Учебники

1. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов "ТФКП"
2. А.И. Маркушевич → Теория аналитических функций
↘ ~~Введение~~ Краткий курс теории аналитических ф-й

[Лекция 1] 09.02.06

Тема 1.

§ Комплексные числа и действия с ними.

§1 ~~Введение~~

$z = (a, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$

$a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Пусть $z_1 = (a_1, b_1)$ $z_2 = (a_2, b_2)$

$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Пары вида $(a, 0)$ можно отождествить с вещ. числами a.

Пусть $i = (0, 1)$

$(0,1)(0,1) = (-1, 0) = -1 \Rightarrow i^2 = -1$

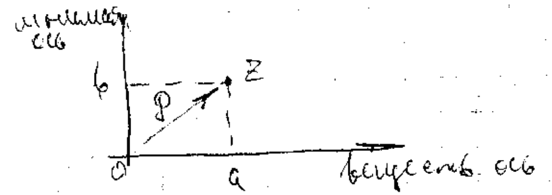
$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$ — алгебраич. форма числа z

$z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$ — сопряженное число

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$

§2 Комплексная плоскость



$O=(0,0)$

$z=(a,b)$

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$ - модуль числа z

φ - аргумент z.

$\varphi=\operatorname{Arg} z=\{\varphi_0+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}\}$, $\left[\begin{array}{l}\varphi_0\in[0,2\pi)\\ \varphi_0\in(-\pi,\pi]\end{array}\right.$

φ_0 - главное значение аргумента

$\varphi_0=\arg z$.

$a=\rho\cos\varphi$, $b=\rho\sin\varphi$ $\quad \varphi\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$

$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

если $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$

$z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

$z_1z_2=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$\rho=\rho_1\rho_2$ $\quad \varphi=\varphi_1+\varphi_2+2\pi k$ $\left(\varphi=\varphi_1+\varphi_2 \pmod{2\pi}\right)$

$\frac{z_1}{z_2}=r(\cos\psi+i\sin\psi)$

$r=\frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\psi=\varphi_1-\varphi_2 \pmod{2\pi}$

$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \Rightarrow z^n=\rho^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$, $n\in\mathbb{N}$ ф-ла Муавра

$\exists\ \cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$ (пока формально)

$z=\rho e^{i\varphi}$ - показательная форма числа z

$z=\rho e^{i\varphi}$

$z_0^n=z$, z_0 - корень n-й степени из числа z.

Пусть $z_0=\rho_0 e^{i\varphi_0}$

$\rho_0^n e^{in\varphi_0}=\rho e^{i\varphi} \Rightarrow$

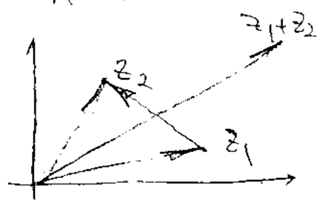
$\Rightarrow \rho_0^n=\rho$, $\quad n\varphi_0=\varphi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

$\rho_0=\sqrt[n]{\rho}$ (+) $\quad \varphi_0=\frac{\varphi}{n}+2\frac{k}{n}\pi$

$k=0,1,\dots,n-1$

$\frac{\varphi}{n},\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \dots,\ \frac{\varphi}{n}+2\frac{n-1}{n}\pi$

$\Rightarrow$ Из ненулевого комплекс. числа $\exists\, n$ корней n-й степени



$z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$

$\overline{z_1z_2}=\{a_2-a_1,\ b_2-b_1\}$ - геом. изобр-е числа z_2-z_1

$|z_2-z_1|$

$|z-z_0|=R$, $\quad |z-z_0|<R$, $\quad |z-z_0|>R$

окр-ть радиуса R с центр. в т. z_0 $\quad$ круг —//— $\quad$ множество точек, вне по отн-ю к кругу —//—

$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ (из нер-ва тр-ка)

§3. Предел последовательности

$K_\varepsilon(z_0)$ – круг радиуса ε с центром в z_0

$K_\varepsilon(z_0)$ – ε-окр-ть т. z_0.

$|z-z_0|<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n\geq N_\varepsilon\ |z_n - z_0|<\varepsilon$

$z_0 = a_0 + ib_0$, $z_n = a_n + ib_n$.

$\sqrt{(a_n-a_0)^2+(b_n-b_0)^2}<\varepsilon$.

Т.е. сх-ть посл-ти компл. чисел равносильно сх-ти двух вещ. посл-й

Теор. 1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0\\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0\end{cases}$

$z_n = a_n + ib_n$
$z_0 = a_0 + ib_0$

Опр $\{z_n\}$ – огранич. пос-ть, если $\exists M>0 : |z_n|\leq M\ \forall n$

Теор. 1.2 (т. Больцано-Вейерштрасса)

Из всякой ограниченной пос-ти компл. чисел можно извлечь сходящуюся подпосл-ть.

Опр $\{z_n\}$ – фунд. посл., если $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall n, m\geq N$ $|z_n - z_m|<\varepsilon$

Теор. 1.3 (критерий Коши)

Посл. $\{z_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.

§4 Бесконечно удаленная точка

Введем еще компл. число ∞:

① $|\infty| = +\infty$

② $\infty \pm a = a \pm \infty = \infty$

③ если $\alpha\neq 0,\infty$ $\alpha\cdot\infty = \infty\cdot\alpha = \infty\cdot\infty = \infty$

④ $\frac{a}{\infty}=0$

⑤ $\frac{\infty}{a}=\infty$

⑥ $\frac{\alpha}{0}=\infty$

⑦ $\infty\pm\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$ не определены.

Принято окр-тью ∞ считать $\forall$ мн. ва, заданные нер-м $|z|>R$

$\forall A>0\ \exists N : |z_n|>A\ \forall n\geq N$ – б.б. посл-ть
Она сх-ся к числу ∞.

§5. Множества точек на комплексной плоскости

$\mathbb{C}$ - мн-во компл. чисел (конечн)
$\overline{\mathbb{C}}$ - мн-во — // — (расшир.) (добавл ∞)

$M\subset\mathbb{C}$ z_0 - внутр. т. M, если $z_0\in M$ вместе с окр-ю

M – открытое мн-во, если все $\forall$ т. мн-ва прин. ему с некот. окр-ю.

Область 1) открытое мн-во 2) связное мн-во

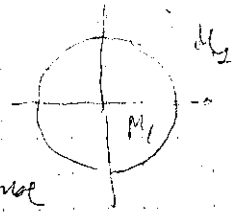
(связность – $\forall$ 2 точки мн-ва M можно соед-ть непр. кривой, целиком лежащ. в M.

$|z| < R$ – открыт. круг.

$\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ – открыт. кольцо } области

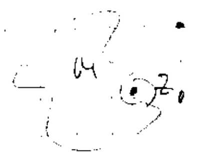
$|z - z_0| \le r$ – не откр. мн-во.

$|z| \ne 1$ – откр., но не связн.



$M = M_1 \cup M_2$,

M_1 и M_2 – связные компоненты



z_0 – граничн., если в $\forall$ ее окр. – ти есть точки, прин. мн-ву и не прин.

Мн-во всех таких точек – граница.

$M \cup \partial M$ – замкн. область

расст. от z_0 до M

$\rho(z_0, M) = \inf\limits_{z \in M} |z - z_0|$

① если z_0 – предельн. точка M, то $\rho(z_0, M) = 0$

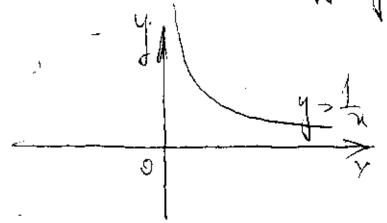
② если M – замкн. и $z_0 \notin M$, то $\rho(z_0, M) > 0$.

16.02.06 [Лекция 2]

$M_1, M_2 \subset \mathbb{C}$

$\rho(M_1, M_2) = \inf |z_1 - z_2|$ $z_1 \in M_1, z_2 \in M_2$.

Теор. 1.4 Пусть M_1 и M_2 – замкн. мн-ва (непересек.) и M_1 – ограниченное мн-во. Тогда $\rho(M_1, M_2) > 0$.



$M_1 = \{Ox \cup Oy\}$

$M_2 = \{y = \frac{1}{x}\}$.

$\rho(M_1, M_2) = 0$.

(б/д) д-во.

Тема 2.

Функции комплексной переменной. Непрерывность и дифференцируемость.

Опр. $E \subset \mathbb{C}$, $w = f(z)$.

$\forall z \in E \to$ одно или неск. зн-й w.

Примеры функц. зависимостей

$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, z^n $(n \in \mathbb{N})$

$\sqrt[n]{z}$ $(n \in \mathbb{N})$ – пример многозначной (n-значн.) ф-и

$\operatorname{Arg} z$ – пример бесконечнозначной ф-и

Вперед будем рассматр. только однозначн. ф-и

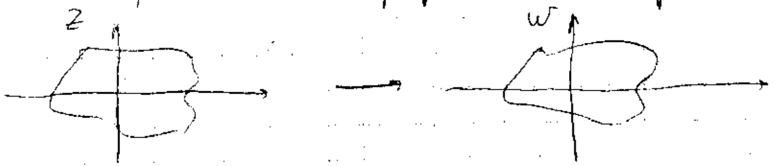
$w = f(z)$

$\operatorname{dom} f$ (domain) – обл. опр-я f

$\operatorname{im} f$ (image) – обл. зн-й f

$E \subset \mathrm{dom}\, f$

$f(E)$ – мн-во образов точек из E.



$z = x+iy$, $w = u+iv$

$w = f(z) \Leftrightarrow w = u(z) + i\,v(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Прим.

$w = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2ixy}_{v(x,y)}$

§1. Предел функции в точке.

$E \subset \mathrm{dom}\, f$

z_0 – предельн. точка E.

Опр. $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z) = A$, если $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $|f(z) - A| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$, $z \in E$

$z = x+iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = f(z) = u+iv$

$A = B + iC$.

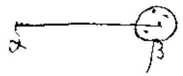
Теор. 2.1 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = B \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = C \end{array}\right.$

Следствие $\exists\, \exists \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = A_1$ $\exists \lim\limits_{z\to z_0} h(z) = A_2 \Rightarrow$

$\lim\limits_{z\to z_0} (g \pm_{\times} h) = A_1 \pm_{\times} A_2$ / если $A_2 \neq 0$, то $\lim\limits_{z\to z_0} \left(\frac{g}{h}\right) = \frac{A_1}{A_2}$.

$\exists\, E = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathrm{dom}\, f = [\alpha,\beta]$.



§2. Непрерывность

$E \subset \mathrm{dom}\, f$.

z_0 – предельн. точка E; $z_0 \in E$.

$f(z)$ непрерывна в т. z_0, если $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Если f непр. в кажд. т. E, то говорят, что f непр. на E.

Обозн. $\underset{\text{на } E}{C(E)}$ – мн-во ф-й непрерывных

Теор. 2.2 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0) \\ \text{и } \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0) \end{array}\right.$

Следствие 1) если g и h непр. в т. $z_0 \Rightarrow$ $g \pm_{\times} h$ непр. в т. z_0, если, кроме того, $h(z_0) \neq 0$, то $\frac{g}{h}$ непр. в т. z_0

2) Пусть $w = f(z)$ непр. в т. z_0, и $\zeta = g(w)$ непр. в т. $w_0 = f(z_0) \Rightarrow$ $\zeta = g(f(z))$ непр. в т. z_0.

$\exists\, E$ – компакт (замкнутое ограничен. мн-во)

3) если $f(z) \in C(E) \Rightarrow f$ ограничена на E

$\exists N > 0$: $|f(z)| \leq N$ для $\forall z \in E$

4) Если $f(z) \in C(E) \Rightarrow |f(z)|$ достигает на E своей точной нижней и верхней граней.

5) Если $f(z) \in C(E) \Rightarrow f(z)$ равномерно непр. на E.

Пусть $E = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$z = \lambda(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ определяет непрерывную кривую ($\lambda(t)$ - непр.) (дугу, линию)

параметрич. ур-е кривой γ

Прим. $z = a\cos t + i\, b \sin t = \lambda(t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$x = a\cos t$, $y = b\sin t$ - эллипс.

Д/З д-ть, что мн-во точек непрерывной кривой есть замкнутое мн-во

§3. Производная, дифференциал

$E \subset \operatorname{dom} f$.

z_0 - предельн. точка E.

$z_0 \in E$.

Если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, то он называется производной ф-и f в т. z_0 и обозн.

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$$

Говорят, что $f(z)$ диффер. в т. z_0.

$z - z_0 = \Delta z$ $\quad f(z) - f(z_0) = \Delta f$

Леpp. 2.3 $f(z)$ диффер. в т. $z_0 \Leftrightarrow$

$$\Delta f = A \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$$

$\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

$A = f'(z_0)$

$w = f(z)$ диффер. в т. z_0

$\zeta = g(w)$ диффер. в т. $w_0 = f(z_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \zeta = g(f(z)) = G(z)$ дифференц.-ма в т. z_0,

$$G'(z_0) = f'(z_0)\, g'(w_0)$$

§4. Условия Коши - Римана

$w = f(z)$ диффер. в т. $z_0 \in G$, G - область

$w = u + iv$; $u(x,y)$, $v(x,y)$

Леpp. 2.4 (усл-е Коши - Римана)

Пусть обл. $G \subset \operatorname{dom} f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$f(z)$ диффер. в т. $z_0 \in G \Leftrightarrow u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в т. (x_0, y_0) и

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0), \quad u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0) \quad (CR)$$

$\square$ ($\Rightarrow$) $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon \cdot \Delta z$

$z = x + iy$

$\Delta z = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$

$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$; $f'(z_0) = a + ib$

$f = u + iv$; $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$

$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y$

$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \varepsilon_1 \Delta y$

Откуда u, v - диффер. в т. (x_0, y_0)

$$\left.\begin{aligned} a &= u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \\ b &= v'_x(x_0, y_0) = -u'_y(x_0, y_0) \end{aligned}\right\} (*)$$

($\Leftarrow$) Примем обозн-е (*)
усл-е диффер-ти u и v

$$① \left\{\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \alpha \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \alpha, \beta \to 0 \text{ при } |\Delta z| \to 0 \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \beta |\Delta z| \quad | \times i \end{aligned}\right.$$

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \underbrace{(a+ib)}_{A}\underbrace{(\Delta x + i\Delta y)}_{\Delta z} + (\alpha + i\beta)|\Delta z| =$$

$= A\Delta z + \varepsilon \Delta z$, где

$\varepsilon = \frac{\alpha + i\beta}{\Delta z}|\Delta z| \Rightarrow |\varepsilon| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \to 0$ при $\Delta z \to 0$

$f'(z_0) = A = a + ib = u'_x + iv'_x =$

$= v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y =$

§5. Аналитические функции

Опр. (Маркушевич) $w = f(z)$ диффер. в каждой точке области G_z, наз. аналитической в G

Опр. (Свешников, Тихонов) $w = f(z)$ аналитическая в обл. G, если f диффер. в $\forall$ точке из G и $f'(z)$ непр. в G.

Аналитич. в т. z_0 $\equiv$ аналитич. в нек. окр-ти т. z_0

Пример. $w = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x\cos y}_{u} + i\underbrace{e^x\sin y}_{v}$

$z = x + iy$

$u'_x = u = e^x\cos y \quad v'_y = e^x\cos y$

$u'_y = -e^x\sin y \quad v'_x = e^x\sin y \Rightarrow$ CR выполн.

значит, w диффер. во всей пл-ти

$w' = u'_x + iv'_x = e^x\cos y + ie^x\sin y = w$

$w' = w$

w - показательная ф-я от z

Т.к. w - непр. в $\mathbb{C}$, а $w' = w \Rightarrow w' \in \mathbb{C}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow w$ - аналитич. во всей $\mathbb{C}$

w - целая аналитич. ф-я.

$w = e^z = \exp(z)$

При $z = i\varphi \quad x = 0, y = \varphi \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Мн-во ф-й, аналитических в G, обознач. $A(G)$

① $f \in A(G) \Rightarrow f \in C(G)$, ~~из диффер-сть~~

[Лекция 3] 22.02.12

② $f, g \in A(G) \Rightarrow f \pm g, f \times g \in A(G)$

если $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in G \Rightarrow \frac{f}{g} \in A(G)$

③ $w = f(z) \in A(G), \quad F = f(G);$

$\zeta = g(w) \in A(\mathcal{E}) \Rightarrow \zeta = g(f(z)) \in A(G)$

④ $f \in A(G)$, G - область $\Rightarrow f(G)$ — область

⑤ $f \in A(G)$, $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in G$

Пусть $w_0 = f(z_0)$

Аналитичность обратной функции.

Тогда $\exists K_\varepsilon(w_0)$: в этой окр-ти $\exists\, z = \varphi(w)$

1) $\forall w \in K_\varepsilon(w_0)$: $f(\varphi(w)) = w$

2) $\varphi \in A(K_\varepsilon(w_0))$

3) $\varphi'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$

⑥ $w = f(z) \in A(G)$

$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

$u(x,y) = C$
$v(x,y) = D$ — 2 семейства кривых уровня.

$z_0 = x_0 + i y_0$ Найдем угол между кривыми уровня.

$\{u'_x, u'_y\}\big|_{(x_0,y_0)}$ и $\{v'_x, v'_y\}\big|_{(x_0,y_0)}$ — нормали

$u'_x v'_x + u'_y v'_y \overset{(CR)}{=} u'_x v'_x - v'_x u'_x = 0 \Rightarrow$

cos угла между нормалями $= 0$, и сл-но угол равен $\frac{\pi}{2}$.

Вывод: линии уровня $u(x,y) = C$ и $v(x,y) = D$, определяемые $f \in A(G)$

пересек. в каждой т. G под прямым углом.

Говорят что такие семейства кривых ортогональны.

§6. Геометрический смысл производной.

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

Пусть $\exists f'(z_0) \neq 0$

$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f'(z_0)| \approx \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$$

Пусть $f(z_0) = w_0$

$|f(z)-f(z_0)|$ — длина отр. $w\,w_0$

$|z-z_0|$ — длина отр. $z\,z_0$.

$|f'(z_0)|$ — коэф-т растяжения в т. z_0 под действием f.

γ: $z = \lambda(t)$, $t \in E = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ — непр. кривая

$z = \lambda(t) = x(t) + i\, y(t)$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

В каждой т. $t_0 \in [\alpha,\beta]$ $\exists\, \lambda'(t_0)$.

$$\lim_{\substack{z\to z_0 = t_0 \\ z \in E}} \frac{\lambda(z)-\lambda(z_0)}{z-z_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\lambda(t)-\lambda(t_0)}{t-t_0} = \cancel{\ldots} =$$

$= \lim\limits_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + i \lim \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$.

$\exists \lambda'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0)$ и $y'(t_0)$

Пусть т. t_0 — неособая (т.е. не обращ. в нуль обе производные) $\exists$ ~~касат.~~ $\lambda'(t_0)\neq 0$

$\lambda'(t_0) = x'(t_0) + i y'(t_0)$

$\operatorname{tg} \underbrace{\operatorname{Arg}\lambda'(t_0)}_{\varphi} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} =$

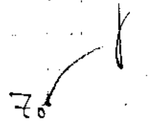
Из курса ан-за 2 семестра:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $x'(t_0)\neq 0$, $y = y(x)$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $y'_x(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

$= \operatorname{tg}$ угла между касательной к ~~...~~ кривой $z=\lambda(t)$ (она же $y=y(x)$) в точке t_0 и веществ. осью

$\operatorname{Arg}\lambda'(t_0)$ есть угол между кас. к графику $z=\lambda(t)$ в т. t_0 и веществ. осью

Выяснить смысл $\operatorname{Arg} f'(z_0)$



$\gamma: z=\lambda(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\lambda(\alpha)=z_0$

Пусть γ: $\lambda(t)$ — гладкая ф-я, $\lambda'(t)\neq 0$.

$\exists w_0=f(z_0)$ и $w=f(z)$

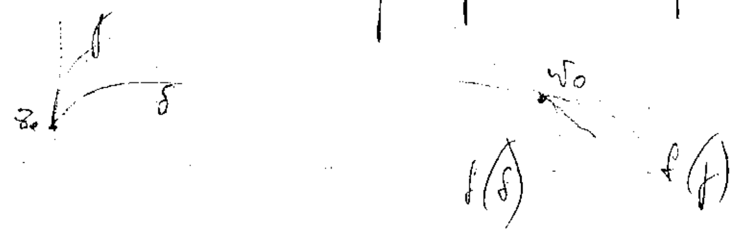
$\gamma \xrightarrow{f} w = f(\lambda(t)) = \mu(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\mu'(\alpha) = \lambda'(\alpha)\cdot f'(\lambda(\alpha)) = \underbrace{\lambda'(\alpha)}_{\neq 0}\,\underbrace{f'(z_0)}_{\neq 0} \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{Arg}\mu'(\alpha) = \operatorname{Arg}\lambda'(\alpha) + \operatorname{Arg} f'(z_0)$

$\boxed{\operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg}\mu'(\alpha) - \operatorname{Arg}\lambda'(\alpha).}$

Аргумент производной показ. насколько поворач. касательная при действии ф-и f.



Угол между касат. к γ и δ при действии ф-и f не меняется

§6 Конформное отображение

Опр (локальная конформность)

Отображение, задаваемое непрерывной ф-ей $w=f(z)$ наз-ся конформным в т. z_0, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими ч-з z_0.

Теор 25 Если $f'(z_0)\neq 0$ то отображение, задаваемое ф-ей f ~~непрерывн~~ конформно в т. z_0!

□ Фактич. д-во выше ■

Опр. (глобальная конформность)

Пусть f отображает область D в обл. G. Если соответствие между точками областей D и G взаимно однозначное $(1-1)$ и f конформно в $\forall$ т. $z_0 \in D$, то говорят что f отображает D в G конформно

Тема 3.

Элементарные аналитические функции и связанные с ними конформные отображения.

§1 Целые линейные функции

$w = L(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha, \beta = const$

Будем в дальнейшем предполагать, что $\alpha \neq 0$.

$L'(z) = \alpha \neq 0 \Rightarrow L(z)$ аналитическая

$L(z)$ осущ. взаимно однозн. соотв-е $\Rightarrow$

$L: \mathbb{C} \xrightarrow{\text{конформно}} \mathbb{C}$

Пусть $\alpha = 1$, $w = L(z) = z + \beta$. сдвиг компл. пл-ти на β.

$\alpha \neq 1$ $\quad \gamma = L(\gamma) = \alpha\gamma + \beta \Rightarrow \gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$

неподвижн. точка отображ-я $w = L(z)$

$$\begin{cases} w = \alpha z + \beta \\ \gamma = \alpha\gamma + \beta \end{cases} \Rightarrow w - \gamma = \alpha(z - \gamma)$$

$\alpha = \rho e^{i\varphi}$

$w - \gamma = \alpha(z - \gamma) = e^{i\varphi}\rho(z - \gamma)$

Конформн. отобр. состоит в растяжении с поворотом на $\arg\alpha$ в-ра $w - \gamma$.

$\exists \lim\limits_{z\to\infty} L(z) = \lim\limits_{z\to\infty}(\alpha z + \beta) = \infty$.

$L(\infty) = \infty$

§2. Дробно-линейные функции

$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d = const$, причем

$\Delta = ad - bc \neq 0$

Δ – определитель ф-и $L(z)$

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

п.1. Групповые св-ва дробно-линейных отображений

$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\alpha a z + \alpha b}{\alpha c z + \alpha d}$

$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha^2 \Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для $\forall$ д/л функции $\exists$ представление с $\Delta = 1$.

Выясним когда $L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ $\quad L_2 = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$

$L_1(z) = L_2(z)$ для $\forall z$

$(a_1 z+b_1)(c_2 z+d_2) = (a_2 z+b_2)(c_1 z+d_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1c_2 = a_2c_1 \quad b_1d_2 = b_2d_1 \quad a_1d_2+b_1c_2 = a_2d_1+b_2c_1$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{b_1}{b_2} \equiv \alpha$

(если у одной из дробей числит. или знамен. $=0$, то и у дробей в другой тоже)

$L_1(z), L_2(z)$

$L = L_2(L_1(z)) = \dfrac{a_2 \frac{a_1 z+b_1}{c_1 z+d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z+b_1}{c_1 z+d_1} + d_2} = \dfrac{a_3 z+b_3}{c_3 z+d_3}$

Проверим, что $\Delta_3 \neq 0$.

$a_3 = a_2a_1+b_2c_1$; $b_3 = a_2b_1+b_2d_1$; $c_3 = c_2a_1+d_2c_1$

$d_3 = c_2b_1+d_2d_1$

$L_1 \to A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \to A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$L_3 \to A_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

Тогда $A_3 = A_2A_1$ (из ф-л $a_3, \dots, d_3$)

т.к. $\Delta_2 \neq 0, \Delta_1 \neq 0 \Rightarrow \Delta_3 \neq 0$.

Значит, L (композиция L_1, L_2) – д/л ф-я

$I(z) = z$ – тожд. отобр-е – тоже д/л

$I(z) = \frac{1\cdot z+0}{0\cdot z+1} \to \underset{\text{переход к матр.}}{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\Delta = 1$.

$\hat{L}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$

$L\hat{L} = \hat{L}L = I$.

Мн-во д/л ф-й с опер-ей композиции есть группа, изоморфная группе 2×2 – матриц с комплексн. эл-ми и опред-м, равным 1.

$SL_2(\mathbb{C})$ – спец. лин. группа 2-го пор-ка

[Лекция 4] 09.03.06

<u>Конформность.</u>

$\mathrm{dom}\, L = \{z \neq \delta = -\frac{d}{c}\}$

$c \neq 0$ $\quad\delta$ – особая точка.

$\mathrm{im}\, L = \mathrm{dom}\, L^{-1} = \{w \neq \frac{a}{c}\}$

$L^{-1}(z) = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{dz-b}{-cz+a}$, $z \neq \frac{a}{c}$

$w' = L'(z) = \frac{\overset{\neq 0}{\Delta}}{(cz+d)^2} \neq 0$.

локальная конформность в ~~каждой~~ к.т. $\in \mathrm{dom}\, L$.

$\mathrm{dom}\, L \xrightarrow[\text{соответствие}]{L} \mathrm{im}\, L$

$z \to \delta \quad L(z) \to \infty$

$z \to \infty \quad L(z) \to \frac{a}{c} = \varepsilon$

Положим $L(\delta) = \infty; \; L(\infty) = \frac{a}{c}$.

Значит, $L(z)$ — однозн. отобр-е

$\overline{\mathbb{C}} \xrightarrow[\text{взаимн.-однозн.}]{L} \overline{\mathbb{C}}$

Всякое L одну. конформной автоморфизм мн-ва $\overline{\mathbb{C}}$

$L \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$ (Automorphizm)

Более того, можно п-ть, что таких отобр-й $\overline{\mathbb{C}}$ других только L.

$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(L \neq e)$

$L(\infty) = \infty$.

$z = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ — неподвижная точка

$cz^2 - (a-d)z - b = 0$ — корень вели. ком. зн-я.

$z_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$

$I(z) = z$ — ф-я тождественная

Теор. 2! Пусть $L, \Lambda \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$, z_1, z_2, z_3 попарно различны

если $L(z_i) = \Lambda(z_i)$, $i = \overline{1,3}$ $\Rightarrow$

$L(z) \equiv \Lambda(z)$

☐ Положим $U = \Lambda^{-1} L$

$L(z_i) = \Lambda(z_i) \Rightarrow U(z_i) = z_i \quad i = 1,2,3$

также мет., но у нее 2 таких точки

$\Rightarrow U = I \sim \Lambda^{-1} L = I \sim L = \Lambda$

☑ Инвариантность двойного отношения

Теор. 3.1 Пусть z_1, z_2, z_3 — конечн. попарн. разл.

w_1, w_2, w_3 — — " — — " —

Построить ф-ю $L \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$:

$L(z_i) = w_i$

☐ Из ст. 2 $\Rightarrow$, что если реш-е $\exists$, то оно!

$$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} : \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \quad (*)$$

Задача Проверить, что $(*)$ определяет w как дробно-лин. ф-ю от z. $L = w(z)$

a, b, c, d — попарно разл. числа

$\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-a}{d-b} = (a, b, c, d)$

двойное (ангармонич.) соотношение

$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

(причем $\Rightarrow$ $(*)$)

Утв. 3.2 Двойное отношение есть инвариант д/л преобразования.

$L \in Aut(\bar{\mathbb{C}})$: a, b, c, d — попарно различные

$$A = L(a) \quad B = L(b) \quad C = L(c), D = L(d)$$

$$(a,b,c,d) \Rightarrow (A,B,C,D)$$

□ Будем рассм. L как реш-е 3.1 для чисел a,b,d и A,B,D. Тогда L неявно определяется рав-вом (*)

$$\frac{w-A}{w-B} : \frac{D-A}{D-B} = \frac{z-a}{z-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

$C = L(c) \Rightarrow$

значит, $(A,B,C,D) = (a,b,c,d)$

■

Формула (*) сохраняет силу и в том сл-е, если какое-либо из чисел z и/или какое-либо из чисел $w = \infty$. В этом сл-е у (*) нужно удалить разности, содерж. бескон. удал. точки

Круговое свойство

Утв. 3.3 Под действием $L \in Aut(\bar{\mathbb{C}})$ прямая или окр-ть переходит в прямую или окружность.

□ Прямые и окр-ти могут быть описаны ур-ем вида:

$$A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 \quad (*)$$

$A = 0$, $B^2 + C^2 \neq 0$ — прямая

$A \neq 0$ и $B^2 + C^2 - AD > 0$ — окружность

$$\left(x^2 + 2\frac{B}{A}x + \frac{B^2}{A^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{C}{A}y + \frac{C^2}{A^2}\right) = \frac{B^2}{A^2} + \frac{C^2}{A^2} - \frac{D}{A}$$

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - AD}{A^2}$$

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \quad \mathcal{B} = B + iC$$

$$A z\bar{z} + \bar{\mathcal{B}} z + \mathcal{B}\bar{z} + D = 0 \quad (**)$$

$A = 0$, $\mathcal{B} \neq 0$ прямая

$A \neq 0$ $|\mathcal{B}|^2 - AD > 0$ окруж.

Д-во утв. 3.3

Начнем с простейш. ф-и $w = \frac{1}{z} = L_0$

Пусть Γ — произв. прямая или окружность, заданная ур-ем (**)

Положим $\Gamma' = L_0(\Gamma)$

Тогда Γ': $A\frac{1}{w\bar{w}} + \bar{\mathcal{B}}\frac{1}{w} + \mathcal{B}\frac{1}{\bar{w}} + D = 0 \sim$

$\sim D w\bar{w} + \mathcal{B} w + \bar{\mathcal{B}}\bar{w} + A = 0$

$D = 0$:
- $\to A = 0 \Rightarrow \mathcal{B} \neq 0$ (по исходной посылке) $\Rightarrow$ прямая
- $\to A \neq 0 \Rightarrow |\mathcal{B}|^2 - AD = |\mathcal{B}|^2 > 0 \Rightarrow$ прямая

$D\neq 0$ ↗ $A=0 \Rightarrow E\neq 0 \Rightarrow |E|^2-AD=|E|^2>0$ – окр.
↘ $A\neq 0 \Rightarrow |E|^2-AD>0$ – окр-ть

Пусть $w=\underset{(c\neq 0)}{L(z)}=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{\overbrace{bc-ad}^{-\Delta}}{c(cz+d)}$

$w=L(z)=L_2(\Lambda(L_1(z)))$

$z_1=L_1(z)=cz+d$

$z_2=\Lambda(z_1)=\frac{1}{z_1}$

$w=L_2(z_2)=\frac{a}{c}-\frac{\Delta}{c}z_2$

$\Rightarrow \forall$ д/л ф-я может быть предст. как композ-я 3-х отобр., 1-й и 3-й из кот. – линейные, а одно – инверсия) облад. ~~свой~~ круг. св-м. Линейные тоже облад. этим св-м.

Что представл-е и уже дока. справедливость св-ва для инверсии, устанавливаем круг. св-во для $\forall$ д/л ф-и.

■

$\forall\ w=\underset{(c\neq 0)}{L(z)}=\frac{az+b}{cz+d}$

$\delta=-\frac{d}{c}$ – особая точка.

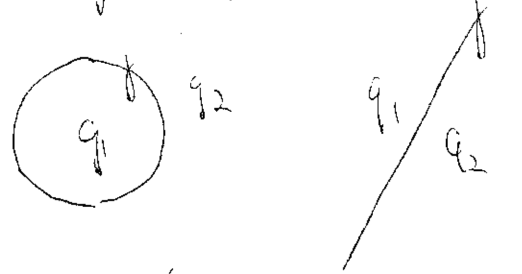
γ – произв. прямая (окр-ть) и $\forall$ 2 ситуации

① γ проходит т-у δ

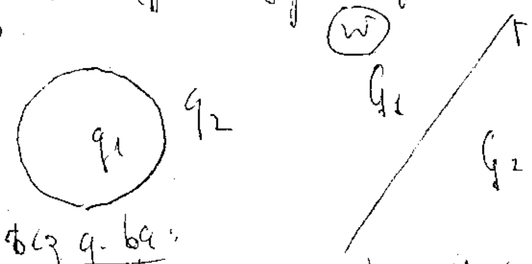
Тогда $\Gamma=L(\gamma)$ должна проходить т-у образ δ, т.е. ∞, что быть не может

значит Γ – прямая.

② γ не прох. т-у $\delta \Rightarrow \Gamma$ не прох. т-у ∞, что значит, что Γ – окр-ть.



$\Gamma=L(\gamma)$ Здесь опр-ти Γ – прямая.



без д.-ва:

$g_1 \xrightarrow[\text{конф}]{L} \{G_1,G_2\}$ (в G_1 или G_2)

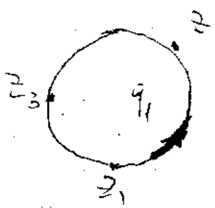
$g_2 \xrightarrow[\text{конф}]{L} \{G_1,G_2\}$ (в другую из G_1 или G_2)

Определим, в какие именно об-ти перейдут g_1 и g_2. 2 способа.

① фикс. $\forall$ т. $z_0\in g_1$ и находим её образ $w_0=L(z_0)$.

Если $w_0\in G_1$ (или G_2), то $g_1 \xrightarrow{L} G_1$ (или G_2).

② Выберем на γ точки z_1, z_2, z_3 с условием, гарантирующим: направление движ. по γ от z_1 к z_3 ч-з z_2 будет g_1 слева от себя (положит. направ. обхода)



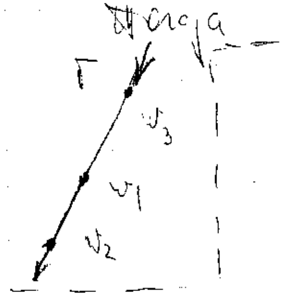
Возьмём $w_1 = L(z_1)$,

$w_2 = L(z_2)$

$w_3 = L(z_3)$

$\exists$ наблюдатель движ. от w_1 к w_3 через w_2 видит слева от себя область g_1 (или g_2).

Тогда $g_1 \xrightarrow{L} G_1$ (или G_2)



Пусть g - обл. на пл-ти z, кот. либо полупл-ю, либо внутр. круга, либо внешностью круга.

G - обл. на w этих же 3-х типов.

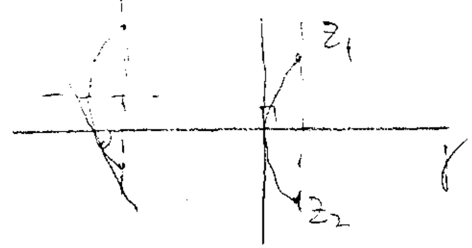
Тогда $\exists$ д/л преобразования $w = L(z)$, конформно отображающие g на G.

Фикс. $\forall$ т. z_1, z_2, z_3 на $\gamma = \partial g$ указывающие положит. напр-е обхода для γ.

Фикс. $\forall$ точки на пл-ти w на $\Gamma = \partial G$ — // — Γ.

З.1. Строим $w = L(z)$ как реш-е задачи для троек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3.

Сохранение симметрии.



Если пара т. z_1 и z_2 располож. так, что прямая, проход. ч-з z_1 и z_2, или окр., проход. ч-з z_1 и z_2 ортогон. γ, то z_1 и z_2 симм. отн. γ.

Опр. Пусть γ - окружность, точки z_1 и z_2 симметричны относительно γ, если прямая и всякая окр-ть, проходящие ч-з точки z_1 и z_2, ортогональны γ.

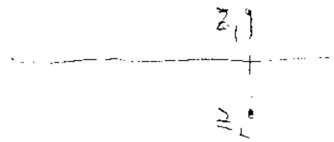
Задача 2 $\gamma: |z - z_0| = R$ если z_1 и z_2 симм. отн. γ, то $|z_0 - z_1||z_1 - z_2| = R^2$

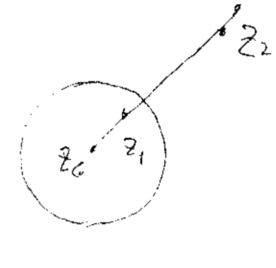
z_1 и z_2 леж. на одном луче, провед. из т. z_0 по разные стороны от γ

Задача 3 $z_2 = z_0 + \frac{R^2}{\bar z_1 - \bar z_0}$ верно для $\forall z_1, z_2$, симм. отн. γ

[Лекция 5]

Задача 2 $z_2 = z_0 + \frac{R^2}{\bar z_1 - \bar z_0}$





z_1, z_2 – симм. отн. $\gamma: |z-z_0|=R$.
$|z_0 z_1|\,|z_0 z_2| = R^2 \Rightarrow z_2 = z_0 + \dfrac{R^2}{\bar z_1 - \bar z_0}$
$|z_1 - z_0|$ – расст-е.

Теор. 3.11 Всякое д/л преобр-е $L(z) \in Aut(\bar{\mathbb{C}})$ сохраняет симметрию пары точек отн. прямой или окр-и.

$\square$ $L(z)$ д/л ф-я, γ – пр. или окр-ть, z_1 и z_2 – симм. отн. γ.
$\Gamma = L(\gamma)$, $w_1 = L(z_1)$, $w_2 = L(z_2)$
w_1 и w_2 симм. отн. Γ?

$\exists\, \Delta$ – прямая или окр-ть, прох. через w_1 и w_2. Тогда $\delta = L^{-1}(\Delta)$ – есть пр. или окр-ть, прох. чз z_1 и z_2.
$\Rightarrow \delta$ перес. γ ортогонально (z_1 и z_2 – симм. отн.) $\Rightarrow \Delta$ перес. Γ ортог. (конформность ф-и $L(z)$) $\Rightarrow$
w_1 и w_2 симм. отн. Γ (всегда, т.к. $\forall \Delta$)

$\blacksquare$

Прим. Построить $w = L(z) \in Aut(\bar{\mathbb{C}})$, отображающую $|z|<R$ на $|w|<R$ так, что заданное α ($|\alpha|<R$) перех. в центр ($w_0 = 0$).

1) $\alpha = 0$ $w = \mu z$, где $|\mu| = 1$
б-ть – начальных условий реш-й нет

2) $\alpha \neq 0$. т. α^* – симм. α отн. γ.
$\gamma: |z| = R$
$\alpha^* = \dfrac{R^2}{\bar\alpha}$ $\alpha \to 0$ $\alpha^* \to \infty$
$\Gamma: |w| = R$.
$w = \lambda \dfrac{z-\alpha}{z-\alpha^*}$
$w = \lambda \dfrac{z-\alpha}{z - \frac{R^2}{\bar\alpha}} = \underbrace{-\lambda\bar\alpha}_{\mu} \dfrac{z-\alpha}{R^2 - \bar\alpha z} = \mu \dfrac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}$
для гр. точек $z = Re^{i\varphi}$ $0 \le \varphi \le 2\pi$.
$|w| = |\mu| \dfrac{|Re^{i\varphi} - \alpha|}{|R^2 - \bar\alpha R e^{i\varphi}|} = \dfrac{|\mu|}{R} \dfrac{|e^{i\varphi}|\,|R - \alpha e^{-i\varphi}|}{|R - \bar\alpha e^{i\varphi}|} =$
$= \dfrac{|\mu|}{R} \equiv R$ сопряж. $\Rightarrow$ модули равны
$|\mu| = R^2$
$\mu = R^2 e^{i\psi}$
$w = R^2 e^{i\psi} \dfrac{z-\alpha}{R^2 - \bar\alpha z}$ $0 \le \psi \le 2\pi$.

Доп. усл-я для устр-я неоднозначности:
1) для заданной т. $z_0 \in \gamma$ указать желаемый образ $w_0 \in \Gamma$
2) потребовать, чтобы значение производной $L'(\alpha) > 0$.

$w^2 = R^2 \dfrac{z-\alpha}{R^2 - \bar\alpha z}$ – проверить

ДЗ Описать все д/л преобр-я, отображающие $\operatorname{Im} z > 0$ в единичный круг/ш-пи $w: |w| < 1$

ф-я Жуковского

$w = \lambda(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$\text{dom}\, \lambda = \{z \neq 0\}$

в dom λ дифф. в ∀ т. и $\lambda'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$ – опр-на и непр. при $z \neq 0 \Rightarrow$

аналит. в $\{z \neq 0\}$

При $z = \pm 1 \Rightarrow$ локальн. конформность

в т. $z = \pm 1$ конформность теряется (следует из дальнейшего анализа)

$\text{im}\, \lambda = \overline{\mathbb{C}}$

т.к. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$z^2 - 2wz + 1 = 0$ при ∀ w им. реш-е z_1, z_2

$z_1 z_2 = 1$

Если $w = \pm 1 \Rightarrow z_1 = z_2$

Опр. $\exists f(z) = \lambda(G)$: $f(z_1) \neq f(z_2)$, если $z_1, z_2 \in G$, $z_1 \neq z_2$

Когда говорят, что f однолистна в G

В противн. сл-е, f многолистна в G

(можно говорить о двулистной, n-листн., степенной и т.д. ф-ии в G)

Если f неоднолистна в G, но однолистна в $g \subset G$, то g - область однолистности

$\lambda(z)$ – двулистн. ф-я

$|z| < 1$, $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ и т.д. –

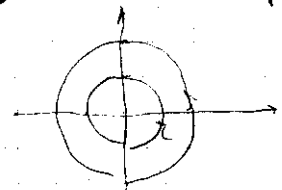
обл. однолистности

Рассм. $\lambda(\varphi) - \lambda(\alpha) = \infty$.

$\gamma_r : z = r(\cos t + i \sin t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$\Gamma_r = \lambda(\gamma_r)$



$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos t -$

$- i\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)\sin t =$

$= a\cos t - ib\sin t$ – комплексное параметрич. ур-е эллипса,

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos t - i\sin t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$

$b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)$

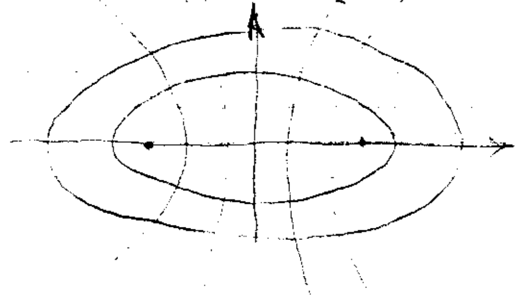
и перед i – обход в отриц. напр-е

$c^2 = a^2 - b^2 = 1$

$F_1(1,0)$, $F_2(-1,0)$ – фокусы

$r \to 0$, $a, b \to \infty$. $0 < r < 1$

$r \to 1$, $a \to 1$, $b \to 0$.



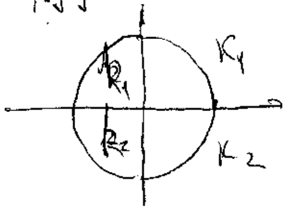
Т.е. мы получили, ед. круг $|z|<1$ под действ. ф-ии $\lambda(z)$ перех. в $\{\mathbb{C} \setminus [-1,1]\}$.

(в конце мн-во Ext $[-1,1]$ или с вырезом по отр. $[-1,1]$)

отобр-е конформно.

Но внешность единичн. круга $\lambda(z)$ действ. также $\Rightarrow$

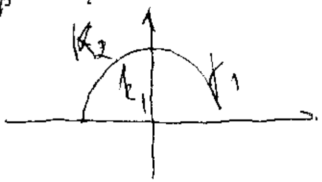
$$|z|>1 \xrightarrow[\text{конф.}]{\lambda(z)} \{\mathbb{C}\setminus[-1,1]\}$$



K_1 $\{|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\} \xrightarrow[\text{конф}]{\lambda(z)} \{\operatorname{Im} w<0\}$

K_2 $\{|z|<1,\ \operatorname{Im} z<0\} \xrightarrow[\text{конф}]{\lambda(z)} \{\operatorname{Im} w>0\}$

K_2 $\{|z|>1,\ \operatorname{Im} z>0\} \xrightarrow[\text{конф}]{\lambda(z)} \{\operatorname{Im} w>0\}$



$\{\operatorname{Im} z>0\} = K_1 \cup K_2 \cup \gamma_1 \xrightarrow{\lambda(z)}$

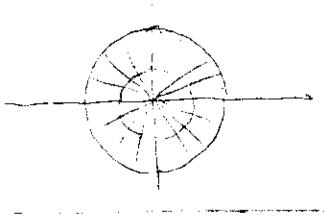
$\xrightarrow{\text{конф}} \{\mathbb{C}\setminus((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))\}$

Прямая γ_2: $z = t(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, α - фикс. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<t<1$ - отрезок

$\Gamma_2 = \lambda(\gamma_2)$

$w = \lambda(z) = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cos\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)\sin\alpha$

$u = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cos\alpha \quad | : \cos\alpha$



$v = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\sin\alpha \quad | : \sin\alpha$

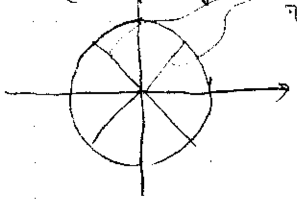
$0<t<1$

искл. t, возв. в кв., вычит. из 1, 2.

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1$$

$c^2 = a^2+b^2 = 1$ $\quad 1, -1$ - фокусы гиперболы, одни и те же для K, (см. рис.)

(софокусные гиперболы)



четверть радиусов есть в гиперболе

(w) в кажд. часть гиперб. перех. отр. в 1-й четв.

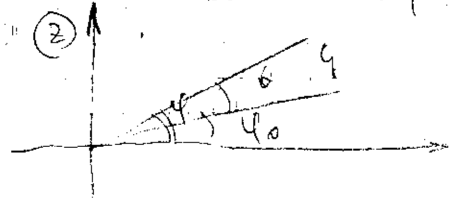
И эллипс перес. с гиперб. под углом $90°$. (из-за конформности

Ф-я $w = z^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$

Определена и симметрична в $\mathbb{C} \Rightarrow$ целая.

$w' = n z^{n-1} \neq 0 \quad \forall z\neq 0 \Rightarrow$ в $\forall$ т. $z\neq 0$ лок. конформн.

Многолистная (n-листная)



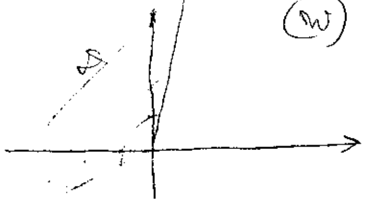
$\theta = \varphi_1 - \varphi_0 \le \frac{2\pi}{n}$.

g - обл. однолистности $w = z^n$.

$\arg z = \varphi_0 \overset{w=z^n}{\Rightarrow} \operatorname{Arg} w = n\varphi_0 + 2\pi k$

$\arg z = \varphi_1 \overset{w=z^n}{\Rightarrow} \operatorname{Arg} w = n\varphi_1 + 2\pi k$

$g \xrightarrow[\text{конф}]{w=z^n} \Delta \qquad \Delta \sim n\alpha$.



При $z=0$ кон. конформн. разрушается.

Показательная функция

$e^z = \exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$

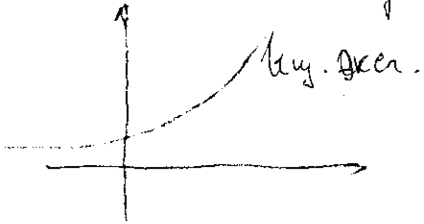
$z = x+iy$

$\operatorname{dom} e^z = \mathbb{C}$; $(e^z)' = e^z$

① $|e^z| = e^x \neq 0 \Rightarrow 0 \notin \operatorname{Im} e^z$

② $y \in \operatorname{Arg} e^z$

③ $e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi))$



$2\pi i$ - период

$\operatorname{Im} e^z = \{w \neq 0\}$

$w = e^z$ Покажем, что ур-е разрешимо отн. z.

$|w| = |e^z| = e^x \Rightarrow x = \ln|w|$

$e^x(\cos y + i\sin y)$

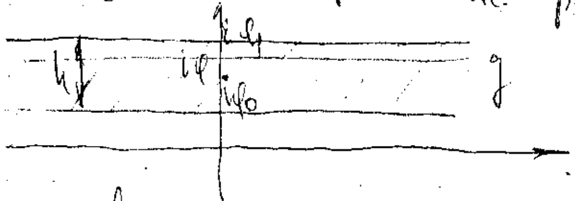
$y \in \operatorname{Arg} w$

$z = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w$ - все реш-я

каждое назыв. натуральным логарифмом числа w.

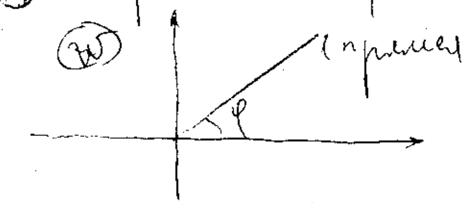
При переменном w ф-я $z = \operatorname{Ln} w$ опр. ф-ю

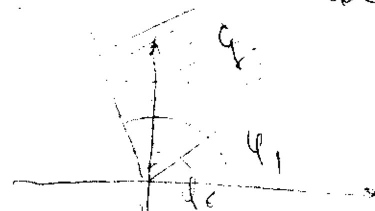
e^z - бесконечнолистн. ф-е



$h = \varphi_1 - \varphi_0 \le 2\pi$. g - обл. однолистности e^z

$\gamma : z = t + i\varphi \xrightarrow{e^z} \Gamma : w = e^z = e^t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $-\infty < t < \infty$





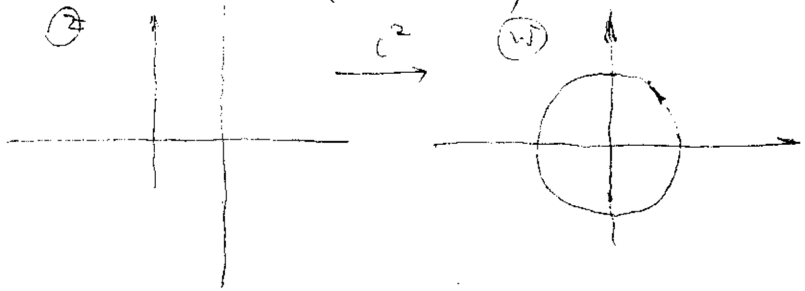
$G: \varphi_0 + 2\pi k \le \operatorname{Arg} w < \varphi_1 + 2\pi k$

$g \xrightarrow[\text{конф.}]{e^z} G$

[Лекция 6]

Посмотрим куда e^z переводит $z = c + it$, $-\infty < t < \infty$

$$w = e^z = e^c(\cos t + i\sin t)$$



(ДЗ) Д-ть, что прямая на пл-ти z, не параллельная никакой коорд. оси, переводится e^z в логарифмич. спираль:

$$\rho = e c^{k\varphi} \text{ в (полярн. коорд.)}$$

Тригонометрические и гиперболические функции

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z};\quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

$\cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ - целые (т.е. аналитические в $\mathbb{C}$)

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ - период $2\pi i$

$\cos z, \sin z$ — период 2π

если $z = x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \Rightarrow \cos z = \cos x$$

На веществ. оси компл. ф-и совпадают с вещественными.

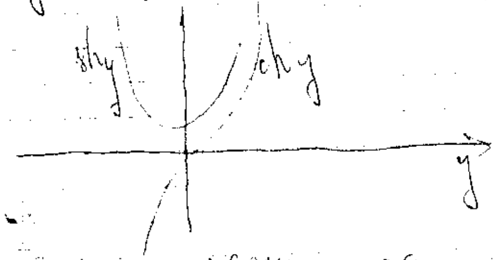
можно вычислить:

$$|\cos z| = +\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$$

$$|\sin z| = +\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$$

$$\operatorname{ch} y \geq |\cos z| \geq +\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = |\operatorname{sh} y|$$

$$\operatorname{ch} y = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} \geq |\sin z| \geq |\operatorname{sh} y|$$



Вне вещ. оси $\cos z$ и $\sin z$ не обращ. в нуль

Но уже при отходе от вещ. оси ($|\operatorname{sh} y|$) cos и sin неограничены, растут по модулю.

Из компл. ан-а верно тождество $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Верные также теоремы сложения и ф-лы приведения (проверяется подстановкой)

Также для гиперболич. ф-й:

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz);\quad \operatorname{sh} z = -i\sin(iz)$$

$\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ — период π

$\operatorname{cth} z$, $\operatorname{th} z$ — период πi.

$(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$.

$\measuredangle\ w = \cos z$

$\exists\ t = e^{iz} \Rightarrow w = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$

$\Rightarrow \cos$ — суперпозиция экспоненты и ф-и Жуковского.

(Д/З) ② Д-ть, что обл. $G = \{0 < x < \pi\}$ под действием $\cos z$ взаимно однозначно отобр. на $G = \{\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}\}$

Тема 4.

Интегрирование функций комплексной переменной

$L:\ z = \lambda(t) = x(t) + i y(t)$

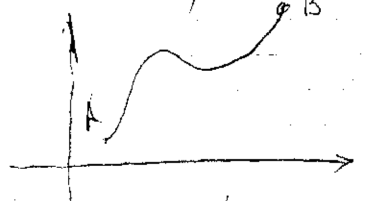
$\alpha \le t \le \beta$

$\exists\ \lambda(t)$ — кусочно-гладкая компл. ф-я (тогда $x(t), y(t)$ — к.-гл. вещ. ф-и)

$A = \lambda(\alpha)$ $B = \lambda(\beta)$, $\alpha \le \beta$

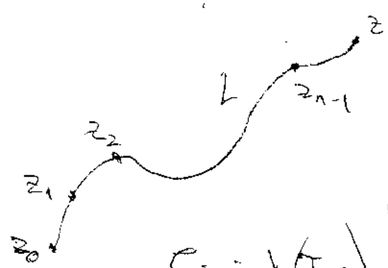
напр-е L: AB

напр-е $-L$: BA



особая точка $x'(t_0) = y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda'(t_0) = 0$.

$\exists$ у $\lambda(t)$ нет особых точек.



$w = f(z)$ кусочно-непрерывна вдоль L.

$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$.

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i \Delta y_k$

$\varsigma_i = \lambda(\tau_i)$ $t_{i-1} < \tau_i < t_i$, $i = \overline{1,n}$

$S(t_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k) \Delta z_k$

$\delta = \max_{1 \le i \le n} |t_i - t_{i-1}|$

$f(z)$ интегр. по L

Компл. инт-л от f по L: $\int_L f(z)\,dz$.

$\varsigma_k = \xi_k + i \eta_k$

$f(\varsigma_k) = u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k) = u_k + i v_k$.

$S(t_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^{n} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^{n} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k)$

$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i \int_L (v\,dx + u\,dy)$

Свойства комплексных интегралов.

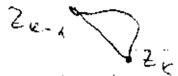
① $\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz$

② $L = L_1 \cup L_2$ (L_1, L_2 не им. общ. внутр. точек)

$\int_L \ldots = \int_{L_1} \ldots + \int_{L_2} \ldots$

③ $\int_L (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,dz = c_1 \int_L f_1\,dz + c_2 \int_L f_2\,dz$

④ $\left|\int_L f(z)\,dz\right| \le \int_L |f(z)|\,d\sigma$



Следует из $|S(\lambda_n, \gamma_n)| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,d\sigma_k$

④' $\left|\int_L f(z)\,dz\right| \le M \cdot$ длина L

$M = \sup_{z\in L} |f(z)|$

⑤ $L: z = \lambda(t)$, $\alpha \le t \le \beta$

$\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\lambda(t))\,\lambda'(t)\,dt.$

Пример. Вычисл. $I = \int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it}\,dt}{\rho e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$

$z = a + \rho e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

$dz = \rho i e^{it}\,dt$

Интегральная теорема Коши

Опр. Кривая $z = \lambda(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ назыв. замкнутой, если $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$.

Опр. Точка $z_0 = \lambda(t_1) = \lambda(t_2)$, $(t_1, t_2) \ne (\alpha, \beta)$ назыв. кратной точкой кривой L.

Опр. Кривая без кратных точек назыв. простой или жордановой.

Опр. Замкн. жорданова кривая наз. контуром.

Ин-л по контуру C — контурн. ин-л.

Обозн.: $\oint_C f(z)\,dz$

C делит пл-ть на 2 части:

int (огран.)

ext (неогр.)

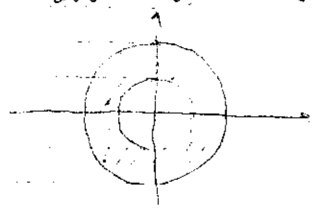
Положит. напр-е обхода контура — при кот. двигаясь видим int C слева от себя.

$\oint_{C^+} f\,dz$, $\oint_{C^-} f\,dz$ — положит. и отриц. напр-е подсчета ин-ла.

Опр. Область g назыв. односвязной, если контур $\gamma \subset g \Rightarrow \operatorname{int}\gamma \subset g$.

В противн. сл-е говорится про неодносвязн. области.

Если ∂g — контур, то g — односвязная область.



— неодносвязн. область

Основная теорема. Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непр. в замкн. области $\bar{D}$, ограничен-ной контуром C и имеют производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, непрерывные в открытой области D

Тогда $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{C+} P dx + Q dy$

при условии, что ин-л в лев части существует хотя бы как несобственный.

Интегральная теорема Коши. Пусть $f(z) \in A(G)$ - аналитична в обл. G. Для всякого контура γ, такого, что $\gamma \subset G$, $\operatorname{int}\gamma \subset G$, справедливо рав-во
$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

□ Положим $D = \operatorname{int}\gamma$ $(D \subset G)$

$$\bar D = D \cup \gamma$$

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma (u dx - v dy) + i \oint_\gamma (v dx + u dy) =$$

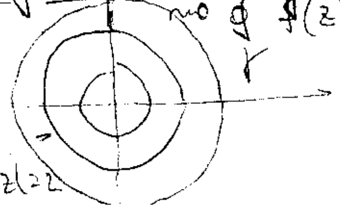
$$= \iint_D \underbrace{(-v'_x - u'_y)}_{0} dx\,dy + i \iint_D \underbrace{(u'_x - v'_y)}_{0} dx\,dy = 0$$

■

Лекция 7

Т $f(z) \in A(G)$ если $\gamma \subset G$, $\operatorname{int}\gamma \subset G \Rightarrow \oint f(z) = 0$

Следствие. Если G - односвязн. обл. и $f(z) \in A(G)$, то $\oint_\gamma f(z)dz = 0$, $\forall \gamma \subset G$.



$\gamma: |z|=2$

$G: 1 < |z| < 3$

$f(z) = \frac{1}{z}$

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Т (Обобщенная теорема Коши) Пусть G - односвязн. область с граничным контуром γ. Если $f \in A(G) \cap C(\bar G)$, то $\oint f(z)dz = 0$.

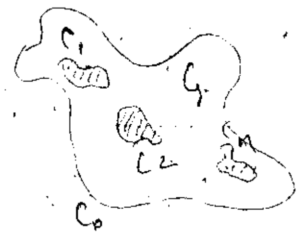
□ Док-во остается тем же, что и в т. Коши, но двойные интегралы нужно понимать как несобственные (приближаем ин-лы (обл.) в $D \subset G$, кот. $= 0$) ■

Опр. G назыв. многосвязной областью ($(n+1)$-связной), если граница ∂G есть т.н. составной контур, т.е. $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$, где

1) $C_1 \ldots C_n \in \operatorname{int} C_0$ (C_0 - внешний контур, $C_1 \ldots C_n$ - внутр. контуры)

2) $C_i \cap C_j = \varnothing$, $i \neq j$ $(i,j = \overline{1,n})$

3) $C_i \not\subset \operatorname{int} C_j$, $i \neq j$ $(i,j = \overline{1,n})$



Положит. напр-е обхода C_i: наблюдатель видит G слева от себя.

Теорема (о составном контуре)

Г G - $(n+1)$-связная область с границей $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$

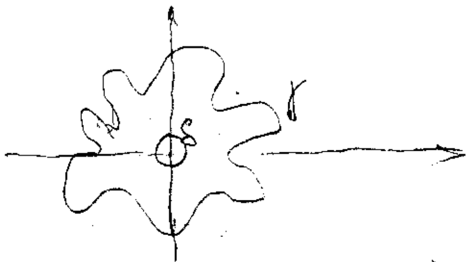
$f(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$

Тогда $\oint_C f(z)dz = 0$.

Д-во остается прежним с учетом того, что основная теорема верна для многосвязных областей.

$\oint_{C^+} f(z)dz = \oint_{C_0^+} \ldots + \oint_{C_1^+} + \ldots + \oint_{C_n^+} = 0.$

$\oint_{C_0^+} f(z)dz = \oint_{C_1^+} f(z)dz + \ldots + \oint_{C_n^+} f(z)dz$



$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$ (сл. из

$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \oint_\delta \frac{dz}{z} = 2\pi i$)

Опр Пусть $f(z) \in C(G)$

Ф-я $F(z) \in A(G)$ наз. первообразной ф-и f, если $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in G$

Совокупность всех первообразных ф-и f в области G наз. ее неопределенным интегралом в обл. G.

Если $F(z)$ - первообр. $f(z)$ в G то неопред интеграл f в G описывается формулой

$\Phi(z) = F(z) + C$

Пусть $\Phi(z)$ - произв. первообр. f. Положим $w(z) = \Phi(z) - F(z)$

$w'(z) = \Phi' - F' = 0 \quad \forall z \in G.$

$w \in A(G)$

$w(z) = u + iv$

$w'(z) = 0 \Rightarrow u'_x \equiv 0;\ u'_y \equiv 0$; $v'_x \equiv 0;\ v'_y \equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,y) = c_1$, $v(x,y) = c_2$ $\Rightarrow w(z) = c_1 + ic_2 = c.$

Следующие 3 усл-я эквивалентны.

$(P, Q \in C(G))$

1) для $\forall$ замкн. кривой $L \subset G$

$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$

2) ин-л $\int_{AB} Pdx + Qdy$

не зависит от выбора пути, соедин. A и B.

3) $\exists$ в G непрерывно дифференцируемая функция $U(x,y)$:

$dU = Pdx + Qdy$

$\int_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$

$f(z) \in C(G)$, $L \in G$

$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy$

След. 3 св-ва эквивалентны.

① (с-св-во)

$\oint_L f(z)dz=0$.

② $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ не завис. от выбора пути, соед. z_0 и z.

③ $\exists\, U, V$ (непр. диффер. в G):

$dU = u\,dx - v\,dy$

$dV = v\,dx + u\,dy$

<u>Теорема</u> (о первообразной)

Пусть $f(z)\in C(G)$ и $f(z)$ облад. в G (с-свойством). Тогда: 1) $F(z)\in A(G)$ 2) $F'(z)=f(z)$

$\zeta=\xi+i\eta$

□ $\int_{z_0}^{z} u\,d\xi - v\,d\eta = U(x,y)-U(x_0,y_0)$

$\int_{z_0}^{z} v\,d\xi + u\,d\eta = V(x,y)-V(x_0,y_0)$ ⇒

$\Rightarrow F(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta = U(x,y)+iV(x,y)+c$,

$c=-U(x_0,y_0)-iV(x_0,y_0)$.

$U'_x=u$, $U'_y=-v$ $\Rightarrow$ $U'_x=V'_y$

$V'_x=v$, $V'_y=u$, $U'_y=-V'_x$.

вып. усл-е К-Р $\Rightarrow F(z)\in A(G)$

$F'(z)=U'_x+iV'_x = u+iv = f(z)$

<u>Следствие 1</u> условия т. о первообразной выполнены, если G - односвязн. область и $f(z)\in A(G)$ (с-св-во вып. в силу т. Коши)

<u>Следствие 2</u> В условиях т. о первообразной

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta + C.$$

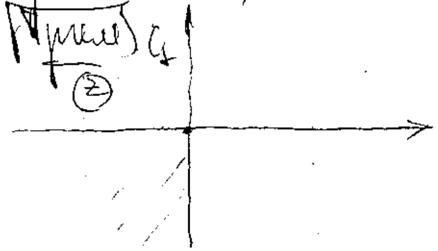
<u>Следствие 3</u> (ф-ла Ньютона-Лейбница)

Пусть $\Phi(z)$ - произв. первообразн.

$\Phi(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta + C$

$z=z_0$: $\Phi(z_0)=C \Rightarrow \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta = \Phi(z)-\Phi(z_0) = \Phi(\zeta)\big|_{z_0}^{z}$

<u>Прим.</u> G (z)



G - односвязн. обл., $f(z)=\frac{1}{z}\in A(G)$

$z_0=1$

$F(z)=\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$.

Согласно т. о первообразной $F(z)\in A(G)$, $F'(z)=\frac{1}{z}$

$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$

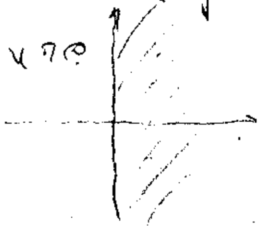
$\ln z = \ln|z| + i\arg z$ - главн. зн-е натур. логарифма числа z

если $z=x+iy$

$\ln|z| = \ln(x^2+y^2) = u$

$u'_x = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad u'_y = \frac{y}{x^2+y^2}$

$x>0$



$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$v'_x = -\frac{y}{x^2+y^2} = -u'_y$ $\Rightarrow$ усл. К-Р. вып.

$v'_y = \frac{x}{x^2+y^2} = u'_x$.

$\Rightarrow \ln z \in A(G)$

$\ln' z = u'_x + i v'_x = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\bar z}{|z|^2} = \frac{1}{z}$.

$F(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln z$.

<u>Интегральная ф-ла Коши</u>

Пусть $f(z) \in A(G)$, $L \subset G$, $\operatorname{int} L \subset G$

Тогда для $\forall z_0 \in \operatorname{int} L$ верно

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

(инт. Коши)

$\square$ $\gamma_\rho: |z-z_0| = \rho$ $\quad(\gamma_\rho \subset \operatorname{int} L)$

2-связн. обл. D с границей $L \cup \gamma_\rho$

$\sphericalangle\ g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$

По т. о составном контуре

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = 1.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z_0)\,dz}{z-z_0} = f(z_0)$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\max_{z\in\gamma_\rho}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,2\pi\rho = \qquad (|z-z_0| = \rho)$$

$$= \max_{z\in\gamma_\rho}|f(z)-f(z_0)| \to 0 \text{ при } \rho\to 0.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)$$

$\blacksquare$

<u>Замечание 1)</u> если G - односвязн. область с граничным контуром L, $f(z) \in A(G) \cap C(\bar G)$, то ф-ла Коши справедлива для $\forall z_0 \in G$.

05.04.06. [Лекция]

2) Пусть $L: |z-z_0|=\rho$ или $L: z=z_0+\rho e^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le 2\pi$ — окружн.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}}\rho i e^{i\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi$$ — ф-ла среднего значения.

3) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)\,dz}{z-z_0}=\begin{cases} f(z_0), & z_0\in \operatorname{int} L\\ 0, & z_0\in \operatorname{ext} L\end{cases}$$

$g(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ — аналитич. при $z_0\in \operatorname{ext} L \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по инт. теор. Коши $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_L g(z)\,dz=0$

Интегралы, зависящие от параметра.

$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$. Если f, f'_y непр. $a\le x\le b$, $c\le y\le d$, то $I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx$

Обобщения:

1) вместо одного может быть неск. параметров

$$I(y_1,\dots,y_n)=\int_a^b f(x,y_1,\dots,y_n)\,dx$$

$f, f'_{y_1},\dots,f'_{y_n}$ — непр., то

$$\frac{\partial I}{\partial y_i}=\int_a^b\frac{\partial f(x,y_1,\dots,y_n)}{\partial y_i}\,dx$$

$I(z_1,\dots,z_n)=$

2) $=\int_L P(x,y,z_1,\dots,z_n)+Q(x,y,z_1,\dots,z_n)\,dy$

$$F(z)=\int_L\varphi(z,\zeta)\,d\zeta$$

Требования:

1) ζ измен. вдоль кривой L

$z\in G$ (на пл-ти z)

2) при фикс. ζ $\varphi(z,\zeta)\in A(G)$

3) φ, φ'_z непрерывны по совокупности переменных z и ζ (в $G\times L$).

Теорема (о дифференцировании интеграла с параметром)

Пусть выполнены усл-я 1–3. Тогда:

1) $F(z)\in A(G)$

2) $F'(z)=\int_L\varphi'_z(z,\zeta)\,d\zeta$.

□ $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$

$\varphi=u(x,y,\xi,\eta)+i\,v(x,y,\xi,\eta)$

$$F(z)=\int_L u\,d\xi-v\,d\eta+i\int_L v\,d\xi+u\,d\eta=U(x,y)+iV(x,y)$$

φ, φ'_z непр. $\Rightarrow u, v, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$ непр. в $G\times L$

$U'_x=\int_L u'_x\,d\xi-v'_x\,d\eta$

$V'_y=\int_L v'_y\,d\xi+u'_y\,d\eta=\int u'_x\,d\xi-v'_x\,d\eta\Rightarrow$

$\Rightarrow U'_x=V'_y$; и аналогично $U'_y=-V'_x$

Выполнены усл-я К-Р для $F(z)$

U'_x, U'_y, V'_x, V'_y непр. и удовл. усл. CR $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(z)$ имеет непр. произв. в G, т.е. $F(z) \in A(G)$

$F'(z) = U'_x + iV'_x = \int_L u'_x d\xi - v'_x d\eta + i\int_L v'_x d\xi + u'_x d\eta =$

$= \int_L (u'_x + i v'_x)(d\xi + i d\eta) = \int_L \varphi'_z dz.$

Теорема (о бесконечной дифференцируемости)

Пусть $f(z) \in A(D)$. Тогда в $\forall$ точке $z \in D$ f имеет производные всех порядков.

$\square$ Проведём контур L так, чтобы (фиксируем $z \in D$)

$L \subset D$, $\operatorname{in} L \subset D$, $z \in \operatorname{int} L$.

Ин-л Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$\zeta \in L$, $z \in \operatorname{int} L$. — аналитич. при фикс. ζ $\Rightarrow$ по пред. теореме можно дифф-ть

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \qquad (*)$$

$\blacksquare$

Замечания: Если G - односвязн. область с границей-контуром L, $f(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$, то в $(*)$ интегрирование можно проводить по L для $\forall z \in G$.

Следствия теоремы о бесконечной дифференцируемости

① Производная аналитической ф-и сама является аналитич. ф-ей.

$f(z)$ имеет пр. $f'(z) \to f''(z) \to f'''(z) \to \ldots$

② (Теорема Морера)

Пусть G - односвязная область, $f(z) \in C(G)$ и обладает С-св-м в G. Тогда $f(z) \in A(G)$

$\square$ Вып. усл-я т. о первообразной $\Rightarrow$ в обл. G $\exists F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta$, $F'(z) = f(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по сл-ю ① $\Rightarrow f(z) \in A(G)$ $\blacksquare$

③ (теорема Лиувилля)

Если целая ф-я $f(z)$ ограничена во всей плоскости, то $f \equiv const$

$\square$ $\exists M > 0$: $|f(z)| \le M$ для $\forall z \in \mathbb{C}$

Фикс. $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ - возьмем L - окружн.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

$$|f'(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \max_{|z-z_0|=R} \frac{|f(z)|}{\underbrace{|z-z_0|^2}_{R^2}} 2\pi R \le \frac{M}{R}.$$

При $R \to \infty$ имеем $f'(z_0) = 0$.

Ввиду произвольности z_0 $f' \equiv 0 \Rightarrow f = const$.

■

④ Т (основная т. алгебры)

Всякий многочлен ст. $n \ge 1$ имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы 1 корень.

□ Пусть P не им. корней в $\mathbb{C}$. Тогда $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ есть целая ф-я. Поскольку $P(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, то $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ и, значит, ограничена во всей плоскости $\Rightarrow$ {по т. Лиувилля} $\Rightarrow$ $f(z)$ – const $\Rightarrow P(z) = const$.

Получили противоречие.

Значит, $P(z)$ имеет корни в $\mathbb{C}$

■

⑤ $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Тема 6

Ряды аналитических функций.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum x_n + i \sum y_n$, $a_n = x_n + i y_n$.

числовой компл. ряд.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, все u_n опред. в G – функц. компл. ряд.

поточечн. сход. $\forall z \in G$.

равномерн. сход.: ряд $\sum u_n(z)$ сх-ся равномерно к $f(z)$ в обл G, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: $|f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)| < \varepsilon$ для $\forall n \ge N$, $\forall z \in G$.

Обозн.: $\sum u_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows} f(z)$

Верен пр. Коши

Пр. Вейерштрасса. $\sum u_n(z)$, $z \in G$; $\sum c_n$;

$|u_n(z)| \le c_n$, $\forall n$, $\sum c_n < +\infty$.

Тогда $\sum u_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows}$, $\sum |u_n(z)| \underset{G}{\rightrightarrows}$.

Задача $\exists \sum u_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows}$; $\varphi(z)$ огр. в G (т.е. $\exists M$: $|\varphi(z)| \le M$ для $\forall z \in G$) $\Rightarrow$ $\sum \varphi(z) u_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows}$

Теор. 5.1. Пусть $u_n \in C(G)$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $\sum u_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows} f(z)$. Тогда:

1) $f(z) \in C(G)$

2) для $\forall$ кривой $L \subset G$ возможно почленное интегрирование т.е.

$$\int_L f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L u_n(z)dz$$

<u>Опр</u> Ряд $\sum u_n(z)$ сходится в G <u>нормально</u> если он сходится равномерно на $\forall$ компакте содержащемся в G (можно было бы ограничиться равном. сх-тью на всякой замкн. кривой, внутр. по отн-ю к G)

26.04.06 [Лекция]

<u>Теор.</u> (1-я теорема Вейерштрасса)

Пусть ряд $\sum u_n(z)$ сход. к ф-и $f(z)$ нормально в обл. G и $u_n(z) \in A(G)$

Тогда

1) $f(z) \in A(G)$

2) $\sum u_n$ можно почленно дифференцировать $\forall$ число раз (т.е. при $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(z) = \sum u_n^{(k)}, \forall z \in G, \forall k \in \mathbb{N}$$

3) Все продифференцированные ряды сходятся в G нормально

$\square$ Докажем 1) и 2); 3) - для общ. р-да

1) Пусть z_0 - произвольная точка из G и

$\overline{K}_R(z_0): |z-z_0| \leq R \subset G$

По т. 6.1 $f(z) \in C(\overline{K}_R(z_0))$ (норм. сх-ие)

и для $\forall$ контура $\gamma \subset K_R(z_0)$ имеем

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum \underbrace{\oint_\gamma u_n(z)dz}_{=0, \text{ т.к. } K_R(z_0) \text{ односв. обл. } u_n(z) \in A(G)} = 0.$$

$f(z) \in C(\overline{K}_R(z_0))$ и имеет в нем C-свойство

По т. Морера ($K_R(z_0)$ - односвязн. обл.), $f(z) \in A(K_R(z_0))$

В силу произв-ти т. z_0 $f(z) \in A(G)$

2) Пусть z_0 - произв. точка из G и

$\gamma_\rho: |z-z_0| = \rho \subset G$

Рассм. рав-во $f(z) = \sum u_n(z)$ (*) в точках $z \in \gamma_\rho$.

Фиксир. $k \in \mathbb{N}$ и умножим обе части (*) на $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}, z \in \gamma_\rho.$$

Ряд справа на γ_ρ сх-ся равномерно, т.к. $\sum u_n(z) \rightrightarrows$ на γ_ρ $\left|\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\right| = \frac{1}{\rho^{k+1}}$,

т.е. $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$ ограничена (по задаче из прошл. лекции)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

Мб. часть — $f^{(k)}(z_0)$ (д-ко при д-ве т. о бескон. дифференц-сти)

$f^{(k)}(z_0) = \sum u_n^{(k)}(z_0)$

Ввиду пр-сти z_0 утв. 2 д-ко. ■

Теор. (2-я теорема Вейерштрасса)

$\exists$ обл. G ограничена контуром Γ, простым или составным,

$u_n(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$, $n = 1, 2, \dots$

Если ряд $\sum u_n(z) \rightrightarrows$ на контуре Γ, то он сх-ся равномерно в $\bar{G}$.

□ д-во в конце курса ■

Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (*)$$

Теор. 5.2 Коши-Адамар. Пусть $R = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}$ (CH)

Если $R=0$, то ряд $(*)$ сх-ся только в т. z_0.

Если $R>0$ (возможен случай $R=\infty$), то ряд $(*)$ сх-ся абсолютно в круге $K_R(z_0)$: $|z-z_0|<R$ и расходится при $|z-z_0|>R$.

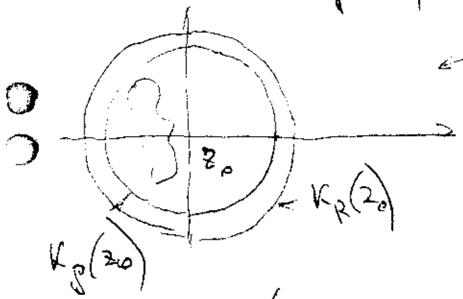
R — радиус сх-сти, $K_R(z_0)$ — круг сх-сти ряда $(*)$.

Лемма В круге $K_R(z_0)$ ряд $(*)$ сх-ся нормально.

□ Пусть K — произвольный компакт $\subset K_R(z_0)$

Тогда $\exists \bar{K}_\rho(z_0)$: $|z-z_0| \le \rho$ такой, что $\bar{K}_\rho(z_0) \subset K_R(z_0)$ и $K \subset \bar{K}_\rho(z_0)$

$\leftarrow \rho(K, \partial K_R(z_0)) = \delta > 0$



Ряд $(*)$ сх-ся абс. в т. $z = z_0 + \rho$, т.е. сходится ряд $\sum |c_n| \rho^n$.

Этот ряд мажорирует ряд $(*)$ в круге $K_\rho(z_0)$. $\Rightarrow$ по пр-ку Вейерштрасса ряд $(*) \underset{K_\rho(z_0)}{\rightrightarrows}$ $\Rightarrow$ $(*) \underset{K}{\rightrightarrows}$ ■

Следствие 1) $f(z) \in A(K_R(z_0))$

2) $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot (z-z_0)^{n-k}$ $(**)$

3) полагая в $(*)$, $(**)$ $z=z_0$, получим $c_0 = f(z_0)$, $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ } — формулы Тейлора для коэфф-в.

Сл-но, коэфф-ты ст. ряда $(*)$ однозначно опр-ся его суммой $f(z)$.

Прим. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n$

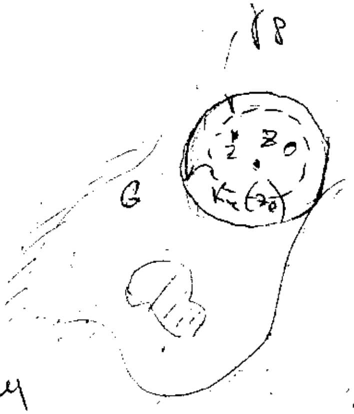
$c_n = 1 \Rightarrow R = 1.$

$|z-z_0|<1$

$f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (z-z_0)^k =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-(z-z_0)^{n+1}}{1-(z-z_0)} = \frac{1}{1-(z-z_0)}$

Ряд Тейлора.



Теор. (Тейлора)

Пусть $f(z) \in A(G)$

Если $z_0 \in G$ и $r = \rho(z_0, \partial G)$,

то в круге $K_r: |z-z_0|<r$,

$f(z)$ представима рядом

$f(z) = \sum c_n (z-z_0)^n$ и это представление !

□ Фикс. $z \in K_r(z_0)$ и построим окружность

$\gamma_\rho: |z-z_0| = \rho \subset K_r(z_0)$ и $z \in \operatorname{int} \gamma_\rho$

По интегральной ф-ле Коши

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

При фикс. ζ $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)} =$

$= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{\zeta-z_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$

$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$

Заметим, что ряд в правой части $\underset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows}$ (мажорируется геометр. рядом

$\left(\max\limits_{\zeta\in\gamma_\rho} |f(\zeta)|\right) \cdot \sum \frac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$)

Почленно инт-м:

$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{f(z)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}}_{\text{обозн. } c_n} (z-z_0)^n =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$

$n = 0, 1, \dots$

В виду произвольности т. $z \in K_r(z_0)$ теорема д-на. ■

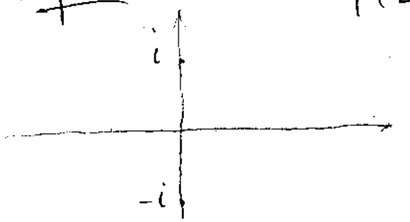
Может возникнуть подозрение, что c_n завис. от z неявно (при окр-ти икс-а?), но

$$\oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \oint_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

не содерж. z

(по т. о составном контуре)

Прим. $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ $\quad G=\{z\neq\pm i\}$.



$z_0=0$: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$, $|z|<1$

$z_0=1$: $\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$

$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z-1+1-i}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}}=$

$\left|\frac{z-1}{1-i}\right|<1 \Leftrightarrow |z-1|<\sqrt2$

$=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1-i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}}$

Аналогично $\frac{1}{z+i}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1+i)^n}$

(при $|z-1|<|1+i|=\sqrt2$)

$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)(z-1)^n=$

$=\{1+i=\sqrt2\, e^{i\pi/4}\quad 1-i=\sqrt2\, e^{-i\pi/4}\}=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n$

(CH) $\Rightarrow R=\sqrt2$.

Теорема единственности.

Пусть E – подмн. обл. G, которое имеет хотя бы одну конечную предельную точку z_0.

Теор. 1-я формул-ка: Может существовать не более одной функции $f(z)\in A(G)$, принимающей заданные значения в точках из E.

2-я форм-ка: Пусть $\varphi(z)\in A(G)$ и $\varphi(z)=0$ $\forall z\in E$. Тогда $\varphi(z)\equiv0$, $z\in G$.

Задача: д-ть эквив-ть (1) и (2).

(док-во 2-й формул-ки) ① Пусть $\{z_k\}\subset E$, $z_k\to z_0$ и $z_k\neq z_0$ $\forall k$.

Пусть $r=\rho(z_0,\partial G)$.

Покажем, что $\varphi(z)=0$ $\forall z\in K_r(z_0)$

$\varphi(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots$ (по теор. Тейлора)

Пусть $z=z_k \Rightarrow 0=\varphi(z_k)=c_0+c_1(z_k-z_0)+c_2(z_k-z_0)^2+\dots$

Переходя к пред. при $k\to\infty$ получ. $c_0=0$.

Лекция 7

27.04.06

Пусть $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}=0$.

$\varphi(z)=c_n(z-z_0)^n+c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\dots$

$0=\varphi(z_k)=c_n(z_k-z_0)^n+c_{n+1}(z_k-z_0)^{n+1}+\dots \quad |:(z_k-z_0)^n$

$c_n+c_{n+1}(z_k-z_0)+\dots=0$.

При $k\to\infty$ $z_k\to z_0 \Rightarrow c_n=0$.

По инд. и $c_1 = c_2 = \dots = 0$.

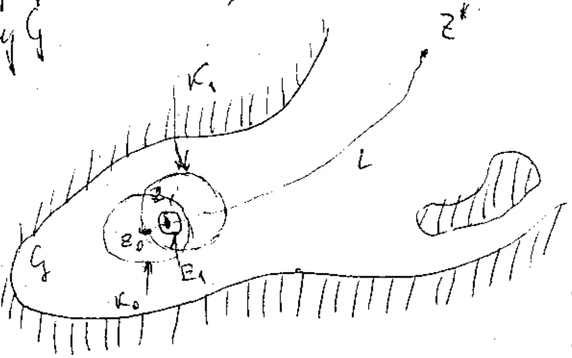
$\varphi(z) \equiv 0$ в круге $K_r(z_0)$

(2) Пусть z^* — произв. т. из G

Соединим z_0 и z^* непр. кривая $L \subset G$

Пусть $\delta = \rho(L, \partial G) > 0$

Положим $K_0 = K_\delta(z_0)$



Возьмем т. z_1 на кривой L так, чтобы длина сегмента $z_0 z_1$ на L была $\frac{\delta}{2}$

Тогда $z_1 \in K_0$ и $\exists\, E_1 = K_{\varepsilon_1}(z_1) \subset K_0$ — окр-ть т. z_1

Постр. круг $K_1 = K_\delta(z_1)$. К K_1 и E_1 применим рассуж-я из 1-й части д-ва $\Rightarrow$ $\varphi(z) \equiv 0$ для $\forall z \in K_1$

Возьмем z_2 на L: дл. $z_1 z_2$ равна $\frac{\delta}{2}$

$z_2 \in K_1$, $E_2 = K_{\varepsilon_2}(z_2) \subset K_1$

Строим $K_2 = K_\delta(z_2)$, примен. к K_2 и E_2 рассуж-я из 1-й части $\Rightarrow \varphi(z) = 0$ $\forall z \in K_2$.

Применяя эти рассужд-я дойдем до z_n: $z^* \in K_\delta(z_n)$

$\varphi(z) = 0$ $\forall z \in K_n \Rightarrow \varphi(z^*) = 0$.

В силу произв-ти z^* $\varphi(z) = 0$ в G

$\blacksquare$

Следствия и приложения теоремы единственности

Пусть $f(z) \in A(G)$ и A — фиксир. число.

Всякая т. $z_0 \in G$: $f(z_0) = A$, наз. A-точкой ф-и f.

Число $k \in \mathbb{N}$ наз. кратностью (= порядком) A-точки z_0, если

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

$$f(z) = A + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k+1} + \dots$$

Если $A = 0$, то z_0 — нуль ф-и f.

$\boxed{\text{Пример}}$ 1. $f(z) = \cos z$.

$z_0 = 2k\pi$ z_0 — 1-точка ф-и $f(z)$

$f'(z) = -\sin z$, $f'(z_0) = 0$.

$f''(z) = -\cos z$, $f''(z_0) \neq 0$.

z_0 — точка кратности 2.

2. $f(z) = \sin z - z$.

$z_0 = 0$ z_0 — нуль ф-и $f(z)$

$f'(z) = \cos z - 1$, $f'(0) = 0$.

$f''(z) = -\sin z$, $f''(0) = 0$

$f'''(z) = -\cos z$ $f'''(0) \neq 0$.

z_0 — точка кратн. 3 (тройной нуль)

Следствие 1 Пусть $f(z) \in A(G)$, и $f(z) \neq const$, F-компакт, вложенный в G.

Тогда $\forall$ числа A в F может содержаться лишь конечн. число A-точек ф-ии.

□ $\exists E \subset F$ – бесконечное множество A-точек ф-ии f. Тогда $\exists$ конечн. предельн. точка z_0 мн-ва E (огран. $F \Rightarrow$ огр. E и Б.-В.) причем $z_0 \in F$ (замкн. F) $\Rightarrow z_0 \in G$

По т. единств. $f(z) = A$, $z \in G$.

Противоречие

■

Прим. ① $G = \mathbb{C}$, $f(z) = \sin z$, $z_k = k\pi$, $f(z) = 0$

② $G = \{|z| < 1\}$, $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ $z_k = \frac{1}{k\pi}$.

$z_k \to 0$, но $0 \notin G$, нет против-я.

Следствие 2 Пусть на $[a,b] \subset \mathbb{R}$ определена ф. $\varphi(x)$ $[a,b] \subset G$

Тогда $\exists$ не более одной ф-ии $f(z) \in A(G)$ совпадающей с $\varphi(x)$ в точках из $[a,b]$.

Прим ① $\varphi(x) = \sin x$ $[0, 2\pi]$ $G = \mathbb{C}$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\exists z = x \in \mathbb{R}$.

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

Тогда $\sin z = \sin x$ и другого продолж-я в компл. пл-ть нет.

Опр. $f(z)$ – аналитич. продолжение $\varphi(x)$ с вещ. оси на компл. пл-ть

② В точках вещ. оси

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

В компл. пл-ти $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$ $R = \infty$.

Т.к. в вещ. пл-ти ряд. частн. совпад., то $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \underset{обозн}{=} e^z$ – ! продолж-е

③ (несуществование ф-й с заданными свойствами)

Прим $\exists$ ли ф-я $f(z) \in A(K_1)$, $K_1: |z| < 1$, такая, что $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$

$E = \{\frac{1}{n}\} \subset K_1$ $\exists z_0 = 0 \in K_1$

$g(z) = z$ $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ По т. ед. $f(z) = z$, $z \in K_1$

Но $f(-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n}$ Искомой ф-ии $\nexists$.

④ (продолжение соотношений)

a) $F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ – целая

$F(z) = 0$ для $z \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$

по т. единств. $F(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

б) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ (*)

Фикс. $z_2 = x_2 \in \mathbb{R}$ и $\forall$ обе части (*) как ф-и от z_1.

$f(z_1) = \cos(z_1 + z_2)$ $g(z_1) = (\cos x_2)\cos z_1 - (\sin x_2)\sin z_1$

$f(z_1) \equiv g(z_1)$ для $\forall z_1 \in \mathbb{R}$

⇒ по т. единственности $f(z_1)=g(z_1)$ для $\forall z_1\in\mathbb{C}$

Фикс. точки z_1 и обе части (*) как ф-и от z_2:

$F(z_2)=\cos(z_1+z_2)$, $G(z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$.

$F(z_2)=G(z_2)$ для $\forall z_2\in\mathbb{R}$.

⇒ по т. единств. $F(z_2)=G(z_2)$, $\forall z_2\in\mathbb{C}$,

(*) верно для $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$

Тема 6. Ряды Лорана и изолированные особые точки

$f(z)\in A(D)$

$D: 0<|z-z_0|<\delta$

Т.к. $z-z_0\neq 0$, то нельзя исп. т. Тейлора

z_0 – изолированная (т.е. других таких в окр. z_0 нет) особая точка.

Опр Рядом Лорана наз. ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{I}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{II}\quad(*)$$

Опр ряд (*) сходится ⇔ сх. I и II.

$\exists R_1$ – радиус сх-ти I.

$R_1=0$ (*) – не сход. нигде

$R_1>0$ ($R_1=\infty$) – ряд I сход. в $K_1: |z-z_0|<R_1$

абсолютно и нормально к $f_1(z)\in A(K_1)$

$\zeta=\frac{1}{z-z_0}$ II → $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\zeta^n$ (III)

R_2^{-1} – радиус сх-ти ряда III

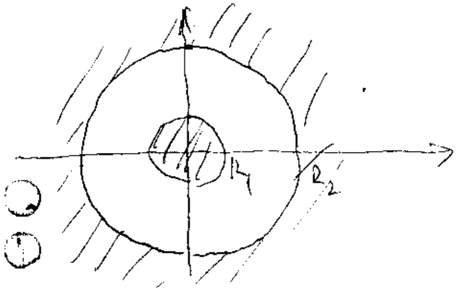
$R_2^{-1}=0\sim R_2=\infty$ (*) не сход. нигде

$R_2^{-1}\neq 0\sim R_2\neq\infty$.

ряд III сход в $K_1: |\zeta|<R_2^{-1}$

ряд II сход в $K_2: |z-z_0|>R_2$

абс. и норм. к $f_2(z)\in A(K_2)$

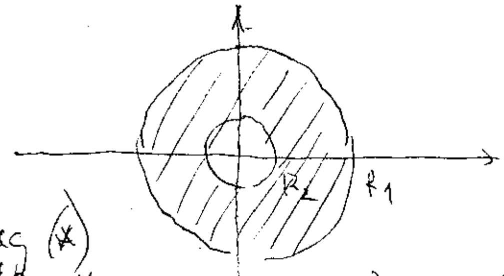


$R_1<R_2$ ряд (*) не сх. нигде

$R_1=R_2$ ряд (*) может сх. только в точках окр. $|z-z_0|=R_1=R_2$

При $R_2<R_1$

$D: R_2<|z-z_0|<R_1$



В кольце D ряд (*) сх-ся абсолютно и нормально к $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, $f(z)\in A(D)$

$\gamma_\rho : |z-z_0| = \rho$

$R_2 < \rho < R_1$

$\times \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} \Big| \; f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \; z\in\gamma_\rho$

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n-k-1} \underset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint_{\gamma_\rho}(z-z_0)^{n-k-1}dz}_{\begin{cases} =0, & n-k-1\neq -1 \\ =2\pi i, & n-k-1=-1\end{cases}} \ominus$$

$\ominus\, c_k$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

Вывод: коэф-ты ряда Лорана однозначно опр-ся к-ой функцией $f(z)$

[Лекция]

В кольце $D: R_2 < |z-z_0| < R_1$ ряд Лорана определяет аналитическую ф-ю $f(z)\in A(D)$

Теорема Лорана.

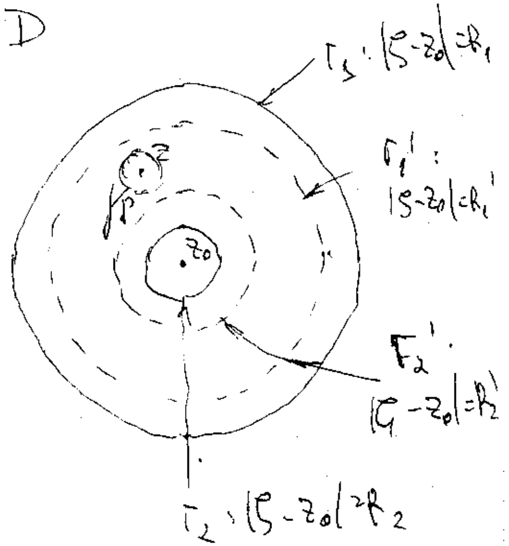
Теор. (Лорана)

$\exists f(z) \in A(D)$, $D: R_2 < |z-z_0| < R_1$

Тогда $f(z)$ представима в D рядом Лорана по степеням $z-z_0$ и это представление единственно

$\square$ Фиксируем $\forall$ т. $z\in D$

Построим кольцо



$D': R_2' < |z-z_0| < R_1'$

$: D'\subset D, \; z\in D'$

и окружность $\gamma_\rho : |\zeta - z| = \rho$ так, чтобы $\gamma_\rho \subset D'$

$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$.

Применим к φ теор. о составном контуре (γ_ρ, Γ_2' - внутр. граница, Γ_1' - внешн.)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta}_{f(z)}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad (*)$$

$\{ \Gamma' = \Gamma_1' \cup \Gamma_2' \; \Big| \ominus \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \}$

Получили ф-лу Коши для многосвязн. (2-связн.) области.

1) $\varsigma \in \Gamma_1' \Rightarrow \dfrac{|z-z_0|}{|\varsigma-z_0|} = \dfrac{|z-z_0|}{R_1'} = \theta < 1.$

$$\frac{1}{\varsigma-z} = \frac{1}{\varsigma-z_0+(z_0-z)} = \frac{1}{\varsigma-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\varsigma-z_0}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}$$ с-ся равномер-но

$$\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \underset{\Gamma_1'}{\rightrightarrows} \Rightarrow$$ инт почленно

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}\,d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$ где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}\,d\varsigma, \quad n=0,1,2,\dots$$

2) $\varsigma \in \Gamma_2' \Rightarrow \dfrac{|\varsigma-z_0|}{|z-z_0|} = \dfrac{R_2'}{|z-z_0|} = q < 1$

$$-\frac{1}{\varsigma-z} = \frac{1}{z-z_0-(\varsigma-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{\varsigma-z_0}{z-z_0}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varsigma-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varsigma-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$ с-ся равномер-но

$$-\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{-n+1}}(z-z_0)^{-n} \underset{\Gamma_2'}{\rightrightarrows} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}\,d\varsigma = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{-n+1}}\,d\varsigma, \quad n=1,2,\dots$$

Подставляем оба разложения в соотношение (*):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Т.к. z — $\forall$, то ряд Лорана получен.

Коэф-ты ряда Л. однозначно опр-ся его суммой $\Rightarrow$ разл-е (!)

■

<u>Замечание</u> Может возникнуть подозрение, что c_n зависит от z неявно (т.к. выбор контуров инт-я Γ_1' и Γ_2').

Но по т. о сост. контуре: если $\Gamma: |z-z_0| = R$, $R_2 < R < R_1$

$$\oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{-n+1}}\,d\varsigma = \oint_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{-n+1}}\,d\varsigma.$$

Классификация изолированных особых точек.

$f(z) \in A(D)$; $D: 0 < |z - z_0| < R$

D – окрестность т. z_0 (опускаем слово „проколотой")

Тогда z_0 – изолиров. особая точка.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{(*)\ \text{правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}}_{\text{главная часть}}$$

① случай

ряд $(*)$ не содержит членов с отриц. степенями $z - z_0$.

Тогда z_0 – устранимая особая точка (УОТ, или правильн. точка)

② случай

ряд $(*)$ содержит конечн. число членов с отриц. степенями

Тогда z_0 – полюс ф-и f

③ случай

ряд $(*)$ содержит бескон. много членов с отриц. степенями

Тогда z_0 – существенно особая точка ф-и f. (СОТ)

Теор. 6.1. z_0 – УОТ ф-и $f(z) \Leftrightarrow \exists$ конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Leftrightarrow f(z)$ ограничена в нек. окр-ти т. z_0

□ $(1) \Rightarrow (2)$

z_0 – УОТ $\Rightarrow$ $(*)$: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Элементарно.

$(3) \Rightarrow (1)$

$f(z)$ – огр. в нек. окр. U точки z_0 т.е. $\exists M > 0$: $|f(z)| \leq M$ для $\forall z \in U$.

$\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$, $\gamma_\rho \subset U$. Тогда коэф-ты ряда $(*)$ можно вычислить, как

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\xi \in \gamma_\rho} |f(\xi)| \frac{1}{\rho^{n+1}} 2\pi \rho \leq \frac{M}{\rho^n}$$

если $\rho \to 0$, то $c_n = 0$ при $n = -1, -2, \dots$

т.к. $(*)$ превращается в степенной ряд z_0 – устранимая особая точка. ■

Замечания ① $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$

Если положить $f(z)=c_0$, то особ-ть будет устранена

③ Если z_0 - не УОТ, то $f(z)$ не может быть ограниченной ни в какой окр-ти т. z_0.

— — —

z_0 - полюс

$$\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots$$

$c_{-m}\neq 0$

m - порядок (кратность) полюса z_0.

Теор. 6.2 z_0 - полюс ф-и $f(z) \Leftrightarrow f(z)\to\infty$ при $z\to z_0$.

□ (⇒)

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\underbrace{\left(c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\ldots\right)}_{\varphi(z)\in A(D),\ \varphi(z_0)=c_{-m}\neq 0.}$$

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$$

При $z\to z_0$ $\varphi(z)\to c_{-m}\neq 0$, а $z-z_0\to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(z)\to\infty$

(⇐) д-ва

Зам-е $\measuredangle$ $g(z)=\begin{cases}\frac{1}{f(z)}, & z\neq z_0\\ 0, & z=z_0\end{cases}$

$g(z)$ - аналитич. в нек. окр. т. z_0

$$g(z)=(z-z_0)^m\frac{1}{\varphi(z)},\quad \frac{1}{\varphi(z)}\neq 0.$$

z_0 - нуль пор. m для $g(z)$

(⇐) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

$\measuredangle$ $g(z)=\begin{cases}\frac{1}{f(z)}, & z\neq z_0\\ 0, & z=z_0\end{cases}$

$g(z)$ - аналитич. в окр-ти т. z_0.

z_0 - есть нуль ($\exists$ порядка m) ф-и $g(z)$

$$g(z)=d_m(z-z_0)^m+d_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots=$$
$d_m\neq 0$

$$=(z-z_0)^m\left(d_m+d_{m+1}(z-z_0)+\ldots\right)$$

$$g(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$$

$\psi(z_0)=d_m\neq 0.$

$$z\neq z_0 \Rightarrow f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}.$$

$\varphi(z)=\frac{1}{\psi(z)}$ аналит. в окр. т. z_0

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{\psi(z_0)}=\frac{1}{d_m}.$$

$$\varphi(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots\quad a_0=\frac{1}{d_m}$$

$$f(z)=\frac{a_0}{(z-z_0)^m}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots$$

z_0 - полюс пор. m для $f(z)$

■

Теор 6.3 z_0 - полюс пор. (m) для $f(z)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ z_0 - нуль пор. m для
$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

(3) z_0 - СОТ ф-и $f(z)$
$\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ (по т. 6.1 и 6.2)
ни конечн., ни бесконечн.

Теор (Сохоцкого)
Пусть z_0 - СОТ ф-и $f(z)$. Тогда для $\forall$ числа A конечного или бесконечного найдется $\{z_n\}$ (A - посл-ть Сохоцкого), такая, что $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$

□ Пусть $A = \infty$. $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists z_n'$: $|z_n' - z_0| < \frac{1}{n}$,
$|f(z_n')| \geq n$
$\{z_n'\}$ - посл. Сохоцкого для ч-ла ∞.
Пусть $|A| < \infty$.
От противн. Пусть для зад. A $\nexists$ посл-ти Сохоцкого. $\Rightarrow$ $\exists$ окр-ть т. z_0 $U_\delta: 0<|z-z_0|<\delta$ и $\alpha > 0$: $|f(z) - A| > \alpha$, $\forall z \in U_\delta$.
Пусть $\varphi(z) \overset{def}{=} \frac{1}{f(z) - A}$, $z \in U_\delta$.

$\varphi(z)$ - аналитическая, $|\varphi(z)| < \frac{1}{\alpha}$ в U_δ
Тогда z_0 - УОТ для $\varphi(z)$ по т. 6.1

По т. 6.1 $\exists$ конечн. $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z)$
$$\varphi(z_n') = \frac{1}{f(z_n') - A} \to 0.$$
Т.к. $\exists$ предел, то он совпад. для $\forall$ посл-ти.
$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z) - A} = 0 \Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ z_0 - полюс $f(z)$.
Получили противоречие ■

Пример. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$
При $z \neq 0$ заменим $z \to \frac{1}{z}$.
$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \ldots + \frac{1}{n! z^n} + \ldots, \quad \forall z \neq 0$$
Это ряд Лор-а сх-ся в $0 < |z| < \infty$.
$\Rightarrow$, z_0 - СОТ (по опр.)
Найдем посл. Сохоцкого.
$A = \infty$ $z_n' = \frac{1}{n}$ $f(z_n') = e^n \to \infty$
$A = 0$ $z_n'' = -\frac{1}{n}$ $f(z_n'') = e^{-n} \to 0$.

[Лекция]

Прим. (продолжение)

A: $z_n \to z_0$ $\quad f(z_n) \to A$

$\exists\ f(z_n) = A \ \forall n$

$f(z) = A \sim e^{\frac{1}{z}} = A$, $\frac{1}{z} = \operatorname{Ln} A$

$\operatorname{Ln} A = \ln|A| + i \operatorname{Arg} A$

$\ln A = \ln|A| + \arg A$

$\operatorname{Ln} A = \ln A + i2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$z_n = \frac{1}{\ln A + i2\pi n}$$

Теор. (Пикара) (большая)

$\exists\ z_0$ — СОТ ф-и $f(z)$. Тогда для $\forall$ конечного числа A (с единственным возможным исключением) $\exists$ посл-ть A-точек ф-и f, сходящаяся к т. z_0

□ без д-ва

Задача: Проверить спр-сть $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ в $z_0 = 0$ исключения малой т-ы Пикара.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

если z_0 — УОТ $\quad \exists$ кон. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

z_0 — полюс $\quad \exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$

z_0 — СОТ $\quad \nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

Особенности в бесконечно удаленной точке

$f(z) \in A(D)$, $D: |z| > R$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

Считаем т. $z_0 = \infty$ изол. особ. точкой ф-и f

$f(z)$ $\quad z = \frac{1}{\zeta}$

$\to g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ в окр. т. $\zeta_0 = 0$.

Опр. $z_0 = \infty$ — УОТ, полюс или СОТ для $f(z)$, если $\zeta_0 = 0$ явл. соответственно УОТ, полюсом или СОТ для $g(\zeta)$.

$z_0=\infty,\ \zeta_0=0$	$g(\zeta)$
УОТ	$g(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots$
полюс	$g(\zeta) = a_{-m}\zeta^{-m} + \ldots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots$
СОТ	$g(\zeta) = \ldots + a_{-m}\zeta^{-m} + \ldots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \ldots$
	$f(z)$
УОТ	$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots$
полюс	$f(z) = a_{-m}z^m + \ldots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots$, где $a_{-m} \neq 0$
СОТ	$f(z) = \ldots + a_{-m}z^m + \ldots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}}_{\text{правильн. часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n}_{\text{главная часть}}$$

① $z_0 = \infty$ есть УОТ ф-и $f(z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists$ конечн $\lim_{z\to\infty} f(z) \Leftrightarrow f(z)$ огранич. в нек. окр-сти ∞.

② $z_0 = \infty$ есть полюс ф-и $f(z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

③ $z_0 = \infty$ есть СОТ ф-и $f(z) \Rightarrow \nexists \lim_{z\to\infty} f(z)$

Прим. ① $f(z) = \sin^2 \frac{1}{z}$

$\exists \lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \infty$ - УОТ

$$g(\zeta) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) & \zeta \neq 0 \\ 0, & \zeta = 0 \end{cases}$$

$\zeta_0 = 0$ нуль порядка 2. $\Rightarrow$

$\Rightarrow z_0 = \infty$ - нуль порядка 2

② $f(z) = P_n(z) = \underbrace{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}_{\text{главн. часть разл-я.}}$, $n \geq 1$

$z_0 = \infty$ полюс пор. n.

③ $f(z) = e^z$; $z_0 = \infty$ - СОТ

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$

Вычеты

$f(z)$ аналитич. в области G за исключением некоторого количества только изолир. особых точек. (*)

В каждом компакте $K \subset G$ содержится лишь конечн. число изол. особ. точек ф-и $f(z)$

В противном сл-е $\exists$ т. z_0 - предельная для мн-ва изолир. особ. точек.

$z_0 \in K \subset G$ - неизолир. особ. точка, что противоречит усл-ю (*)

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz$$

Соглашение о контурах. Рассматриваемый кусочно-гладкий контур Γ не проходит через особые т. ф-и $f(z)$

Опр. Пусть z_0 - изол. особ. т. ф-и $f(z)$ и

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

- её лорановское разл-е отн. т. z_0

Вычетом $f(z)$ отн. т. z_0 (в т. z_0) называется коэф-т лорановского разл-я c_{-1}

Обозн. $c_{-1} = \operatorname{res}(f(z), z_0) = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$

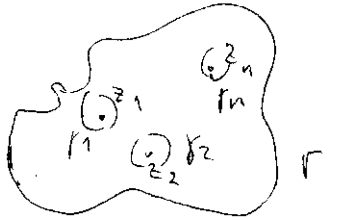
res - от фр. residue

$\Gamma_\rho : |z-z_0| = \rho \Rightarrow c_{-1} = \operatorname{res}(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho^+} f(z) dz$

Теор. (о вычетах): Пусть $z_1 \dots z_n$ - все особые точки ф-и $f(z)$ внутри Γ.

Тогда $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k)$

$\square$



Построим $\gamma_k : |z - z_k| = \rho_k$

$\gamma_1, \dots, \gamma_n \subset \operatorname{Int} \Gamma$, $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$

По т. о составном контуре

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k)$$

$\blacksquare$

1) z_0 – простой полюс ф-и $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

$$f(z)(z-z_0) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + \dots$$

$$c_{-1} = \operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}\big(f(z)(z-z_0)\big)$$

2) $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, φ, ψ – аналитич. в окр. т. z_0, z_0 – прост. полюс

$\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$.

$$c_{-1} = \lim \frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi'(z_0)(z-z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots} =$$

$$= \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

$$\operatorname{res}(f(z), z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

3) z_0 – полюс кратн. m $(m > 1)$ для $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \dots$$

$$\frac{d^{m-1} f(z)(z-z_0)^m}{dz^{m-1}} = c_{-1}(m-1)! + c_0 (m)(m-1)\dots 2(z-z_0) + \dots$$

$$c_{-1} = \operatorname{res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}\big(f(z)(z-z_0)^m\big)}{dz^{m-1}}$$

При $m = 1$ $0! = 1$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$

4) Пусть теперь $z_0 = \infty$

Вычет относительно бесконечно удаленной точки.

$f(z) \in A(D)$, $D : |z| > R$

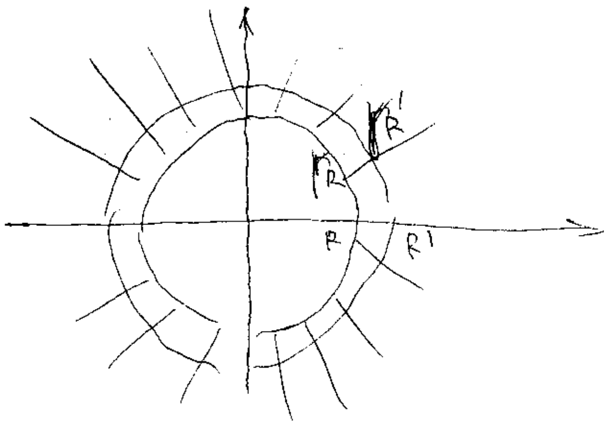
$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ $z \in D$.

Опр. Вычетом ф-и $f(z)$ отн. $z_0 = \infty$ называется коэф.-т $(-c_{-1})$

① $\operatorname{res}(f(z),\infty)$ может быть $\neq 0$ даже если $z_0=\infty$ — угт для $f(z)$

$f(z)=\frac{1}{z}$

$C_{-1}=1$, $\operatorname{res}(f(z,\infty))=-1$.



$$\oint_{\gamma_{R'}} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \oint_{\gamma_{R'}} z^n = 2\pi i\, C_{-1}$$

$$C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{R'}} f(z)dz \to \operatorname{res}(f(z),\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^+_{R'}} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^-_{R'}} f(z)dz.$$

Теор. (о полной сумме вычетов)

Пусть $f(z)$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ только изол. особые точки: $z_1,\dots,z_n$ (конечное) и $z_0=\infty$.

Тогда $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{res}(f(z),z_k)=0$.

□ Пусть $R'>0$: $|z_k|<R'$, $k=1,\dots,n$.

Обозн. $\gamma_{R'}$: $|z|=R'$. Тогда по т. о вычетах

$$\oint_{\gamma^+_{R'}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z),z_k) \qquad (1)$$

$$\oint_{\gamma^-_{R'}} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(f(z),z_0) \qquad (2)$$

Склад. (1) и (2) ■

Замет. Т. о полн. сумме вычетов применима к вычисл. интегралов ф-и $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$

[Лекция] 10.05.06

Прим. ① Вычислить $J=\oint_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$

$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$

Ос. точки: $z_1,\dots,z_5$ — корни 5-й ст. из 1 } простые полюса
$z_6=3$
$z_7=\infty$.

$J=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\operatorname{res}[f(z),z_k]$.

$f=\frac{\varphi}{\psi}$, $\varphi(z)=\frac{1}{z-3}$; $\psi(z)=\frac{1}{z^5-1}$

$\psi'(z)=5z^4$.

$$J=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{5z^4(z-3)}\Big|_{z=z_k}=\frac{2\pi i}{5}\sum_{k=1}^{5}\frac{z}{z-3}\Big|_{z=z_k}$$

Др. способ: $\frac{J}{2\pi i}=\sum_{k=1}^{5}\operatorname{res}[f(z),z_k]=$
$=-\operatorname{res}[f(z),z_6]-\operatorname{res}[f(z),z_7]$

(z_6) $f = \frac{\varphi}{\psi}$, $\varphi = \frac{1}{z^5-1}$; $\psi = z-3$; $\psi' = 1$

$\operatorname{res}[f(z), z_6] = \frac{1}{242}$.

(z_7) ∞ – устранимая ос. т. для f, что не означает само по себе, что вычет $= 0$.

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{z^6\left(1-\frac{3}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z^5}\right)} =$$

$$= \frac{1}{z^6}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^{10}}+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^6} + \dots$$

Вычет – коэф-т при $\frac{1}{z}$, а он $= 0 \Rightarrow$

$\operatorname{res}[f(z), \infty] = 0$.

Вообще, если на бесконеч. $f(z) \sim \frac{1}{z^m}$, $m > 1$, $\operatorname{res}[f(z), \infty] = 0$.

$$J = -\frac{\pi i}{121}.$$

Вычисление интегралов от действит. переменной с помощью вычетов

Интегралы вида $J = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$

$R(x, y)$ – рациональная ф-я от x, y.

$z = e^{i\varphi}$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$dz = e^{i\varphi} i\, d\varphi$; $d\varphi = \frac{1}{iz}dz$

$$J = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \tilde{R}(z)\, dz$$

Пример ② Вычислить инт-л $J = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5+3\cos\varphi}$

$z = e^{i\varphi}$

$$J = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(5+3\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{3z^2+10z+3}$$

$$\tilde{R}(z) = \frac{1 \;=\varphi}{3z^2+10z+3 \;=\psi}$$

Особые точки $z_1 = -\frac{1}{3}$, $z_2 = -3$

$$J = \frac{2}{i}\, 2\pi i \operatorname{res}[f(z), z_1] = 4\pi \frac{1}{6z_1+10} =$$

$$= \frac{4\pi}{-2+10} = \frac{\pi}{2}.$$

Ин-лы вида $J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Обозн. $P^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$. $\bar{P}_+ = \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Теор. 7.1 Пусть $f(z)$ удовл. усл-м:

1) $f(z)$ – аналитич. в P_+ за исключением особых точек $z_1, \dots, z_n$

2) $f(z)$ – непрерывна в точках действ. оси.

3) $\exists R_0>0 : |f(z)| \le \frac{M(z)}{|z|}$ для $z: |z|\ge R_0,\ z\in P_+$,

и $M(z) \rightrightarrows 0$ при $z\to\infty,\ z\in P_+$.)

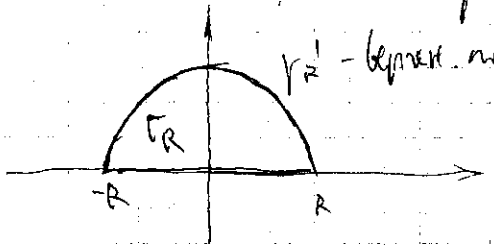
Тогда ин-л J $\exists$ хотя бы в смысле главного значения и

$$J = (v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k].$$

□ $|z_k| \le R_0$ (т.к. в особых точках нер-во в (3) не может выполняться)

Для $\forall R>R_0$ построим контур Γ_R и применим т. о вычетах.

γ_R' - верхн. полукруг



$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R'} f(z)\,dz = \{\text{т. о выч.}\} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k].$$

$R\to\infty$ $\left|\int_{\gamma_R'} f(z)\,dz\right| \le \max_{z\in\gamma_R'} |f(z)|\,\pi R \le \frac{\max M(z)}{R}\,\pi R \to 0$ при $R\to\infty$. (из (3))

$\exists \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = (v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k]$

Замеч. Можно д-ть, что по нижн. полупл-ти ф-ла будет та же, но с противоп. знаком.

Прим (3) $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ - удовл. усл-м т.7.1

$z_2 = -i,\ z_1 = i$ - полюс кратн. 3.

$$J = 2\pi i \operatorname{res}[f(z), z_1] = 2\pi i \frac{1}{2}\lim_{z\to z_1} \Big(\underbrace{f(z)(z-i)^3}_{g(z)}\Big)'' = \pi i \frac{12}{(2i)^5} = \pi\frac{12}{32} = \frac{3\pi}{8}$$

$g(z) = \frac{1}{(z+i)^3}$, $g''(z) = \frac{12}{(z+i)^5}$

Интегралы вида $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx$

Лемма Жордана. Пусть $f(z)$ непрерывна в области $\{|z| \ge R_0 > 0$ и $z\in \overline{P}_+\}$ и $f(z)\to 0$ при $z\to\infty,\ z\in\overline{P}_+$.

Тогда для $\forall a>0$ $\int_{\gamma_R'} e^{iaz} f(z)\,dz \to 0$ при $R\to\infty$, где $\gamma_R': |z|=R,\ z\in\overline{P}_+$.

□ $\mu_R = \max_{z\in\gamma_R} |f(z)|$ по усл. $\mu_R\to 0$ при $R\to\infty$.

$$|J| = \left|\int_{\gamma_R'} e^{iaz} f(z)\,dz\right| \le \int_{\gamma_R'} |e^{iaz}||f(z)|\,d\sigma \le$$

$\gamma_{R'}: z = Re^{i\varphi}, \ 0 \le \varphi \le \pi$

$\le \mu_R \int_0^\pi |e^{iaz}| R\,d\varphi = \mu_R R \int_0^\pi |e^{iaz}|\,d\varphi =$

$iaz = iaR(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -aR\sin\varphi + iaR\cos\varphi$

$|e^{iaz}| = e^{-aR\sin\varphi}$

$= \mu_R R \int_0^\pi e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi = 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi \le$

$\le 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR\varphi}{\pi}} = 2\mu_R R \frac{\pi}{2aR} e^{-\frac{2aR\varphi}{\pi}} =$

$= \frac{\pi\mu_R}{a}\left(1 - e^{-aR}\right)$

$R \to \infty \quad J \to 0.$

■

Теор. 7.2 Пусть $f(z)$ удовл. усл-м 1) и 2) теор. 7.1.

Пусть $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in \overline{R}_+$

Тогда для $\forall a > 0$ интеграл $\int$ сход. хотя бы в смысле главного значения и

$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[e^{iaz} f(z), z_k]$

□ Пусть $R > 0$: $|z_k| < R$; $k = 1, 2, \dots, n$

Построим такой же контур Γ_R, как и в д-ве т. 7.1

Тогда $\oint_{\Gamma_R} e^{iaz} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx + \int_{\gamma_{R'}} e^{iaz} f(z)\,dz =$

$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[e^{iaz} f(z), z_k]$

В пределе при $R \to \infty$ $\int_{\gamma_{R'}} e^{iaz} f(z)\,dz \to 0$ (по л. Жордана)

$\exists \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx = (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$

$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[e^{iaz} f(z), z_k].$

Пример (*) $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^2 + a^2}\,dx$ — ин-л Лапласа

Считаем $\alpha > 0$, $a > 0$.

$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + a^2}\,dx \quad ; \ J = \operatorname{Re} J_1.$

$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \Rightarrow z = \pm ai$ — ос. т.

$J_1 = 2\pi i \operatorname{res}\left[e^{i\alpha z} \frac{1}{z^2 + a^2}, ai\right] =$

$\varphi(z) = e^{i\alpha z}, \ \psi(z) = z^2 + a^2$

$= 2\pi i \left.\frac{e^{i\alpha z}}{2z}\right|_{z = ai} = 2\pi i \frac{e^{-\alpha a}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}$

$J = \operatorname{Re} J_1 = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}$

Логарифмические вычеты и принцип аргумента

В начале раздела $f(z)$ — аналитич. в G за искл. конеч. кол-ва изол. ос. точек.

Потребуем, чтобы эти точки — только полюсы $f(z)$ и $f(z) \ne \mathrm{const}$ в G.

Рассмотрим сооб-е о контурах: заданный контур Γ не должен проходить через нули $f(z)$

Внутри всякого контура Γ - лишь конечное число полюсов $z_1, \dots, z_p$ кратн. $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ и конечн. число нулей $z_1, \dots, z_n$ с кратн. $\beta_1, \dots, \beta_n$.

11.05.06. [Лекция]

$N_f(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$ - полное число нулей $f(z)$ внутри Γ

$P_f(\Gamma) = \sum_{l=1}^{p} \alpha_l$ - полн. число полюсов $f(z)$ внутри Γ

Теор (о логарифмич. вычете)

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

□ $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

Особые точки ф-и $\varphi(z)$ - полюса и нули ф-и $f(z)$.

Докажем, что в каждой из этих точек $\varphi(z)$ имеет простой полюс.

Вблизи т. ζ_k $f(z)$ можно записать как

(1) $f(z) = (z-\zeta_k)^{\beta_k} g(z)$

$g(z)$ - аналит. в окр. т. ζ_k; $g(\zeta_k) \neq 0$

(2) $f'(z) = \beta_k (z-\zeta_k)^{\beta_k - 1} g(z) + (z-\zeta_k)^{\beta_k} g'(z)$

Поделим (2) на (1)

сначала (2) перепишем в виде $f'(z) = \beta_k (z-\zeta_k)^{\beta_k - 1} h(z)$, где

$h(z) = g(z) + \frac{1}{\beta_k}(z-\zeta_k) g'(z)$,

$h(\zeta_k) = g(\zeta_k)$

(*) $\varphi(z) = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} + \psi(z)$, $\psi(z)$ - аналитич. в окр. т. ζ_k.

$\varphi(z) = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} \cdot \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} + \underbrace{\beta_k(c_1 + c_2(z-\zeta_k) + \dots)}_{\psi(z)}$

$\frac{h(z)}{g(z)} = \overset{=1}{c_0} + c_1(z-\zeta_k) + c_2(z-\zeta_k)^2 + \dots$

(*) Означает, что ζ_k - простой полюс для $\varphi(z)$ и $\operatorname{res}[\varphi(z), \zeta_k] = \beta_k$.

В окр-ти т. z_m $f(z)$ можно записать как

(3) $f(z) = \frac{r(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m}}$, $r(z)$ - аналитич. в окр-ти z_m и $r(z_m) \neq 0$.

(4) $f'(z) = -\alpha_m \frac{r(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m+1}} + \frac{r'(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m}} =$

$= -\frac{\alpha_m}{(z-z_m)^{\alpha_m+1}} \delta(z)$,

где $\delta(z) = r(z) - \frac{1}{\alpha_m}(z-z_m) r'(z)$;

$\delta(z_m) = r(z_m)$

Делим (4) на (3).

(**) $\varphi(z) = \frac{-\alpha_m}{z-z_m} + \xi(z)$, $\xi(z)$ - аналитич. в окр. т. z_m

Рав-во (**) показ., что z_m - простой полюс ф-и $\varphi(z)$ и $\operatorname{res}[\varphi(z), z_m] = -\alpha_m$.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\varphi(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[\varphi(z),\xi_k] + \sum_{l=1}^{p}\operatorname{res}[\varphi(z), z_l] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\beta_k - \sum_{l=1}^{p}\alpha_l = N_f - P_f.$$

Опр Ф-я $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ называется логарифмической произв. ф-ции f.

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z,\ z\neq 0.$

$\ln z = \ln|z| + i\arg z$

$(\ln f(z))' = \frac{1}{f(z)} f'(z).$

Определение: $\operatorname{Ln}_k z = \ln|z| + i\arg_k z$ — однозначная ветвь логарифмич. ф-ции; $\arg_k z$ — единственное зн-е $\operatorname{Arg} z$, попадающее в интервал $[2k\pi, (2k+1)\pi)$

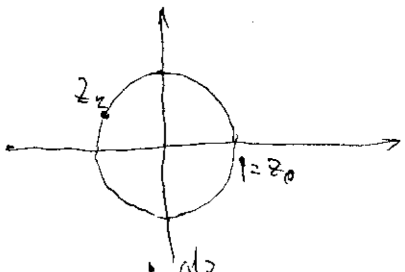
В этих обозн-ях $\ln z = \operatorname{Ln}_0 z.$

$(\operatorname{Ln}_k z)' = (\ln z)' = \frac{1}{z}$, $z\neq 0$

Будем вычислять ин-лы

$$\int_{z_0}^{z_k}\frac{dz}{z}\Big|_{z=e^{i\varphi}} = i(\varphi_k - \underset{0}{\varphi_0}) = i\varphi_k.$$

$$\int_{z_0}^{z_k}\frac{dz}{z} = i(\underbrace{\arg z_k}_{\varphi_k} - \underset{0}{\arg z_0})^2 = i\varphi_k$$



$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z} = 2\pi i$$

но по ф-ле Ньютона-Лейбница, получилось бы: $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z} = 0.$

Но ф-лу Н-Л здесь применять нельзя.

Из-за требования непр-сти первообразной будем выбирать её зн-е не из одной ветви ф-ции, а по след. ветви.

$\operatorname{Ln}_1 z = \ln|z| + i\arg z + i\cdot 2\pi$

$$\int_{z_0}^{z_k} = \operatorname{Ln}_1 z_e - \operatorname{Ln}_0 z_e.$$

Формула Ньютона-Лейбница для многозначной первообразной.

Пусть $f(z)\in A(G)$, $\Gamma\in G$ и известна многозначная первообразная $F(z)$ для $f(z)$

Фиксир. произв. т. z_0 на Γ и некоторое значение $F_{нач}(z_0)$ первообразной.

Будем обходить Γ, следя за непрерывным изм-ем $F(z)$

Пусть $F_k(z_0)$ — то зн-е первообразной, с которым мы возвращаемся в т. z_0.

Тогда $\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz = F_k(z_0) - F_{нач}(z_0)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\varphi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\ln|f(z_0)| + i\Phi_k - \ln|f(z_0)| - i\Phi_{нач}\right) =$$

($F(z) = \operatorname{Ln} f(z) = \ln|f(z)| + i\operatorname{Arg} f(z)$.

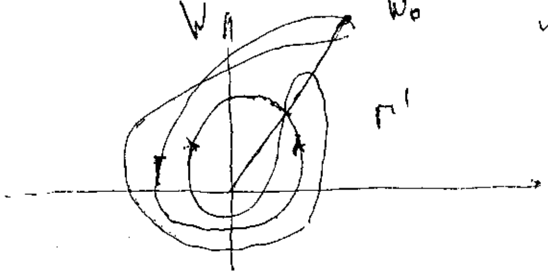
$\operatorname{Arg} f(z_0)\to\Phi_{нач}$; $\operatorname{Arg} f(z_0)\to\Phi_k$)

$$= \frac{\Phi_k - \Phi_н}{2\pi}$$

$\Phi_к - \Phi_н = \operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)$ – приращ-е аргумента $f(z)$ вдоль конт. Γ.

<u>Принцип аргумента</u>: $N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)$

(это вторая форм-ка теор. о логар. вычете)

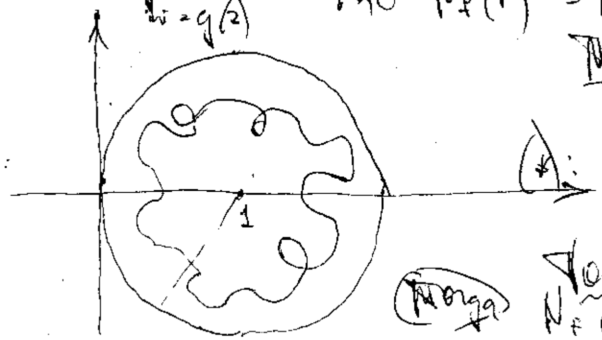


$\operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z) = 2\pi\nu$, ν – число полных оборотов радиус-в-ра т. $w = f(z)$ вокруг $w_0 = 0$

<u>Третья форм-ка теор. о лог. вычете</u>

$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \nu$

<u>Следствие</u>: если ф-я $f(z) \in A(G)$ и $\Gamma \subset G$, то $N_f(\Gamma) = \nu$



<u>Теор. Руше</u> $f(z), \varphi(z) \in A(G)$, $\Gamma \subset G$.

(*): и $|f(z)| > |\varphi(z)|$ $\forall z \in \Gamma$

Положим $F(z) = f(z) + \varphi(z)$

Тогда $N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$

□ Из (*) $\Rightarrow$ $f(z) \neq 0$ для $\forall z \in \Gamma$

$$F(z) = f(z) \underbrace{\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)}_{g(z)} = f(z) g(z)$$

$$\operatorname{Arg} F(z) = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg} g(z)$$

$$\operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} F(z) = \operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z) + \underbrace{\operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} g(z)}_{0}$$

$g(z) = 1 + \alpha(z)$, $|\alpha(z)| < 1$

$$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$$

■

Прим. Найти число корней ур-я $z^8 - 4z^5 + z^2 = 1$ внутри единичн. круга.

$\Gamma: |z| = 1$, $f(z) = -4z^5$, $\varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$

$F(z) = f(z) + \varphi(z)$; $F(z) = 0$

$|f(z)| = |-4z^5| = 4$, $z \in \Gamma$

$|\varphi(z)| \le |z^8| + |z^2| + 1 \le 3$.

Усл-я т. Руше выполнены

$N_f(\Gamma) = 5 \Rightarrow \boxed{N_F(\Gamma) = 6}$ (с учетом кратностей)

<u>Основная т. алгебры</u> (еще одно д-во)

Мн-н $P_n(z)$ им. в $\mathbb{C}$ n корней с учетом кратности $(n \ge 1)$

□ $P_n(z) = \underbrace{a_0 z^n}_{f(z)} + \underbrace{a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}_{\varphi(z)}$

$\exists R>0$: $|f(z)| > |\varphi(z)|$ для $\forall z \in \Gamma_R : |z|=R$

$\Rightarrow$ по т. Руше $N_{P_n}(\Gamma_R) = N_f(\Gamma_R)$

$f(z)=0 \Leftrightarrow a_0 z^n = 0 \Rightarrow 0$ - кор. кратн. n.

Значит, $N_{P_n}(\Gamma_R) = n$.

■

Тема 8

~~Общие свойства и основные принципы интегрирования отображений.~~

Теор. 8.1 (т. об образе области)

Пусть $f(z) \in A(G)$ и $f(z) \neq const$ в G.

Тогда $D = f(G)$ — также область.

□ Связность

Пусть $\forall w_1, w_2 \in D$ и z_1, z_2 — произвольные их прообразы.

$w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$

Пусть $z = \lambda(t)$ $\alpha \le t \le \beta$ — непрер. кривая, соединяющая z_1 и z_2 и принадлежащая обл. G.

Тогда $w = f[\lambda(t)] = \mu(t)$ $\alpha \le t \le \beta$ — непр. кривая, прин. D и соед. w_1 и w_2

[Лекция] 16.05.06.

Теор. 8.1. $f(z) \in A(G)$ и $f \neq const \Rightarrow D = f(G)$ - обл.

□ Открытость

Пусть w_0 - произв. т. из D. Покажем, что D содерж. нек. круг $K_\mu(w_0)$: $|w - w_0| < \mu$.

$\exists z_0$ — произв. прообраз т. w_0, т.е. $w_0 = f(z_0)$

Построим круг $\bar{C}_\rho : |z - z_0| \le \rho$ так, что γ_ρ - его граница

1) $\bar{C}_\rho \subset G$

2) z_0 — единств. w_0-точка в $\bar{C}_\rho$.

Существование такого круга вытекает из теоремы единственности

Иначе найдем бы посл-ть $\{z_k\}$: $f(z_k) = w_0$, $z_k \to z_0 \in G \Rightarrow$ {т. ед.} $\Rightarrow f(z) \equiv w_0$ в G, что противоречит усл-ю)

Положим $\mu = \min\limits_{z \in \gamma_\rho} |f(z) - w_0| > 0$

Утверждается, что круг $K_\mu \subset D$

Пусть w' - произв. т. из K_μ. Рассм. ур-я

$f(z) - w_0 = 0$

$f(z) - w' = 0$ $z \in \bar{C}_\rho$

В круге $\bar{C}_\rho$ оба ур-я имеют одинак. число решений по т. Руше

$f(z) - w' = (f(z) - w_0) - (w' - w_0) = 0$.

$|w' - w_0| < \mu \le |f(z) - w_0| \quad \forall z \in \Gamma_\rho$.

По т. Руше $N_{f(z)-w_0}(\Gamma_\rho) = N_{f(z)-w'}(\Gamma_\rho)$,
≥ 1 т.к. $f(z_0) = w_0$

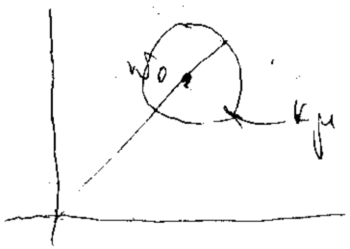
$\Rightarrow N_{f(z)-w'}(\Gamma_\rho) \ge 1$, т.е. $\exists z' \in C_\rho$: $f(z') = w'$.

Значит, $K_\mu \subset D \Rightarrow D$ — открыто ■

Принцип максимума модуля (аналитической функции)

Теор. Пусть $f(z) \in A(G)$ и $f(z) \ne const$ в G. Тогда ни в одной точке G $|f(z)|$ не может достигать максимального зн-я.

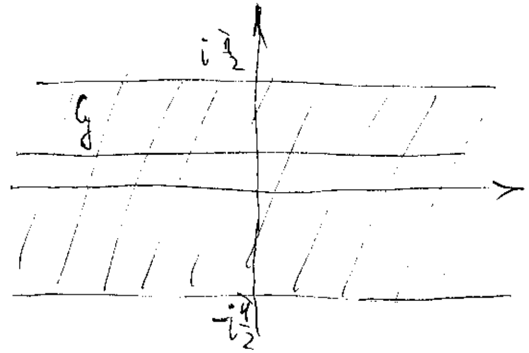
□ Пусть z_0 — произв. т. $\in G$, $w_0 = f(z_0)$. Тогда $\exists K_\mu$: $|w - w_0| < \mu \subset f(G)$



для $w = \rho e^{i\varphi_0}$, $\rho_0 < \rho < \rho_0 + \mu$
$|w| = |f(z)| > |w_0| = |f(z_0)|$
$z \in G$. ■

Прим.) $f(z) = e^{e^z}$

Сама прим., какие зн-я $f(z)$ прин. на гран. G.



$z = x \pm i\frac{\pi}{2}$.

$e^z = e^x e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i e^x$

$|e^{e^z}| = 1$.

$|f(z)| = 1$ на обеих границах.

Легко видеть, что в таких вещ. оси $|f(z)|$ не ограничены.

Следствие Пусть G — ограниченная область, $f(z) \in A(G)$ ~~$f(z) \ne const$ в~~. Тогда $\max\limits_{z \in \bar G} |f(z)|$ достигается на границе обл. G.

Принцип минимума модуля

Теор. Пусть $f(z) \in A(G)$, $f(z) \ne const$ в G и $f(z) \ne 0$ для $\forall z \in G$.
Тогда ни в одной точке из G $|f(z)|$ не может достигать минимального значения

□ Определим ф-ю $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in A(G)$ и $g(z) \ne const$ в G

Тогда принцип минимума модуля для $f(z)$ сводится к принципу max модуля для g.

■

Следствие $\exists\, f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq 0$ в G. Тогда $\min\limits_{z \in G} |f(z)|$ достигается на ∂G

2-я т. Вейерштрасса. Пусть G - огранич. область, $u_n(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$, $n = 1, 2, \ldots$

если $\sum u_n(z) \underset{\partial G}{\rightrightarrows}$, то $\sum u_n(z) \underset{\overline{G}}{\rightrightarrows}$

□ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall\, n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall\, z \in \partial G$

$\underbrace{\left| \sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k(z) \right|}_{\varphi_{n,p}(z)} < \varepsilon$

$\varphi_{n,p}(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$

$\max\limits_{z \in \overline{G}} |\varphi_{n,p}(z)| = \max\limits_{z \in \partial G} |\varphi_{n,p}(z)|$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall z \in \overline{G}\ \ \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k(z)\right| < \varepsilon$

т.е. для $\sum u_n(z)$ выполнен в $\overline{G}$ равномерный крит. Коши.

■

Конформность, однолистность и нули производной.

- локальн.) конформность $\Rightarrow$ однолистность (I)

$f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow w = f(z)$ лок.) конформно в т. z_0.

$f(z) \neq 0\ \forall z \in G \not\Rightarrow G \xrightarrow{f} f(G) = D$ конформно.

Пример $f(z) = e^z$, $G = \mathbb{C}$.

Теор. 8.2 (необходимое усл-е однолистности)

Если $f(z)$ - однолистна в G, то $f'(z) \neq 0$ для $\forall z \in G$.

Др. словами, 1-листность $\Rightarrow f'(z) \neq 0\ \forall z \in G$ (II)

□ $\exists\, f'(z_0) = 0$ для нек. т. $z_0 \in G$

Положим $w_0 = f(z_0)$. Тогда $f'(z_0) = 0 \sim z_0$ - кратная w_0 - точка ф-и $f(z)$

Построим $\overline{C}_\rho : |z - z_0| \leq \rho$ такой, что

1) $\overline{C}_\rho \in G$

2) z_0 - единств. w_0 - точка в C_ρ

3) $f'(z) \neq 0$, если $z \in \overline{C}_\rho$ и $z \neq z_0$.

Сущ-е круга $\overline{C}_\rho$ вытек. из т. единственности:

$f'(z_1') = 0$, $f'(z_2') = 0$ $\Rightarrow \{z_k'\}$ $z_k' \to z_0$, $f'(z_k') = 0$. По т. ед. $f'(z) = 0$ в G $\sim f(z) \equiv const$ в G

$\Rightarrow$ против. с 1-листн.

$\gamma_\rho : |z-z_0| = \rho$

$\mu = \min_{z\in\gamma_\rho} |f(z) - w|$

$K_\mu : |w - w_0| < \mu$.

Пусть w' — произв. т. из K_μ. Тогда, как и-ко в т. 3.1.

$2 \le N_{f(z)-w_0}(\gamma_\rho) = N_{f(z)-w'}(\gamma_\rho) \Rightarrow$

$\Rightarrow N_{f(z)-w'}(\gamma_\rho) \ge 2 \Rightarrow \exists$ т. $z_1, z_2 \in C_\rho$:

$f(z_1) = f(z_2) = w'$

$z_1, z_2 \ne z_0$, $f'(z_1) \ne 0$ $f'(z_2) \ne 0$.

$\Rightarrow z_1 \ne z_2$.

У w' имеется в C_ρ 2 различн. прообраза, что противоречит однолистности ф-ии f!

Теор. 8.3. (Локальный критерий однолистности)

Пусть $f(z) \in A(G)$ и $f'(z_0) \ne 0$ для нек. точки $z_0 \in G$.

Тогда $\exists \overline{C}_{\rho_0} : |z-z_0| \le \rho_0$, в кот. $f(z)$ — однолистна.

$f'(z) \ne 0 \Rightarrow f(z)$ одноз. в нек. окр. т. z_0 (!!!)

☐ В окр. т. z_0 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

Для $\forall \rho < r$ сх-ся $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$ и равномерно

$S(\rho) = \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1} = \rho \cdot \varphi(\rho) \to 2|a_2|$ при $\rho \to 0$.

Выберем $\rho_0 > 0$: $S(\rho_0) < |a_1|$.

В круге $\overline{C}_0$ — однолистна.

Пусть $z_1, z_2 \in \overline{C}_0$ и $z_1 \ne z_2$

$|f(z_1) - f(z_2)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left((z_1-z_0)^n - (z_2-z_0)^n\right)\right| =$

$= \Big| a_1(z_1-z_2) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\big((z_1-z_0)^{n-1} + (z_1-z_0)^{n-2}(z_2-z_0) +$

$+ \ldots + (z_2-z_0)^{n-1}\big)(z_1-z_2)\Big| \ge$

$\ge |z_1-z_2| \Big| |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \big(|z_1-z_0|^{n-1} +$

$+ |z_1-z_0|^{n-1}|z_2-z_0| + \ldots + |z_2-z_0|^{n-1}\big)\Big| \ge$

$\ge |z_1-z_2| \Big| |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho_0^{n-1}\Big| =$

$= |z_1-z_2| \, \big| |a_1| - S(\rho_0)\big| > 0$.

$f(z_1) \ne f(z_2)$ для $z_1, z_2 \in \overline{C}_0$, $z_1 \ne z_2$

Теор. 8.4. $\exists f(z)$ однолистна в G. Тогда отображение $G \to D = f(G)$ конформно.

1-листность $\Rightarrow$ конформность

☐ 1-1 соотв-е между точками из G и D — однол. $f(z)$

По т. 8.2 для 1-л-й ф-и $f(z)$

$f'(z) \ne 0$ $\forall z \in G$, т.к. в $\forall$ т. $z \in G$ выпол. достаточ. усл. конф. ⟹ $G \to D$ кон. конф.

■

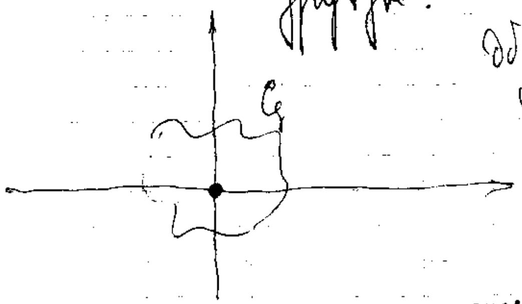
Основные принципы конф. отображений

[Лекция] 17.05.06.

Теор. (Римана)

Всякую односвязную область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, граница которой сост. более чем из одной точки можно конформно отобразить на открытый круг (напр. единичный) и притом бесконечно многими различными способами.

Следствие $\forall$ 2 односвязные области G_1 и G_2 расширенной пл-ти $\overline{\mathbb{C}}$ с границами Γ_1 и Γ_2 содержащими более чем по одной точке могут быть конформно отображены одна на другую.



Область $\mathbb{C}$ без одной точки им. гран. из одной точки.

Здесь существенно, что расшир. пл-ть, тогда можно обл. односвязна. Почему т. не верна для плоскости обл-и?

$\zeta = \frac{1}{(\zeta)^2}$: $G \xrightarrow{\zeta} \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ $|w| < 1$, f-целая, огран. $\Rightarrow$ const

II (Принцип соответствия границ.)

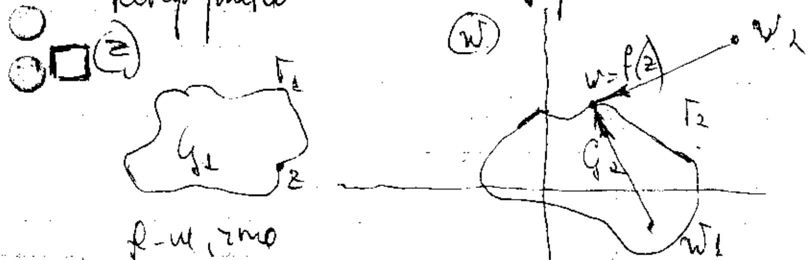
] $w = f(z)$ конформно отображает обл. G_1 на пл-ти z, огранич. контуром Γ_1, на обл. G_2 на пл-ти w, огранич. контуром Γ_2.

Тогда $f(z)$ можно притом (!) способом так доопределить в точках контура Γ_1, что f становится непрерывной в $\overline{G}_1$ и устанавливает гомеоморфное соответствие между Γ_1 и Γ_2

(Гомеоморфн. отобр-е – взаимно однозн. соотв-е непрерывн. в обе стороны)

Теор. (обращение принципа соответствия границ)

Пусть ф-я $w = f(z) \in A(G_1) \cap C(\overline{G}_1)$ (G_1 – огранич. контуром Γ_1) устанавливает гомеоморфное соответствие между Γ_1 и контуром Γ_2 на пл-ти w. Тогда $f(z)$ однолистна в G_1 и отображает G_1 на внутренность $\operatorname{int}\Gamma_2$ конформно.



Д-м, что

1) $\nexists w_2 \in \operatorname{ext}\Gamma_2$

Ур-е $f(z) = w_2$ не им. реш-й в G_1

2) $\forall w_1 \in \operatorname{int}\Gamma_2$

Ур-е $0 = f(z) - w_1$ им. в G_1 ровно (!) реш-е

] $F_2(z) = f(z) - w_2$; $F_1(z) = f(z) - w_1$.

По принципу аргумента $N_{F_2(z)}(\Gamma_1) = \frac{\operatorname{var}\arg F_2(z)}{2\pi}$

Из рисунка очевидно, что в-р $(w_2, f(z))$ не совершит ни одного оборота

$\Rightarrow \operatorname{var}\arg F_2(z) = 0 \Rightarrow N_{F_2}(\Gamma_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ д-но (1)

Далее, $N_{F_1}(\Gamma_1) = \frac{\operatorname{var}\arg F_1(z)}{2\pi}$

Т.к. соотв-е между контурами взаимно однозначное, то при обходе Γ_1 точка $f(z)$ обойдет Γ_2 ровно 1 раз (причем в полож. напр-и, иначе $N_{F_1}(\Gamma_1) = -1$)

Значит, $N_{F_1}(\Gamma_1) = 1 \Rightarrow$ д-но (2).

■

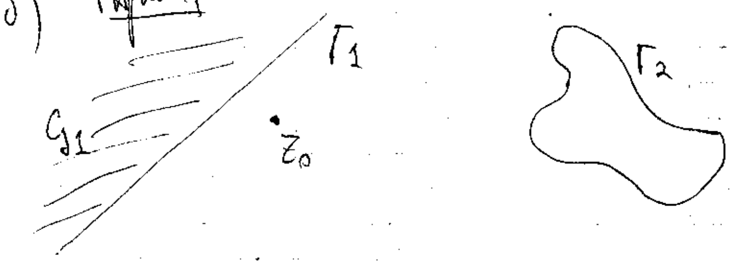
Замеч-е: сохр-ся напр-е обхода контуров (это верно также и для принципа соотв. границ.)

Замечание: Обращение принципа соотв. границ верно и в следующих (более общих) ситуациях:

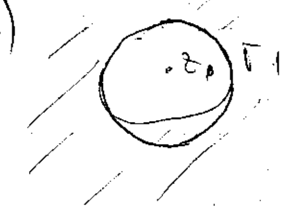
а) $G_1 = \operatorname{ext} \Gamma_1$

б) кривая Γ_1 - не ограничена и G_1 есть одна из областей, для которых Γ_1 - граница.

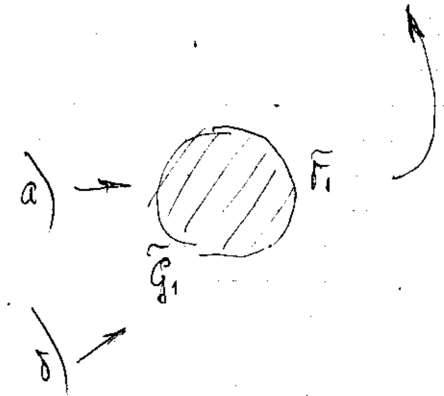
б) Прим



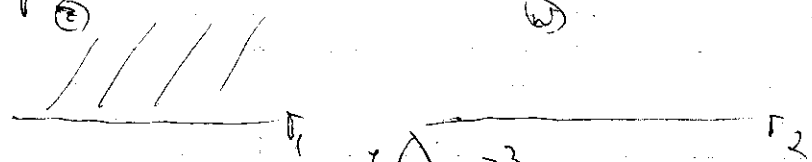
а)



] $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$



Прим для $\Gamma_2 \to \Gamma_1$ это неверно



$w = f(z) = z^3$.

Тема 9

Аналитическое продолжение.

$w = f(z) \in A(G)$

Ищем D: $G \subset D$ и $f(z) \in A(D)$

Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ (1), $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$ (2)

Оба ряда по т. Коши-Адамара сх. на $|z|<1$.

Ряд сх-ся на границе, т.к. мажорир-ся $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{2^{n^2}}$, а (1) - не сх-ся.

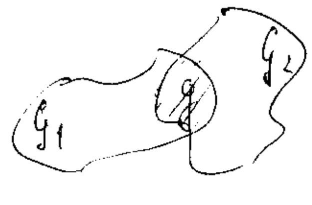
Но $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ на $|z|<1$, а ф-ия $\frac{1}{1-z}$ им. смысл везде в $\mathbb{C}$ (кроме $|z|=1$)

$g(z)$ - аналит. продолж-е ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$

Далее будет с-но, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$ нельзя аналитически распр-ть никуда, кроме $|z| \le 1$

Типичные ситуации аналитического продолжения.

① $\exists\ G_1 \cap G_2 = g \neq \varnothing$



$\exists\ f_1(z) \in A(G_1),\ f_2(z) \in A(G_2)$

$f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in g$

Тогда $F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1 \\ f_2(z), & z \in G_2 \end{cases} \in A(G),\ G = G_1 \cup G_2$

Опр. Говорят, что $F(z)$ - аналитич. продолж-е $f_1(z)$ ($f_2(z)$) на G.

$f_2(z)$ - непосредственное аналит. продолж-е $f_1(z)$ на G_2.

$f_1(z)$ — // — $f_2(z)$ на G_1.

$f_1(z) \in A(G_1)$, $z_0 \in G_1$

По т. Тейлора $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

$\exists\ K_{R_0}$ - круг сх-ти этого ряда.

$\exists\ \rho_0 = \rho(z_0, \partial G_1)$ ($\Rightarrow R_0 \geq \rho_0$)

1) $R_0 = \rho_0$ $\quad K_{R_0} \subset G_1$

2) $R_0 > \rho_0$

Итог: пример ① помогает получить продолжение с пом-ю степенного ряда.

② Продолжение через границу

$G_1 \cap G_2 = \varnothing$, но G_1 и G_2 имеют общ. участок границы Γ_{12}

$f_1(z) \in A(G_1) \cap C(G_1 \cup \Gamma_{12})$

$f_2(z) \in A(G_2) \cap C(G_2 \cup \Gamma_{12})$

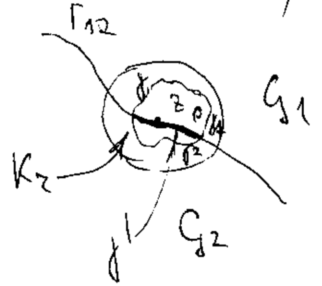
$f_1(z) = f_2(z)$ для $\forall z \in \Gamma_{12}$.

(Γ_{12} - открытая (т.е. концы не вкл.) непрер. кривая)

Пусть $G = G_1 \cup G_2 \cup \Gamma_{12}$.

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1 \cup \Gamma_{12} \\ f_2(z), & z \in G_2 \end{cases}$$

Утв. $F(z) \in A(G)$



$K_r : \{|z - z_0| < r\} \subset G$.

Покажем, что $F(z)$ обл. в K_r С-св-м (интегр. по замкн. конт. $= 0$)

γ' — отрезок кривой Γ_{12} внутри

$\gamma^+ = \gamma_1 \cup \gamma' \cup -\gamma' \cup \gamma_2$

$$\oint_{\gamma^+} F(z)\,dz = \int_{\gamma_1 \cup \gamma'} F(z)\,dz + \int_{-\gamma' \cup \gamma_2} F(z)\,dz =$$

$$= \underbrace{\int_{\gamma_1 \cup \gamma'} f_1(z)\,dz}_{=0} + \underbrace{\int_{-\gamma' \cup \gamma_2} f_2(z)\,dz}_{=0}$$

(по обобщ. т. Коши)

$\Rightarrow$ С-св-во д-но.

Далее, по т. Морера $F(z) \in A(K_r)$

③ Принцип симметрии Римана – Шварца

Пусть граница области G содержит прямолинейный интервал δ.

$\exists f(z) \in A(G) \cap C(G \cup \delta)$, $f(\delta)$ есть прямолинейный интервал Δ на пл-ти w.

G лежит по одну сторону от l:

Пусть l — прямая на пл-ти z, содержащая δ, L — пр. на w, содерж. Δ.

Построим обл. G^*, симметричн. с G относ. прямой l.

(z^* — точка, симметричн. с $z \in G$)

Определим на $G^* \cup \delta$ ф-ю $f^*(z^*) = \begin{cases} f(z^*), & \text{если } z^* \in \delta \\ (f(z))^*_{w}, & \text{если } z^* \in G^* \end{cases}$

w^* — точка, симм. w отн. L.

Теор. 9.1 (принцип симметрии Римана-Шварца)

Ф-я f^* есть непосредственное аналитич. продолжение $f(z)$ на G^*.

$\square$ Выполним линейные преобразования в пл-х z и w.

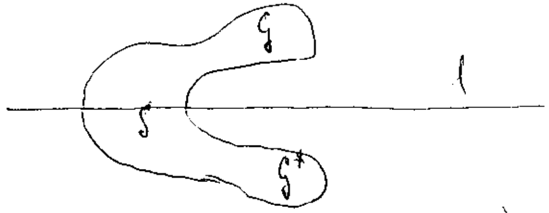
$z' = az + b$; $w' = \alpha w + \beta$,

кот. переводят прямые l и L в вещ. оси.

$w = f(z) \Rightarrow w' = \alpha w + \beta = \alpha f(z) + \beta =$

$= \alpha f\left(\frac{z' - b}{a}\right) + \beta = f'(z')$

Чтобы не усложнять обозначений предположим, что уже исходные м-ны $\forall z, w$ соответствуют из-ну этих преобразований. (т.е. предполаг, что l, λ - вещ. оси)



Покажем, что $f^*(z^*) \in A(G^*) \cap C(G^* \cup \delta)$.

Пусть z_0^* - произв. т. из G^*. Найдем $z_0 = \overline{z_0^*}$. В окр. т. $z_0 \in G$ $f(z)$ представима степенным рядом $f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots$

Тогда $f^*(z^*) = (f(z))^* = \overline{f(z)} =$
$= \bar{c}_0 + \bar{c}_1(\bar{z} - \bar{z}_0) + \dots + \bar{c}_n(\bar{z} - \bar{z}_0)^n + \dots =$
$= \bar{c}_0 + \bar{c}_1(z^* - z_0^*) + \dots + \bar{c}_n(z^* - z_0^*)^n + \dots$

Этот ряд сх-ся в нек. окр-ти т. z_0^* $\Rightarrow$ $f^*(z^*)$ - аналитич. в этой окр-ти $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f^* аналитична во всей G^*

Пусть $z_0^* \in \delta$ и $z_n^* \in G^*$, $z_n^* \to z_0^*$

Для сопр. послед. $z_n = \overline{z_n^*}$ имеем $z_n \to \overline{z_0^*} =$
$=$ {вещ. ось l} $= z_0$ и $f(z_n) \to f(z_0)$ $\Rightarrow$
$\overline{f(z_n)} \to \overline{f(z_0)}$ $\quad f^*(z_n^*) \to \overline{f(z_0)} = f^*(z_0) = f^*(z_0^*)$
f^* непр. в $\forall$ т. $z_0^* \in \delta$

В обл. $D = G \cup G^* \cup \delta$ определена аналитическая ф-я $F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cup \delta \\ f^*(z), & z \in G^* \end{cases}$

Тогда $F(z)$ - аналит. продолж-е ф-и $f(z)$ на D.

$f^*(z)$ непосредственное аналитич. продолж-е $f(z)$ на G^*.

Особые точки на границе сходимости степенного ряда

Опр. Пусть $f(z) \in A(G)$. Точка $z_0 \in \partial G$ называется правильной точкой ф-и $f(z)$, если $\exists$ сходящийся степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, который в общей части G и своего круга сх-ти имеет сумму $f(z)$.

Граничная точка, не являющаяся правильной, называется особой.

Если z_0 - изолир. ос. точка ф-и $f(z)$, то z_0 является правильной точкой $\Leftrightarrow$ когда z_0 - УСТ.

1) Если ∂G есть непрерывная кривая, то множество правильных точек открыто

по отношению к ∂G

2) Мн-во особых точек границы замкнуто

((1) и (2) д-ть самим. ((1) ⇒ (2) очевидно))

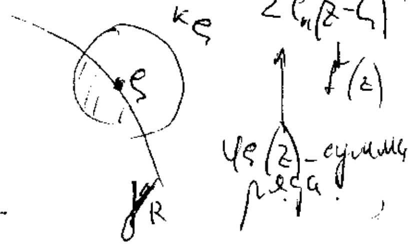
Теор. д-2 Пусть ст. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ имеет конечный положит. радиус сх-ти $R>0$ и сх-ся к $f(z)$.

Тогда на границе γ_R круга сходимости имеется хотя бы одна особая точка ф-и $f(z)$.

□ Предположим, что, напротив, всякая точка $\zeta \in \gamma_R$ явл. правильной.

Построим круги K_ζ и найдем соответств. функции непосредств. аналитич. продолжения $\varphi_\zeta(z)$ для каждой т. $\zeta \in \gamma_R$.

$D = K_R \cup \left(\bigcup_{\zeta \in \gamma_R} K_\zeta\right)$

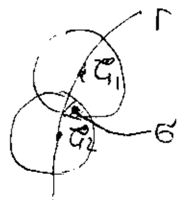


$\rho_0 = \rho(\gamma_R, \partial D) > 0$.

всякая т. $\zeta \in \gamma_R$ явл. внутр. для D

~~Следовательно~~ Тогда круг $K_r : |z-z_0|<r$, где $r = R + \frac{\rho_0}{2}$ целиком содерж. в D

Пусть K_{ζ_1} и K_{ζ_2} перес. по „луночке" показ. на рисунке



Тогда ∃ часть луночки б, общая для всех трех кругов: $K_R, K_{\zeta_1}, K_{\zeta_2}$.

На б $\varphi_{\zeta_1}(z) = f(z) = \varphi_{\zeta_2}(z)$ ⇒ по т. единств. ф-и $\varphi_{\zeta_1}(z) = \varphi_{\zeta_2}(z)$ для $\forall z$ из луночки.

В обл. D определена однозначная аналитич. ф-я $F(z)$, совпад. с $f(z)$ в круге K_R.

Тогда в K_r $F(z)$ может быть разложена в степенной ряд Тейлора

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Значит исх. ряд сх-ся, в действит-ти в круге K_r и $r>R$.

Получили противоречие с т. Коши-Адамара, т.к. R - макс. радиус сх-ти.

Это противоречие показывает, что ~~[illegible]~~ на γ_R должна существовать особ. точка ф-и $f(z)$. ■

Прим. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^{n^2}}$ (*)

Теор. (Прингсхейма)

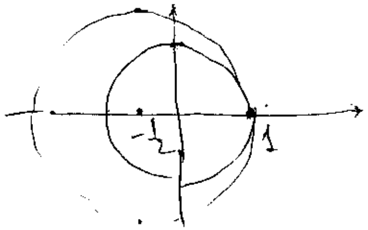
Если все коэф-ты ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ суть действит. неотр. числа, ~~[illegible]~~ и радиус сх-ти равен 1, то т. $z=1$ является особой для суммы этого ряда.

$z=1$ - особ. точка

Более того, $\sqrt[2^n]{1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ - тоже ос. точки (д-во - в конце Маркушевича)

Все $|z|=1$ сост. из ос. точек ф-и $f(z)$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, сх. в $|z|<1$



1 — ос. точка.
Продолжим ф-ю с пом. др. точек, напр. $-\frac{1}{2}$.

$$f(z)=\frac{1}{\frac{3}{2}-(z+\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-2\frac{(z+\frac{1}{2})}{3}}$$ — сх. в круге $|z+\frac{1}{2}|<\frac{3}{2}$.

$$=\sum c_n\left(z+\frac{1}{2}\right)^n$$

⇒ мы можем распр-ть $f(z)$

[Лекция 10] 18.05.06.

ТЕМА 10

Гармонические функции.

Пусть $f(z)\in A(G)$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

Теор. 10.1 Ф-и u и v облад. в G дифференцируемыми частными производными всех порядков.

□ $f(z)=u+iv$

$f'(z)=u'_x+iv'_x=v'_y-iu'_y$

$f'(z)\in A(G)$.

$f''(z)=u''_{xx}+iv''_{xx}=u''_{xy}-iv''_{xy}=v''_{yy}+iu''_{yy}=$
$=v''_{yx}-iu''_{yx}$ ■

Следствие. u и v имеют в G непрерывные частные производные 2-го порядка.

Усл-я К-Р: $u'_x=v'_y$ (1) | диф. по x
$u'_y=-v'_x$ (2) | диф. по y (1)

Получим $u''_{xx}+u''_{yy}=0$.

Теперь (1) — по y, (2) — по x ⇒

$v''_{xx}+v''_{yy}=0$.

Опр. Дифференциальное уравнение с частными производными (в частных производных)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

называется ур-ем Лапласа.

Обозн. $\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ — лапласиан.

Ф-я $\varphi(x,y)$, обладающая в нек. обл. G непр. частн. пр. до 2-го порядка включительно и удовлетворяющая ур-ю Лапласа, наз-в. гармонической в области G.

Теор. 10.2 Пусть $f(z)\in A(G)$ и $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Тогда u и v — ф-и, гармонические в области G.

□ уже д-но ■

Теор. 10.3 Пусть $u(x,y)$ — функция, гармоническая в односвязной области G. Тогда $\exists f(z)\in A(G)$ такая, что $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$

□ ∃ $f=u(x,y)+iv(x,y)$ искомая ф-я

Найдём недостающую мнимую часть v

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = P(x,y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = Q(x,y) \qquad \text{(усл. К-Р.)}$$

Т.к. u - гармоническая P и Q непрерывны и имеют непрерывные частные производные 1-го порядка тогда:

$$\psi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$ — не завис. от выбора пути инт-я

$$\psi'_x = P, \quad \psi'_y = Q.$$

Возьмём в качестве $v(x,y) = \psi(x,y) + C =$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy + C =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C$$

u, v - непрерывно дифференцируемы и удовл. усл-ям (CR)

$\Rightarrow f(z) \in A(G)$

$\boxed{\text{Прим.}}$ $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \ln r.$

$(r = \sqrt{x^2+y^2})$

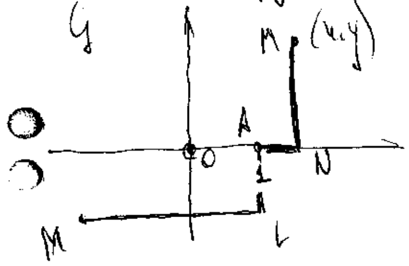
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{x}{r} = \frac{x}{r^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x 2r \frac{x}{r}}{r^4} = \frac{y^2-x^2}{r^4}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{r^4}.$$

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$



Опр. О паре ф-й u, v составл. аналит. ф-ю говорят, что они сопряжённые (иначе говоря, для них вып-ся усл-я (CR))

Найдём в данном примере $v(x,y)$:

$$v(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_{ANM} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \underbrace{\int_{AN} \ldots}_{=0} + \int_{NM} \ldots =$$

$$= x\int_0^y \frac{dy}{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_0^y = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

$\exists \arg z \in [-\pi, \pi)$

$\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi \quad ; x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$

$\underline{\varphi = \arg z}$

$\Rightarrow v(x,y) = \arg z.$

$$v(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy = \int_{ALM} \ldots = \int_{AL} \ldots + \int_{LM} \ldots =$$

$$= \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} + \int_1^x \frac{y}{x^2+y^2}dx = \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} \ominus$$

$\ominus\, \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, y<0 \end{cases} \ominus$

$\ominus -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} =$

$\left\{ \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} \right\} =$

$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \arg z.$

$u(x,y) = \ln|z|,\ v(x,y) = \arg z,$

$f(z) = \ln|z| + i\arg z = \ln z.$

Ф-ла среднего зн-я для гармон ф-ц.

Пусть $u(x,y)$ — гармонич. в обл. G.

Фикс. т. $(x_0,y_0)\in G$ и постр. $K_R(z_0)$:

$\{|z-z_0|<R\}\subset G.$

По ф-ц $u(x,y)$ строим аналитич. ф-ю $f(z)\in A(K_R)$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, для $(x,y)\in K_R$.

Для ~~[illegible]~~ $\forall\ 0<\rho<R$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+\rho\cos\varphi,\ y_0+\rho\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho} u(x,y)\,d\sigma \quad \text{— ф-ла ср. зн-я.}$$

Принципы максимума и минимума для гармонич. функций.

Пусть $u(x,y)$ — гармон. в обл. G и $u(x,y)\neq const$ в G.

Тогда ни в одной точке $(x_0,y_0)\in G$ u не может достигать максимального и минимального значений.

$z_0 = x_0 + iy_0.$

Строим $K_R(z_0)\subset G$. В этом круге находим $f(z)\in A(G)$ так, чтобы $u(x,y) = \operatorname{Re} f$.

Наряду с f рассм. также аналитич. ф-и

$F_1(z) = e^{f(z)}$ $\quad F_2(z) = e^{-f(z)}$

$|F_1(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} = e^{u(x,y)}$

$|F_2(z)| = e^{-u(x,y)}$

Согласно принципу максимума модуля, $|F_1(z)|$ и $|F_2(z)|$ не могут достигать максимума в т. z_0 $\Leftrightarrow$ в силу монотонности e^u $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ не может достигать в (x_0,y_0) ни макс., ни миним. зн-я.

Следствие 1. Если $u(x,y)$ — ф-я гармон. в огранич. обл. G и при этом непр. в $\overline{G}$, то макс. и мин. зн-я этой ф-и достиг-ся на ∂G. Если в частности u и сопряж. прин. зн-е на границе, то $u = const$ во всей G.

Следствие 2 (теорема единственности для гармонических ф-й)

Пусть G - ограниченная область, $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ - ф-и, гармон. в G, непрерывные в $\overline{G}$ и принимающие одинаковые зн-я на ∂G ($u_1 = u_2$ для $\forall (x,y) \in \partial G$),

то u_1 и u_2 совпадают всюду в G.

□ $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ ■

Возможен доср. экзамен 25 мая.

к. 709 - записаться заранее

Требуется наличие допуска.