty K(x)dx$ сходится ⇒ сходится и 2-й из этих интегралов и они равны между собой:

$$\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x,y)dy$$

Замечание: усл. $f\geq 0$ можно опустить, однако д-во становится сложнее

□ Пусть сх. $\int_c^\infty I(y)dy$.
Д-м сх-ть $\int_a^\infty K(x)dx$ и их рав-во.
Д-м, что для $\forall \varepsilon>0\ \exists A>a:\ \forall R\geq A$ верно
$$\left|\int_c^\infty I(y)dy - \int_a^R K(x)dx\right| < \varepsilon$$
$$\int_a^R K(x)dx = \int_a^R dx \int_c^\infty f(x,y)dy$$
Имеем ф-ю f в полосе $P_\infty = [a,R]\times[c,\infty)$
Если $\int_c^\infty f(x,y)dy \rightrightarrows$, f-непр., то можно прим-ть т.9.
f-непр. (по усл-ю) в т.ч. и в P_∞.
($\rightrightarrows$) $\Leftarrow$ у признака Дини ($f\geq 0$, f-непр. $x\in[a,R]$ фикс. $\forall R>a$
$K(x)$ - непр-ф-я $\Rightarrow \int_c^\infty f dy$ - сх. равн. на $[a,R]\ni x$)
$$\underset{т.9}{\Rightarrow} \int_a^R K(x)dx = \int_c^\infty dy \int_a^R f(x,y)dx$$
$$\left|\int_c^\infty I(y)dy - \int_a^R K(x)dx\right| = \left|\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x,y)dx - \int_c^\infty dy\int_a^R f(x,y)dx\right| = \left|\int_c^\infty dy\int_R^\infty f(x,y)dx\right| =$$
$$= \{f\geq 0\} = \int_c^\infty dy \underbrace{\int_R^\infty f(x,y)dx}_{\text{сх.} \rightrightarrows \text{ по пр. Дини}} = \{\text{фикс. } \forall R_1>c\} =$$
$$= \int_c^{R_1} dy \int_R^\infty f dx + \int_{R_1}^\infty dy \int_R^\infty f dx = J_1 + J_2.$$

Оценим J_2. По усл-ю $\int_c^\infty I(y)dy$ - сх-ся.
$\forall \varepsilon>0\ \exists R_1>c:\quad 0\leq \int_{R_1}^\infty I(y)dy < \frac{\varepsilon}{2}$
$$\left(\int_{R_1}^\infty dy \int_a^\infty f dx\right)_{\text{фикс}}$$
$$0\leq J_2 = \int_{R_1}^\infty dy \int_R^\infty f dx \underset{\forall R>a}{\leq} \int_{R_1}^\infty dy \int_a^\infty f dx = \int_{R_1}^\infty I(y)dy < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall R>a\quad \boxed{0\leq J_2 < \frac{\varepsilon}{2}}$$
Оценим J_1: $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сх-ся равном. на отр. $y\in[c,R_1]$
$P_\infty = [a,\infty)\times[c,R_1]$
$f\geq 0$, непр. $I(y)$ непр. ф-я $\underset{пр. Дини}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow \exists A>a:\ \forall R\geq A,\ \forall y\in[c,R_1]\quad 0\leq \int_R^\infty f(x,y)dx <$
$< \frac{\varepsilon}{2(R_1-c)}$
$$0\leq J_1 = \int_c^{R_1} dy \int_R^\infty f(x,y)dx \underset{\substack{R\text{-фикс}\\ R\geq A(\varepsilon)}}{<} \frac{\varepsilon}{2(R_1-c)}\int_c^{R_1} 1\,dy = \frac{\varepsilon}{2}.$$
$\Rightarrow J_1+J_2 < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\quad \forall R\geq A(\varepsilon)$
Теорема д-на.

■

п. 4. Несобственные ИЗП 2-го рода.
$\triangleleft$ $f(x,y)$ в пр-ке $\hat{P} = \{(x,y)\mid x\in[a,b),\ y\in[c,d]\}$

Пусть $\forall y\in[c,d]$ $f(x,y)$ инт. (в несобств. смысле) на $[a,b)$, т.е. $\forall y\in[c,d] \to \int_a^b f(x,y)\,dx$

$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ (1) — несобств. инт. 2-го рода, завис. от параметра y.

Опр. Ин-л (1) назыв. сх-ся, если $\forall\varepsilon>0$ $\forall y\in[c,d]$ $\exists\delta(y,\varepsilon)>0$: $\forall\alpha\in(0,\delta)$

$$\left|\int_{b-\alpha}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Опр. Инт-л (1) назыв. равномерно сх-ся на $[c,d]$, если он сх-ся в $\forall y\in[c,d]$ и для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)>0$: $\forall\alpha\in(0,\delta)$

$$\left|\int_{b-\alpha}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \text{ для } \forall y\in[c,d]$$

Сведём (1) к инт-лу 1-го рода

Замена $t=\frac{1}{b-x}$, $b-x=\frac{1}{t}$, $x=b-\frac{1}{t}$,

$dx=\frac{dt}{t^2}$

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_{\frac{1}{b-a}>0}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t},y\right)\frac{dt}{t^2}$$

$$\int_{b-\alpha}^{b} f(x,y)\,dx=\int_{\frac{1}{\alpha}=R}^{\infty} f\left(b-\frac{1}{t},y\right)\frac{dt}{t^2}$$

$\frac{1}{\delta}=A$

$\Rightarrow$ теоремы 5^*–11^* справедливы и для инт. (1).

Приведём одну из них как образец.

Теор. 9^* Пусть $f(x,y)$ непр. в пр-ке $P=[a,b)\times[c,d]$ и инт-л (1) $\rightrightarrows$ на $[c,d]$. $\Rightarrow$

1) $I(y)$ непр. и 2) верно $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$

§3. Вычисление ин-ла Дирихле

$$D(\alpha,\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\cdot\cos\beta x}{x}\,dx,\quad \alpha,\beta>0$$

$$K(\alpha)=\int_0^\infty\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx,\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

$\alpha x=y \Rightarrow I_0=K(\alpha)=\int_0^\infty\frac{\sin y}{y}\,dy$

$$* \quad J(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \alpha\geq 0$$

Сделаем следующее:

1. $J(\alpha)$ - непр. на $\alpha\geq0 \Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to+0}J(\alpha)=J(0)=I_0$.
2. Вычисл. $J(\alpha)$ при $\alpha>0$.

(I) Д-во: $J(\alpha)$ непр. ф-я на $\alpha\geq0$.

$$* \quad f(x,\alpha)=\begin{cases}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

f - непр. на $x\geq0$, $\alpha\geq0$.

$\int_0^\infty f(x,\alpha)\,dx$ - равн. сх. $\alpha\geq0$.

Ин сх. по пр. Д-А для $\forall\alpha\geq0$.

$$\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx=\{\text{по частям}\}=-\frac{e^{-\alpha x}}{1+\alpha^2}(\cos x+\alpha\sin x)+C$$

$$|\varphi(\alpha,x)|\leq\frac{|\cos x+\alpha\sin x|}{1+\alpha^2}=\frac{\sqrt{1+\alpha^2}\,|\sin(x+\varphi)|}{1+\alpha^2}\leq\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{1+\alpha^2}\leq1$$

для $\forall\alpha$, $x\geq0$.

$\forall R>0$ $\left|\int\limits_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\frac{\varphi(\alpha,x)}{x}\Big|_{x=R}^{\infty} + \int\limits_R^\infty \frac{\varphi(\alpha,x)}{x^2}dx\right| = \left|\frac{\varphi(\alpha,R)}{R} + \int\limits_R^\infty \frac{\varphi(\alpha,x)}{x}dx\right| \le$

$\le \frac{1}{R} + \int\limits_R^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{R}+\frac{1}{R} = \frac{2}{R} < \varepsilon$.

$R > \frac{2}{\varepsilon}$ фикс $\forall\varepsilon>0$, $\exists A = \frac{2}{\varepsilon}>0 : \forall R>A$

$\left|\int\limits_R^\infty f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon$ $\forall\alpha\ge0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow J(\alpha)$ сх. равн. на $\alpha\ge0$

$\underset{\text{т.3}}{\Rightarrow}$ $J(\alpha)$ — непр. ф-я на $\alpha\ge0$.

$\Rightarrow J(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to0+0]{} J(0) = J_0$.

(II) Посчитаем $J(\alpha)$ при $\alpha>0$

$J(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ $\quad J'(\alpha) - ?$

Непр. По опред.: $f(x,\alpha)$ $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ - непр. в $P_\infty = [0,\infty)\times[c,d]$

$J(\alpha)$ - сх. $\forall\alpha$ - выпол. $\int\limits_0^\infty\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ - равн.

сх. $\alpha\in[c,d] \Rightarrow \exists J'(\alpha) = \int\limits_0^\infty\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$

f - непр. $x\ge0$, $\alpha\ge0$. ; $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha} = -e^{-\alpha x}\sin x$

непр. $\alpha, x\ge0$.

$J(\alpha)$ - сх. $\forall\alpha>0$ $\quad \int\frac{\partial f}{\partial\alpha} \rightrightarrows ?$

$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x dx$ $\quad \alpha=0$ - расх. $\alpha>0$ - нет равном. сх-ти

фикс. $\forall\alpha_0>0$ $\exists[c,d]: 0<c<\alpha_0<d$ $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x dx$ на $\alpha\in[c,d]$

$P_\infty = [0,\infty)\times[c,d]$ (=) ?

$|e^{-\alpha x}\sin x| \underset{\substack{\alpha\in[c,d]\\x\ge0}}{\le} e^{-cx}$ $\quad \int\limits_0^\infty e^{-cx}dx$ сх-ся $\Rightarrow$

по пр-ку Вейерштрасса инт. сх-ся равномерно на $[c,d]$.

$\underset{\text{т.10}}{\Rightarrow} \exists J'(\alpha) = \int\limits_0^\infty\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в т. α_0 $\exists J'(\alpha_0) = \int\limits_0^\infty\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha_0)dx$

$\forall$ т. $\alpha_0 \Rightarrow$ для $\forall\alpha$ $\exists J'(\alpha) = \int\limits_0^\infty\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx =$

$= -\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x dx = -\varphi(\alpha,x)\Big|_{x=0}^{+\infty} = \varphi(\alpha,0) =$

$= \varphi(\alpha,0) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$

$J'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$ для $\forall\alpha>0$.

$J(\alpha) = -\int\frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\operatorname{arctg}\alpha + C$

$C - ?$ $\quad \alpha\to+\infty$ $J(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$

Док: $J(\alpha)\to0$ при $\alpha\to+\infty$

$|J(\alpha)| \le \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}dx = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha} \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow J(+\infty) = 0$

$C = J(\alpha) + \operatorname{arctg}\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$.

$J(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha$ для $\forall\alpha>0$.

$J_0 = J(0) = \lim\limits_{\alpha\to0+0} J(\alpha) = \frac{\pi}{2}$

$\int\limits_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

02.03.22. [Лекция 4]

II) Вычисление интеграла Дирихле

$K(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha > 0: \ \alpha x = y \ \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$.

$\alpha < 0 \quad \alpha x = -y$

$y > 0 \quad x > 0$

$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = -\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = -\frac{\pi}{2}$.

$K(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0 \end{cases}$ — разрывный множитель Дирихле.

$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t}\,dt$

$|x| = x \operatorname{sgn} x = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t}\,dt$

$D(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\,dx =$

$\alpha, \beta > 0$

$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\,dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\,dx =$

$\alpha + \beta > 0$

$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > \beta \\ 0, & \alpha = \beta \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < \beta \end{cases} = \begin{cases} 1, & \alpha > \beta \\ \frac{1}{2}, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha < \beta \end{cases}$

§4. Интегралы Эйлера

п.1. Гамма-ф-я Эйлера

$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\,dx \quad (1)$ — эйлеров инт-л 2-го рода (или Г-ф-я Эйлера) 1729

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \ n \in \mathbb{N}$. При $n \notin \mathbb{Z}$?

(1) $D(\Gamma)$ — ?

$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\,dx = \int_0^1 e^{-x} x^{p-1}\,dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\,dx = J_1 + J_2$

$J_1: \ e^{-x} x^{p-1} \le x^{p-1}, \ x \in (0,1)$

$\int_0^1 x^{p-1}\,dx$ сх. при $p > 0$

$e^{-x} x^{p-1} > e^{-1} x^{p-1}$ при $p \le 0$ $\int_0^1 x^{p-1}\,dx$ — расх.

$J_1: \ p > 0$ — сх.; $p \le 0$ — расх.

$J_2: \ \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\,dx$

Частный признак сх-ти НИ: если $\exists \lim_{x\to+\infty} |f(x)| x^{\tau} = c$ и $\tau > 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сх. абс.

$\exists \lim |f(x)| x^{\tau} = c > 0 \quad \tau \le 1 \quad \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ — расх.

$(e^{-x} x^{p}) x^{\tau} \xrightarrow[x\to+\infty]{\tau > 1} 0 \Rightarrow J_2$ — сх. $\forall p \in \mathbb{R}$.

Значит (1) сх-ся при $p > 0$ и расх. при $p \le 0$.

$\Rightarrow D(\Gamma(p)) = \{p : p > 0\}$

(2) Непрерывность т. 9, 9*

$f(x, p) = e^{-x} x^{p-1}$ — непр. на $p > 0, \ x > 0$.

фикс. $\forall p_0>0$. $\exists [c,d]: 0<c<p_0<d$

$\Rightarrow \Gamma(p)$ на $p\in[c,d]$

пр. Вейерштрасса

$$|f(x,p)| = |e^{-x}x^{p-1}| \underset{p\in[c,d]}{\le} e^{-x}(x^{c-1}+x^{d-1})$$

$\int\limits_0^{\infty} e^{-x}(x^{c-1}+x^{d-1})dx$ сх. по частям! пр-ку ~~сравнения~~ сх-ти

$\Rightarrow (1)$ сх. равном. на $[c,d] \overset{(2)}{\underset{т. 9,9^*}{\Rightarrow}} \Gamma(p)$ непр. на $[c,d]$

$\Rightarrow \Gamma(p)$ непр. в т. p_0 $\forall$ т. $p_0 \Rightarrow \Gamma(p)$ непр. на $D(\Gamma(p))$ т.е. $p>0$.

3) Дифференцируемость т. 10, 10*

$\{ f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в $P_{\infty}(B)$; $\int f(x,y)dx$ – сх $\forall y\in[c,d]$; $\int\frac{\partial f}{\partial y}dx \rightrightarrows$ на $[c,d]$ $\Rightarrow$ инт. дифференц. ф-я и $J' = \int\frac{\partial f}{\partial y}dx$ $\}$

$f(x,p) = e^{-x}x^{p-1}$ – непр. на $x>0$, $p>0$

$\frac{\partial f(x,p)}{\partial p} = e^{-x}x^{p-1}\ln x$ – непр. на $x>0, p>0$.

$\int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln x dx \rightrightarrows$ $\forall p=0$ $\frac{\ln x}{x}$ $\not\rightrightarrows$ на $p\ge 0$

фикс. $\forall$ т. $p_0>0$ $\exists [c,d]: 0<c<p_0<d<\infty$

$\int\limits_0 e^{-x}x^{p-1}\ln x dx$ на $[c,d]$ $\ni p$

пр. Вейерштрасса. $|e^{-x}x^{p-1}\ln x| \le e^{-x}|\ln x|(x^{c-1}+x^{d-1})$

$\int\limits_0^{\infty} e^{-x}|\ln x|(x^{c-1}+x^{d-1})dx$ – сх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ инт. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\partial f}{\partial p}dx \rightrightarrows$ на $[c,d]$

$\overset{\Rightarrow}{т. 10, 10^*}$ $\Gamma(p)$ дифферен. на $[c,d] \Rightarrow$ в т. p_0;

$\forall p_0 \Rightarrow$ в $\forall$ т. $p>0 \Rightarrow \Gamma(p)$ дифферен. на $D(\Gamma)$ и

$\Gamma'(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln x dx$. $\overline{т. 9, 9^*}$ непр. ф-я

Аналогично $\Gamma''(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln^2 x dx$,

$\Gamma^{(l)}(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln^l x dx$, $l\in\mathbb{N}_0$

$\Gamma^{(l)}(p)$ непр. на $p>0$ $\Rightarrow \Gamma(p)\in C^{\infty}(0,\infty)$

4) Формула приведения

$$\Gamma(p+1) \underset{p>0}{=} \int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^p dx = -e^{-x}x^p\Big|_{x=0}^{+\infty} + p\int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx = p\Gamma(p)$$

$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ (2) ф-ла приведения

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z\in\mathbb{C}$, $z\ne 0,-1,-2,\dots$ $\operatorname{Re} z>0 \Rightarrow \Gamma(p) = \int\dots$

В (2) $p>n-1$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p(p-1)\Gamma(p-1) = \dots = p(p-1)\dots(p-n+1)\Gamma(p-n+1) \quad (3)$$

$\forall p \to p-n+1 \in (0,1]$. Составлены таблицы для $\Gamma(p)$, $p\in(0,1)$

$p = n \in \mathbb{N}$

$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 1\,\Gamma(1)$

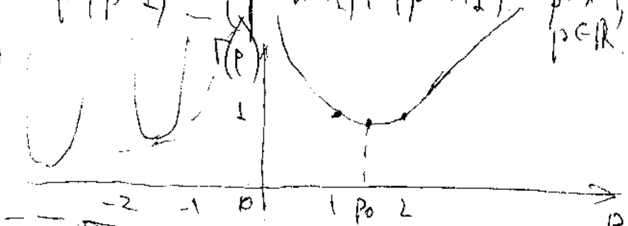
$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$

$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(3) — обобщение $n!$ на нецелые n.

$p! = \Gamma(p+1) = p(p-1)\ldots(p-n+1)\,\Gamma(p-n+1) \quad \forall p > n-1,\ p \in \mathbb{R}$

5) график $\Gamma(p)$



$\Gamma''(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \ln^2 x\,dx > 0 \quad \forall p > 0$ $\Gamma'(p)$ — один нуль

$\Gamma(2) = 1.\ \Gamma(1) = 1$

$p_0 \approx 1{,}46 \quad \Gamma(p_0) \approx 0{,}88$

Из (3) $\Rightarrow \Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to \infty$

$\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi p}\left(\frac{p}{e}\right)^p (1 + \bar{o}(1))$ для $\forall p >> 1.$

Из (2) $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \underset{p\to 0}{\sim} \frac{1}{p}.$

$\frac{\Gamma(p)}{\frac{1}{p}} = p\Gamma(p) \underset{p\to 0}{\to} 1 \quad \Gamma(p) \sim \frac{1}{p},\ p \to 0.$

$\Gamma(p)$ опред. на $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$

п.2. B-ф-я Эйлера.

$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ (1) — Эйлеров инт-л 1-го рода (B-ф-я Эйлера) 1772 г.

1) $D(B)$

$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = J_1 + J_2.$

$J_1 = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

$(1-x)^{q-1}$ — непр. ф-я на $[0, \frac{1}{2}]$.

$\exists C_1, C_2 > 0: C_1 < (1-x)^{q-1} < C_2 \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}].$

$\int_0^{1/2} x^{p-1}dx < \infty \quad \forall p > 0.$

$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \geq C_1 x^{p-1} \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2}] \Rightarrow$

$\Rightarrow p \leq 0$ J_1 — расх.; J_1 — сх $\forall p > 0,\ \forall q \in \mathbb{R}.$

$J_2 = \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

x^{p-1} — непр. на $[\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow \exists C_1, C_2 > 0:$

$0 < C_1 \leq x^{p-1} \leq C_2 \quad \forall x \in [\frac{1}{2}, 1].$

$C_1(1-x)^{q-1} \leq x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq C_2(1-x)^{q-1}$

$\int_{1/2}^1 (1-x)^{q-1}dx$ — сх. $q>0$, расх. $q \leq 0$.

J_2 — сх. $\forall q > 0,\ \forall p \in \mathbb{R}$

расх. $\forall q \leq 0,\ \forall p \in \mathbb{R}$

$D(B) = \{(p,q) \mid p > 0, q > 0\}$

2) симметричность

$B(p,q) = B(q,p) \quad \forall p,q>0.$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = -\int_1^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt = B(q,p)$$

3) Формулы приведения

$B(p,q+1)$ для $\forall p,q>0$

$$B(p,q+1) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \frac{x^p}{p}(1-x)^q \Big|_{x=0}^{1} + \frac{q}{p}\int_0^1 x^p (1-x)^{q-1}dx =$$

$$= \{ x^p = x^{p-1} - x^{p-1} + x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x) \} =$$

$$= \frac{q}{p}\underbrace{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{B(p,q)} - \frac{q}{p}\underbrace{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx}_{B(p,q+1)} =$$

$$\Rightarrow B(p,q+1) = \frac{q}{p}\cdot\frac{p}{p+q}B(p,q) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$$

$$\frac{q}{p}B(p+1,q) = \cancel{\frac{p}{p+q}B(p,q)} \quad B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$$

15.03.06 [Лекция 5]

п.3. Ф-ла связывающая Г и B - ф-и Эйлера.

$B(p,q) \qquad (0,1) \to (0,+\infty)$

$x = \frac{1}{1+t} \qquad t = \frac{1-x}{x}$

$$1-x = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}; \quad dx = -\frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$B(p,q) = -\int_{+\infty}^0 \ldots dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{p-1}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{q-1}\frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = \{B(p,q) = B(q,p)\} =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt, \quad \forall p,q>0$$

$\Gamma(p)$: $x = ty$, $t>0$ - параметр, $dx = t\,dy$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx = t\int_0^{+\infty} e^{-ty}(ty)^{p-1}dy =$$

$$= t^p\int_0^{+\infty} e^{-ty}y^{p-1}dy \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{+\infty} e^{-ty}y^{p-1}dy \quad \forall p>0, t>0 \qquad (1)$$

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} e^{-(1+t)y}y^{p+q-1}dy \qquad (2) \qquad [\cdot t^{p-1}]\int_0^{+\infty} dt$$

$$\int_0^{+\infty}\Gamma(p+q)\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = \Gamma(p+q)B(p,q) =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{p-1}dt\int_0^{+\infty} e^{-(1+t)y}y^{p+q-1}dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}dy\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-ty}dt \overset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\frac{\Gamma(p)}{y^p}dy = \Gamma(p)\cdot\Gamma(q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} \qquad (3)$$

разберемся с вопросом в (*)

$\forall p,q \geq 1$. $f(t,y) = t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y}$ непр. на $t,y \geq 0$ для $\forall p,q \geq 1$

$$\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt = y^{p+q-1} e^{-y} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-ty}\,dt = \quad (1)$$

$$= y^{p+q-1} e^{-y} \frac{\Gamma(p)}{y^p} \text{ — непр. } \forall p,q \geq 1,\ y \geq 0$$

$$\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dy = t^{p-1} \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(t+1)y}\,dy \quad (2)$$

$$= \frac{t^{p-1}\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} \text{ — непр. на } t \geq 0 \ \forall p,q \geq 1$$

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{\infty} f(t,y)\,dt = \Gamma(p)\Gamma(q) \text{ сход } \forall p,q > 0.$$

все усл-я т 11 выполнены $\Rightarrow$? в (*)
можем убрать для $\forall p,q \geq 1$

$\exists\, p,q > 0$ $p+1, q+1 > 1 \Rightarrow \{(3)\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B(p+1,q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{p\Gamma(p)\,q\Gamma(q)}{(p+q)(p+q-1)\Gamma(p+q)}$$

$$\frac{p}{p+q+1},\quad B(p,q+1) = \frac{p}{p+q+1}\,\frac{q}{p+q}\,B(p,q) \Rightarrow$$

и в этом сл-е (3) верна.

$\Rightarrow B(p,q)$ — непр. и беск. непр. дифф. на p,q: $\forall p,q > 0$

Упр. $B(p,q_0) = f(p)$, $q_0 = const$.
Построить график

§5 Асимптотика $\Gamma(\lambda+1)$ при $\lambda \to +\infty$. (ф-ла Стирлинга) — ф-ла Стирлинга

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\lambda}\,dt \quad (1)$$

Лемма $\exists\, \varphi$-я $f(t)$ опред. и инт. на нек. отр. $[-a,a]$, $a > 0$ и для нек. $n \in \mathbb{N}$ $f(t) =$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} c_k t^k + O(t^{2n}) \text{ на } [-a,a] \quad (2)$$

$\Rightarrow \exists\, \Lambda = \Lambda(a,n) > 0$: $\forall \lambda > \Lambda$

$$\int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} f(t)\,dt = \sum_{l=0}^{n-1} c_{2l} \frac{\Gamma(l+\frac12)}{\lambda^{l+\frac12}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}\right) \quad (3)$$

$\square$ подставим (2) в лев. часть (3)

$$\underbrace{\int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} t^{2l-1}\,dt}_{\text{нечетн}} = 0,\quad l = 1,2,\dots$$

$$\int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} t^{2l}\,dt = 2\int_0^a t^{2l} e^{-\lambda t^2}\,dt =$$
$l = 0,1,\dots,n-1$

$$= 2\int_0^{+\infty} t^{2l} e^{-\lambda t^2}\,dt - 2\int_a^{+\infty} t^{2l} e^{-\lambda t^2}\,dt = J_1 - J_2$$

$$J_1 = 2\int_0^{+\infty} t^{2l} e^{-\lambda t^2}\,dt = 2\cdot\frac12 \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{\lambda}}\right)^{2l} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{\lambda x}} =$$

$\{x = \lambda t^2$, $t_{\geq 0} = \sqrt{\frac{x}{\lambda}}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{\lambda x}}\}$

$$= \frac{1}{\lambda^{l+\frac12}} \int_0^{+\infty} x^{l-\frac12} e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(l+\frac12)}{\lambda^{l+\frac12}}$$

$$J_2 = 2\int_a^{+\infty} t^{2l} e^{-\lambda t^2}\,dt$$
$a > 0$

$e^{-\lambda t^2 + t^2 - t^2} = e^{-(\lambda-1)t^2} e^{-t^2}$

∃ $\lambda>1 \Rightarrow \lambda-1>0$ и $e^{-(\lambda-1)t^2}e^{-t^2} \le e^{-(\lambda-1)a^2}e^{-t^2}$

$$I_2 \le 2e^{-(\lambda-1)a^2}\int_a^{+\infty} t^{2l}e^{-t^2}dt =$$

$$= e^{-\lambda a^2}e^{a^2}\underbrace{\int_0^{\infty} t^{2l}e^{-t^2}dt} = c\, e^{-\lambda a^2}$$

$$\int_{-a}^{a} t^{2l}e^{-\lambda t^2}dt = \frac{\Gamma(l+\frac12)}{\lambda^{l+\frac12}} + O(e^{-\lambda a^2}),\ \lambda>1$$

$$\left|\int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} O(t^{2n})dt\right| \le \int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2}|O(t^{2n})|dt \le$$

$$\le \underset{const}{c_1}\int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2}t^{2n}dt = c_1\frac{\Gamma(n+\frac12)}{\lambda^{n+\frac12}} + \underset{\lambda>1}{O}(e^{-\lambda a^2})$$

$e^{-\lambda a^2}\to 0$ быстрее к степени λ ⇒

$\exists \Lambda>1:\ \forall\lambda>\Lambda\quad e^{-\lambda a^2} < \frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}$

$$c_1\frac{\Gamma(n+\frac12)}{\lambda^{n+\frac12}} + \sum_{l=0}^{n} O(e^{-\lambda a^2}) = O\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}\right)$$

■

Пусть в ф-ле (1) $t=\lambda(1+x),\ \lambda>0$.

$$dt=\lambda dx\qquad \Gamma(\lambda+1)=\int_{-1}^{+\infty}\lambda^\lambda(1+x)^\lambda e^{-\lambda(1+x)}\lambda dx =$$

$$=\lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\int_{-1}^{+\infty}(1+x)^\lambda e^{-\lambda x}dx = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\lambda\int_{-1}^{+\infty}e^{-\lambda(x-\ln(1+x))}dx$$

$$\Gamma(\lambda+1)=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\lambda\underbrace{\int_{-1}^{+\infty}e^{-\lambda(x-\ln(1+x))}dx}_{I_\lambda} =$$

$$=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\lambda I_\lambda \qquad (4)$$

$-\lambda g^2(x) \quad -\lambda g^2(x)\ -2\lambda\ -g^2(x)$

$g^2(x)=x-\ln(1+x),\ x>-1$

∃ $g(x)$ — монотонна.

$g(x)=\operatorname{sgn}x\sqrt{x-\ln(1+x)},\ x>-1$

Св-ва $g(x)$: определена на $x>-1$, монотонно строго возрастает, $g(0)=0$, бесконечно дифференцируема на $x>-1$

⇒ ф-я $y=g(x)$ имеет обратную ф-ю

$x\to+\infty\ g\to+\infty;\ x\to-1\ g\to-\infty$

$x=g^{-1}(y)$, опр. на $(-\infty,+\infty)$, принимает значения $(-1,+\infty)$, строго возрастающая

$g^{-1}(0)=0$, бесконечно дифференцир.

Монотонность $y=g(x)$

$$(g^2(x))' = (x-\ln(1+x))' = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}\ \begin{cases}<0, & x<0\\ >0, & x>0\end{cases}$$

⇒ $y=g^2(x)$ убыв. $x<0$ и возр. $x>0$ ⇒

⇒ $y=|g(x)|$ уб. $x<0$, возр. $x>0$.

Т.к. $g(x)<0$ при $x<0$ ⇒ $y=g(x)$ возр. при $x<0$ и возр. при $x>0$

$x\neq0$ ⇒ $g(x)$ — бесконеч. дифф. ф-я

В окр. т. $x=0$

$$g^2(x)=x-\ln(1+x)=x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\right)=$$

$$=x^2\left(\frac12-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\dots\right)=x^2h(x)$$

$h(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k+2}$, $R=1$ — радиус сх-ти

⇒ $h(x) \in C^\infty(-1,1)$ (по св-вам степ. ряда)

$h(0)=\frac12$, $h(x)>0$ $\forall x\in(-1,1)$

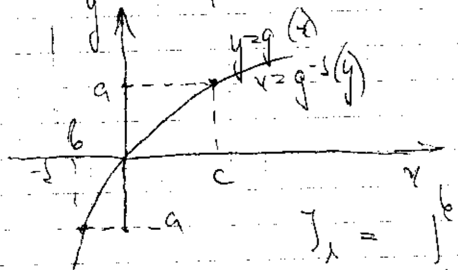
$g^2(x)>0$, $x\ne 0$

$g(x)=x\sqrt{h(x)}$ ⇒ $g(x)\in C^\infty(-1,1)$, т.к. h - беск. дифферп. и $h\ne 0$.

$J_\lambda = \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}dx$ фикс. $\forall a$, $y=a$.

$c=g^{-1}(a)$, $b=g^{-1}(-a)$

$g(b)=-a$; $g(c)=a$.



$J_\lambda = \int_{-1}^b + \int_b^c + \int_c^{+\infty} = J_1+J_2+J_3$

$J_1 = \int_{-1}^b e^{-\lambda g^2(x)}dx$

$-1\le x\le b$ $-\infty<g(x)\le -a$, $g^2(x)\ge a^2$

$e^{-\lambda g^2(x)}\le e^{-\lambda a^2}$ $J_1\le e^{-\lambda a^2}\int_{-1}^b dx = e^{-\lambda a^2}(b+1)=$

$= e^{-\lambda a^2}(1-|b|)$ ⇒

⇒ $J_1 = \underline{O}(e^{-\lambda a^2})$ $\forall\lambda>0$

22.03.05 [Лекция 6]

$J_3 = \int_c^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}dx$

$x\ge c$ $g(x)\ge a$ ⇒ $g^2(x)\ge a^2$,

$e^{-\lambda g^2(x)} = e^{-\lambda g^2(x)+g^2(x)-g^2(x)} =$

$= e^{-(\lambda-1)g^2(x)} e^{-g^2(x)} \underset{\lambda>1}{\le} e^{-(\lambda-1)a^2}e^{-g^2(x)}$

$J_3 \underset{\lambda>1}{\le} e^{-(\lambda-1)a^2}\int_c^\infty e^{-g^2(x)}dx = e^{-\lambda a^2}\underbrace{\left(e^{a^2}\int_c^\infty e^{-g^2(x)}dx\right)}_{=C_1=const}=$

$=C_1 e^{-\lambda a^2}$ ⇒ $J_3 = \underline{O}(e^{-\lambda a^2})$

$J_1+J_3 = \underline{O}(e^{-\lambda a^2})$ $\forall\lambda>1$

$J_2 = \int_b^c e^{-\lambda g^2(x)}dx = \int_{-a}^a e^{-\lambda t^2}\varphi'(t)dt \overset{(3)}{=}$

{ $t=g(x)$, $x=\varphi(t)$; $dx=\varphi'(t)dt$

$\varphi(t)$ — бесконечно дифферен-ма. Фикс. $\forall n\in\mathbb{N}$

$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}t^k + \underline{O}(t^{2n})$, $t\in[-a,a]$ }

$\overset{(3)}{=} \sum_{l=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(2l+1)}(0)}{(2l)!}\frac{\Gamma(l+\frac12)}{\lambda^{l+\frac12}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}\right)$

$\exists\Lambda_1$: $\forall\lambda>\max(\Lambda,\Lambda_1)$ $e^{-\lambda a^2}\le\frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}$

Получим:

$\Gamma(\lambda+1) = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\sqrt\lambda\left(\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(2l+1)}(0)}{(2l)!}\cdot\frac{\Gamma(l+\frac12)}{\lambda^l} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)\right)$

асимптотич. ф-ла для Γ ф-и при $\lambda\to+\infty$

по ф-ле Пуассона можно вычислить:

$\Gamma(\frac12)=\sqrt\pi$

$\Gamma(\frac32)=\frac12\cdot\Gamma(\frac12)=\frac{\sqrt\pi}{2}$, ...,

Положим $n=1$. Получим

$\Gamma(\lambda+1) = \left(\frac\lambda e\right)^\lambda\sqrt\lambda\left(\varphi'(0)\Gamma(\tfrac12)+\underline{O}(\tfrac1\lambda)\right)$

$\varphi'(0)$ - ?

$(g^2(x))' = 2gg'(x) = \frac{x}{1+x}$ ⇒ $g'(x) = \frac{x}{2g(x)(1+x)} =$

$= \frac{\varphi(t)}{2t(1+\varphi(t))}$

$\varphi'(t) = \frac{1}{g'(x)} \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{2t(1+\varphi(t))}{\varphi(t)} \Rightarrow$

$\varphi(t)\varphi'(t) = 2t(1+\varphi(t)) = 2t + 2t\varphi(t)$ — верно для $\forall t$ (в т.ч. $t=0$)

дифференцируем

$\varphi'^2(t) + \varphi(t)\varphi''(t) = 2 + 2\varphi(t) + 2t\varphi'(t)$

$t=0 \quad \varphi'^2(0) + 0 = 2 + 0 + 0 \rightarrow \varphi'(0) = \mp\sqrt{2}$

Аналогично $\varphi^{(3)}(0) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\varphi^{(4)}(0) = \frac{\sqrt{2}}{9}$ т.к. $\varphi(t)$ — возр.

$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}\left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right), \forall x > \Lambda > 1$

$+\frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{x^5}\right)$

$\Gamma(n+1) = n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \forall n \geq N$

Глава 9

Ряды Фурье

$E^n \quad \forall f(x) \in E^n \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k(x)$, $\{e_1, \dots, e_n\}$

$\exists E = E^\infty$ (для кн $\exists$ н/н в-в пр-ва)

$\exists f \in E$, $\{\psi_k\}$ - функ.

$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k = ?$

§1 Задача о наилучшем приближении элементов евклидова пространства

Опр 1. Линейное пространство E наз. евклидовым, если для $\forall f, g \in E$ по нек. закону ставится в соответ. вещ. число (f,g), наз. скалярн. произв-ем, так что:

1°. $(f,g) = (g,f)$, $\forall f, g \in E$

2°. $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\forall f,g,h \in E$

3°. $(f,f) > 0$, $\forall f \neq 0$ $\quad (f,f) = 0$, $f = 0$

Опр. 2 Линейное пр. во $\tilde{E}$ называется почти евклидовым, если в определении Опр. 1 с заменой акс. 3 на $\tilde{3}$:

$\tilde{3}^\circ$. $\forall f \in E \quad (f,f) \geq 0$

$\boxed{\text{Прим. 1}}$ Пр. во $L[a,b]$ всех интегр. (по Риману) на $[a,b]$ функций.

$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad (1)$

$\tilde{3}^\circ$. $(f,f) = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$ — вып. $\forall f \in L[a,b]$

3°. $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0 \not\Rightarrow f \neq 0 \Rightarrow$ не вып.

Пр-во — почти евклидово, но не евклидово

$\forall E$ — явл. почти всегда евкл, обратное верно не всегда

Утв. верно для $\tilde{E} \Rightarrow$ верно для E

Прим.2 $E_0[a,b]$ — пр-во всех кус.-непр. на $[a,b]$ ф-ц

$f(x)$ — кус. непр. на $[a,b]$, если она непрер. во всех внутр. точках (a,b), за искл., м.б., конечного числа точек $x_1,\dots,x_{n-1}$, в кот. $\exists f(x_k\pm 0)$, $f(x)$ имеет разрыв 1-го рода; $f(x_k)=\dfrac{f(x_k+0)+f(x_k-0)}{2}$, $k=\overline{1,n-1}$ (2)

$\exists f(a+0), f(b-0)$

Очевидно, (2) справедл. для $\forall x\in(a,b)$

1°, 2° — выполнено

3°. $(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx=\sum_{k=0}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f^2(x)dx\ge 0$

для $\forall f\in E_0$.

Если $(f,f)=0 \Rightarrow \forall k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f^2(x)dx=0$.

$\forall k$ $f^2(x)$ — непр. на $[x_{k-1},x_k]$, то $f(x)\equiv 0$ на $[x_{k-1},x_k] \Rightarrow f(x)\equiv 0$.

Из (2) $f(x_k)=0$, $k=1,2,\dots,n \Rightarrow f(x)\equiv 0$ на $[a,b]$

3° — выполн., пр-во — Евклидово.

Пространства $L[a,b]$, $E_0[a,b]$ — бесконечномерные.

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\{x^k\}_{k=1}^{n}$ $a_0x^n+\dots+a_nx+a_{n+1}=0$

Теор.1 Для $\forall E$ и для $\forall f,g\in E$ справедливо нер-во Коши-Буняковского

$$(f,g)^2\le(f,f)(g,g) \quad (3)$$

$$|(f,g)|\le\sqrt{(f,f)\cdot(g,g)}$$

□ 1) $(f,f)\ne 0$ $(\lambda f+g)^2\ge 0$ $\lambda\in\mathbb{R}$, $D\le 0$ (дискрим.)

2) $(g,g)\ne 0$ $(f,f)=0$ $(f+\lambda g)^2\ge 0$ $D\le 0$

3) $(f,f)=(g,g)=0$. $\left.\begin{array}{l}(f+g)^2\ge 0\Rightarrow (f,g)\ge 0\\ (f-g)^2\ge 0\Rightarrow (f,g)\le 0\end{array}\right\}\Rightarrow (f,g)=0$

■

L, E_0 К-Б: $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx}$

Опр3 Линейное пространство L называется нормированным, если для $\forall f\in L$ сопост. в соотв-е неотр. вещ. число, назыв. нормой эл-та:

1°. $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$, $\forall f,g\in L$ (нер-во треуг., нер-во Минковского)

2°. $\|\lambda f\|=|\lambda|\,\|f\|$, $\forall f\in L$

3°. $\|f\|>0$, $\forall f\ne 0$, $\|f\|=0$, $f=0$

Опр.4 Пр-во L назыв. почти нормир., если 3° → 3°' $\forall f\in L$: $\|f\|\ge 0$

Теор.2 $\forall$ евклидово (почти евкл.) пр-во можно сделать нормированным (почти нормированным), если положить $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$

□ П-м 1° аксиому нормы.

$|(f,g)|\le\|f\|\,\|g\|$

$\|f+g\|=\sqrt{(f+g,f+g)}=\sqrt{\|f\|^2+2(f,g)+\|g\|^2}\le$

$\le\{К-Б\}\le\sqrt{\|f\|^2+2\|f\|\|g\|+\|g\|^2}=\|f\|+\|g\|$

■

Опред. 4 Два эл-та $f, g \in \hat{E}$ наз. ортог., если $(f,g)=0$.

Опр. 5 Сист. эл-в $\{\psi_k\}$, $\psi_k \in \hat{E}$, $k=1,2,\dots$ назыв. ортонормированной, если эл-ты системы попарно ортог. и

$$(\psi_k, \psi_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k\neq j \end{cases}$$

Пример. $L[-\pi,+\pi]$, $\hat{E}_c[-\pi,+\pi]$

ОНС: Тригонометрическая система ф-й

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Если ортонормировать сист. $1, x, x^2, \dots$, то получ. многочлены Лежандра

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

Опр. 6 Отклонением эл-та f от эл-та g по норме евклид. (евкл.) пр-ва $\hat{E}$ (В) наз. вел. $\|f-g\|$

Рассм. $\forall \hat{E}$, $\forall \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС.

Фикс. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall c_k \in \mathbb{R}$, $k=1,2,\dots,n$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \qquad (4)$$

$\forall f \in \hat{E}$

Найдем $\min\limits_{\forall \{c_k\}} \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k\|$ – ?

Δ $\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k\|^2 = (f - \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k, f - \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i) =$

$= (f,f) - 2\sum_{i=1}^{n} c_i (f, \psi_i) + (\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k, \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i) =$

$= \{$ обозн. $(f, \psi_k) = f_k \} =$

$= \{ \sum_{k,i=1}^{n} c_k c_i \underbrace{(\psi_k, \psi_i)}_{\delta_{ki}} = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \} =$

$= (f,f) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k f_k + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 =$

$= \sum_{k=1}^{n}(c_k^2 - 2c_k f_k + f_k^2 - f_k^2) + \|f\|^2 =$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2}_{\geq 0} \qquad (5)$$

$\Rightarrow$ min: $c_k = f_k$, $k=1,2,\dots,n$. $\blacktriangleright$

[Лекция 7] 29.03.06.

Опр. Рядом Фурье элемента $f \in \hat{E}$ по системе $\{\psi_k\}$ наз. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$, где $f_k = (f, \psi_k)$ – коэф-ты Фурье элемента f по системе $\{\psi_k\}$.

$\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ – наз. n-ой част. суммой ряда Фурье.

Теор. 5 Среди всех н/к (4) наим. отклонение от эл-та f по норме пр-ва $\hat{E}$ имеет n-я част. сумма ряда Фурье эл-та f по сист. $\{\psi_k\}$.

Следствие 1 $\forall \hat{E}$, $\forall n$, $\forall$ ОНС $\{\psi_k\}$, $\forall f \in \hat{E}$, $\forall c_k \in \mathbb{R}$ верно нер-во $\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k\|^2 \geq$

$$\geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \qquad (6)$$

(следует из (5))

Следствие 2 $\forall \hat{E}, \forall f \in \hat{E}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \{\varphi_k\}$ - ОНС в $\hat{E}$:
$$\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \quad (7)$$ - тождество Бесселя

Теор. 4. Для $\forall \hat{E}$, $\forall f \in \hat{E}$, $\forall$ ОНС $\{\varphi_k\} \subset \hat{E}$ верно
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2 \quad (8)$$ - нер-во Бесселя

$\square$ $\{\sum_{k=1}^{n} f_k^2\}$ - огранич. (из (7))
$f_k^2 \ge 0 \Rightarrow$ теор. 2 гл. 1 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ - сход.
$\xRightarrow{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2$ $\blacksquare$

Утв. Для того, чтобы посл. $\{c_k\}$, $c_k \in \mathbb{R}$ могли быть посл-ю коэф. Фурье для эл-та $f \in \hat{E}$ необх., чтобы
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

$\boxed{\text{Напр.}}$, $c_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ не может быть посл-ю коэф. Фурье

Следствие $\forall f \in \hat{E}$, $\forall$ ОНС $\{\varphi_k\}$, $\forall \hat{E}$ $f_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$\boxed{\text{Прим.}}$ $L[-\pi,\pi]$, $\tilde{C}_0[-\pi,\pi]$
ОНС: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$
$\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$ - тригонометрич. ряд Фурье (ТРФ)
$\forall f(x)$ став. в соотв. ряд
$$\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k'}{\sqrt{\pi}} \cos kx + \frac{f_k''}{\sqrt{\pi}} \sin kx\right)$$

обозн.:
$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$f_k' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx$$
$$f_k'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$
нер-во Бесселя:
$$f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k'^2 + f_k''^2\right) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$
заменим по-другому:
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ - ТРФ}$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$
нер-во Бесселя
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$
Следствие Для $\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $a_k, b_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$.

§2. Полные и замкнутые ОНС

Опр. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов почти нормир. пр-ва L назыв. замкнутой в этом пр-ве, если для $\forall \varepsilon > 0$ и для $\forall f \in L$ $\exists n_0$, $\exists c_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n_0}$:
$$\|f - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \varphi_k\|_L < \varepsilon. \quad (9) \text{ т.е.}$$

∀ эл-т $f \in L$ можно с любой точностью приблизить конечной линейной комбинацией эл-в этой системы по норме данного пространства.

Нам надо мы д-м, что тригонометрич. сист. ф-й – замкн. в $L[-\pi,\pi]$, $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ – замкн. в $C[-1,1]$

Теор. 6 Пусть ОНС $\{\psi_k\}$ действ. замкн. почти евкл. пр-ве $\hat{E}$. Тогда для $\forall f \in \hat{E}$ нер-во Бесселя в пр-ве в точности равенство называемое равенством Парсеваля! (ур-е замкнутости Ляпунова)

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2 \qquad (10)$$

□ Из (9) $\forall \varepsilon > 0$ $\varepsilon > \|f - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \psi_k\|^2 \underset{(6)}{\geq} \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n_0} f_k^2 \underset{\forall n \geq n_0}{\geq} \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \underset{(7)}{=} \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k\|^2 \geq 0$

$\Rightarrow \forall n > n_0 \quad 0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{n} f_k^2$ сход. к $\|f\|^2$ ■

В ∀м пр-ве E, $\hat{E}$ ∃ замкн. системы!

Теор. 6 $\forall \hat{E}$ ∀ ОНС замкн. $\{\psi_k\} \subset \hat{E}$, $\forall f \in \hat{E}$ ряд Фурье эл-та f по сист. $\{\psi_k\}$ сходится к f по норме пр-ва $\hat{E}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k\| = 0.$$

□ $\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k\|^2 \underset{(7),(8)}{=} \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \xrightarrow[(10)]{n\to\infty} 0$, что и тр. д-ть. ■

В $L[a,b]$ сх-ть по норме $\int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k(x)\right)^2 dx \to 0$ при $n \to \infty$ – сходимость в среднем.

Опр. Сист. эл-в $\{\psi_k\}$ наз. полной в этом пр-ве, если среди эл-в $\hat{E}$ не сущ. эл-та отличн. от θ, ортог. сразу ко всем эл-м $\psi_k \in \{\psi_k\}$

$$(f, \psi_k) = 0, \ k = 1, 2, \ldots \Rightarrow f = \theta.$$

Теор. 7 ∀ замкн. о/н система евкл. пр-ва $\hat{E}$ является полной системой в $\hat{E}$.

□ Пусть $f \perp \psi_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $f \in \hat{E}$

$(f, \psi_k) = f_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots \underset{(10)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 0 = \|f\|^2 \underset{3^\circ \text{акс. скал. пр-я}}{\Rightarrow} f = \theta$. ■

Обратное неверно для $\forall \hat{E}$ (функц. ⇒ конеч. пр-ва: ∀ полн. ОНС – замкн.)

Теор. 8 (теор. о ! ряда Фурье для эл-та пр-ва) Пусть $\{\psi_k\}$ – полная о/н система в евкл. простр-ве E. Тогда различн. эл-ты f и g пр-ва E не могут иметь одинак. рядов Фурье по системе $\{\psi_k\}$. (один. ряды: $f_k = g_k$, $\forall k$).

□ ∃ $f_k = g_k$ для $\forall k$.

$0 = f_k - g_k = (f, \varphi_k) - (g, \varphi_k) = (f-g, \varphi_k) = (f-g)_k$
$\forall k \quad (f-g)_k = 0 \underset{\substack{(1.6)\\(\text{или } 2.7)}}{\Rightarrow} f - g = \Theta \Leftrightarrow f = g.$

■

Следствие. В теме более справедлива для замкнутых (полных) о/н систем (т.к. к замкнутая).

§3. Замкнутость тригонометрич. системы функций.

Д.м., что о/н сист. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ – замкн. в $L[-\pi, \pi]$.

п.1° Ядро Дирихле

$f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $\exists f(-\pi+0)$, $f(\pi-0)$.

Опр. Ф-я $F(x)$ назыв. периодическим (с периодом 2π) продолжением ф-и $f(x)$ на всю $\mathbb{R}$, если

$$\begin{cases} F(x) = f(x) \text{ на } (-\pi, \pi) \\ F(-\pi) = F(\pi) = \dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}. \\ F(x+2\pi) = F(x) \text{ для } \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$f(x) \in L[-\pi, \pi]$ – ее период. 2π продолжение на $\mathbb{R}$

Обознач. $2\pi \sim \mathbb{R}$.

Лемма 1. При $f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R} \Rightarrow \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx$ не зависит от $\alpha \in \mathbb{R}$.

□ $\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx$ (здесь $f(x)$ – продолжение $2\pi \sim \mathbb{R}$)

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx = \int_\alpha^{-\pi} f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \int_\pi^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \left\{ t = x + 2\pi \quad \int_\alpha^{-\pi} f(x)\,dx = \int_{\alpha+2\pi}^{\pi} f(t-2\pi)\,dt = \int_{\alpha+2\pi}^{\pi} f(t)\,dt = -\int_\pi^{\alpha+2\pi} f(t)\,dt \right\} =$$

$$= -\int_\pi^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} f\,dx + \int_\pi^{\alpha+2\pi} f\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f\,dx$$

■

Верно также $\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
(т.к. $x + \alpha = t$ $\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f\,dt$)

$\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$ [Лекция] 06.04.06

частичная сумма тригонометрического ряда Фурье (ТРФ)

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad n=1,2,\dots \qquad (1)$$

$$S_0(x,f) = \frac{a_0}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky\, dy \quad k=0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin ky\, dy, \quad k=1,2,\dots \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1)

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx)\right) dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(y-x)\right) dy = \left\{\begin{array}{l} y-x=t \\ y=x+t \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) dt =$$

$f(x)$ $2\pi \sim \mathbb{R}$.

$$= \left\{\underset{T=2\pi}{\text{периодич.}}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) dt.$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \;\Big|\times \frac{2\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\Big|_{t\neq 0} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kt \sin\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3}{2}t - \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{5}{2}t - \sin\frac{3}{2}t + \dots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right) =$$

$$= \frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}$$

Опр. Выр. $D_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}$ называется ядром Дирихле.

В $t=0$ доопред. $D_n(0) = (n+\frac12)\frac{1}{\pi}$

$D_n(t)$ определено $\forall t \in \mathbb{R}$

Лемма 2. Для $\forall$ ф-и $f(x) \in L[-\pi,\pi]$, 2π ~ $\mathbb{R}$

$\forall n = 0,1,2,\dots$

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\,dt \qquad (3)$$

Лемма 3. Для $\forall n = 0,1,2,\dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1 \qquad (4)$$

~~$(S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(t)\,dt \quad f(x+t)\ f(x)$~~

□ В (1): $S_n(x,1) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 1$

($a_k, b_k = 0$, т.к. триг. сист. – ортогон., $1 \perp \sin kx, \cos kx$ на $[-\pi,\pi]$).

■

В (3) подставим $f \equiv 1 \Rightarrow S_n(x,1) = 1 =$

$= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt \Rightarrow (4)$, $\forall n = 0,1,2,\dots$

п2. Ядро Фейера.

$\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$, 2π ~ $\mathbb{R}$

Средние арифм. послед-ти $\{S_n(x,f)\}$ частичных сумм ТРФ.

$$\sigma_n(x,f) = \frac{S_0(x,f) + S_1(x,f) + \dots + S_{n-1}(x,f)}{n} \qquad (5)$$

Подставим (3) в прав. часть (5)

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t)\frac{1}{2\sin\frac t2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\tfrac12)t\right)dt$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\tfrac12)t \,\Big|\, \frac{2\sin\frac t2}{2\sin\frac t2} = \frac{1}{2\sin\frac t2}\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin(k+\tfrac12)t\sin\tfrac t2$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac t2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos kt - \cos(k+1)t\right) = \frac{1}{2\sin\frac t2}(\cos 0 -$$

$$- \cos t + \cos t - \cos 2t + \dots + \cos(n-1)t - \cos nt) =$$

$$= \frac{1-\cos nt}{2\sin\frac t2} = \frac{2\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin\frac t2} = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac t2}$$

Опр. Выражение $\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac t2}\right)^2$ называется ядром Фейера. $n = 1,2,3,\dots$ $\Phi_n(0) = \frac{n}{2\pi}$

Лемма 4. $\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$ 2π ~ $\mathbb{R}$

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac t2}\right)^2 dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\Phi_n(t)\,dt \qquad (6) \quad \forall n = 1,2,3,\dots$$

Лемма 5. Свойства ядра Фейера:

1) $\Phi_n(t) \geq 0$; $\Phi_n(t)$ – четная ф-я, $t \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = 1$ для $\forall n = 1,2,\dots$

$\forall f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\Phi_n(t)\,dt.$

3) $\forall \delta \in (0,\pi)$, $\eta_n(\delta) = \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)\,dt \overset{\text{четн}}{=} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \to 0$ при $n \to \infty$.

□ 1) очевидно.

2) В (5) положим $f(x) = 1$.

$$\sigma_n(x,1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i(x,1)}{n} = \frac{n \cdot 1}{n} = 1$$

В (6) положим $f \equiv 1$.

$\sigma_n(x,1) = 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \Rightarrow 2)$, $\forall n = 1,2,\dots$

3) $\Phi_n(t)$ на $t \in (\delta,\pi)$, $0 < \delta < \pi$, $\frac{t}{2} \in \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\frac{t}{2} \nearrow$, $\sin\frac{t}{2} \geq \sin\frac{\delta}{2}$, $t \in (\delta,\pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi_n(t) \leq \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$. ($\sin^2\frac{\delta}{2} = const$)

■

<u>Теорема 9</u> (теор. Фейера) 1904 год.

Для $\forall f(x) \in C[-\pi,\pi]$; $f(-\pi) = f(\pi)$

$\sigma_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ при $n\to\infty$.

(если f н.п. на $\mathbb{R} \Rightarrow \sigma_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$)

□ $f(x)$ 2π на $\mathbb{R}$.

$f(-\pi) = f(\pi) \Rightarrow$ продолженная ф-я также непр. на $\mathbb{R}$, и.м. период 2π

$\Rightarrow f(x)$ равномерно непр. на $\mathbb{R}$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \left|f(x+t) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|t| < \delta$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$0 < \delta < \pi$

$\sigma_n(x,f) - f(x) \overset{2)\text{св.}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x)\big)\,\Phi_n(t)\,dt =$

$= \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} = J_- + J_0 + J_+$.

$f(x)$ - огр. на $\mathbb{R}$
$\exists M > 0: |f(x)| \leq M$, $\forall x$

$|J_+| = \left|\int_{\delta}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x)\big)\,\Phi_n(t)\,dt\right| \leq$

$\leq \int_{\delta}^{\pi} \big(|f(x+t)| + |f(x)|\big)\,\Phi_n(t)\,dt \leq 2M \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 2M\eta_n(\delta)$

$\to 0$ при $n\to\infty$ для $\forall\delta$.

$\exists N: \forall n \geq N$ $|J_+| < \frac{\varepsilon}{4}$; аналогично $|J_-| < \frac{\varepsilon}{4}$,

$|J_0| = \left|\int_{-\delta}^{\delta} \big(f(x+t) - f(x)\big)\,\Phi_n(t)\,dt\right| \leq$

$\leq \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{|t|\leq\delta}\,\Phi_n(t)\,dt <$

$< \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)\,dt \underset{1)\text{св.}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 = \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \left|\sigma_n(x,f) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$ $\forall n > N$,

$\forall x \in [-\pi,\pi]$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

Зн., $\sigma_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ (на $\mathbb{R}$)

■

Замечание ① Доказано, что для $\forall f(x)\in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ тригоном. ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$ (к $f(x)$).

② Пусть $f(x)$ непр. на $[-\pi,\pi]$. Для того, чтобы $\sigma_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ $\Leftrightarrow$ чтобы $f(x)\in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$.

п.3. Следствия из т. Фейера.

Рассмотрим тригоном. сист. ф-й

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty} \text{ — О/н сист. в } L[-\pi,\pi]$$

Опр. Тригоном. тригон. многочленом наз. $\forall$ конечн. л/к эл-в системы триг. ф-й.

Обозн. $T(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_k' \cos kx + c_k'' \sin kx)$, $c_0, c_k', c_k'' = const$.

Теор. 10. Тригон. сист. ф-й явл. замкнутой в пр-ве $L[-\pi,\pi]$ (если многочлены всюду плотны на $[-\pi,\pi]$ ф-й), т.е.

$$\forall \varepsilon>0,\ \forall f(x)\in L[-\pi,\pi]\ \exists T(x):\ \|f(x)-T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T(x))^2dx} < \varepsilon.$$

($\Rightarrow$ т.с.ф. явл. замкнутой $\Rightarrow$ полной (по т.7) в пр-ве $R_0[-\pi,\pi]$)

□ 1) $\forall f\in L[-\pi,\pi]$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists f_1(x)$ — кусочно пост. на $[-\pi,\pi]$: $\|f(x)-f_1(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ (можно $f_1\in R[-\pi,\pi]$), если в нулевых доопр. допустимой ф-ии.

2) $\forall\varepsilon>0$ $\exists g(x)\in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$: $\|f_1(x)-g(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

3) $\forall\varepsilon>0$ $\exists T(x)$: $\|g(x)-T(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Из 1)–3) получим утв-е теоремы по нер-ву тр-ка ■

[Лекция] 12.04.96

① $f(x)\in L[-\pi,\pi] \Rightarrow$ огранич.

$\exists M>0$: $|f(x)| \le M$, $\forall x\in[-\pi,\pi]$

Фикс. $\forall\varepsilon>0$, разбиваем $[-\pi,\pi]$ на $x_0=-\pi<x_1<x_2<\dots<x_n=\pi$

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - s < \frac{\varepsilon^2}{18M} \quad (2)$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k,\quad m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Пусть $f_1(x) = \begin{cases} m_k, & x_{k-1} < x \le x_k \\ m_1, & x_0 \le x \le x_1 \end{cases}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_1(x)dx = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k = s$$

$\Rightarrow$ (2) можно переписать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}$$

Заметим, что $f(x) \ge f_1(x)$ $\forall x\in[-\pi,\pi]$

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f_1(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))\,dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}$

$|f|\le M \Rightarrow |f_1|\le M$ для $\forall x\in[-\pi,\pi]$.

$\|f(x)-f_1(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))^2dx =$

$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f_1(x)|\,|f(x)-f_1(x)|\,dx \le$

$\le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f_1(x)|\,(|f(x)|+|f_1(x)|)\,dx \le$

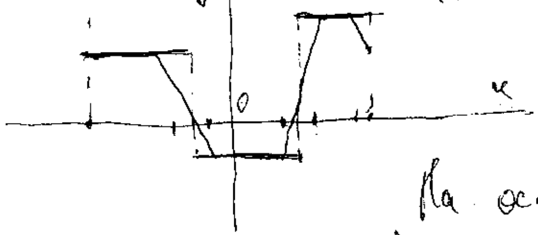
$\le 2M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f_1(x)|\,dx < 2M\frac{\varepsilon^2}{18M} = \frac{\varepsilon^2}{9}$

$\Rightarrow \|f-f_1\| < \frac{\varepsilon}{3}$ (3)

(2) $f_1(x)$ построим $g(x)\in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$: $\|f_1(x)-g(x)\|<\frac{\varepsilon}{3}$ (4)

$= g(x)$

$= f_1(x)$



$g(x)=f_1(x)$ на $[-\pi,\pi]$, кроме малых окр-тей т. x_k, $k\in\overline{1,n}$

На оставшихся интервалах полаг. $g(x)$ линейной так, чтобы $g(x)\in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$

$|f_1(x)|\le M$, $\forall x$; $|g(x)|\le M$, $\forall x$ $\Rightarrow$ (выбор окр. т. x_k дост. малыми так, что)

$\|f_1-g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-g(x))^2dx} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow (4)$

$\sum \int_{\delta x_k} \le 2M\sqrt{\delta n} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\sqrt{\delta} < \frac{\varepsilon}{6M\sqrt{n}}$ — длина δн-на окр-ти x_k.

(3) $g(x)\in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$ $\Rightarrow$ по т. 9 $\exists T(x) = \sigma_n(x,g)$: $\|g(x)-T(x)\|<\frac{\varepsilon}{3}$ (5)

Из шагов (1),(2),(3) $\Rightarrow$ $\|f(x)\underbrace{\,}_{\pm f_1(x),\ \pm g(x)}-T(x)\| \le$ {нер-во тр-ка} $<\varepsilon$ $\Rightarrow$ (1)

■

Теор. 11 (т. Вейерштрасса о приближении непрерывной ф-и тригонометрическими многочленами).

Любую непр. на $[-\pi,\pi]$ ф-ю, принимающую одинак. зн-я в $-\pi$ и $+\pi$, можно равномерно на $[-\pi,\pi]$ приблизить тригоном. многочленами

($\forall f(x)\in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists T(x)$: $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in[-\pi,\pi]$)

□ По т. 9: полагаем $T(x)=\sigma_n(x,f)$ и выбираем $n=n(\varepsilon)$

Замечание: Доказать, что все функции $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ явл. пределами для тригонометрических многочленов на $[-\pi,\pi]$.

Теор. 12 (теор. Вейерштрасса о равномерн. приближ-и непр. ф-й алгебраич. многочленами) 1885 г.

Любую непр. на $[a,b]$ ф-ю можно равномерно на этом отрезке приблизить алгебраическими многочленами. (т.е. для $\forall f(x) \in C[a,b]$, $\forall \varepsilon>0$ $\exists Q_m(x)$ - алг. многочлен:

$$|f(x)-Q_m(x)|<\varepsilon \text{ для } \forall x\in[a,b])$$

□ 1 шаг) $[a,b] \xrightarrow[\text{перех.}]{\text{замена}} [0,\pi]$.

$$t=\frac{x-a}{b-a}\pi \in [0,\pi].$$

$$x=\frac{t(b-a)}{\pi}+a$$

$$f(x)=f\left(\frac{t(b-a)}{\pi}+a\right)=\varphi(t)$$

$\varphi(t)\in C[0,\pi]$ продолжим четно образом на $[-\pi,0] \Rightarrow \varphi(t)\in C[-\pi,\pi]$,

$\varphi(-\pi)=\varphi(\pi) \Rightarrow$ {по т. 9 (п. 11)} $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists T(t): |\varphi(t)-T(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall t\in[-\pi,\pi]$

$T(t)$ - конеч. сумма $\sin kx$, $\cos kx$, каждая разл. в ряд Тейлора, $R=\infty$, кот. $\rightrightarrows$ на $\forall [a,b]\subset\mathbb{R}$.

$\exists P_n(t)$ - част. сумма ряда Тейлора ф-и $T(t)$: $|T(t)-P_n(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall t\in[0,\pi] \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\varphi(t)-P_n(t)|\le|\varphi-T|+|T-P_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

для $\forall t\in[0,\pi] \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\varphi(t)-P_n(t)|<\varepsilon,\ \forall t\in[0,\pi]$$

$$|f(x)-Q_m(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in[a,b].$$

■

п. 5. Следствие из замкнутости тригонометрич. системы ф-й

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ - тригон. сист. ф-й

- О/н системы в $L[-\pi,\pi]$ - почти евкл. пр-ве и в $C_0[-\pi,\pi]$ - евкл. пр-во

Следствие 1 (из п. 10) $\forall f(x)\in L[-\pi,\pi]$ справедливо рав-во Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$

$\Leftarrow$ {т. 5}

Следствие 2. Для $\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, $f(x)$ тригоном. ряд Фурье ф-и $f(x)$ сх. в среднем к f на $[-\pi,\pi]$.

$$S_n(x,f) \Rightarrow f(x) \text{ на } [-\pi,\pi] \text{ в/ср } n\to\infty$$

Следствие 3. Для $\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi\sim\mathbb{R}$, её тригоном. ряд Фурье можно почленно интегр. на $[-\pi,\pi]$.

(из сл. 2 и нер. 3 семестра)

Следствие 4. Любые 2 различн. ф-и $f(x)\, g(x) \in E_0[-\pi,\pi]$ не могут иметь одинак. тригоном. рядов Фурье.

($\Leftarrow$ из т. 8)

Следствие 5. $\exists f(x) \in E_0[-\pi,\pi]$, $\underset{(ТРФ)}{S_n(x,f)} \rightrightarrows$ на $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$

$$\Rightarrow S_n(x,f) \rightrightarrows f(x) \text{ на } [a,b].$$

□ $\exists\, S_n(x,f) \rightrightarrows g(x)$ на $[a,b]$, $g(x)$ - нек. ф-я.

Тогда $S_n(x,f) \Rightarrow g(x)$ на $[a,b]$ (из 3 сем) в ср. среднем

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N$: $\|S_n(x,f) - g(x)\|_{[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2}$

Из сл-я 2: $S_n(x,f) \Rightarrow f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$ сх-ся в ср. к $f(x)$ на $[a,b]$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_1: \forall n>N_1\ \|f(x) - S_n(x,f)\|_{[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\|f-g\| \le \|f-S_n\|_{[a,b]} + \|g-S_n\|_{[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n > \max(N,N_1)$$

$\|f-g\| < \varepsilon$, $\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \|f-g\| = 0 \Rightarrow$ {т.к. E_0 - евкл. пр-во} $\Rightarrow f \equiv g$ на $[a,b]$. ■

~~Следствие 6~~ п.6. **Локальная т. Фейера.**

Т.з. $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, $2\pi\sim\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ $(\mathbb{R})$,

$f \in L[-\pi,\pi]$.

Теор. 13 (лок. т. Фейера)

$\exists f(x)$ инт. на $[-\pi,\pi]$, $2\pi\sim\mathbb{R}$, и в некот. т. x_0

$\exists f(x_0 \pm 0)$ $\Rightarrow$ $\sigma_n(x_0,f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =: \hat{f}(x_0)$ (1)

□ $f \in L[-\pi,\pi] \Rightarrow$ огранич. на $[-\pi,\pi]$ и на $\mathbb{R}$.

$\exists M>0$: $|f| \le M$ для $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\exists f(x_0\pm 0)$: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $|f(x_0+t) - f(x_0+0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall t \in (0,\delta)$

$$\left.\begin{aligned} &|f(x_0+t) - f(x_0+0)| < \tfrac{\varepsilon}{2},\ \forall t\in(0,\delta) \\ &|f(x_0-t) - f(x_0-0)| < \tfrac{\varepsilon}{2},\ \forall t \in(-\delta,0)\end{aligned}\right\} (2)$$

$$\sigma_n(x_0,f)-\tilde{f}(x_0) \underset{\text{лемма 4}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,\varphi_n(t)\,dt - \tilde{f}(x_0)\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\,dt}_{=1\ (\text{лемма 4})} = \int_{\delta\le|t|\le\pi}\left(f(x_0+t)-\tilde{f}(x_0)\right)\cdot$$

$$\cdot\,\varphi_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)\,\varphi_n(t)\,dt - \frac{f(x_0+0)}{2}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n\,dt - \frac{f(x_0-0)}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n\,dt =$$

$$= \left\{\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n(t)\,dt \underset{\text{четн.}}{=} 2\int_0^{\delta}\varphi_n(t)\,dt = 2\int_{-\delta}^{0}\varphi_n(t)\,dt\right\}$$

$$= \int_{\delta\le|t|\le\pi}\left(f(x_0+t)-\tilde{f}(x_0)\right)\cdot\varphi_n(t)\,dt + \int_0^{\delta}\left(f(x_0+t)-f(x_0+0)\right)\varphi_n(t)\,dt +$$

$$+\int_{-\delta}^{0}\left(f(x_0+t)-f(x_0-0)\right)\varphi_n(t)\,dt = J_1+J_2+J_3.$$

$$|J_1| \le \int_{\delta\le|t|\le\pi}\left(|f(x_0+t)|+|\tilde{f}(x_0)|\right)\varphi_n(t)\,dt \le$$

$$\le 2M\int_{\delta\le|t|\le\pi}\varphi_n(t)\,dt = 2M\left(\int_{-\pi}^{-\delta}\varphi_n(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{\delta}^{\pi}\varphi_n(t)\,dt\right) = 2M\left(\eta_n(\delta)+\eta_n(\delta)\right) =$$

$$=4M\,\eta_n(\delta)\xrightarrow[\text{лемма 5}]{n\to\infty}0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N:$$

$$\forall n>N\quad |J_1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|J_2+J_3| \underset{(2)}{\le} \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_0^{\delta}\varphi_n(t)\,dt+\int_{-\delta}^{0}\varphi_n(t)\,dt\right) =$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n(t)\,dt \underset{\varphi_n\ge0}{\le} \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\,dt}_{1\ (\text{л. 4})} = \frac{\varepsilon}{2}\qquad \forall n=1,2,\dots$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N$

$$|\sigma_n(x_0,f)-\tilde{f}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \Rightarrow (1)$$

■

<u>Следствие</u> $f\in L[-\pi,\pi]$ $2\pi\sim R$,

$\exists\, f(x_0\pm0)$, $\exists\, S_n(x_0,f)$ сх. $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_n(x_0,f)\to\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ (из рег-ти метода Чезаро)

[Лекция] 13.04.06

Простейшие условия равномерной сходимости и почленной дифференцируемости ТРФ.

Сл. 2 из Т 10 $S_n(x, f) \xrightarrow[\text{п.в.}]{\text{(в среднем)}} f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ $\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$

История

$S_n(x) \rightrightarrows ?$

1876 г: $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ $S_n(0)$ - расх.

$S_n(x, f)$ - расх в $\forall$ зад. точке

$S_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ в конечн. числе точек

$C[-\pi,\pi]$ $f(x) \in L[-\pi,\pi]$

$S_n(x,f)$ - сх. хотя бы в одной точке.

1923 г. Колмогоров постр. прим. $f(x) \in L[-\pi,\pi]$

$S_n(x,f)$ - п.в. на $[-\pi,\pi]$ расх.

1926 г. $f \in L_x[-\pi,\pi]$ ТРФ расх всюду на $[-\pi,\pi]$.

f не инт. по Риману.

1966 г. Карлесон (швед)

$f(x) \in L_2[-\pi,\pi]$ - мб. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ТРФ п.в. сходится.

1967 г. Хант (амер) $f \in L_p[-\pi,\pi]$

$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < \infty$, $p > 1$

ТРФ п.в. на $[-\pi, \pi]$ сход.

$f \in L[-\pi, \pi]$ (по Римеану) $\Rightarrow f^2(x) \in L[-\pi, \pi]$

$f(x) \in L_2[-\pi, \pi]$ по Лебегу $S_n(x, f)$ - п.в. сход на $[-\pi, \pi]$.

п.1. Абсолютная и равномерная сх-ть ТРФ

Опр. $f(x)$ имеет кус.-непр. произв. на $[a, b]$, если $f'(x)$ $\exists$ и непр. во всех точ. $[a, b]$, за искл. конечного числа точек $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, в каждой из кот. $\exists f'(x_i \pm 0)$, $i = \overline{1, n}$

$\left(f'(x_i) = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2} \right)$

Опр. Ф-я $y = f(x)$ имеет кус.-непр. произв. n-го порядка на $[a, b]$, если ф-я $f^{(n-1)}(x)$ имеет кус.-непр. произв. на $[a, b]$

Теор. 14. Пусть ф-я $f(x)$ непр. на $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и $\exists f'(x)$ - кусочно-непр. на $[-\pi, \pi]$. Тогда ТРФ ф-и $f(x)$ сход. равном. к $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, ряд сх-ся абсолютно на $[-\pi, \pi]$ и ряд из модулей членов сх-ся равномерно на $[-\pi, \pi]$

$\square$ $f(x)$ сх. к сумм. $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Дост. д-ть:

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos kx + b_k \sin kx| \rightrightarrows$ на $[-\pi, \pi]$

Для этого дост. д-ть, что сх-ся числовой ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ (8)

(исп. признак Вейерштрасса равном. сх-ти функц. рядов)

$a_k, b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ $\forall f \in L[-\pi, \pi]$

$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$ (сл. 1 из п. 10)

Обозн. $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx \, dx$, $k = 1, 2, \dots$

Выразим a_k, b_k ч-з α_k, β_k.

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \underbrace{\frac{1}{\pi k} f(x) \sin kx \Big|_{x=-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \beta_k$

неверная выкладка, т.к. инт-ть по частям можно ф-и с непр. произв.

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \cos kx \, dx =$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} f \sin kx \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \sum_{k=1}^{n} \int f' (\sin kx) dx =$

$= -\Big|_{x_0=-\pi}^{x_1} + - = \{$ихот не ряд$\}$.

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = -\frac{1}{\pi k} f(x)\cos kx\Big|_{x=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx$ $\{ f(\pi)\cos k\pi - f(-\pi)\cos k\pi = (\underbrace{f(\pi)-f(-\pi)}_{0})\cos k\pi = 0 \} =$

$= \frac{\alpha_k}{k}$.

Вместо (1) ∢ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\frac{\alpha_k}{k}\right| + \left|\frac{\beta_k}{k}\right|\right)$

Д-м сх-ть этого ряда.

Заметим, что $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2+\beta_k^2) < \infty$

$ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$, $\forall a, b > 0$ $\quad \frac{|\alpha_k|}{k} \le \frac{\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}}{2}$

$\frac{|\alpha_k|+|\beta_k|}{k} \le \frac{\alpha_k^2+\beta_k^2}{2} + \frac{1}{k^2}$

$\sum(\alpha_k^2+\beta_k^2)$ — сход. (1-е н-во у т.10)

$\frac{1}{k^2}$ — сход.

$\Rightarrow \sum \frac{|\alpha_k|+|\beta_k|}{k}$ — сход. $\Rightarrow$ ряд (1) сход.

$\blacksquare$

Прим. $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$
f - непр, $f(-\pi) = f(\pi)$
$\exists f'$ - кус. непр.

п.2. Условия почленного дифференцирования

Теор. 16 $\exists f(x)$ и $f^{(l)}(x)$, $l = 1, 2, \dots, k$ непр. на $[-\pi,\pi]$ и $f^{(l)}(-\pi) = f^{(l)}(\pi)$,
$l = 0, 1, 2, \dots, n$

$\exists f^{(n+1)}(x)$ — кус. непр. на $[-\pi,\pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ТРФ ф-и $f(x)$ можно n раз почл. дифф-ть на $[-\pi,\pi]$.

$\square$ $f(x)$ ТРФ $\sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \Rightarrow |u_k^{(l)}(x)| \le$
$\le k^l(|a_k|+|b_k|) \le k^n(|a_k|+|b_k|)$

$\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k|+|b_k|) < \infty$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все $\sum u_k^{(l)}(x) \rightrightarrows \overset{l=0,1,2,\dots,n}{\Rightarrow} \left(\sum u_k(x)\right)^{(l)} = u_k^{(l)}(x)$, $l = 1, 2, \dots, n$

Д-ть сх-ть (2) ($\Rightarrow$ утв. теор.)

$\alpha_k \cos kx \mid \beta_k \sin kx$ — коэф. Фурье $f^{(n+1)}(x)$

$|a_k| + |b_k| = \frac{1}{k^{n+1}}(|\alpha_k| + |\beta_k|)$.
(n) раз по частям

$k^n(|a_k|+|b_k|) = \frac{|\alpha_k|+|\beta_k|}{k} \le \frac{\alpha_k^2+\beta_k^2}{2} + \frac{1}{k^2}$ сх.

$\Rightarrow$ (2) сх. $\Rightarrow$ теор. д-на

$\blacksquare$

§5. Принцип локализации Римана

п.1. Свойства коэффициентов Фурье ф-ий двух переменных

$f(x)$, $g(x)$ $\quad F(x,t) = f(x+t)\,g(t)$

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\cos nt\,dt, \quad k=0,1,\dots$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\sin nt\,dt, \quad n=1,2,\dots$$

Лемма 6. Пусть $f(x)$, $g(x)$ инт. на $[-\pi,\pi]$, 2π-пер. на $\mathbb{R}$.

Тогда

1) ф-я $I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\,dt$ — непр. на $[-\pi,\pi]$ (и на $\mathbb{R}$)

2) $a_n(x), b_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $[-\pi,\pi]$ (на $\mathbb{R}$)

3) $c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $[-\pi,\pi]$ и на $\mathbb{R}$.

□ 1) Непр-ть $I(x)$ д-м по опр-ю:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: |u|<\delta \quad \underbrace{|I(x+u) - I(x)|}_{\Delta I(x)} < \varepsilon$

для фикс. т. $x\in[-\pi,\pi]$.

$$\Delta I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+u+t) - f(x+t)\big)\,g(t)\,dt$$

$g(t)\in L[-\pi,\pi] \Rightarrow$ огр., $\exists M>0: |g(t)|\le M$ на $[-\pi,\pi]$

$$|\Delta I(x)| \le M\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+u+t) - f(x+t)|\,dt = \{\text{замена}\} = M\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt.$$

$\Rightarrow$ д-ть: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ |u|<\delta$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (1)$$

из п.10 (о замкн. тригон. сист. ф-й) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для $f(t)\in L[-\pi,\pi]$ $\forall\varepsilon>0\ \exists T(x)$:

$$\|f(t) - T(t)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(t)-T(t))^2\,dt} < \frac{\varepsilon}{3M\sqrt{2\pi}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|\,dt = (|f-T|, 1) \underset{\text{н.Б}}{\le} \|f-T\|\,\|1\| =$$

$$= \|f-T\|\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dt} < \frac{\varepsilon}{3M\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \frac{\varepsilon}{3M}. \qquad (2)$$

По лемме 1 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3M}$, $\forall u\in\mathbb{R}$ $\quad (3)$

т.к. $f(t)$, $T(t)$ — 2π-периодич.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt \le \underset{(3)}{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\,dt} +$$

$u\in\mathbb{R}$, фикс. $\varepsilon>0$

$$+ \underset{(2)}{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|\,dt} + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)|\,dt <$$

$$< \underbrace{\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}}_{\forall u} + \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{M},$$

т.е. (1) доказ. ч.т.д.

$T(t)$ - непр. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |u| < \delta$
$|T(t+u) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{3M \cdot 2\pi} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3M \cdot 2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = \frac{\varepsilon}{3M}$, $|u|<\delta$.

Лекция | 19.04.06

Сл. 1) $F(x,t)$ при фикс. x инт. по $t\in[-\pi,\pi]$
$\Rightarrow$ (по сл. 1 из т. 10 [о равном. сход. ... ф-й]
$\Rightarrow$ справедливо рав-во Парсеваля $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2(x) + b_k^2(x)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F^2(x,t) dt$ (4)

$\Rightarrow$ ряд в лев. части (4) сх. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_k(x), b_k(x) \to 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ряд в лев. части с непр. слаг.
Признак Дини
Из 1 части леммы $\Rightarrow a_k(x), b_k(x)$,
$\int_{-\pi}^{\pi} F^2(x,t) dt$ - непр. на $\mathbb{R}$.
$a_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\underbrace{g(t)}_{\tilde{g}(t)} \cos kt\, dt$ - непр.

$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f^2(x+t)}_{\tilde{f}(x+t)} \underbrace{g^2(t)}_{\tilde{g}(t)} dt$ - непр. по т. на $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ по пр. Дини ряд в лев. части (4) сх. равном. на $\forall [a,b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_k(x), b_k(x) \rightrightarrows 0$ на $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$
3) $c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\, dt =$
$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \cos\frac{t}{2} \sin nt\, dt +$
$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \underbrace{\sin\frac{t}{2}}_{g_1(t)} \cos nt\, dt =$
$= b_n(x) + a_{n1}(x) \underset{\text{по 2-му лемме}}{\rightrightarrows} 0$ на $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$.

■

Теор. 16 (принцип локализации Римана)
Пусть $f(x) \in L[-\pi,\pi]$, 2π - R.
$\Rightarrow$ сх-ть или расх-ть ТРФ ф-и $f(x)$ в произвольно фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}$ зависит от поведения ф-и в как угодно малой окр-ти т. x_0.

□ Из леммы 2,3:
$S_n(x,f) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt$
(Лем. 2: $f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(t) dt$)
Фикс. $\forall \delta \in (0,\pi)$
$= \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt + \int_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t) D_n(t) dt - f(x)\int_{\delta\le|t|\le\pi} D_n(t) dt = J_1 + J_2 - J_3$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & \delta \le |t| \le \pi \\ 0, & |t| < \delta \end{cases}$$

$$J_2 = \int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t) D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt = c_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{лем. 6}}{\rightrightarrows}} 0$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N$

$|J_2| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x\in[-\pi,\pi]\ (\forall x\in[a,b])$

$$J_3 = f(x)\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} D_n(t)\,dt = f(x)\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= f(x)\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt = f(x)\cdot c_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$$

$f(x+t)\equiv 1$

$\Rightarrow \exists N:\ \forall n>N\quad |J_3| < \frac{\varepsilon}{3}\quad \forall x\in[-\pi,\pi]\ ([a,b])$

$(\forall [-\pi,\pi],\ \forall [a,b])$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ .\ [-\pi,\pi]\ (\forall [a,b])\quad \exists N:\ \forall n>N$

$$|S_n(x,f)-f(x)| < \left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))D_n(t)\,dt\right| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

$x+t\in(x-\delta,x+\delta)$

$\forall\delta>0$ — как угодно мал.

Следствие. Для $\forall f(x)\in L[-\pi,\pi]$, 2π на $\mathbb{R}$.

$\forall\varepsilon>0\quad\forall\delta\in(0,\pi)\quad\forall[a,b]\subset\mathbb{R}$

$$|S_n(x,f)-f(x)| < \left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))D_n(t)\,dt\right| + \frac{2}{3}\varepsilon$$

§ 6 Сх-ть ТРСФ в точке

Опр. Будем говорить, что $f(x)$ удовл. в т. x справа условию Гёльдера с показ. $\alpha\in(0,1]$, если $\exists f(x+0)$, $\exists M>0$: $|f(x+t)-f(x+0)|\le Mt^\alpha$, $\forall t\in(0,\delta)$ для нек. $\delta>0$.

f удовл. в т. x слева усл-ю Гёльдера с показ. $\alpha\in(0,1]$, если $\exists f(x-0)$, $\exists M>0$, $\exists\delta>0$:

$$|f(x+t)-f(x-0)|\le M|t|^\alpha,\ \forall t\in(-\delta,0)$$

$$\exists f'_+(x) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$$

$$f'_-(x) = \lim_{t\to-0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}$$

Теор. 17 $f(x)\in L[-\pi,\pi]$, 2π на $\mathbb{R}$

и в нек. т. $x_0\in\mathbb{R}$ удовл. справа усл. Гёльдера с показ. $\alpha_1\in(0,1]$, слева усл. Гёльдера с показ. $\alpha_2\in(0,1]$.

$\Rightarrow$ ТРСФ ф-и $f(x)$ сход. в т. x_0

к $S(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

$\square$ По сл-ю и теор. 16

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ \exists \delta > 0,\ \delta < \pi$:

$|S_n(x_0, f) - \hat{f}(x_0)| < \left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x_0+t) - \hat{f}(x_0)) \cdot D_n(t)\,dt \right| + \frac{2}{3}\varepsilon$ (1)

$\exists \delta_0 > 0$ усл. Гёльд. справа (M_1, α_1), слева (M_2, α_2)

$M = \max(M_1, M_2)$, $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$

$\Rightarrow |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le M t^\alpha$, $\forall t \in (0, \delta_0)$

$|f(x_0+t) - f(x_0-0)| \le M |t|^\alpha$, $\forall t \in (-\delta_0, 0)$ (2)

Пусть δ: $0 < \delta < \min(\pi, \delta_0)$ в ф-ле (1)

$\int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)\,dt = 2\int_0^{\delta} D_n(t)\,dt = 2\int_{-\delta}^{0} D_n(t)\,dt$.
чётн.

$\hat{f}(x_0) \int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)\,dt = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} \int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)\,dt =$

$= \frac{f(x_0+0)}{2} \cdot 2 \int_0^{\delta} D_n(t)\,dt + \frac{f(x_0-0)}{2} \cdot 2 \cdot \int_{-\delta}^{0} D_n(t)\,dt$

$\left| \int_0^{\delta} (f(x_0+t) - \hat{f}(x_0)) D_n(t)\,dt \right| = \left| \int_0^{\delta} (f(x_0+t) - f(x_0+0)) D_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^{0} (f(x_0+t) - f(x_0-0)) D_n(t)\,dt \right| \le$

$\le \int_0^{\delta} |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \frac{1}{\pi} \left| \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt +$

$+ \int_{-\delta}^{0} |f(x_0+t) - f(x_0-0)| \frac{1}{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{2|\sin\frac{t}{2}|}\,dt$ (≤)

$|\sin x| \ge \frac{2}{\pi}|x|$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (из монотонн. $\frac{\sin x}{x}$)

$\Rightarrow |\sin \frac{t}{2}| \ge \frac{2}{\pi} \frac{|t|}{2} = \frac{|t|}{\pi}$

$\forall t \in (-\pi, \pi)$ $\frac{t}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(≤) $\frac{M}{2\pi} \cdot \pi \left(\int_0^{\delta} t^\alpha \cdot \frac{1}{t}\,dt + \int_{-\delta}^{0} |t|^\alpha \cdot \frac{1}{|t|}\,dt \right) =$

$= \frac{M}{2} \cdot 2\int_0^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt = M \int_0^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M}{\alpha}\delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3}$ -

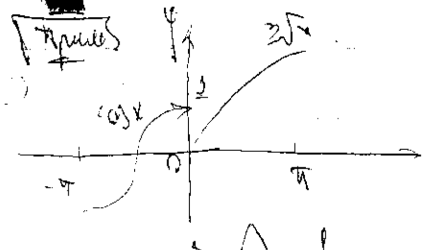
усл. на $\delta = \delta(\varepsilon)$

$0 < \delta < \left(\frac{\alpha\varepsilon}{3M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \pi, \delta_0$

$\alpha > 0$
$\Rightarrow$ подст. в (1) $|S_n(x_0, f) - \hat{f}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon$

$\forall n > N(\varepsilon)$, т.е. $S_n(x_0, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{f}(x_0)$

Пример



$S_n(0) \to \frac{1}{2}$.

$x \ne 0$ $\sqrt[3]{x}$ $\exists (\sqrt[3]{x})'$

$x \in (0, \pi)$ $\alpha = 1$
$x \in (-\pi, 0)$

$\exists (\cos x)'$, $\alpha = 1$

$x = 0$ $\cos x$, $\alpha = 1$

$\sqrt[3]{x}$ $\alpha = \frac{1}{3}$.

$S_n(\pi, f) \to \frac{\pi^2 - 1}{2}$; $(-\pi)$ — по иск

§7 Комплексная форма записи ТРФ

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} =$$

$$= a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + i b_k \frac{e^{-ikx} - e^{ikx}}{2} =$$

$$= c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}$$

$$c_k = \frac{a_k - i b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + i b_k}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt - i \sin kt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt$$

$$S_n(x,f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}; \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

При $n \to +\infty$ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ — компл. форма записи ТРФ.

Если $a_k \cos kx + b_k \sin kx = \hat{c}_{-k} e^{ikx} + \hat{c}_k e^{-ikx} \Rightarrow$

$$S_n(x,f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k e^{-ikx}.$$

[Лекция] 20.04.06

Глава 10.

Интеграл Фурье

$[-\pi, \pi]$ $[-l, l], l > 0$

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l}\, dx$$

$[a,b]$ $l = \frac{b-a}{2}$, $2l \in \mathbb{R}$, $[-l, l]$

$f(x)$ опр. на $\mathbb{R}$, не имеет никакого периода $\Rightarrow$ в ТРФ не раскладываем $\Rightarrow$ ин-л Фурье

§1 Свойства преобразования Фурье

Опр. Ф-я $f(x) \in L_1$ на $\mathbb{R}$, если $f(x)$ инт. (по Риману) на $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$ и сход. несоб. ин-л

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \quad (\equiv M) \qquad (1)$$

Пример. e^{-x^2}, $e^{-|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & |x| \geq 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

Опр. $\forall f(x) \in L_1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx \qquad (2)$$

наз. образом Фурье $f(x)$ (или преоб-ем Фурье $f(x)$)

Обозн. $\hat{f}(y) \equiv F[f](x)$

Теор. 1 Пусть $f(x) \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat f(y)$ определено для $\forall y \in \mathbb{R}$, явл. непр. ф-ей y на $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{|y|\to\infty} |\hat f(y)| = 0$.

$\square$ $|f(x) e^{ixy}| = |f(x)|\,|e^{ixy}| = |f(x)|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Т.к. (1) сход $\Rightarrow$ (2) равном. сх. на $\mathbb{R}$ (по признаку Вейерштрасса) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat f(y)$ опред. $\forall y \in \mathbb{R}$.

$f(x)$ не явл. непр. в общем случае $\Rightarrow$ теор. о непр-ти НИЗП неприменима.

Р. ФП $I_n(y) = \int\limits_{-n}^{n} f(x) e^{ixy}dx$

(2) — сх. равном. $\Rightarrow I_n(y) \rightrightarrows \hat f(y)$, $n \to \infty$ на $\mathbb{R}$

Д-м, что $I_n(y)$ непр. для $\forall n$ в $\forall y \in \mathbb{R}$.

Фикс. $\forall n$, $\forall y \in \mathbb{R}$, Δy — прир.

$$|I_n(y+\Delta y) - I_n(y)| = \left|\int\limits_{-n}^{n} f(x)\left(e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}\right)dx\right| <$$

$<$ { e^{ixy} на $P = [-n,n]\times[c,d]$

фикс $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall [c,d] \ni y$

e^{ixy} равном. непр.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $|\Delta y| < \delta$ $|e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}| < \frac{\varepsilon}{M}$ } $\forall (x,y) \in P$

знач. инт-ла (1)

$$< \frac{\varepsilon}{M} \int\limits_{-n}^{n} |f(x)|dx \le \frac{\varepsilon}{M} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

$\Rightarrow I_n(y)$ непр. на $[c,d]$ и в т. y

$\Rightarrow$ по т. о непр-ти пред. ф-и ФП $\hat f(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n(y)$ явл. непр. ф-ей $\forall y \in \mathbb{R}$.

Д-м, что $\hat f(y) \to 0$ $|y| \to \infty$.

Фикс. $\forall \varepsilon > 0$ (1) — сход $\Rightarrow \exists A > 0$:

$\int\limits_{|x|\ge A} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\hat f(y)| < \left|\int\limits_{-A}^{A} f(x) e^{ixy}dx\right| + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ д-м $\left|\int\limits_{-A}^{A} f(x) e^{ixy}dx\right| < \frac{2}{3}\varepsilon$ $|y| \to \infty$.

Разобьем $[-A, A]$ точками $x_0 = -A < x_1 < \ldots < x_n = A$: $S - \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{3}$

$S = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$$f_1(x) = \begin{cases} M_k, & x_{k-1} < x \le x_k,\ k = 2,\ldots,n \\ M_1, & x_0 \le x_1 \end{cases}$$

$$\int\limits_{-A}^{A} f_1(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} M_k dx = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S$$

$\Rightarrow \int\limits_{-A}^{A} (f_1(x) - f(x))dx < \frac{\varepsilon}{3}$

$f_1 \ge f$ (кроме отдельн. точек)

$$\int\limits_{-A}^{A} |f_1(x) - f(x)|dx = \int\limits_{-A}^{A} (f_1(x) - f(x))dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\left|\int_{-A}^{A} f(x)\, e^{ixy}dx\right| \le \left|\int_{-A}^{A} f_1(x)\, e^{ixy}dx\right| +$$
$\pm f_1(x)$

$$+\left|\int_{-A}^{A}\left(f_1(x)-f(x)\right) e^{ixy}dx\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{k=1}^{n} M_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}dx\right| + \int_{-A}^{A} |f_1(x)-f(x)|\,dx$$

$$\left\{ \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}dx\right| = \left|\frac{1}{iy}\left(e^{ix_k y}-e^{ix_{k-1}y}\right)\right| \le \frac{2}{|y|} \right\}$$

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}\,dx \quad (2)$$

$$|y| > \frac{6\sum_{k=1}^{n}|M_k|}{\varepsilon} = \hat{A}$$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \hat{A}>0 \quad |y|>\hat{A} \quad |\hat{f}(y)|<\varepsilon$, 2)

$\Rightarrow |\hat{f}(y)| \xrightarrow[|y|\to+\infty]{} 0$ теор. д-на.

Следствие $\forall f(x) \in L_1(\mathbb{R})$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$ — косинус-преоб-е Фурье ф-и $f(x)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$ — синус-преоб. Фурье ф-и $f(x)$.

§2. Представление ф-и т-з инт-л Фурье

Опр. Сущ. предел (если он $\exists$) $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat{f}(y)\,e^{-ixy}dy =$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}dy\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{iy(u-x)}\,du \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)\,e^{-ixy}dy. \quad (3)$$

наз. интегралом Фурье ф-и $f(x)$ (обратным преобр.-ем Фурье от $f(x)$).

обозн. $F^{-1}[f](x)$

Теор. 2 $\exists f(x)\in L_1(\mathbb{R})$ и в кажд. т. $x_0\in\mathbb{R}$ удовлетв. справа усл-ю Гёльдера с показ. $\alpha_1\in(0,1]$ и слева — усл. Гёльдера с показ. $\alpha_2\in(0,1]$

$\Rightarrow$ Предел (3) $\exists$ инт. Фурье сходится и его зн-е равно $\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} \underset{\text{обозн.}}{=} f_0$.

$\square$ $J_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat{f}(y)\,e^{-ixy}dy$ — $\exists$ (т.к. непр. подынтегр. ф-я) непр. по Т1.

Инт. по (4) в (3) $\Rightarrow$ абсолют.-сход.

по $P=[-\lambda,\lambda]\times[a,b]$ (y, u) $\int$-инт. $\xRightarrow[\text{к теор. 3 п. 9}]{\text{теор. 1}}$

$$\int dy\int du = \int du\int dy$$

$$J_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat{f}(y)\,e^{-ixy}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)du\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{iy(u-x)}dy$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{iy(u-x)}dy = \frac{1}{i(u-x)}\left(e^{i\lambda(u-x)}-e^{-i\lambda(u-x)}\right) =$$

$$= 2\,\frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x}$$

$$J_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x}\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$
$u-x=t$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{— инт-л Дирихле}$$
$\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = 1.$$

$$\frac{f(x_0+0)}{2} = \frac{2}{\pi\cdot 2} \int_0^{+\infty} f(x_0+0)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$

$$\frac{f(x_0-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} f(x_0-0)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$

$$\Delta_\lambda = J_\lambda - f_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(f(x_0+t) - f(x_0+0)\right)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(f(x_0+t) - f(x_0-0)\right)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$

f в т. x_0 удовл. усл. Гёльдера

$M = \max(M_1, M_2)$, $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$

$\exists\, \delta > 0: |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le M t^\alpha,\ \forall t \in (0,\delta)$

$|f(x_0+t) - f(x_0-0)| \le M|t|^\alpha,\ \forall t \in (-\delta, 0)$ (H)

$$\Delta_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(f(x_0+t) - f(x_0+0)\right)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}\left(f(x_0+t) - f(x_0-0)\right)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta} f(x_0+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{2}{\pi} f_0\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt =$$
$$= J_1 + J_2 + J_3 - J_4$$

$$|J_1, J_2| \underset{(H)}{\le} \frac{M}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{t^\alpha}{t}\,dt = \frac{M\delta^\alpha}{\pi} < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$$
$$\int_0^{\delta} = \int_{-\delta}^{0} \frac{|t|^\alpha}{t}\,dt. \qquad \Rightarrow \delta = \delta(\varepsilon)$$

$$J_3 = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta} f(x_0+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt =$$

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+t)}{t}, & |t| \ge \delta \\ 0, & |t| < \delta \end{cases} \in L_1(\mathbb{R}) \quad \left\{\text{т.к. } f(x) \in L_1(\mathbb{R}),\ \frac{1}{t} \text{ — огран.}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \xrightarrow[\text{из т. Р-Л}]{\text{следствие}} 0 \text{ при } \lambda \to +\infty$$

$\exists\, \Lambda > 0: \forall \lambda > \Lambda \quad |J_3| < \frac{\varepsilon}{4}$.

$$J_4 = \frac{2}{\pi} f_0 \int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \underset{\lambda t = y}{=} \frac{2}{\pi} f_0 \underbrace{\int_{\lambda\delta}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy}_{\text{остаток сходящ. инт-ла}} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \exists\, \Lambda > 0: \forall \lambda > \Lambda \quad |J_4| < \frac{\varepsilon}{4}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \Lambda > 0: \forall \lambda > \Lambda$

$|\Delta_\lambda| < \frac{\varepsilon}{4}\cdot 4 = \varepsilon$.

т.е. $\exists \lim\limits_{\lambda\to+\infty}(J_\lambda - f_0) = 0 \Rightarrow$

$$= f_0 = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{-ixy}\,dy.$$

∎

Доп-е к главе 9, §6.

Равномерная сх-ть ТРФ ф-ий из классов Гельдера.

Опр. Пусть $f(x)$ непр. на $[a,b]$. $\forall \delta>0$ модулем непр-ти $\omega(\delta,f)$ ф-и $f(x)$ на $[a,b]$ наз-ся

$$\omega(\delta,f)=\sup_{\substack{x',x''\in[a,b]:\\ |x'-x''|<\delta}} |f(x')-f(x'')|$$

Из т. Кантора $\Rightarrow$ если $f(x)$ непр. на $[a,b]$ $\Rightarrow \omega(\delta,f)\to 0$ при $\delta\to 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \omega(\delta,f)=\bar{o}(1)$ при $\delta\to 0$.

Если $f(x)$ им. огранич. произв-ю $f'(x)$, то $\omega(\delta,f)=\underline{O}(\delta)$

т.к. $|f(x')-f(x'')|\le|f'(\xi)|\,|x'-x''|\le M\delta$

$\exists$ ф-и для кот. $\omega(\delta,f)=\underline{O}(\delta^\alpha)$, $\alpha<1$

Пример. Можно д-ть, что: $x^{\frac1n}$: $\omega(\delta,x^{\frac1n})=\underline{O}(\delta^{\frac1n})$ на $[0,1]$

Опр. Классом Гельдера $C^\alpha[a,b]$ с показ. $\alpha\in(0,1]$ наз-ся мн-во всех таких ф-й $f(x)$, что $\omega(\delta,f)=\underline{O}(\delta^\alpha)$

$x^{\frac13}\in C^{1/3}[0,1]$

Теор. 18. Пусть $f(x)\in C^\alpha[-\pi,\pi]$, $\alpha\in(0,1]$, $f(-\pi)=f(\pi)$

$\Rightarrow S_n(x,f)\rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$.

$\square$ $|f(x+t)-f(x)|\le M|t|^\alpha$, $\forall t: |t|<\delta$, $x\in[-\pi,\pi]$

далее —//— т. 17 $\blacksquare$

Теор. 19. $f(x)\in L[-\pi,\pi]$, 2π-пер.

Пусть $f(x)\in C^\alpha[a,b]$ $b-a\le 2\pi$

$\Rightarrow \forall\delta\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$: ТРФ сх. равн. к $f(x)$ на $[a+\delta,b-\delta]$

$\square$ $|f(x+t)-f(x)|\le M|t|^\alpha$ $\forall x\in[a+\delta,b-\delta]$, $|t|\le\delta$.

далее —//— т. 17. $\blacksquare$