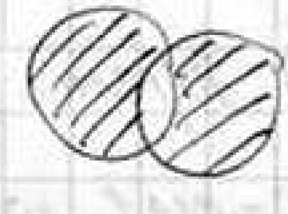
1. Определение кольца, min кольца, алгебры, полукольца, борелевской алгебры.

<u>Def</u> X - мн-во. Мн-во K подмножеств X наз. <u>кольцом</u>, если $\forall A, B \in K \Rightarrow A \cap B \in K,\ A \triangle B \in K$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \in K$

$A \setminus B = A \triangle (A \cap B) \in K$

<u>Def</u> Кольцо K наз. <u>алгеброй</u>, если все $X \in K$.

<u>Def</u> Кольцо K наз. <u>σ-классом</u>, если $\forall A_j \in K,\ j = \overline{1, \infty} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in K$.

Аналогично, σ-алгебра.

<u>Def</u> Пусть S - мн-во подмножеств X.
$K(S)$ - <u>Мин. кольцо</u>, сод-щее S - это кольцо, кот. сод. S и содержится в $\forall$ кольце, содержащем S.

<u>Th</u> $\forall$ мн-ва S $\exists$ min кольцо $K(S)$.

<u>Д.</u> Берем все $K \supset S$. $\Rightarrow K(S) = \bigcap_{K \supset S} K$.

$K(S)$ - кольцо? $\forall A, B \in K(S) \Rightarrow \forall K \supset S\ \ A, B \in K$

K кольцо $\Rightarrow A \cap B,\ A \triangle B \in K \Rightarrow A \cap B,\ A \triangle B \in \bigcap_{K \subset S} K = K(S)$ ■

<u>Def</u> Мн-во подмн-в S наз. <u>полукольцом</u>, если $\forall A, B \in S$ $A \cap B \in S$ и для $A_j, B_j \in S$
$A \supset B \Rightarrow \exists A_k \in S:\ A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ $(A_k \cap A_j = \emptyset\ k \neq j)$

<u>Лемма.</u> <u>Если</u> S - полукольцо, $A, B_k \in S$ $k = \overline{1, n}$, $B_k \cap B_i = \emptyset$ $k \neq i$

<u>то</u> $\exists A_j \in S:\ A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k = \bigsqcup_{j=1}^{m} A_j$

__Д.__ (по индукции).

1) $n=1$, $A, B \in S$.

если $B \subset A$, $A, B \in S \Rightarrow A \setminus B = \bigsqcup_j A_j$

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. $A \cap B \in S$, $A \cap B \subset A$

$\Rightarrow$ def S $\exists A_j : A \setminus (A \cap B) = \bigsqcup_j A_j$

2) Пусть верно для $n = m \Rightarrow A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{m} B_k = \bigsqcup_j A_j$

$n = m+1 \Rightarrow A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{m+1} B_k = (A \setminus \prod_{k=1}^{m} B_k) \setminus B_{m+1} =$

$= (\bigsqcup_{j=1}^{N} A_j) \setminus B_{m+1} = \bigsqcup_{j=1}^{N} (A_j \setminus B_{m+1}) = \bigsqcup_{j=1}^{N} \bigsqcup_{i=1}^{b_j} A_{ji}$, $A_{ji} \in S$ ■

__Th__ S-полукольцо, $K(S)$-кольцо, порожд. S.
__тогда__ $\forall A \in K(S)$ $\exists B_j \in S : A = \bigsqcup_{j=1} B_j$.

__Д.__ $K(S) \overset{def}{=} \{ A = \bigsqcup_j B_j,\ B_j \in S \}$

$\forall A, \tilde{A} \in K(S) : A = \bigsqcup_j B_j$, $\tilde{A} = \bigsqcup_i \tilde{B}_i$, $B_j, \tilde{B}_i \in S$.

$A \setminus \tilde{A} = (\bigsqcup_j B_j) \setminus (\bigsqcup_i \tilde{B}_i) = \bigsqcup_j (B_j \setminus (\bigsqcup_i \tilde{B}_i)) \overset{лемма}{=} \bigsqcup_j (\bigsqcup_l B'_{l_j})$,

$B'_{l_j} \in K(S) \Rightarrow A \setminus \tilde{A} \in K(S)$

если $A \cap \tilde{A} = \emptyset \Rightarrow A \cup \tilde{A} = (\bigsqcup B_j) \sqcup (\bigsqcup \tilde{B}_i) \in K(S)$

если $A \cap \tilde{A} \neq \emptyset \Rightarrow A \cup \tilde{A} = A \sqcup (\tilde{A} \setminus A) \Rightarrow A \sqcup \tilde{A} \in K(S)$

$\Rightarrow A \Delta \tilde{A} = (A \setminus \tilde{A}) \cup (\tilde{A} \setminus A) \in K(S)$

$A \cap \tilde{A} = (A \cup \tilde{A}) \Delta (A \Delta \tilde{A}) \in K(S)$ ■

__Def__ __Борелевская алгебра__ – σ-алг., порожд. открытыми мн-вами.

2 Примеры мер и зарядов. Определение меры на полукольце. Пример не σ-адд. меры.

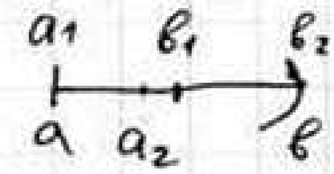
<u>Def</u> Б.г., что на полукольце S <u>зад. мера μ</u>, если $\forall A \in S \to$ число $\mu(A)$:

1) $\mu(A) \geq 0$

2) $\mu(A_1 + A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \quad \forall A_1, A_2 : A_1 \sqcup A_2 \in S$

<u>Ex</u>: 1) $S = [a, b) \Rightarrow \mu[a,b) = b - a$

$[a,b) = [a_1, b_1) \sqcup [a_2, b_2)$



2) $F(t)$ неуб. на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \mu_F[a,b) = F(b) - F(a)$

обратно: $F(t) = \begin{cases} \mu[0,t), & \forall t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -\mu[t,0), & t < 0 \end{cases}$

<u>Def</u> <u>Мера</u> μ, зад. на полукольце S наз. <u>σ-адд.</u>, если $\forall A_k \in S : \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in S \to \mu\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

<u>Ex</u> (не σ-адд. меры)

$F(t) = \operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$

$[-1, 0) = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right)$

$\mu_F[-1, 0) = F(0) - F(-1) = 1$

$\mu_F\left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right) = F\left(-\frac{1}{n+1}\right) - F\left(-\frac{1}{n}\right) = -1 + 1 = 0$

$1 \neq 0$. $\Rightarrow$ мера не σ-адд.

<u>Def</u> Пусть S − σ-кольцо мн-в пр-ва X. Отображ. $\Phi : S \to \mathbb{R}$ наз. <u>зарядом</u>, если $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in S \Rightarrow \Phi(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi(A_k)$.

В отличие от меры может прини...

отриц. значения.

__Ex.__: 1) $\Phi(A) = \int\limits_A f d\mu$, μ - σадд. мера, f - инт.

$\Rightarrow \int\limits_{A=\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k} f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$

2) $\Phi(A) = \mu(A) - \nu(A) \Rightarrow \forall$ заряд сводится к мерам.

3 Непр. и σ-адд. меры. Продолжение меры с полукольца на мін кольцо. Мн-во меры нуль.

Def Б.г., что на полукольце S зад. мера μ, если $\forall A \in S \Rightarrow$ число $\mu(A)$:

1) $\mu(A) \geq 0$
2) $\mu(A_1 + A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ $\forall A_1, A_2 : A_1 \sqcup A_2 \in S$.

Def Мера μ, зад. на полукольце S наз. σ-адд., если $\forall A_k \in S : \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in S \rightarrow \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Def Мера μ, зад. на полук. S наз. непрер., если $\forall$ монот. возр. $A_k : A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \in S$
$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A \in S \Rightarrow \mu(A) = \lim\limits_{k \to \infty} \mu(A_k)$.

Th $\exists$ мера μ зад. на кольце K.
Тогда μ непр. ттк μ - σ-адд.

Д. ($\Rightarrow$) $\forall A_k \in K$, $A_k \cap A_i = \emptyset$ $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in K$

$B_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $B_n \in K$, $B_n \subset B_{n+1}$ $\forall n$, непр-ть $\Rightarrow$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_k)$

($\Leftarrow$) $\forall A_k \in K$ $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset \ldots$ $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A \in K$

$A = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup (A_3 \setminus A_2) \sqcup \ldots$

μ - σ-адд. $\Rightarrow \mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \ldots$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \ldots = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$ ∎

Def Пусть $m(A)$ зад. на полук. S
$\mu(A)$ зад. на кольце K.

Тогда μ явл. продолжением m с S на K, если $S \subset K$ и $\forall A \in S$ $m(A) = \mu(A)$.

Th Пусть $m(A)$ на полук. S и $K(S)$ – кольцо, пораж. S.

Тогда $\exists!$ прод. меры m на $K(S)$, причем если $m(A)$ – σ-адд, то и продолж. тоже σ-адд.

Д. $\forall B \in K(S) \Rightarrow \exists A_k \in S$ и $B = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$

Если $\exists$ прод-е меры μ на $K \Rightarrow \mu(B) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$

Покажем что. $\mu(B)$: 1) $\mu(B) \geq 0$

2) $\mu(\bigsqcup_i^n B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$

$B_i = \bigsqcup_k A_{ik}$, $A_{ik} \in S$, $B_i \in K$.

$\bigsqcup_i B_i = \bigsqcup_i \bigsqcup_k A_{ik} \Rightarrow \mu(\bigsqcup_i B_i) = \sum_i \sum_k m(A_{ik})$

$\Rightarrow \mu(B_i) = \sum_k m(A_{ik})$.

Осталось пок., что $\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$

$B = \bigsqcup_k A_k$, $A_k \in S \Rightarrow A_k = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (B_i \cap A_k)$

$B_i = \bigsqcup_j A_{ij}$, $A_{ij} \in S \Rightarrow A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \bigsqcup_j (A_{ij} \cap A_k)$

m – σ-адд. $\Rightarrow m(A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} m(A_{ij} \cap A_k)$

$\Rightarrow \mu(B) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_k \sum_i^{\infty} \sum_j m(A_{ij} \cap A_k) =$

$= \sum_i^{\infty} \sum_j \sum_k m(A_{ij} \cap A_k) = \sum_i^{\infty} \sum_j m(A_{ij}) = \sum_i^{\infty} \mu(B_i)$ ■

Def Пусть на кольце K зад. σ-адд. мера μ. Тогда мн-во $E \subset X$ ($E \notin K$) наз. <u>мн-вом меры 0</u>, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_k \in K$, $E \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \varepsilon$.

4. σ-аддитивность длины. Опред. и св-ва внешней меры. Измеримость по Лебегу.

Th Пусть S - полукольцо из $[a,b)$ и $\mu[a,b)=b-a$

Тогда μ - σ-адд. мера на S.

Д. $[a,b)=\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)$, $b-a\overset{?}{=}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)$.

1) $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)\subset[a,b)\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu[a_k,b_k)\le\mu[a,b)$

$\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)\le b-a$

2) $\forall\varepsilon>0\quad[a,b-\varepsilon]\subset[a,b)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k-\frac{\varepsilon}{2^k},b_k\right)$

$\Rightarrow[a,b-\varepsilon]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k-\frac{\varepsilon}{2^k},b_k\right)$.

$\Rightarrow$ лемма Гейне-Бореля (если замкн. мн-во накрыто открытым, можно выд. кон. подпокрытие) $\Rightarrow\exists N:\ [a,b-\varepsilon]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{N}\left(a_k-\frac{\varepsilon}{2^k},b_k\right)$

$[a,b-\varepsilon)\subset[a,b-\varepsilon]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{N}\left(a_k-\frac{\varepsilon}{2^k},b_k\right)$

$\Rightarrow[a,b-\varepsilon)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{N}\left[a_k-\frac{\varepsilon}{2^k},b_k\right)$

$\mu[a,b-\varepsilon)=\sum\limits_{k=1}^{N}\mu\left[a_k-\frac{\varepsilon}{2^k},b_k\right)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu\left[a_k-\frac{\varepsilon}{2^k},b_k\right)$

$(b-\varepsilon-a)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(b_k-a_k+\frac{\varepsilon}{2^k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k+a_k)+2\varepsilon$

В силу произвольности $\varepsilon>0\Rightarrow$

$(b-a)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)$

$\Rightarrow(b-a)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)$ ■

Def Рассм. $X=[0,1)$, $m[a,b)=b-a$ - σ-адд. мера.
Пусть $A\subset X$. Тогда <u>внешней мерой A</u> наз. число $\mu^*(A)=\inf\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(B_k)$

$A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$, $B_k\in K$ - алгебра$_X$ подмн.

Св-ва внешней меры:

1) если $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$

2) если $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$, $A, A_k \in X$

Д. $\forall \varepsilon > 0 \quad A_k \subset \bigcup_j B_{kj}$, $B_{kj} \in K$: $\mu^*(A_k) \ge \sum_j m(B_{kj}) - \frac{\varepsilon}{2^k}$

$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{kj} \Rightarrow \mu^*(A) \le \sum_k \sum_j m(B_{jk}) \le$

$\le \sum_k \left(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \le \sum_k \mu^*(A_k) + \varepsilon$

$\Rightarrow$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$ $\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ ■

Th если $A \in K$, то $\mu^*(A) = m(A)$

Д. 1) $A \subset A \in K \quad \mu^*(A) \le m(A)$

2) $\underset{K}{A} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in K \Rightarrow m(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$, т.к. m - σ-адд.

$m(A) \le \inf_{A \in \cup B_k,\ B_k \in A} \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \le \mu^*(A) \Rightarrow \mu^*(A) \ge m(A)$

$\Rightarrow \mu^*(A) = m(A)$ ■

Def Мн-во $A \subset X$ наз. измеримым по Лебегу, если $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$, $X \in K$.

Def Мера Лебега мн-ва A – число $\mu(A) = \mu^*(A)$

Def Внутр. мера мн-ва A – число
$\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(A)$, $\mu_*(A) \ge 0$.

5. Критерий измеримости по Лебегу

<u>Лемма.</u> 1) $\forall A_1, A_2 \in X \quad |\mu^*(A_1) - \mu^*(A_2)| \le \mu^*(A_1 \Delta A_2)$

2) $\forall A, B, C \in X \quad \mu^*(A \Delta B) \le \mu^*(A \Delta C) + \mu^*(C \Delta B)$.

<u>Д-во:</u> 1) $A_1 \subset A_2 \cup (A_1 \Delta A_2) \Rightarrow \mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2) + \mu^*(A_1 \Delta A_2)$

$A_2 \subset A_1 \cup (A_1 \Delta A_2) \Rightarrow \mu^*(A_2) \le \mu^*(A_1) + \mu^*(A_1 \Delta A_2)$

$\Rightarrow |\mu^*(A_1) - \mu^*(A_2)| \le \mu^*(A_1 \Delta A_2)$

2) $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$

$\Rightarrow \mu^*(A \Delta B) \le \mu^*(A \Delta C) + \mu^*(C \Delta B)$. ■

<u>Th</u> Мн-во $A \subset X$ измеримо по Лебегу <u>тттк</u> $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ элем. мн-во $B \subset K$: $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

<u>Д-во:</u> $(\Rightarrow)$ $\forall \varepsilon > 0$ ~~...~~ $\exists B_k \in K : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$

$\mu^*(A) \ge \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) - \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow \exists N : \sum_{n=N+1}^{\infty} m(B_k) \le \frac{\varepsilon}{3} \qquad B = \bigcup_{k=1}^{N} B_k, \; B_k \in K$.

$(A \Delta B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1) $A \setminus B \subset$ ~~...~~ $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \setminus B \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} B_k$

$\Rightarrow \mu^*(A \setminus B) \le \sum_{k=N+1}^{\infty} m(B_k) < \frac{\varepsilon}{3}$

2) $B \setminus A = (X \setminus A) \cap B$

A измеримо $\Rightarrow (X \setminus A)$ изм., $X \setminus A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, $C_j \in K$:

$\mu^*(X \setminus A) \ge \sum_j m(C_j) - \frac{\varepsilon}{3}$

$B \setminus A = (X \setminus A) \cap B \subset \left(\bigcup_j C_j\right) \cap B \subset \bigcup_j (C_j \cap B)$

$\mu^*(B \setminus A) \le \sum_j \mu^*(C_j \cap B) \le \sum_j m(C_j \cap B) =$

$$= \sum_j [m(C_j) - m(C_j \setminus B)] = \sum_j m(C_j) - \sum_j m(C_j \setminus B)$$

$$X \subset (X \setminus A) \cup A \subset \left(\bigcup_j C_j\right) \cup \left(\bigcup_k B_k\right) \subset \left(\bigcup_j (C_j \setminus B)\right) \cup \left(\bigcup_k B_k\right)$$

$$\Rightarrow m(X) = \mu^*(X) \leq \sum_j m(C_j \setminus B) + \sum_k m(B_k)$$

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \sum_j m(C_j) + \sum_k m(B_k) - m(X) \leq \mu^*(X \setminus A) +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{3} + \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3} - m(X) \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$ $\quad |\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$

$$(X \setminus A) \Delta (X \setminus B) = A \Delta B \quad , A, B \subset X$$

$$|\mu^*(X \setminus A) - \mu^*(X \setminus B)| \leq \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -\varepsilon \leq \mu^*(A) - m(B) \leq \varepsilon \\ -\varepsilon \leq \mu^*(X \setminus A) - m(X \setminus B) \leq \varepsilon \\ \hline -2\varepsilon \leq \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) + m(X) \leq 2\varepsilon \end{array}$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$$

∎

6. Св-ва измеримых мн-в. σ-конечная мера.

Мн-во $A \subset X$ наз. **измеримым по Лебегу**, если $\mu^*(A)+\mu^*(X\setminus A)=m(X)$, $X \in K$.

Th1 Мн-во A изм. по Леб., если $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ изм. C и $\mu^*(A \Delta C)<\varepsilon$.

Д. C изм $\overset{крит}{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ эл. $B \in K$ и $\mu^*(C \Delta B)<\varepsilon$
$\Rightarrow (A \Delta B) \subset (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$ $\forall A, B, C \subset X$
$\mu^*(A \Delta B) \le \mu^*(A \Delta C)+\mu^*(C \Delta B) < 2\varepsilon \overset{крит}{\Rightarrow} A$ изм ■

Th2 Измеримые по Леб. мн-ва образуют алгебру, т.е. если A_1, A_2 изм $\Rightarrow (A_1 \cup A_2), (A_1 \cap A_2), (A_1 \setminus A_2), (A_1 \Delta A_2)$ измеримы.

Д. A_1, A_2 изм $\overset{кр}{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ элем. $B_1, B_2 \in K$: $\mu^*(A_1 \Delta B_1)<\varepsilon$, $\mu^*(A_2 \Delta B_2)<\varepsilon$.

$\Rightarrow (A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$

$\mu^*((A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2)) \le \mu^*(A_1 \Delta B_1)+\mu^*(A_2 \Delta B_2) < 2\varepsilon$

$B_1 \cup B_2 \subset K \overset{кр}{\Rightarrow} A_1 \cup A_2$ измер.

Остальное аналогично. ■

Th3 Если A изм., то доп-е CA изм.

Д. $m(X)=\mu^*(A)+\mu^*(\underbrace{X\setminus A}_{CA}) \Rightarrow A$ и CA изм. ■

Th4 Если A_1 и A_2 изм., $A_1 \cap A_2=\varnothing$, то $\mu(A_1 \sqcup A_2)=\mu(A_1)+\mu(A_2)$.

Д. $A=A_1 \sqcup A_2$ – измер., $\mu^*(A) \le \mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)$
$\Rightarrow \mu(A)=\mu(A_1)+\mu(A_2)$ $\overset{крит}{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ элем. $B_1, B_2 \in K$:
$\mu^*(A_1 \Delta B_1)<\varepsilon$, $\mu^*(A_2 \Delta B_2)<\varepsilon$ $\Rightarrow A_i \subset B_i \sqcup (A_i \Delta B_i)$
$\Rightarrow \mu^*(A_i) \le \mu^*(B_i)+\mu^*(A_i \Delta B_i) < \mu^*(B_i)+\varepsilon$

$\Rightarrow \mu^*(A_1)+\mu^*(A_2) \le \mu^*(B_1)+\mu^*(B_2)+2\varepsilon$

$\Rightarrow \mu(A_1)+\mu(A_2) \le m(B_1)+m(B_2)+2\varepsilon =$
$= m(B_1\cup B_2)+m(B_1\cap B_2)+2\varepsilon.$

$B_1\cap B_2 \subset (A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$

$\Rightarrow m(B_1\cap B_2)=\mu^*(B_1\cap B_2)\le \mu^*(A_1\Delta B_1)+\mu^*(A_2\Delta B_2) < 2\varepsilon$

$B_1\cup B_2 \subset (A_1\cup A_2)\cup(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$

$\Rightarrow m(B_1\cup B_2)=\mu^*(B_1\cup B_2)\le \mu^*(A_1\cup A_2)+\mu^*(A_1\Delta B_1)+$
$+\mu^*(A_2\Delta B_2)\le \mu^*(A_1\cup A_2)+2\varepsilon$

$\Rightarrow \mu(A_1)+\mu(A_2)\le 2\varepsilon+\mu(A_1\cup A_2)+2\varepsilon+2\varepsilon=\mu(A_1\cup A_2)+6\varepsilon.$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ $\mu(A_1)+\mu(A_2)\le\mu(A_1\cup A_2)$

С др. стороны $\mu(A_1\cup A_2)\le\mu(A_1)+\mu(A_2)$

$\Rightarrow \mu(A_1\cup A_2)=\mu(A_1)+\mu(A_2)$ ■

<u>Th5</u> <u>Если</u> A_k изм., <u>то</u> $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, $A=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ измеримы.

<u>Д.</u> 1) $A=A_1\cup A_2\cup\ldots=\underbrace{A_1}_{\tilde A_1}\sqcup\underbrace{(A_2\setminus A_1)}_{\tilde A_2}\sqcup\underbrace{(A_3\setminus(A_1\cup A_2))}_{\tilde A_3}\sqcup\ldots=\bigsqcup_{k=1}\tilde A_k$ – изм.

$\bigsqcup_{k=1}^{n}\tilde A_k\subset A\Rightarrow\mu^*(\bigsqcup_k\tilde A_k)\le\mu^*(A)<\infty$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\mu(\tilde A_k)\le\mu^*(A)$, $n\to\infty$ $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(\tilde A_k)$ сходится

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists n:\ \sum_{k=n+1}^{\infty}\mu(\tilde A_k)<\varepsilon$

$C=\bigsqcup_{k=1}^{n}\tilde A_k$ изм $\Rightarrow\mu^*(A\Delta C)=\mu^*((A\setminus C)\cup(C\setminus A))=$

$=\mu^*(\bigsqcup_{k=n+1}^{\infty}\tilde A_k)\le\sum_{k=n}^{\infty}\mu^*(\tilde A_k)=\sum_{k=n}^{\infty}\mu(\tilde A_k)<\varepsilon$

2) A_k изм $\Rightarrow CA_k$ изм $\Rightarrow\bigcup_{k=1}^{\infty}CA_k$ изм. $\Rightarrow$

$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=C(\bigcup_{k=1}^{\infty}CA_k)$ – изм. ■

<u>Def</u> Мера μ наз. <u>σ-конечной</u>, если X можно предст. в виде $X=\bigsqcup_{k=1}X_k$, $\mu(X_k)<\infty$ $\forall k$

7. Канторово мн-во, пример неизмеримого мн.

1) Берем сегмент $[0,1]$ - замкн. мн-во. По центру выбрас. $(a_1, b_1) = \frac{1}{3}[0,1]$, т.е. $[0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

2) Из 2^k остави. выбрас. по $1/3$ длин соотв. сегментов и так далее

3) Продолжаем до бесконечности.

То, что осталось - <u>канторово мн-во</u>

$$K = [0,1] \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \text{ - измеримо.}$$

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3^2} + 4\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots + 2^n\cdot\frac{1}{3^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1 - 2/3} = 1$$

$\mu[0,1] = 1$

$\mu(K) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ мн-во меры 0.

<u>Ex</u> (неизмеримого по Лебегу мн-ва)

Берем $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow K(x) = \{y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], (y-x)\text{- рац. число}\}$.
В кажд. таком классе счетн. число эл-тов.

1) Либо $K(x) = K(z)$, либо $K(x) \cap K(z) = \varnothing$.
$\exists\, y \in K(x) \cap K(z) \Rightarrow$ по опред. $y \in K(x)$ и $y \in K(z)$
$\Rightarrow$ $y - x$ - рац.
$y - z$ - рац. $\Big| \Rightarrow x - z$ - рац. $\Rightarrow z \in K(x)$
Аналог., $x \in K(z) \Rightarrow K(x) = K(z)$.

2) Берем из кажд. класса $K(x)$ точку $\Rightarrow$ получим мн-во M - неизмеримое, $M \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

3) Обозн. $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ – все рац. точки на $[-1,1]$

Пусть $(M+r_k)$ – сдвиг M на r_k. $\Rightarrow (M+r_k)\cap(M+r_j)=\varnothing$, $r_k\neq r_j$

Пусть $\exists\, z\in(M+r_k)\cap(M+r_j) \Rightarrow \underbrace{y+r_k = z = \tilde{y}+r_j}_{\text{из разн. классов}}$, $y,\tilde{y}\in M$

$y-\tilde{y}=r_j-r_k$ – рац. число.

Т.к. $y\in K(x)$, $\tilde{y}\in K(\tilde{x}) \Rightarrow (y-x)$, $(\tilde{y}-\tilde{x})$ рац $\Rightarrow (x-\tilde{x})$, $(y-\tilde{y})$ рац

$\Rightarrow K(x)=K(\tilde{x})$, но мы выбир. $y,\tilde{y}$ из разн. кл.

4) Пок., что $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\subset\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(M+r_k)$

$\forall\, z\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \Rightarrow z$ попад. в один из классов.

$\Rightarrow \exists\, K(x)\ni z \Rightarrow (z-x)$ – рац. число

$\exists\, y\in K(x)$ и $y\in M \Rightarrow (y-x)$ – рац. число

$\Rightarrow (z-y)$ – рац., $y\in M$, а т.к. $z\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $y\in K(x)$

$\Rightarrow y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ по построению

$\Rightarrow (z-y)\in[-1,1]$, $(z-y)$ – рац. $\Rightarrow \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ – все рац. числа из $[-1,1]$. $\Rightarrow \exists\, r_j$ – рац., $r_j\in[-1,1]$ и $(z-y)=r_j$

5) $\Rightarrow [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\subset\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(M+r_k)\subset[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$.

Пусть M измеримо (тогда $\mu(M)\geq 0$).

1) Пусть $\mu(M)>0 \Rightarrow \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(M+r_k)\subset[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}] \Rightarrow \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty})\leq 3$

А $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty})=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(M+r_k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(M)=+\infty \Rightarrow$ прот.

2) Пусть $\mu(M)=0 \Rightarrow [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\subset\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}M(r_k) \Rightarrow$

$1=\mu[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(M+r_k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(M)=0$

$\Rightarrow$ прот.

$\Rightarrow M$ неизмеримо. ■

8 Мера Лебега-Стилтьеса, необх. и дост. усл-е σ-адд. меры.

Def Если $F(t)$ неуб $\Rightarrow \mu_F$, где $\mu_F(a,b)=F(b)-F(a)$ наз. мерой Лебега-Стилтьеса.

Th Мера $\mu_F(a,b)$, порожд. функ. F σ-адд. ТТК $F(t)$ непр. слева в кажд. точке.

Д-во: $(\Rightarrow)$ берем $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \to c$, $c_n \le c_{n+1} < c$

Дост. док., что $F(c_n) \to F(c)$

$[c_n, b) \in S$, $[c_n, b) \supset [c_{n+1}, b)$

$\lim\limits_{n\to\infty} [c_n, b) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [c_n, b) = [c, b)$

Если мера μ_F σ-адд $\Rightarrow$ непр.

$\lim\limits_{n\to\infty} \mu_F[c_n, b) = \mu_F[c, b)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (F(b) - F(c_n)) = F(b) - F(c)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} F(c_n) = F(c)$

$(\Leftarrow)$ $[a,b) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k)$, $\mu_F[a,b) \overset{?}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_F[a_k, b_k)$

1) $\forall F(t)$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_F[a_k, b_k) \le \mu_F[a,b)$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} (F(b_k) - F(a_k)) \le F(b) - F(a)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$: $F(b) - F(b-\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ (непр-ть слева).

$\exists \delta_k > 0$: $F(a_k) - F(a_k - \delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$

$[a, b-\delta] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - \delta_k, b_k) \Rightarrow$ лемма Гейне-Бореля

$\exists N$: $[a, b-\delta] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} (a_k - \delta_k, b_k) \Rightarrow$

$\underbrace{[a; b-\delta)}_{\in S} \subset [a, b-\delta] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} (a_k - \delta, b_k) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} [a_k - \delta, b_k)$

μ_F σ-аддит. $\Rightarrow \mu_F[a, b-\delta) \le \sum\limits_{k=1}^{N} \mu_F[a_k-\delta_k, b_k) \le$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F[a_k-\delta_k, b_k)$$

$$F(b-\delta) - F(a) \le \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k-\delta_k)]$$

$$F(b)-F(a) \le \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k)-F(a_k)] + \sum_{k=1}^{\infty} [F(a_k)-F(a_k-\delta_k)] +$$

$$+ F(b) - F(b-\delta) \le \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k)-F(a_k)] + \varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ $F(b)-F(a) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} [F(b_k)-F(a_k)]$

$$\Rightarrow F(b)-F(a) = \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k)-F(a_k)].$$

$\blacksquare$

9. Абс. непр-ть одной меры отн. другой, критер. абс. непр-ти меры отн. меры Лебега. Пример неабсолютно непр. меры.

__Def__ Пусть μ и ν - две σ-адд. меры, зад. в σ-алгебре. Тогда говорят, что __ν - абс. непр. отн. меры μ__, если $\mu(A)=0 \Rightarrow \nu(A)=0$ $\forall A$ - σ-алгебры.

__Def__ Ф-ция $F(t)$ наз. __абс. непр.__ на $[a,b)$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$: $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\beta_i-\alpha_i)<\delta$, $[\alpha_i,\beta_i)$ попарно не перес. $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty}(F(\alpha_i)-F(\beta_i))<\varepsilon$

__Лемма__ μ и ν - σ-адд., зад. на общей σ-алгебре. ν абс. непр. отн. μ ТТТК $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$: если $\mu(A)<\delta \Rightarrow \nu(A)<\varepsilon$ $\forall A$.

__Д-во:__ $\Rightarrow$ (От противного)

$\exists\ \exists\varepsilon>0: \forall \delta_n>0$ (напр. $\frac{1}{2^n}$) $\exists A_n \in \sigma$ал.: $\mu(A_n)<\delta_n = \frac{1}{2^n}$, но $\nu(A_n)\geqslant\varepsilon$

$B_m=\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}A_n$, $B_m\in\sigma$ ал., $B_1 > B_2 > \ldots$

$\mu(B_m)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}\to 0$ при $n\to\infty$

$A_n\subset B_m \Rightarrow \nu(B_m)\geqslant\nu(A_n)\geqslant\varepsilon$.

Пусть $B=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}B_m$, B - σ-ал. $\Rightarrow \mu(B)=\lim\limits_{m\to\infty}\mu(B_m)=0$

Т. к. ν абс. непр. отн. μ $\Rightarrow \nu(B)=0$, но $\nu(B)=\lim\limits_{m\to\infty}\nu(B_m)\geqslant\varepsilon$ $\Rightarrow$ противор.

$\Leftarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\mu(A)<\delta\Rightarrow\nu(A)<\varepsilon$.

$\forall A$ $\mu(A)=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\nu(A)<\varepsilon \Rightarrow \nu(A)=0$.

■

Th Пусть μ - мера, порожд. длиной; ν - ф-цией F, непр. в кажд. точке.

Тогда ν абс. непр. отн. μ ттк $F(t)$ абс. непр.

Д-во: $(\Rightarrow)$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon$

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j);\quad \mu(A) = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta$$

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \nu[\alpha_j, \beta_j) = \sum_{j=1}^{n} (F(\beta_j) - F(\alpha_j)) < \varepsilon \Rightarrow F(t) \text{ абс. непр.}$$

$(\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (F(\beta_i) - F(\alpha_i)) < \varepsilon$

Необх. д-ть: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \exists \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k) \supset A \text{ и}: \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \frac{\delta}{2}$$

$$\Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(a_k - \frac{\delta}{2^{k+1}}, b_k\right) = \bigsqcup_{j} (\alpha_j, \beta_j)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j - \alpha_j) \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k - a_k + \frac{\delta}{2^{k+1}}\right) \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

$\Rightarrow$ в силу абс. непр-ти F $\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta\ \forall n$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} F(\beta_j) - F(\alpha_j) < \varepsilon,\quad n \to \infty\quad \sum_{j=1}^{\infty} F(\beta_j) - F(\alpha_j) < \varepsilon$$

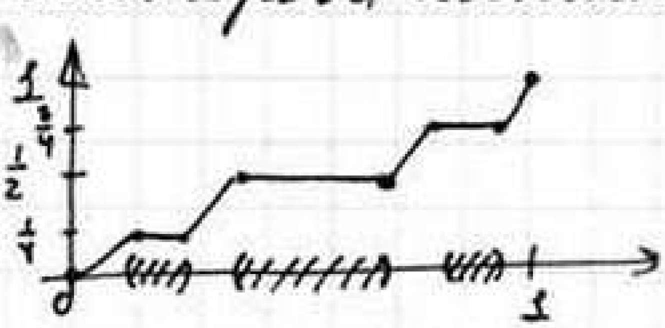
$$\nu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} [\alpha_j, \beta_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu[\alpha_j, \beta_j) = \sum_{j=1}^{\infty} F(\beta_j) - F(\alpha_j) \le \varepsilon$$

$$A \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} [\alpha_j, \beta_j) \Rightarrow \nu(A) \le \varepsilon\quad \forall \varepsilon > 0$$

в силу произвольности ε $\nu(A) = 0$ ■

Ex (н абс. непр. меры) $\nu_F[0,1] = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_F(a_k, b_k) + \nu_F(K)$

Канторова лестница: $\nu_F(a_k, b_k) = \nu_F[a_k, b_k) = F(b_k) - F(a_k) = 0$



$$\nu_F[0,1] = F(1) - F(0) = 1$$

$$\Rightarrow \nu_F(K) = 1,\ \mu(K) = 0.$$

10. Измеримые фун., измеримость непр. фун., пределов изм. ф-ций, производной.

X – пр-во, Σ – σ-алгебра измеримых мн-в
μ – σ-адд. мера.

Def $f: X \to \mathbb{R}^1$ наз. <u>измеримой</u>, если $\forall c \in \mathbb{R}$: $c \in (-\infty, +\infty)$ $\{t \in X, f(t) \leq c\}$ – измеримо отн. меры μ (т.е. принадл. соотв. алгебре $\{f(t) \leq c\} \in \Sigma$).

Утв. След. утверждения эквивалентны

1) $\forall c$ изм. $\{f < c\}$
2) $\forall c$ изм. $\{f \leq c\}$
3) $\forall c$ изм $\{f > c\}$
4) $\forall c$ изм. $\{f \geq c\}$.

Д-во: $1 \to 2$: $\{f \leq c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{f < c + \frac{1}{n}\}$

$2 \to 3$: $\{f > c\} = X \setminus \{f \leq c\}$

$3 \to 4$: $\{f \geq c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{f > c - \frac{1}{n}\}$

$4 \to 1$: $\{f < c\} = X \setminus \{f \geq c\}$

Ex. 1) f непр. на X.
$\{f \leq c\}$ замкнуто в силу непр-ти f
(т.к. $x_k \in \{f \leq c\}$ и $x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \leq c$ $k \to \infty$)
А замкн. мн-во измеримо, т.к. доп-е к нему открытое.

2) $$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

$$\{\chi_A(t) < c\} = \begin{cases} X, & c > 1 \\ X \setminus A, & 0 < c \leq 1 \\ \varnothing, & c \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \chi_A(t) \text{ изм} \Leftrightarrow A \text{ изм.}$$

Th <u>Если</u> $f_n(t)$ непр. $\forall n$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$ $\forall t \in X$,

<u>то</u> $f(t)$ изм.

Д-во: $\{f<c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{f_n<c-\frac{1}{k}\}$

1) $\forall t\in\{f<c\}$, т.е. $f(t)<c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)<c$

$f(t)<c-\frac{1}{k}$, $k\geq M \Rightarrow f_n(t)<c-\frac{1}{k}$ $\forall n\geq N$

$t\in\bigcap_{n=N}^{\infty}\{f_n<c-\frac{1}{k}\} \Rightarrow t\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{f_n<c-\frac{1}{k}\}$

2) $t\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{f_n<c-\frac{1}{k}\} \Rightarrow \exists k,m:\ t\in\bigcap_{n=m}^{\infty}\{f_n<c-\frac{1}{k}\}$

$\Rightarrow t\in\{f_n<c-\frac{1}{k}\}$ $\forall n\geq M$ при $n\to\infty$ $f_n(t)<c-\frac{1}{k}$

$f(t)\leq c-\frac{1}{k} \Rightarrow f(t)<c \Rightarrow t\in\{f<c\}$

$\{f_n<c-\frac{1}{k}\}$ измер. $\Rightarrow$ Th док. ∎

Th **Если** $f(x)$ измерима и имеет произв. п.в,
тогда $f'(x)$ измеримая фун.,
т.е. $\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta} = f'(x)$ $\exists$ для п.в. $x\in X$.

Д-во: $\varphi_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$ – измеримая

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = f'(x)$ – измеримая фун. ∎

11. Аппроксимация измеримых ф-ций простыми, измеримость суммы, разности, произведения, частного измеримых функ. Th Егорова.

Def X – пр-во, Σ – σ-алг. измеримых мн-в
μ – σ-адд. полная мера.
Тогда $f: X \to \mathbb{R}^1$ наз. <u>измеримой</u>, если $\forall c \in \mathbb{R}$ $\{t \in X, f(t) \le c\}$ – измеримо отн. меры μ (т.е. $\{f \le c\} \in \Sigma$)

Def Изм. f наз. <u>простой</u>, если она прин. конечное ~~[illegible]~~ (или счетное) число значений:
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k}(x), \text{ где } X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k, \ A_k \text{ изм. } A_k \cap A_j = \emptyset, k \ne j$$

<u>Th</u> <u>Если</u> f – изм. на X, $\{f = \infty\} = E$,
<u>то</u> $\exists$ послед. простых φ_n, равн. сх-ся к f на $X \setminus E$.

<u>Д.</u> Построим такую послед. простых функ.
$$A_n^m = \{\frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n}\}, \ m = \overline{-\infty, +\infty}, \ n \in \mathbb{N}, n \to \infty$$
Тогда $X = \bigsqcup_{m=-\infty}^{+\infty} A_n^m \sqcup E$
A_n^m изм. в силу изм-сти $f(x)$
$$\varphi_n = \begin{cases} \frac{m}{n}, \text{ на } A_n^m \\ 0, \text{ на } E \end{cases}$$
$$\Rightarrow 0 < f \cdot \varphi_n < \frac{1}{n} \text{ на } A_n^m \ \forall n \Rightarrow \forall x \in X \setminus E$$
$$\Rightarrow \varphi_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{m}{n} \chi_{A_n^m}(x) \text{ – простая и равн. сх-ся}$$ ∎

<u>Th</u> Мн-во прост. функ. образует алгебру
<u>Если</u> φ, ψ простые $\Rightarrow$ $\varphi \pm \psi$, $\varphi * \psi$, $\frac{\varphi}{\psi}$ $(\psi \ne 0)$ прост.

Д-во: $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_k \chi_{A_k}(x)$, $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$

$\psi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n \chi_{B_n}(x)$, $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

Рассм. $A_k = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_k \cap B_n) = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_{kn}$

$B_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_n \cap A_k)$

$\Rightarrow \varphi = \sum\limits_{k,n=1}^{\infty} \varphi_k \chi_{C_{kn}}(x)$, $\psi = \sum\limits_{k,n=1}^{\infty} \psi_n \chi_{C_{nk}}(x)$

$\Rightarrow \varphi \pm \psi = \sum\limits_{k,n=1}^{\infty} (\varphi_k \pm \psi_n) \chi_{C_{kn}}(x)$ – прост.

$\varphi \cdot \psi = \sum\limits_{k,n=1}^{\infty} (\varphi_k \psi_n) \chi_{C_{kn}}(x)$ – прост.

$\dfrac{\varphi}{\psi} = \sum\limits_{k,n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_k}{\psi_n} \chi_{C_{kn}}(x)$ – прост. ∎

Th Если f, g изм $\Rightarrow f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ изм.

Д. f, g изм $\Rightarrow \exists$ прост. $\varphi_n, \psi_n \rightrightarrows f, g$ $(f, g \neq \infty)$ на X.

1) $\varphi_n \pm \psi_n \rightrightarrows f \pm g$ } т.к. предел измер. есть изм.

2) $\varphi_n \cdot \psi_n \to fg$ } $\Rightarrow f \pm g$, fg изм.

3) $\dfrac{\varphi_n}{\psi_n} \to \dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$.

Пок. измеримость $\frac{1}{g}$: $\left\{\frac{1}{g} < c\right\} = \begin{cases} \{g > \frac{1}{c}\} \cup \{g < 0\}, & c > 0 \\ \{g > \frac{1}{c}\} \cap \{g < 0\}, & c < 0 \\ \{g < 0\}, & c = 0 \end{cases}$ ∎

Th (Егорова) **Если** $\mu(X) < \infty$, f_n, f измер., $f_n(x) \xrightarrow[X]{n.в.} f(x)$,

тогда $\forall \delta > 0 \ \exists X_\delta \subset X$ – изм: $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$

и $f_n(x) \underset{X_\delta}{\rightrightarrows} f(x)$.

Д-во: 1) $\exists$ $f_n \xrightarrow[X]{всюду} f$.

$X_n^m = \{x \in X : |f_n - f| < \frac{1}{m} \ \forall k \geq m\}$ – сх-ть в каждой т.

Def $X_n^m \subset X_{n+1}^m \quad \forall n, m \quad X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^m$

$\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^m \subset X$ - очевидно.

$\forall x \in X \quad \forall m \; \exists n \; |f_k(x) - f(x)| \le \frac{1}{m} \quad \forall k \geq n \Rightarrow$

из опред. сх-ти $\quad X \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^m \Big)$

$\Rightarrow X = \lim\limits_{n \to \infty} X_n^m \Rightarrow \mu(X) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(X_n^m)$

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \; \exists n_m^{(max)} : \mu(X \setminus X_{n_m}^m) < \frac{\delta}{2^m}$, т.к. $\mu(X \setminus X_n^m) \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} (X \setminus X_{n_m}^m)\Big) \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu(X \setminus X_{n_m}^m) \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta$$

$$\underbrace{\bigcup_{m=1}^{\infty} (X \setminus X_{n_m}^m)}_{\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} C X_{n_m}^m} = \underbrace{X \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} X_{n_m}^m}_{C \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} X_{n_m}^m} \Rightarrow X_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} X_{n_m}^m$$

$\Rightarrow \mu(X \setminus X_\delta) \le \delta$.

Ост. пок., что на X_δ $f_n \rightrightarrows f$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N}$:

$\frac{1}{m} < \varepsilon \quad \forall x \in X_\delta = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} X_{n_m}^m \Rightarrow x \in X_{n_m}^m \; \forall m$

$\Rightarrow |f_k(x) - f(x)| \le \frac{1}{m} < \varepsilon \quad \forall k \geq n_m \Rightarrow N = n_m$

$\forall x \in X_\delta \quad |f_k(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad k \geq N$

2) $f_n \xrightarrow[X]{\text{п.в}} f \Rightarrow \exists E \subset X : \mu(E) = 0$ и $f_n \xrightarrow[X \setminus E]{\text{всюду}} f$

$\mu(X) = \mu(X \setminus E) \qquad \tilde{X} = X \setminus E \Rightarrow$ 1) для $\tilde{X}$

■

12. Сх-ть по мере. Единств-ть предела по мере. Связь со сх-тью п.в.

Def Послед. измер. f_n на E наз. сх-ся по мере к измер. f, если $\mu E(|f_n - f| \geq \varepsilon) \to 0$.
$n \to \infty$ $\forall \varepsilon > 0$

Def Посл. f_n почти всюду сх-ся на X к f, если $\exists$ мн-во $E \subset X$, $\mu(E) = 0$ и $f_n(t) \to f(t)$ на $X \setminus E$

Def Фун. f и g наз. эквивалентными, если $\mu\{f \neq g\} = 0$

Утв. Если f_n изм. $\forall n$ и $f_n \xrightarrow[X]{п.в.} f \Rightarrow f$ измер.

Д-во: $\exists E \subset X : \mu(E) = 0$ $f_n \xrightarrow[X \setminus E]{} f$.

Рассм. $\hat{f}_n = \begin{cases} f_n, X \setminus E \\ 0 \text{ на } E \end{cases} \Rightarrow \hat{f}_n \to \hat{f} = \begin{cases} f, X \setminus E \\ 0, E \end{cases}$

$\hat{f}_n$ изм. (т.к. при измен. на мн-ве меры 0 изм-ть остается): $\{\hat{f}_n < c\} = [\{\hat{f}_n < c\} \cap \{X \setminus E\}] \sqcup [\underbrace{\{\hat{f}_n < c\} \cap \{E\}}_{\text{мера 0, т.к. } \mu\text{-полн.}}]$

$\{f_n < c\} \cap \{X \setminus E\}$ измер.

$\Rightarrow \hat{f}_n$ изм. $\Rightarrow \hat{f}$ изм $\Rightarrow f$ изм., т.к. $\hat{f}$ отлич. f мн-во меры 0. ■

Утв Если f - изм., $g \sim f$, то g измеримо

Д. $\{g < c\} = (\{g < c\} \cap E) \sqcup (\{g < c\} \cap (\underbrace{X \setminus E}_{f = g})) =$

$= (\underbrace{\{g < c\} \cap E}_{\subset E}) \sqcup (\underbrace{\{f < c\}}_{\text{изм}} \cap \underbrace{(X \setminus E)}_{\text{изм}})$

$\mu(E) = \mu\{f \neq g\} = 0$

$\Rightarrow \{g < c\}$ изм. $\forall c \Rightarrow g$ измеримо ■

Утв **Если** $f_n \xrightarrow[E]{\text{мере}} f$ и g, **то** $f \sim g$ на E.

Д-во: $\varepsilon \le |f-g| \le |f-f_n| + |f_n - g|$

$\Rightarrow |f-f_n| \le \frac{\varepsilon}{2}$ либо $|f_n - g| \le \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

если $x \in \{|f-g| \geq \varepsilon\} \Rightarrow$ либо 1, либо другому.

$\Rightarrow E(|f-g| \geq \varepsilon) \subset E(|f-f_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \cup E(|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2})$

$\mu E(|f-g| \geq \varepsilon) \le \mu E(|f-f_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + \mu E(|f_n-g| \geq \frac{\varepsilon}{2})$

$\downarrow 0$ в силу сх-ти по мере f_n к f, g.

$n \to \infty \Rightarrow \mu E(|f-g| \geq \varepsilon) = 0$.

$E(|f-g|>0) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(|f-g| > \frac{1}{n}) \Rightarrow \mu E(|f-g|>0) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu E(|f-g| > \frac{1}{n}) = 0$

$\Rightarrow \mu E(|f-g|>0) = 0 \Rightarrow f \sim g$. ■

Th (Лебега) **Если** изм. $f_n \xrightarrow[E]{\text{п.в.}} f$, **то** $f_n \xrightarrow[E]{\text{по мере}} f$.

Д-во: 1) Пусть $f_n \xrightarrow[E]{\text{всюду}} f$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad E_n = E(|f_n - f| \geq \varepsilon)$, $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_n = R_m \Rightarrow R_1 \supset R_2 \supset \dots$

$\Rightarrow \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} R_m = R = \lim R_m$, $\mu(R_m) \to \mu(R)$

Покажем, что R пусто. От противного.

$\exists x \in R = \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} R_m \Rightarrow x \in R_m \ \forall m \geq 1 \Rightarrow \exists n_k : n_1 < n_2 < \dots$

$x \in E_{n_k} = E(|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon) \Rightarrow \forall n_k \ |f_{n_k} - f| \geq \varepsilon$

$n_k \to \infty \Rightarrow f_{n_k} \not\to f \Rightarrow R = \varnothing \Rightarrow \mu(R) = 0$

$\Rightarrow \mu(R_m) \to 0$ при $m \to \infty$

$E_m \subset R_m \Rightarrow \mu(E_m) \le \mu(R_m) \to 0 \Rightarrow \mu(E_m) \to 0 \quad m \to \infty$

$\Rightarrow$ def E_m $f_m \xrightarrow[E]{\text{по мере}} f$

2) $f_n \xrightarrow[E]{п.в.} f$, $E_0 = E(f_n \ne f)$, $\mu(E_0) = 0$

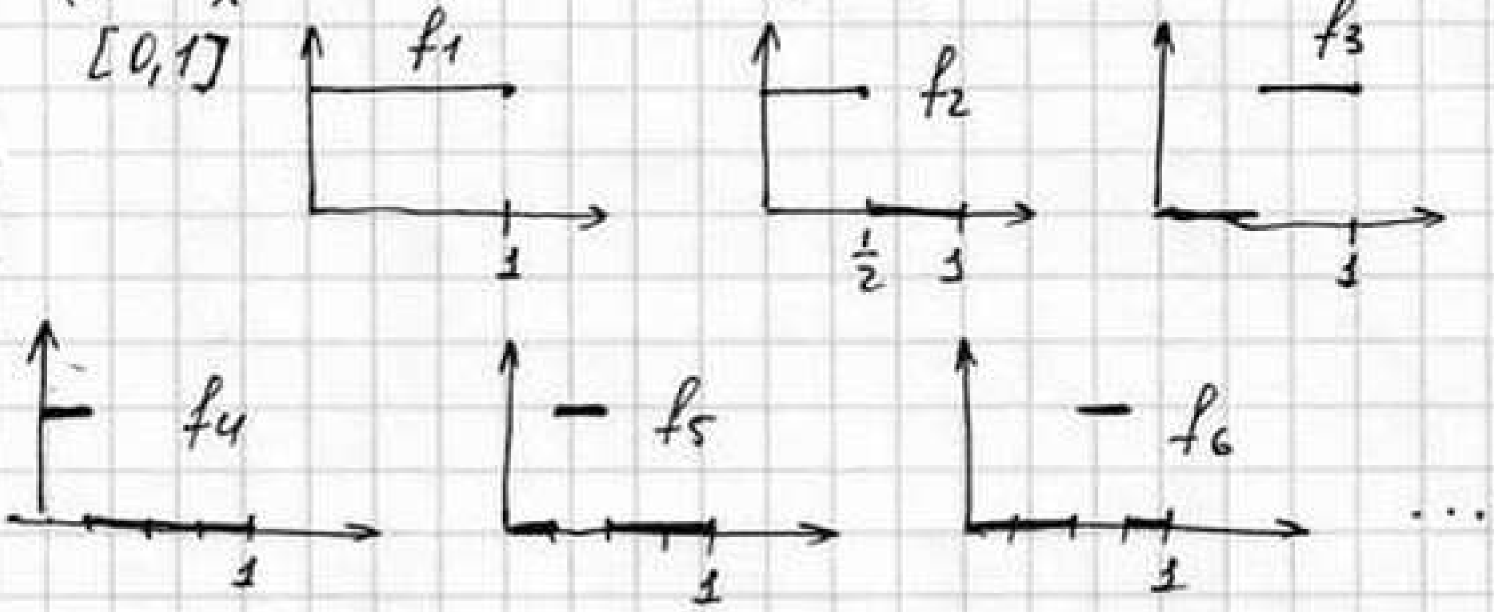
$\Rightarrow f_n \xrightarrow[E\setminus E_0]{всюду} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[E\setminus E_0]{по мере} f$

$E(|f_n - f| \geq \varepsilon) = E\setminus E_0(|f - f_n| \geq \varepsilon) \sqcup E_0(|f_n - f| \geq \varepsilon)$

$\Rightarrow \mu E(|f_n - f| \geq \varepsilon) = \mu E\setminus E_0(|f_n - f| \geq \varepsilon) \to 0$ ■

Ex ($f_n \xrightarrow[X]{по мере} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow[X]{п.в.} f$.)

[0,1]



...

$f_n \xrightarrow[X]{по мере} 0$, т.к. $\mu E(|f_n - 0| \geq \varepsilon) =$ длина ступ. $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Но $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Th (Рисса) Если $f_n \xrightarrow[E]{по мере} f$, то $\exists$ подпосл. $f_{n_k}(x) \xrightarrow[E]{п.в.} f(x)$

Д. $\mu E(|f_n - f| \geq \varepsilon) \to 0$.

fix k: $\mu E(|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$, $n_1 < n_2 < \dots$

Обозн. $E_k = E(|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k})$

$R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, $R_1 \supset R_2 \supset \dots$, $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$, $\mu(R) = \lim_{n\to\infty} \mu(R_n)$

$\mu(R_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$ при $n \to \infty$

$\Rightarrow \mu(R) = \lim_{n\to\infty} \mu(R_n) = 0.$

Рассм. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists R_m \not\ni x \Rightarrow x \in E_k \;\; \forall k \geq m$

$\Rightarrow |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \;\; \forall k \geq m$, $k \to \infty \Rightarrow f_{n_k}(x) \xrightarrow[n_k \to \infty]{} f(x)$

$\Rightarrow f_{n_k} \overset{п.в}{\underset{E}{\to}} f$, кроме мн-ва меры 0. ■

13. Инт. Лебега от простых фун, от огр. и неогр. функций.

Def <u>Интегралом Лебега</u> от простой фун.

$$f=\sum_{k=1}^{n} f_k \chi_{A_k}(x), \quad \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = X, \quad \mu(X)<\infty \text{ - полн., } \sigma\text{-адд. мера}$$

наз. число $\int\limits_X f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} f_k \mu(A_k)$.

Ф-ция f ограничена, т.к. приним. конечн. число значений.

<u>Св-ва:</u>

1) если f, g - простые, то

$$\int\limits_X (\alpha f+\beta g)\,d\mu = \alpha\int\limits_X f\,d\mu + \beta\int\limits_X g\,d\mu$$

<u>Д.</u> $f=\sum_{k=1}^{n} f_k \chi_{A_k}(x), \quad g=\sum_{j=1}^{m} g_j \chi_{B_j}(x)$

$$\alpha f+\beta g = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha f_k \chi_{A_k\cap B_j}(x) + \beta g_j \chi_{A_k\cap B_j}(x)$$

$$\overset{def}{\Rightarrow} \int\limits_X(\alpha f+\beta g)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha f_k+\beta g_j)\mu(A_k\cap B_j) =$$

$$= \alpha\sum_{k=1}^{n} f_k \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\mu(A_k\cap B_j)}_{\mu(A_k)} + \beta\sum_{j=1}^{m} g_j \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k\cap B_j)}_{\mu(B_j)}$$

т.к. $\bigsqcup_{j=1}^{m} B_j = X$ т.к. $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = X$ ∎

2) $\int\limits_X f\,d\mu \le \underbrace{\max_X |f_k|}_{\max_X |f|}\mu(X)$ очевидно из def.

Def Если $\exists$ послед. простых фун. $f^n \rightrightarrows f$, то f наз-ся интегрируемой по Лебегу и

$$\int\limits_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X f^n\,d\mu$$

Утв $\forall$ изм. и огр. f можно приблизить равн. простыми ф-ми с конечн. числом значений.

Д-во: $E_n^m = \{\frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n}\}$, $X = \bigsqcup\limits_{m=-N}^{N} E_m^n$, т.к. f огр.

$\exists f^n = \frac{m}{n}$ на $E_n^m \Rightarrow \forall m \;\; 0 \le f - f^n \le \frac{1}{m}$ ■

Th $\forall$ изм. и огранич. f инт-ма по Лебегу.

Д. $m \le f \le M$. Разбиение $\{m = y_0 < y_1 = \frac{M-m}{n} + m < y_2 = \frac{M-m}{n}\cdot 2 + m < \ldots$
$\ldots < y_n = M.\}$

Тогда $\{\frac{k(M-m)}{n} + m \le f(x) \le \frac{(k+1)(M-m)}{n} + m\} - E_n^k$

$X = \bigsqcup\limits_{k=0}^{n-1} E_n^k$

инт. сумма $S_n = \sum\limits_{n=0}^{n-1} (m + \frac{k(M-m)}{n}) \mu(E_n^k)$, $S_n \to \int\limits_X f\,d\mu$

(т.к. $f^n = m + \frac{k(M-m)}{n}$ на E_n^m, а S_n - инт. Леб $\int\limits_X f^n d\mu$,

$f_n^n \rightrightarrows f$ по построению: $0 \le f - f^n \le \frac{M-m}{n} \to 0 \;\; \forall x \in X$) ■

Def Прост. ф-я $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k}(x)$ наз. инт. по Лебегу, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k| \mu(A_k) < \infty$, $\int\limits_X f\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \mu(A_k)$

Св-ва: 1) Если f, g прост. инт. по Лебегу, то $\exists \int\limits_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int\limits_X f\,d\mu + \beta \int\limits_X g\,d\mu$

Д. $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k}(x)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k| \mu(A_k) < \infty$, $f = \sum\limits_{k,j=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k \cap B_j}(x)$

$g = \sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j \chi_{B_j}(x)$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |g_j| \mu(B_j) < \infty$, $g = \sum\limits_{k,j} g_j \chi_{A_k \cap B_j}(x)$

$\sum\limits_{k,j} (\alpha f_k + \beta g_j) \mu(A_k \cap B_j) \le |\alpha| \sum\limits_{k,j=1}^{\infty} |f_k| \mu(A_k \cap B_j) +$
$+ |\beta| \sum\limits_{k,j} |g_j| \mu(A_k \cap B_j) < \infty$ ■

2) $|\int\limits_X f\,d\mu| \le \sup\limits_{x\in X} |f(x)| \mu(X)$

14. Инт-мые функ. и их св-ва

Прост. функ. инт-ма, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k| \mu(A_k) < \infty$

$f = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \chi_{A_k}(x)$, $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k = X$, $\mu(X) < \infty$ – полн., σ-адд. мера

Изм. функ. f инт-ма, если $\exists$ посл. f^n простых и инт-мых, равн. сх-ся к f ф-ций и $\int\limits_X f \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f^n d\mu$.

Св-ва:

① f, g – инт. на X, тогда $\exists \int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$

1) f, g – простые $\Rightarrow f = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \chi_{A_k}(x)$, $g = \sum\limits_{j=1}^{m} g_j \chi_{B_j}$

$$\alpha f + \beta g = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha f_k \chi_{A_k \cap B_j} + \beta g_j \chi_{A_k \cap B_j}$$

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha f_k + \beta g_j) \mu(A_k \cap B_j) =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} f_k \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu(A_k \cap B_j)}_{\mu(A_k)} + \beta \sum_{j=1}^{m} g_j \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap B_j)}_{\mu(B_j)}$$

т.к. $\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B_j = X$ т.к. $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k = X$

2) f, g инт-мы $\Rightarrow \exists f^n$ и g^n – прост., инт., равн. сход. соотв. к f и g.

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f^n d\mu = \int\limits_X f d\mu$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X g^n d\mu = \int\limits_X g d\mu$

$\int\limits_X (\alpha f^n + \beta g^n) d\mu = \alpha \int\limits_X f^n d\mu + \beta \int\limits_X g^n d\mu \Rightarrow n \to \infty$

$(\alpha f + \beta g)$ инт. и $\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$ ∎

② Если f и g инт. на X, $f \le g$ на X, то $\int\limits_X f\,d\mu \le \int\limits_X g\,d\mu$

Д-во: 1) Покажем: $f \le c$ и f инт. $\Rightarrow \int\limits_X f\,d\mu \le c\,\mu(X)$

$A_n^m = \{\frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n}\}$, $X = \bigsqcup\limits_{m=-\infty}^{+\infty} A_n^m$ $(f \ne \infty)$

$f^n = \frac{m}{n}$ на A_n^m, $f^n \le f$, $0 \le f - f^n < \frac{1}{n}$

f^n-прост., $f^n \rightrightarrows f$, т.к. f инт, то начин. с нек. n f^n тоже инт., $f^n \le f \le c \Rightarrow f^n \le c$

$\Rightarrow \int\limits_X f^n\,d\mu \le c\,\mu(X) \Rightarrow n \to \infty \int\limits_X f\,d\mu \le c\,\mu(X)$

2) $f \le g \Rightarrow f - g \le 0 \Rightarrow f-g$ инт $\overset{1)}{\Rightarrow} \int\limits_X (f-g)\,d\mu \le 0$

③ Если f изм., $|f| \le g$, g-инт, то $|f|$, f инт, $\left|\int\limits_X f\,d\mu\right| \le \int\limits_X |f|\,d\mu$.

1) f, g - простые $\quad f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k}(x) = \sum\limits_j \sum\limits_k f_k \chi_{A_k \cap B_j}$

$g = \sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j \chi_{B_j}(x) = \sum\limits_k \sum\limits_j g_j \chi_{A_k \cap B_j}$

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j\,\mu(B_j) < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k,j} g_j\,\mu(A_k \cap B_j) < \infty$.

$|f| \le g \Rightarrow |f_k| \le g$ на $A_k \cap B_j$ $\forall k,j \Rightarrow \sum\limits_{k,j} |f_k|\,\mu(A_k \cap B_j) < \infty$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|\,\mu(A_k) < \infty \Rightarrow f$ инт-ма.

2) $\exists$ посл. прост. f^n: $f^n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, пр. инт. $g^n \underset{X}{\rightrightarrows} g$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N: n \ge N\ |f - f^n| < \varepsilon,\ |g - g^n| < \varepsilon \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow |f^n| \le |f| + \varepsilon$, $|g| \le |g^n| + \varepsilon \Rightarrow |g| \le |g^n| + \varepsilon$

$\Rightarrow |f^n| \le |f| + \varepsilon \le g + \varepsilon \le |g^n| + 2\varepsilon \quad n \ge N$.

Т.к. g^n инт $\Rightarrow |g^n|$ инт $\Rightarrow |f^n|$ и f^n инт.

$\Rightarrow f$ инт., $|f|$ инт., $-|f| \le f \le |f| \Rightarrow \left|\int\limits_X f\,d\mu\right| \le \int\limits_X |f|\,d\mu$

④ **Если** f инт., g - прост., изм., $|g| \le Const$
то $f\cdot g$ тоже инт.

Д. $f\cdot g$ изм. $|fg| \le \underset{\text{инт}}{|f|}\cdot c \overset{③}{\Rightarrow} fg$ инт.

Def $A \subset X$, A изм., f инт. на $X \Rightarrow f\chi_A$ инт. на X
$$\int\limits_A f\,d\mu = \int\limits_X f\chi_A(x)\,d\mu.$$

⑤ **Если** $A \cap B = \varnothing$, A, B изм., **то** $\int\limits_{A\sqcup B} f\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \int\limits_B f\,d\mu$

Д-во: $\int\limits_{A\sqcup B} f\,d\mu = \int\limits_X f\chi_{A\sqcup B}(x)\,d\mu = \{\chi_{A\sqcup B} = \chi_A + \chi_B\} =$
$= \int\limits_X f\chi_A(x)\,d\mu + \int\limits_X f\chi_B(x)\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \int\limits_B f\,d\mu$

⑥ **Если** $\mu(E) = 0$, **то** $\forall f$ $\int\limits_E f\,d\mu = 0$.

Д-во: 1) f - прост. $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k}(x)$

$f\chi_E(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k\cap E}(x)$, т.к. $\chi_{A_k}\cdot\chi_E = \chi_{A_k\cap E}$

$A_k \cap E \subset E \Rightarrow$ т.к. μ полн. $A_k\cap E$ изм., $\mu(A_k\cap E) = 0$

$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_X f\chi_E(x)\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\,\mu(A_k\cap E) = 0$

2) $\forall f \Rightarrow \exists f^n$ - прост: $f^n \underset{E}{\rightrightarrows} f$.

$f^n\chi_E(x)$ инт-мы в силу 1), $f^n\chi_E(x)$ изм.,

$f^n\chi_E(x) \rightrightarrows f\chi_E(x)$ - инт., $\int\limits_X f\chi_E\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f^n\chi_E\,d\mu = 0$

⑦ **Если** $f \underset{X}{\overset{\text{п.в.}}{\to}} 0$, **то** $\int\limits_X f\,d\mu = 0$

Д-во: $f = 0$ на $X \setminus E$, $\mu(E) = 0$, $\int\limits_X f\,d\mu = \int\limits_{X\setminus E} f\,d\mu + \int\limits_E f\,d\mu = 0$.

(8) Если $\int\limits_X f\,d\mu = 0$, $f \geq 0$, f изм, то $f \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$

Д-во: $\{f(x) > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{f \geq \frac{1}{n}\}$.

Нер-во Чебышева: $\mu\{f \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int\limits_X f\,d\mu \quad \forall c > 0$

$\mu\{f \geq \frac{1}{n}\} \leq n \cdot \int\limits_X f\,d\mu = 0$

$\Rightarrow \mu\{f \geq \frac{1}{n}\} = 0 \quad \forall n \geq 1$, $\mu\{f > 0\} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu\{f \geq \frac{1}{n}\} = 0$

$\Rightarrow f \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$

15 Абс. непр-ть инт. Лебега, Th Лебега о пред. пер.

Th (абс. непр-ть инт. Лебега)
Пусть f инт. на X.
Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \mu(A) < \delta$, $A \in \Sigma$ (σ-алг. изм. мн-в) $\left|\int_A f\,d\mu\right| < \varepsilon$.

Д-во: 1) f - простая $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k}(x)$

$\forall \varepsilon > 0$ f инт $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \mu(A_k) < \infty$

$\exists n \in \mathbb{N}: \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k| \mu(A_k) < \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}$

$\forall A \in \Sigma \quad \left|\int_A f\,d\mu\right| = \left|\int_X f \chi_A(x)\,d\mu\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k \mu(A \cap A_k)\right| \le$

$\le \sum_{k=1}^{n} |f_k| \mu(A_k \cap A) + \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k| \mu(A \cap A_k) \le \sum_{k=1}^{n} |f_k| \mu(A_k \cap A)$

$+ \frac{\varepsilon}{2} \le \max_{k=\overline{1,n}} |f_k| \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap A) + \frac{\varepsilon}{2} \le \max_{k=\overline{1,n}} |f_k| \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} \le$

$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, если $\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2\max_{k=\overline{1,n}}|f_k|} = \delta$

$\Rightarrow \left|\int_A f\,d\mu\right| < \varepsilon$, $\mu(A) < \delta$.

2) f - инт. $\Rightarrow \exists$ посл-ть инт. пр. $f^n \underset{X}{\rightrightarrows} f$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \ge N \quad |f - f^n| < \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}$

$\left|\int_A f\,d\mu\right| \le \left|\int_A (f - f^n)\,d\mu\right| + \left|\int_A f^n\,d\mu\right| \le \int_A \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}\,d\mu +$

$+ \int_A |f^n|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, если $\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2\max_{n \to N}|f^n|} = \delta$ ∎

Th (Лебега). Пусть f_n инт. на X, $f_n \xrightarrow[X]{\text{по мере}} f$, f-изм.,
$\exists$ инт. $F(x)$ на X,
$|f_n(x)| \le F(x)$ п.в. на X $\forall n$

Тогда f инт. на X и $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$.

Д-во: $f_n \xrightarrow[X]{\text{по мере}} f \Rightarrow$ Th Рисса $\exists f_{n_k} \xrightarrow[X]{\text{п.в.}} f$

$\Rightarrow |f_{n_k}(x)| \le F(x) \Rightarrow (n_k \to \infty)$ $|f(x)| \le F(x)$ п. всюду, т. к. $f(x)$ изм., $F(x)$ инт. $\Rightarrow f$ интегр.

$$\left|\int\limits_X f\,d\mu - \int\limits_X f_n\,d\mu\right| = \left|\int\limits_X (f-f_n)\,d\mu\right| \le \int\limits_X |f-f_n|\,d\mu =$$

$$= \int\limits_{|f_n-f| \ge \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}} |f_n-f|\,d\mu + \int\limits_{|f_n-f| < \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}} |f_n-f|\,d\mu \le \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{|f_n-f| \ge \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}} |f_n-f|\,d\mu \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + 2\int\limits_{|f_n-f| \ge \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}} F(x)\,d\mu$$ (кажд. $f(x)$, $f_n(x)$ огр. через $F(x)$)

$\mu\left\{|f_n-f| \ge \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}\right\} \to 0$ в силу сх-ти по мере

$\Rightarrow$ можно сделать и второй интеграл $< \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\Rightarrow \left|\int\limits_X f\,d\mu - \int\limits_X f_n\,d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

16. Th Леви и Фату. Инт-ние по лин-вусб-кон. мерой

<u>Th</u> (Леви) <u>Пусть</u> f_n инт. и $f_n \le f_{n+1}$ п.в. $x \in X$,
$\forall n \geq 1 \ \exists C > 0 : \int\limits_X f_n d\mu \le C$.

<u>Тогда</u> $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f(x)$ явл. инт-мой фун. по X
и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu$.

<u>Д-во</u>: 1) $\exists$ $f_n \le f_{n+1}$ $\forall x \in X$ ($\forall n$).
б.ог., $f_n \geq 0$ (если $f_n < 0 \to \tilde{f}_n = f_n - f_1$)
т.к. $f_n(x) \le f_{n+1}(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} f(x) \\ +\infty \end{cases} = f(x)$.
Док: $\mu\{f = +\infty\} = 0$.

$\forall M > 0$ $\{f_n \geq M\} \subset \{f_{n+1} \geq M\}$ $\forall n$
$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq M\} = \lim\limits_{n\to\infty} \{f_n \geq M\}$
$\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq M\}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu\{f_n \geq M\}$
Нер-во Чебышева: $\mu\{f_n \geq M\} \le \frac{1}{n} \int\limits_X f_n d\mu \le \frac{C}{n}$
$\Rightarrow \{f = +\infty\} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq M\}$, $\mu\{f = +\infty\} \le \mu\{\bigcup \ \} \le \frac{C}{n}$
$n \to \infty \Rightarrow \mu\{f = +\infty\} = 0$

2) $\exists$ $f_n \le f_{n+1}$ п.в. на X $\Rightarrow f_n \le f_{n+1}$ на $X \setminus E_n$
$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $\mu(E) = 0$, $E_0 = \{f(x) = +\infty\}$
$\forall x \in X \setminus E_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f(x) = \pm\infty$ на $X \setminus E$

f изм., $A_n = \{n-1 \le f \le n\}$, $\varphi = n$ на A_n,
φ прост., $0 \le f \le \varphi$.

Покажем, что φ инт. (тогда f инт.)

φ инт., если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \mu(A_n) < \infty$.

$\sum\limits_{n=1}^{m} n \mu(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{m} (n-1) \mu(A_n) + \sum\limits_{n=1}^{m} \mu(A_n)$

$$\sum_{n=1}^{m}(n-1)\mu(A_n)\le\sum_{n=1}^{m}\int_{A_n} f\,d\mu=\int_{\bigsqcup_{n=1}^{m}A_n} f\,d\mu \qquad 0\le f\le n$$

на $\bigsqcup_{n=1}^{m}A_n$ $f_n\le f_{n+1}\le f\le m$, т.е. все f_k огр.

$\Rightarrow$ Th Лебега $\int_{\bigsqcup_{n=1}^{m}A_n} f\,d\mu=\lim_{m\to\infty}\int_{\bigsqcup_{n=1}^{m}A_n} f_k\,d\mu\le C \quad \forall m$

т.к. $\int_X f_k\,d\mu\le C \ \forall k \Rightarrow \int_{\bigsqcup_{n=1}^{m}A_n} f\,d\mu\le C \Rightarrow \sum_{n=1}^{m}(n-1)\mu(A_n)\le C \ \forall m$

$m\to\infty$ $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mu(A_n)\le C \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n)<C<\infty$
$\Rightarrow \varphi$ инт $\Rightarrow f$ инт. ■

Th (Фату) Пусть $f_n(x)\ge 0$ п.в. по X, $f_n \xrightarrow[X]{п.в.} f(x)$
f_n инт., $\exists C>0$: $\int_X f_n\,d\mu\le C \ \forall k\ge 1$.

Тогда f инт. и $\int_X f\,d\mu\le C$.

Д-во: $F_n=\inf_{n\ge k} f_n(x)$, $F_n\ge 0$, $F_n\le f_n$

Пок., что $\forall a>0$ $\{F_n\ge a\}=\bigcap_{k=n}^{\infty}(f_n\ge a) \Rightarrow F_n$ изм.
$\Rightarrow$ инт., $F_n \overset{п.в.}{\Rightarrow} f$ $\{F_{n+1}\ge F_n,\ F_n\ge 0\}$ изм.

$\Rightarrow \int_X F_n\,d\mu\le\int_X f_n\,d\mu\le C \overset{\text{Th Леви}}{\Rightarrow} f$ инт-ма

и $C\ge\lim_{n\to\infty}\int_X F_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu$

$\Rightarrow \int_X f\,d\mu\le C$ ■

Th Пусть f - измер на X, μ - σ-адд., полн., $f\ge 0$.
$M=\{\varphi_T$ - прост. с конечн. числом знач.,
$0\le\varphi_T\le f\}$.

Тогда f инт. по X ТТК $\sup_{\varphi\in M}\int_X\varphi\,d\mu<\infty$

и $\int_X f\,d\mu=\sup_{\varphi\in M}\int_X\varphi\,d\mu$.

Д-во: Рассм. $A_m^n=\left\{\frac{m-1}{2^n}\le f\le\frac{m}{2^n}\right\}$ - изм.

$X=\bigsqcup_{m=1}^{\infty}A_m^n\sqcup\{f=+\infty\} \ \forall n=1,2,\dots$

Пусть $g_n = \begin{cases} \frac{m-1}{2^n} & \text{на } A_m^n \quad \forall m = 1, 2, \dots \\ n & \text{на } \{f = +\infty\}. \end{cases}$

Тогда $g_n \le n$, $g_n \le f$, g_n - прост., $0 < \{f - g_n\} < \frac{1}{2^n}$

$g_n \le g_{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} g_n = f \quad \forall x \in X$

Введем $\varphi_n = \begin{cases} g_n, & \forall g_n \le n \\ 0, & g_n > n \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi_n$ прост., с конечн. числом знач., $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$, $\varphi_n \in X$

$\Leftarrow$ $\exists \sup\limits_{\varphi\in M} \int\limits_X \varphi\, d\mu < \infty \Rightarrow \int\limits_X \varphi_n\, d\mu \le c \quad \forall n$

$\varphi_n \underset{X}{\to} f$, $\varphi_n \le \varphi_{n+1} \Rightarrow$ Th Леви f сумм. и

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$, $\varphi \le f$

$\Rightarrow \sup\limits_{\varphi\in M} \int\limits_X \varphi\, d\mu = \int\limits_X f d\mu$

$\Rightarrow$ f сумм., $\varphi \le f \Rightarrow \int \varphi\, d\mu \le \int\limits_X f\, d\mu$

$\sup\limits_{\varphi\in M} \int\limits_X \varphi\, d\mu \le \int\limits_X f\, d\mu < \infty$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n\, d\mu = \int\limits_X f d\mu \Rightarrow \sup\limits_{\varphi\in M} \int\limits_X \varphi\, d\mu = \int\limits_X d\mu$ ∎

14. Сравн-е инт. Лебега с инт. Римана. Пример фун., неинт. по Риману даже при гармон-ка множ-ве нуль.

Th (Лебега) f инт. по Риману в собств. смысле на $[a,b]$.

Тогда f инт. по Лебегу на $[a,b]$

и $R\int\limits_a f\,dx = \mathcal{L}\int\limits_{[a,b]} f\,dx$ (мера порожд. длиной).

Д-во: Разбиение: $x_0 = a$, $x_k = a + \frac{(b-a)k}{2^n}$, $k = 0,1,\ldots,2^n$

. Пусть $M_{n_k} = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k)} f(x)$, $m_{n_k} = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k)} f(x)$.

Тогда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2^n} M_{n_k} \frac{b-a}{2^n}$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{2^n} m_{n_k} \cdot \frac{b-a}{2^n}$ — верхн. и нижн. инт. суммы.

$\overline{f_n} = M_{n_k}$ на $[x_{k-1}, x_k)$, $\underline{f_n} = m_{n_k}$ $k = \overline{1,2^n}$

$\Rightarrow \mathcal{L}\int\limits_{[a,b)} \overline{f_n}\,dx = S_n$, $\mathcal{L}\int\limits_{[a,b)} \underline{f_n}\,dx = s_n$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{f_n} \le \underline{f_{n+1}} \le f,\ \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f_n} = \underline{f}(x) \\ \overline{f_n} \ge \overline{f_{n+1}} \ge f,\ \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n} = \overline{f}(x) \end{array}\right\} \text{изм.}$$

$\int\limits_{[a,b)} \underline{f_n}\,dx = s_n \le S_n \le S_1 \quad \forall n$

$\Rightarrow$ Th Леви $\underline{f}(x)$ инт. по Леб., $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}\int\limits_{[a,b)} \underline{f}(x)\,dx$

аналог. $\overline{f}(x)$ инт. по Леб., $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}\int\limits_{[a,b)} \overline{f}(x)\,dx$

Из инт-ти по Рим. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = R\int\limits_a f\,dx$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}\int\limits_{[a,b)} \underline{f_n}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} R\int\limits_{[a,b)} \overline{f_n}\,dx = R\int\limits_a^b f\,dx$

$\Rightarrow \mathcal{L}\int\limits_{[a,b)} \overline{f}\,dx = \int\limits_{[a,b)} \underline{f}\,dx = R\int\limits_a^b f\,dx.$

$\overline{f} \ge f \ge \underline{f} \Rightarrow \mathcal{L}\int\limits_{[a,b)} (\overline{f} - \underline{f})\,dx = 0.$

Т.к. $\overline{f} - \underline{f} \geq 0 \Rightarrow (\overline{f} - \underline{f})$ п.в. равно 0.

Т.к. $\overline{f} \geq f \geq \underline{f} \Rightarrow (\underline{f} \overset{п.в}{=} f \overset{п.в}{=} \overline{f}) \Rightarrow f$ инт. по Леб.

и $\mathcal{L}\int\limits_{[a,b]} f\,dx = R\int\limits_a^b f\,dx$ ∎

__Ex__ (инт. в несоб. смысле по Рим, но не инт. по Лебегу).

$$R\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{t}}{t}\,dt = \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad - \exists.$$

$$\mathcal{L}\int\limits_{[0,1]} \left|\frac{\sin\frac{1}{t}}{t}\right| dt \geq \int\limits_{[\delta,1)} \frac{|\sin\frac{1}{t}|}{t}\,dt = R\int\limits_{\delta}^{1} \frac{|\sin\frac{1}{t}|}{t}\,dt =$$

$$= R\int\limits_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq R\int\limits_1^{1/\delta} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = R\int\limits_1^{1/\delta} \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{\delta} - R\int\limits_1 \frac{\cos 2x}{x}\,dx\right] \to +\infty$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\int\limits_{[0,1]} \frac{|\sin\frac{1}{t}|}{t}\,dt = +\infty$$

__Th__ (Критерий инт-ти по Риману).
Огр. функ. $f(x)$ на $[a,b]$ инт. по Рим. __ТТТК__ $f(x)$ непр. почти всюду.

__Д-во:__ ($\Rightarrow$) $\exists$ $f(x)$ инт. по Рим. $\Rightarrow$

$\overline{f} \overset{п.в}{\to} \underline{f}$. Рассм. мн-во $\{\overline{f}(x) \neq \underline{f}(x)\} = E_0$.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(x_k = a + \frac{(b-a)k}{2^n},\ k=\overline{0,2^n}\right) = E_1,\ \mu(E_1) = 0.$$

$E = E_0 \cup E_1$, $\mu(E) = 0$.

Пок., что f непр. во всех точках $[a,b]\setminus E$.

$\forall x \in [a,b]\setminus E$ $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{f_n}(x) = \underline{f}(x) = \overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n(x)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N\quad 0 \leq \overline{f}_n(x) - \underline{f_n}(x) < \varepsilon$

$0 < M_{n_k} - m_{n_k} < \varepsilon$, $x \in [x_{k-1}, x_k)$ (внутр. точка)

$\Rightarrow |f(x) - f(z)| < \varepsilon$, $z \in [x_{k-1}, x_k)$.

x-внутр. $\Rightarrow \exists\, (x-\delta, x+\delta) \subset [x_{k-1}, x_k)$

$z \in (x-\delta, x+\delta)$ и $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$.

$\Leftarrow$ $\exists$ f п.в. непр.

Пок., что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, $S_n = \mathcal{L}\int\limits_{[a,b]} \overline{f_n}\,dx$

$s_n = \mathcal{L}\int\limits_{[a,b]} \underline{f_n}\,dx$

Берем $\forall$ точку. f непр. на $[a,b]\setminus E$, $\mu(E) = 0$.

В мн-во E добавим все точки из $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{x_k\}_{k=0}^{2^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \underline{f_n}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n}(x)$, если $x \in [a,b) \setminus E$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |f(x) - f(z)| \leq \varepsilon \quad |x - z| < \delta$, $\underline{f_n}(x) \leq \underline{f_{n+1}}(x)$

$(x-\delta, x+\delta) \supset [x_{k-1}, x_k)$ $\forall n :$ $x \in [x_{k-1}, x_k)$

$0 \leq M_{n_k} - m_{n_k} < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{\overline{f_n}(x)}_{M_{n_k}} - \underbrace{\underline{f_n}(x)}_{m_{n_k}} < \varepsilon$, $n \geq N$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f_n}(x) \Rightarrow \overline{f} \overset{\text{п.в.}}{=} \underline{f}$

$\Rightarrow \mathcal{L}\int\limits_{[a,b]} \overline{f}\,dx = \mathcal{L}\int\limits_{[a,b]} \underline{f}\,dx$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}\int\limits_{[a,b]} \overline{f_n}\,dx = \mathcal{L}\int\limits_{[a,b]} \overline{f}\,dx$

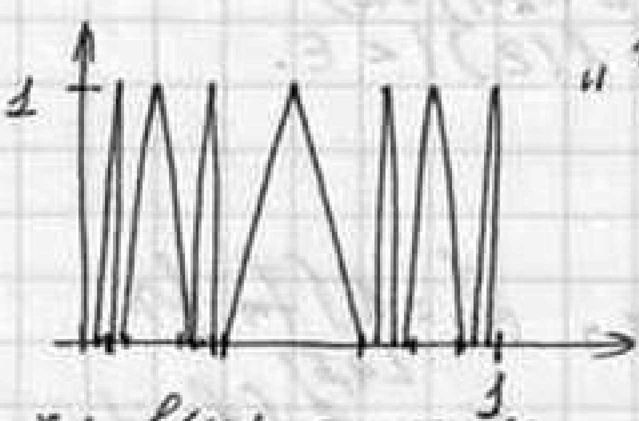
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}\int\limits_{[a,b]} \underline{f_n}\,dx = \mathcal{L}\int\limits_{[a,b]} \underline{f}\,dx$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

$\blacksquare$

Ex (Огр. фун. инт. по Лебегу, но не инт. по Рим. даже при изм. на $\forall$ мн-ве меры 0.



„гребенка Кантора"

$0 \le f \le 1$
$\mu(K) = 0$

f не явл. непр. $\forall x \in K$

$x : f(x) = 0, \ x \in K$

$\forall$ интервала $\forall \delta : |x - y| < \delta \ \exists$ центр: $f(y) = 1$
$\Rightarrow$ не инт. по Риману, но инт. по Лебегу, т.к. огр. и измерима.

18 Заряды, предст-е заряда в виде разности 2х взаимно-сингул. мер, ф-ции огр. вариации.

Def Пусть S — σ-кольцо мн-в пр-ва X
Отображ-е $\Phi: S \to \mathbb{R}$ наз. зарядом, если $A = \bigsqcup_{k=1} A_k$, $A_k \in S$, то $\Phi(A) = \sum_{k=1} \Phi(A_k)$

Def Мн-во $A \in S$ наз. положит. (отрицат.) отн. заряда Φ, если $\forall B \subset A$, $B \in S$
$\Phi(B) \geq 0$ $(\Phi(B) \leq 0)$.

Лемма Если Φ - заряд, $A \in S$, $B \subset A$, $0 \leq \mu(B) \leq \mu(A)$, то $\sup_{B \subset A,\, B \in S} |\Phi(B)| < \infty$

Д-во: (От противного.) Пусть $\exists A \in S$: $\sup_{B \subset A} |\Phi(B)| = \bar{\Phi}(A) = \infty$

1) $\exists B_1 \subset A$: $|\Phi(B_1)| \geq |\Phi(A)| + 1$, $A_1 = \begin{cases} B_1, & \bar{\Phi}(B_1) = \infty \\ A \setminus B_1, & \bar{\Phi}(A \setminus B_1) = \infty \end{cases}$

$A_1 \subset A$, $|\Phi(A_1)| \geq 1$.
Если $A_1 = B_1 \Rightarrow |\Phi(B_1)| \geq 1$
Если $A_1 = A \setminus B_1 \Rightarrow |\Phi(A_1)| = |\Phi(A) - \Phi(B_1)| \geq |\Phi(B_1)| - |\Phi(A)| \geq 1$.

2) $\exists B_2 \subset A_1$: $|\Phi(B_2)| \geq |\Phi(A_1)| + 2$, $A_2 = \begin{cases} B_2, & \bar{\Phi}(B_2) = +\infty \\ A_1 \setminus B_2, & \bar{\Phi}(A_1 \setminus B_2) = \infty \end{cases}$

$\Rightarrow |\Phi(A_1)| \geq 2$

и т.д. $\Rightarrow A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \Rightarrow |\Phi(A_n)| \geq n$.

$A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in S$, $A \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_n)$

$\Phi(A_0) = \lim_{n \to \infty} \Phi(A_n)$, $|\Phi(A_n)| \geq n$, $|\Phi(A_0)| = \infty$, $A_0 \in S$

$\Rightarrow$ ряд не сх-ся абс., т.е. не вып. опр-е заряда.

Th (Разлож-е Жордана) $\forall$ зар. Φ $\exists$ X^+ и X^- мн-ва: $X = X^+ \sqcup X^-$.

Д-во: 1) Если $\Phi(A) < 0$, то $\exists A_0 \subset A$: A_0 — отриц.

относ. φ, причем $\varphi(A_0) \le \varphi(A)$.

а) $\forall B \subset A \quad \varphi(B) = 0 \Rightarrow A = A_0$

б) $\exists B \subset A : \varphi(B) > 0 \quad ; \quad \sup\limits_{B \subset A} \varphi(B) = S\varphi(A) > 0.$

$\rightarrow S\varphi(A) - \frac{1}{2^1} \Rightarrow \exists B_1 \subset A : 0 < \varphi(B_1)$ и $\varphi(B_1) > S\varphi(A) - \frac{1}{2^1}$

$A \setminus B_1 = A_1$. Если $S\varphi(A_1) \le 0 \Rightarrow A_0 = A_1$ и все док.

Иначе $S\varphi(A_1) > 0$.

$\rightarrow S\varphi(A_1) - \frac{1}{2^2} \Rightarrow \exists B_2 \subset A_1 : 0 < \varphi(B_2)$ и $\varphi(B_2) > S\varphi(A_1) - \frac{1}{2^2}$

$A_1 \setminus B_2 = A_2$. Если $S\varphi(A_2) \le 0 \Rightarrow A_0 = A_2$ и все док.

иначе $S\varphi(A_2) > 0$.

$\rightarrow$ и т.д. $\Rightarrow A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$

$\varphi(A_1) = \varphi(A) - \varphi(B_1) < \varphi(A) \Rightarrow \varphi(A_n) < \varphi(A_{n-1}) \; \forall n$

$A_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \varphi(A_0) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi(A_n) < \varphi(A) < 0.$

Док., что A_0 — отриц. $\Rightarrow$ от противного

$\exists B \subset A_0$ и $\varphi(B) > 0$, $\exists \frac{1}{2^{m+1}} < \varphi(B)$

$A_m : \exists B_{m+1} \quad \varphi(B_{m+1}) > 0 \quad B_{m+1} \subset A_m$

$\varphi(B_{m+1}) > S\varphi(A_m) - \frac{1}{2^{m+1}}, \quad B \subset A_{m+1} = A_m \setminus B_{m+1}$

$B \cap B_{m+1} = \emptyset$

$\varphi(B \cup B_{m+1}) = \varphi(B) + \varphi(B_{m+1}) > \varphi(B) - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} > S\varphi(A_m)$

$B_{m+1} \subset A_m, \; B \subset A_m \Rightarrow B_{m+1} \cup B \subset A_m \Rightarrow$ против.

$\Rightarrow S\varphi(A_m) = \sup\limits_{B \subset A_m} \varphi(B)$

2) Д-во Th: $\inf\limits_{B \in X} \varphi(B) = b < \infty$ (по лемме).

Если $b \geq 0 \Rightarrow X = X^+$

Если $b < 0 \Rightarrow \exists B_n: \ \Phi(B_n) \to b, \ \Phi(B_n) < 0$

в $B_n \ \exists X_n^- \subset B_n$ и X_n^- отриц., $b \leq \Phi(X_n^-) \leq \Phi(B_n)$

$\Phi(X_n^-) \to b$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^- = X^-$, $X \setminus X^-$ - положит.

$\forall B \subset X \setminus X^-$ и $\Phi(B) \geq 0$ (от противного)

$\exists B \subset X \setminus X^-$ и $\Phi(B) < 0$

$\Rightarrow b \leq \Phi(X_m^-) \leq \Phi(X_n^-)$ (т.к. отриц.)

$n \to \infty \Rightarrow \Phi(X^-) = b \Rightarrow B \cap X^- = \varnothing$

$\Phi(B \cup X^-) = \Phi(B) + \Phi(X^-) < \infty \Rightarrow$ против. с тем, что $b = \inf\limits_{B \in X} \Phi(B)$ ■

<u>Следствие</u>: $\forall$ зарядa Φ $\exists$ σ-адд. взаимно-сингул. меры μ_1 и μ_2: и $\Phi(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$.

<u>Д.</u> $\forall \Phi$ $X = X^+ \sqcup X^-$

$A = (A \cap X^+) \sqcup (A \cap X^-)$ и $\Phi(A) = \Phi(A \cap X^+) + \Phi(A \cap X^-) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$,

где $\mu_1(A) = \Phi(A \cap X^+) \geq 0$
$\mu_2(A) = -\Phi(A \cap X^-) \geq 0$

$\mu_1(X^-) = 0$, $\mu_2(X^+) = \mu_2(X \setminus X^-) = 0 \Rightarrow$ по опред. меры μ_1 и μ_2 взаимно-сингул. ■

<u>Def</u> Пусть $f(x)$ зад. на $[a, b)$, непр. слева в $\forall x$. $f(x)$ наз. <u>огр. вариации</u>, если

$$\sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty$$

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad [a, b]$

$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ — <u>вариация</u> f

<u>Утв.</u> Если f монот $\Rightarrow$ f - огр. вариации

<u>Утв.</u> Если f огр. вар. $\Rightarrow$ $\exists$ неуб. f_1, f_2 : $f = f_1 - f_2$.

<u>Д-во:</u> $\overset{b}{\underset{a}{V}} f - f(x) = F(x)$. Дост. пок., что $F(x)$ неуб.

$\Rightarrow f(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f - F(x)$.

$F(x-\Delta) - F(x) = \overset{x+\Delta}{\underset{a}{V}} f - \overset{x}{\underset{a}{V}} f - |f(x+\Delta) - f(x)| =$

$= \overset{x+\Delta}{\underset{x}{V}} f - |f(x+\Delta) - f(x)| \geq 0$ в силу опред. вариации.

F неуб $\Rightarrow$ мера dF.

Если f огр. вар. $\Rightarrow$ $\exists$ неуб. и непр. f_1 и f_2, $f = f_1 - f_2$

$d\mu \to F$ неуб, $f_1 \xrightarrow[\text{соотв}]{\text{мера}} \mu_1$, $f_2 \xrightarrow[\text{соотв}]{\text{мера}} \mu_2$

$f \to \mu_1 - \mu_2 = \Phi$ — заряд.

Верно и обратное:

$\forall \Phi = \mu_1 - \mu_2$: $\mu_1 \to F_1$ — неуб., непр. слева

$\mu_2 \to F_2$ — неуб., непр. слева

$F_1 - F_2 = f$ — огр. вар. $\Rightarrow$ $\Phi \xrightarrow[\text{соотв}]{} f$ — огр. вар.

■

19. Th Радона-Никодима, производная Р.-Н.

<u>Лемма</u> <u>Пусть</u> мера ν - σ-адд. и непр.,
ν абс. непр. отн. меры μ.
<u>Тогда</u> $\exists B$ и $\delta > 0$: $\mu(B) > 0$ и $\nu(A) \geq \delta\mu(A)$ $\forall A \subset B$

<u>Д-во</u>: $\Phi_n = \nu - \frac{1}{n}\mu$ - заряд $\Rightarrow$ разлож-е Жордана
$X = X_n^+ \sqcup X_n^-$, $X_n^- \supset X_{n+1}^-$

$$\Phi(X_{n+1}^-) = \nu - \frac{1}{n}\mu = \underbrace{\nu - \frac{1}{n+1}\mu}_{\substack{\wedge\!\mid \\ \Phi_{n+1}(X_{n+1}^-)}} + \mu\underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)}_{\substack{\wedge\!\mid \\ 0}} < 0$$

$\Rightarrow X_n^- \supset X_{n+1}$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n^- = A$, $\Phi(X_n^-) = \nu(X_n^-) - \frac{1}{n}\mu(X_n^-) \leq 0$

$\nu(X_n^-) \leq \frac{1}{n}\mu(X_n^-) \to 0$ $n \to \infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\nu(X_n^-) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\nu(A) = 0 \Rightarrow \nu(X \setminus A) > 0$, т.к. ν не аннул. мера.

$X \setminus A = X \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n^- = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^+$, $\nu > 0$

$\Rightarrow \exists X_m^+ : \nu(X_m^+) > 0 \Rightarrow B = X_m^+$, $\mu(X_m^+) \neq 0$,
(т.к. иначе из $\mu(X_m^+) = 0 \Rightarrow \nu(X_m^+) = 0$).

Значит, $\mu(X_m^+) > 0 \Rightarrow \Phi_m(A) \geq 0$ $\forall A \subset X_m^+$

$\Rightarrow \nu(A) \geq \frac{1}{m}\mu(A)$ $\forall A \in X_m^+ = B$, $\delta = \frac{1}{m}$ ∎

<u>Th</u> (Радона-Никодима).
<u>Если</u> ν - абс. непр. отн. μ; ν, μ - σ-адд. меры,
зад. на общей σ-алг.,
<u>тогда</u> $\exists f$ - сумм. по μ и $\nu(A) = \int\limits_A f\,d\mu$ $\forall A \in \Sigma$

<u>Д-во</u>: а) ν - нулевая $\Rightarrow f \equiv 0$.
б) ν ненул. $\Rightarrow f \neq 0$.

Введем класс функ.:
$H = \{h \geq 0, h \in \mathcal{L}(X, \mu), \int\limits_A h\,d\mu \leq \nu(A)\ \forall A \subset X\}$

Зад. на экстремум: $\int\limits_X h\,d\mu \le \nu(X)\ \forall h\in H$, $\nu(X)<\infty$

$\exists M=\sup\limits_{h\in H}\int\limits_X h\,d\mu \le \nu(X) \Rightarrow \exists$ посл. $\{h_n\}\in H$: $\int\limits_X h_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\to} M$

$f_n=\max\{h_1,\dots,h_n\} \Rightarrow f_n$ измер., $f_n\le f_{n+1}$

$A_1=\{f_n=h_1\}$, $A_2=\{f_n=h_2,\ f_n\ne h_1\}$, ... A_k изм., $X=\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$

$$\int\limits_X f_n\,d\mu = \int\limits_{\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k} f_n\,d\mu = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{A_k} f_n\,d\mu = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{A_k} h_k\,d\mu \le \sum_{k=1}^{n}\nu(A_k)=\nu(X)$$
$\Rightarrow f_n\in H$.

$f_n\le f_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ — инт-ма по Th Леви,

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n\,d\mu = \int\limits_X f\,d\mu$; $M\ge \int\limits_X f_n\,d\mu \ge \int\limits_X h_n\,d\mu \to M$

$\Rightarrow \int\limits_X f\,d\mu = M = \sup\limits_{h\in H}\int\limits_X h\,d\mu$.

$f\ge 0$, f — измер., $\forall n$ $\int\limits_A f_n\,d\mu \le \nu(A)$, т.к. $f_n\in H$

$n\to\infty \Rightarrow \int\limits_A f\,d\mu \le \nu(A)$ $\forall A\subset X \Rightarrow f\in H$.

Рассм. разность $\Phi(A) = -\left(\int\limits_A f\,d\mu - \nu(A)\right) \ge 0\ \forall A\subset X$.

Φ — σ-адд. мера

а) Φ — сингуляр. $\Rightarrow$ док.

б) Φ не син., μ — σ-адд. $\Rightarrow$ лемма $\exists B\subset X$: $\mu(B)>0$, $\exists\delta>0$: $\forall A\subset B$ $\Phi(A)\ge\delta\mu(A)$.

Рассм. $f(x)+\delta\chi_B(x)=F$. Док., что $F\in H$.

$\forall A\subset X \Rightarrow \int\limits_A F\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \delta\int\limits_A \chi_B\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \delta\mu(B\cap A)$

$(A\cap B)\subset B \Rightarrow$ лемма $\int\limits_A F\,d\mu \le \int\limits_A f\,d\mu + \Phi(B\cap A)$

$\int\limits_A F\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \nu(B\cap A) - \int\limits_{B\cap A} f\,d\mu$

$\Rightarrow \int\limits_A F\,d\mu \le \int\limits_{A\setminus B} f\,d\mu + \nu(B\cap A) \le \nu(A\setminus B)+\nu(B\cap A)=\nu(A)$ $\forall A\subset X$
$\Rightarrow F\in H$.

$\Rightarrow$ д.б. $\int\limits_X F\,d\mu \le M$.

$\int\limits_X F\,d\mu = \int\limits_X f\,d\mu + \delta\int\limits_X \chi_B\,d\mu = M + \delta\underset{0}{\overset{\vee}{\mu(B)}} > M$ (лемма)

$\Rightarrow$ противоречие.

$\Rightarrow \Phi$ - нулевая мера $\Rightarrow \nu(A) = \int\limits_A F\,d\mu \quad \forall A \subset X$ ∎

__Def__ __Если__ ν абс. непр. отн. μ, $\nu(A) = \int f\,d\mu \ \forall A \subset X$, то f наз-ся __производной Радона - Нек.__ меры ν по мере μ: $\quad f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

__Th__ __Пусть__ f инт. по мере ν, ν абс. непр. отн. μ и $\rho = \frac{d\nu}{d\mu}$ - произв. Р.-Н.

__Тогда__ $f \cdot \rho$ инт-ма по мере μ и $\int\limits_X f\,d\nu = \int\limits_X f\rho\,d\mu$.

__Д-во:__ 1) Прост. фун. с конечн. числом знач.

Дост. рассм. $f = \chi_A(x)$, $\forall A \subset X$

$\int\limits_X f\,d\nu = \int\limits_X \chi_A(x)\,d\nu = \nu(A)$, $\nu(A) = \int\limits_A \rho\,d\mu$,

$\nu(A) = \int\limits_X \rho\chi_A\,d\mu \Rightarrow \int\limits_X \chi_A\,d\nu = \int\limits_X \chi_A\rho\,d\mu$

2) Для произвольной f инт. по ν.

$f = f^+ - f^-$, $f^+, f^- \geq 0$. $\Rightarrow$ дост. рассм. $f \geq 0$.

$\exists$ посл. простых фун. с конечн. числом знач. $\{g_n\}$, $g_n \leq g_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = f$.

1) $\Rightarrow \int\limits_X g_n\,d\nu = \int\limits_X g_n\rho\,d\mu$.

$g_n \leq f$ инт. по ν $\Rightarrow$ Th Лебега $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X g_n\,d\nu = \int\limits_X f\,d\nu$

$g \geq 0$, $g_n\rho \leq g_{n+1}\rho$, $g_n\rho \to f\rho$

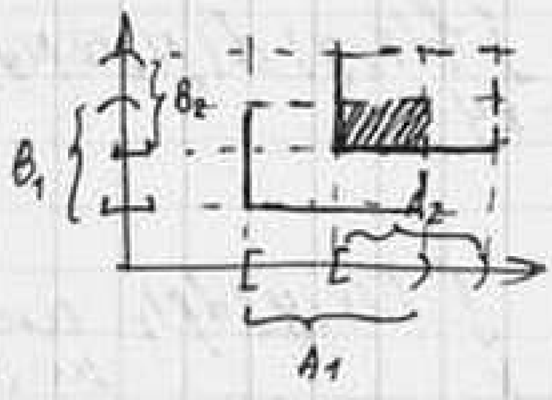
$\int\limits_X g_n\rho\,d\mu = \int\limits_X g_n\,d\nu \leq \int\limits_X f\,d\nu \quad \forall n$

Th Леви $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X g_n\rho\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f\rho\,d\mu$, $f\rho$ инт. по μ

$$\Rightarrow \int_X f\rho \, d\mu = \int_X f \, d\nu$$

20 Th Фубини о перестановке порядков инт-ния

1) <u>Утв.</u> $S(X)$ — кольцо элем. мн-в в пр. X
$S(Y)$ — кольцо эл. мн. в пр. Y
$S(Z) = \{A \times B : A \in S(X),\ B \in S(Y)\}$.
<u>Тогда</u> $S(Z)$ — полукольцо.



$\forall D_1, D_2 \in S_Z \qquad D_1 = A_1 \times B_1$
$D_2 = A_2 \times B_2$

$$D_1 \cap D_2 = (\underbrace{A_1 \cap A_2}_{\in S_X}) \times (\underbrace{B_1 \cap B_2}_{\in S_Y}) \in S_Z$$

$$D_2 \setminus D_1 = \underbrace{(\underbrace{A_2 \setminus A_1}_{S_X}) \times \underbrace{B_2}_{S_Y}}_{S_Z} \sqcup \underbrace{(\underbrace{B_2 \setminus B_1}_{S_Y}) \times \underbrace{A_1}_{S_X}}_{S_Z} \in S_Z$$

Мера $D = A \times B \quad \mu_Z(D) = \mu_X(A) \times \mu_Y(B)$.

2) <u>Если</u> μ_X, μ_Y — σ-адд. меры, <u>то</u> μ_Z — тоже σ-адд. мера на $S(Z)$.

Обозн. $\mu_X \otimes \mu_Y = \mu_Z$.

3) <u>Пусть</u> мн-во C измеримо отн. σ-адд. меры (μ)
<u>Тогда</u> $\exists$ мн-во $D \supset C : \mu(D) = \mu(C)$,
причем $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n,\ D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_n$,

$$D_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{nj},\ D_{n1} \subset D_{n2} \subset \ldots \subset \ldots,\ D_{nj} \in K(S)$$

4) <u>Пусть</u> μ_X, μ_Y — σ-адд. и полн. меры, $\mu = \mu_X \otimes \mu_Y$.
Мн-во C измеримо отн. μ, $C \subset X \times Y$.
<u>Тогда</u> 1) Для п.в. x C_x изм. отн. μ_Y
$\mu_Y(C_x) = f_C(x)$ $\forall$ п.в. x $\exists$.
2) $f_C(x) = \mu_Y(C_x)$ инт-ма по X, μ_X

$$\int_X \mu_Y(C_x)\, d\mu_X = \mu(C)$$

5) <u>Следствие</u> <u>Пусть</u> $f(x) \geq 0$ инт. на X,
$C = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : t \in [0, f(x)],\ x \in X\}$.
<u>Тогда</u> C измеримо отн. $\mu_X \otimes \mu$

Th (Фубини)

(I) Пусть $f(x)$ инт. на $X \times Y$, μ_x, μ_y — σ-адд., полные (f инт. по мере $\mu_x \otimes \mu_y$).

Тогда

1) для п.в. $x \in X$ $f(x,y)$ инт. по Y; $\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y$ инт. по X

$$\Rightarrow \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y\,d\mu_x = \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu_x \otimes \mu_y)$$

для п.в. $y \in Y$.

2) $f(x,y)$ инт по X, $\int\limits_X f(x,y)\,d\mu_x$ инт. по Y

$$\Rightarrow \int\limits_Y \int\limits_X f(x,y)\,d\mu_x\,d\mu_y = \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu_x \otimes \mu_y)$$

3) $\int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y\,d\mu_x = \int\limits_Y \int\limits_X f(x,y)\,d\mu_x\,d\mu_y$

(II) Пусть $f \geqslant 0$ и $\exists \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y\,d\mu_x$.

Тогда $f(x,y)$ инт. по $X \times Y$ отн. $\mu_x \otimes \mu_y$.

Д-во: (I) $\exists$ f инт. на $X \times Y$.

Представим $f(x,y)$ в виде $f = f_+ - f_-$, где

$$f_+ = \frac{|f|+f}{2}, \quad f_- = \frac{|f|-f}{2}.$$

$C = \{(x,y,t),\ t \in [0, f(x,y)],\ x \in X,\ y \in Y\}$.

След. 5) $\Rightarrow$ C изм. отн. $(\mu_x \otimes \mu_y) \otimes \mu$ и мера

$$(\mu_x \otimes \mu_y) \otimes \mu(C) = \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu_x \otimes \mu_y).$$

$$(\mu_x \otimes \mu_y) \otimes \mu = \mu_x \otimes (\mu_y \otimes \mu)$$

$\forall$ п.в. $x \in X$ C_x изм. и $\mu_x \otimes (\mu_y \otimes \mu)(C) =$

$= \int\limits_X (\mu_y \otimes \mu) C_x\,d\mu \cdot (\mu_y \otimes \mu) C_x - \exists\ \forall$ п.в. $x \in X$.

Возьмем x: $\exists C_x = \{(y,t): t \in [0, f(x,y)], y \in Y\}$.

След. $\Rightarrow (\mu_x \otimes \mu) C_x = \int\limits_Y f(x,y)\, d\mu_y$

$$\mu_x \otimes (\mu_y \otimes \mu) C = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\, d\mu_y \right) d\mu_x$$

$$\Rightarrow \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu_x \otimes \mu_y) = \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)\, d\mu_y\, d\mu_x.$$

Аналогично, $\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu_x \otimes \mu_y) = \int\limits_Y \int\limits_X f(x,y)\, d\mu_x\, d\mu_y$.

(II) Пусть $f \geq 0$ и $\exists \iint\limits_{X\,Y} f(x,y)\, d\mu_x\, d\mu_y$.

$\exists f_n = \min\{f(x,y), n\}$.

f_n огранич., $f_n \in [0,n]$ измерим $\Rightarrow$ интегр. на мн-ве конечной меры $X\times Y$.

$$\Rightarrow \int\limits_{X\times Y} f_n\, d(\mu_x \otimes \mu_y) = \iint\limits_{X\,Y} f_n(x,y)\, d\mu_y\, d\mu_x.$$

f_n моном. $(f_n \leq f_{n+1} \leq f)$

$$\iint\limits_{X\,Y} f_{n+1}(x,y)\, d\mu_y\, d\mu_x \leq \iint\limits_{X\,Y} f_n\, d\mu_y\, d\mu_x$$

$f_n \to f$ на $X\times Y$.

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu_x \otimes \mu_y) \leq \iint\limits_{X\,Y} f_n\, d\mu_y\, d\mu_x.$$

$\Rightarrow$ Th Леви $\Rightarrow f(x,y)$ инт. на $X\times Y$ по $\mu_x \otimes \mu_y$

$\blacksquare$

21. Пр-во $\mathcal{L}_1$, его полнота, плотность множ-ва непр. фун. в $\mathcal{L}_1$

Def X - пр-во, Σ - σ-ал., μ - полн., σ-адд. мера
$x(t)$ инт. на X, т.е. $\exists \int_X x(t)\,d\mu$.

Мн-во всех инт. фун. на X - пр-во
$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$.

$$\forall x \to \|x\|_{\mathcal{L}_1} = \int_X |x(t)|\,d\mu$$

$\mathcal{L}_1$ линейно: $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$
$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
$\|x\| \geq 0$, $\ominus \Leftrightarrow x = 0$

$$\int_X |x(t)|\,d\mu = 0 \Rightarrow x_0 \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \text{ (в. ст. со нулевым)}$$
$$\Rightarrow \|x\| = \|x + x_0\|.$$

Th Пр-во $\mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ - полное.
($\forall$ ф.п. явл. ск-ся к эл-ту из $\mathcal{L}_1$.)

Д-во: $\{x_n\}$ - фунд., $x_n \in \mathcal{L}_1$ $\|x_n - x_m\|_{\mathcal{L}_1} \to 0$, $m,n \to \infty$

$$\Rightarrow \exists \{n_k\}: \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_{\mathcal{L}_1} = \int_X |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|\,d\mu < \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_{\mathcal{L}_1} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0$$

$\Rightarrow$ следств. из Th Леви $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \overset{\text{п.в.}}{=} f(t)$
и она инт.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_k} - x_{n_k}) \xrightarrow[X]{\text{п.в}}.$$

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} (x_{n_k} - x_{n_k}) = x_{n_{m+1}} - x_{n_1}, \quad x_{n_{m+1}} \xrightarrow{\text{п.в}} x(t)$$

$$|S_m| \le \sum_{k=1}^{m} |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| \le f(t) \text{ - инт.}$$

$|x_{n_{m+1}} - x_{n_1}| \le f(t)$ инт., $m \to \infty \Rightarrow |x(t) - x_{n_1}| \le f(t)$,

f инт., $x(t) - x_{n_1}(t)$ инт $\Rightarrow x(t)$ инт.

$x_{n_k} \xrightarrow{п.в} x(t)$ - изм., $|x_{n_k} - x_{n_1}| \le f \Rightarrow |x_{n_k}| \le f + |x_{n_1}|$

$|x_{n_k} - x| \xrightarrow{п.в} 0$, $|x_{n_k} - x| \le |x_{n_k}| + |x| \le f + |x_{n_1}| + |x|$

Th Лебега $\Rightarrow \int\limits_X |x_{n_k} - x| \, d\mu \to 0 \quad k \to +\infty$

т.е. подпосл. сх-ся к x по норме $\Rightarrow x_n \xrightarrow{норме} x$

$\Leftrightarrow \|x_n - x\|_{\mathcal{L}_1} \to 0 \quad n \to \infty$ ■

<u>Th</u> <u>Пусть</u> $X = [0,1]$, μ - мера Лебега, нор. длиной.
<u>Тогда</u> мн-во непр. функ. на $[0,1]$ плотно в $\mathcal{L}_1(X, \mu)$.

<u>Д.</u> $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{L}_1 \quad \exists$ прост. $f = \sum\limits_{k=1}^{m} f_n \chi_{A_n}(t)$

$\|x - f\|_{\mathcal{L}_1} < \varepsilon$, $\chi_A(t)$, A измер.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ эл-т B: $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$

$$\|\chi_A - \chi_B\|_{\mathcal{L}_1} = \int\limits_{[0,1]} |\chi_A - \chi_B| \, dt = \int\limits_{A \triangle B} dt = \mu(A \triangle B) < \varepsilon$$

$B = \bigsqcup\limits_{n=1}^{m} [a_n, b_n)$, $\chi_B = \sum\limits_{k=1}^{m} \chi_{[a_k, b_k)}$.

$\chi_{[a,b)}$ дост. приблизить непр. ф-циями ■

22. Нер-во Гельдера, Минковского, полнота пр-ва L_p, непр-ть в среднем функций из L_p

Def Пр-во $L_p(X,\Sigma,\mu)$, $p\geq 1$ сост. из фун x: $|x^p|$ инт.

$$\|x\|_{L_p} = \Big(\int_X |x(t)|^p d\mu\Big)^{1/p}.$$

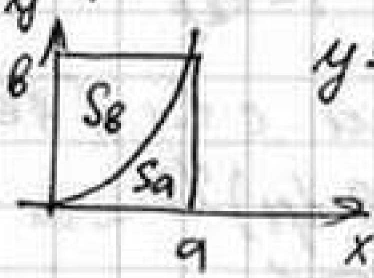
Нулев. эл-т $x_0 \overset{п.в.}{=} 0$ $\quad \|x\|\geq 0$

$\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

Утв: (нер-во Юнга): $\forall a,b\geq 0 \quad ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $p,q>1$.

Д-во:



$y = x^{p-1}$, $x = y^{\frac{1}{p-1}}$

$$S_a = \int_0^a x^{p-1}dx = \frac{a^p}{p}$$

$$S_b = \int_0^b y^{p-1}dy = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p+1}} = \frac{b^q}{q^{-1}}$$

Очевидно, $ab \leq S_a + S_b$ ■

Утв: (нер-во Гельдера): $x\in L_p$, $y\in L_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
$\Rightarrow x, y$ — инт. фун.

$$\int_X |xy|\,d\mu \leq \|x\|_{L_p}\|y\|_{L_q}$$

Д-во: П $\|x\|_{L_p}\neq 0$, $\|y\|_{L_p}\neq 0$

$X(t) = \frac{|x(t)|}{\|x\|_{L_p}}$, $Y(t) = \frac{|y(t)|}{\|y\|_{L_q}}$ $\Rightarrow XY \leq \frac{X^p}{p}+\frac{Y^q}{q}$

$\Rightarrow XY$ инт $\Rightarrow xy$ инт $\quad \int_X |xy|\,d\mu \leq \|x\|_{L_p}\|y\|_{L_q}$ ■

Утв: (нер-во Минковского): $f,g\in L_p$
$\Rightarrow f+g\in L_p$, $\|f+g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p}+\|g\|_{L_p}$.

Д-во: $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq 2^p(|f|^p+|g|^p)$

$$\|f+g\|^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g|^{p-1}|f+g|\,d\mu \leq$$

$\leq \int\limits_X |f+g|^{p-1}|f|\,d\mu + \int\limits_X |f+g|^{p-1}|g|\,d\mu \leq$ {нер-во Гельдера}

$\leq \|f\|_{\mathcal{L}_p} \left(\int\limits_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} + \|g\|_{\mathcal{L}_p} \left(\int\limits_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} =$

$= \left\{ \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \to (p-1)q = p \right\} = (\|f\|_{\mathcal{L}_p} + \|g\|_{\mathcal{L}_p}) \left(\int\limits_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}} =$

$= (\|f\|_{\mathcal{L}_p} + \|g\|_{\mathcal{L}_p}) \|f+g\|^{\frac{p}{q}}$

$\Rightarrow \|f+g\|_{\mathcal{L}_p}^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_p} + \|g\|_{\mathcal{L}_p}$; $p(1-\frac{1}{q}) = p\cdot\frac{1}{p} = 1$ ∎

<u>Th</u> Пр-во $\mathcal{L}_p$ — полное пр-во.

<u>Д-во:</u> $\exists f_n$ фунд. в $\mathcal{L}_p$: $\|f_{n+m} - f_n\|_{\mathcal{L}_p} < \varepsilon$, $n \geq N, \forall m$.

1) Если $\mu(X) < \infty \Rightarrow$ по аналогии с $\mathcal{L}_1$ ($f \in \mathcal{L}_p \Rightarrow f \in \mathcal{L}_1$)

$\int\limits_X |f|\cdot 1\,d\mu \leq \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \Big(\underbrace{\int\limits_X 1^q d\mu}_{\mu(X)}\Big)^{1/q} < \infty$

т.е. $\|f\|_{\mathcal{L}_1} \leq (\mu(X))^{1/q} \cdot \|f\|_{\mathcal{L}_p}$.

Если f_n фунд. в $\mathcal{L}_p \Rightarrow f_n$ фунд. в $\mathcal{L}_1 \Rightarrow \exists f_{n_k} \xrightarrow{п.в} f \in \mathcal{L}_1$.

$\Rightarrow |f_{n_k}| \xrightarrow{п.в} |f|$.

$\int\limits_X |f_n|^p d\mu = \|f_{n_k}\|^p_{\mathcal{L}_p} \leq Const$ $\forall n_k$ в силу фунд.

$\varepsilon > \|f_{n+m} - f_n\| \geq (\|f_{n+m}\| - \|f_n\|) \Rightarrow$ фунд-ть $\|f_n\|$.

Th Фату $|f_{n_k}|^p \xrightarrow{п.в} |f|^p$, $\int\limits_X |f_{n_k}|^p d\mu \leq c$ $\forall n_k$

$\Rightarrow |f|^p$ инт. $\Rightarrow f \in \mathcal{L}_p$

$|f_{n_k} - f|^p \xrightarrow{п.в} 0 \Rightarrow \|f_{n_k} - f_{n_j}\|_{\mathcal{L}_p} < \varepsilon$, $n_k, n_j > N$

$|f_{n_k} - f_{n_j}|^p \xrightarrow{п.в} |f_{n_k} - f|^p$, $n_j \to \infty$

т.к. $\left(\int |f_{n_k} - f_{n_j}|^p d\mu\right)^{1/p} < \varepsilon \Rightarrow$ Th Фату $\left(\int |f_{n_k} - f|^p d\mu\right)^{1/p} < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f_{n_k} - f\|_{\mathcal{L}_p} < \varepsilon$ $n_k \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_{\mathcal{L}_p} < \varepsilon$ $\forall n \geq N$.

2) $\mu(X) = \infty \Rightarrow X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$: $\mu(X_k) < \infty$, f_n фунд. $\forall X_k$

Th $\exists$ $d\mu = dx$ – мера Лебега, порожд. объемом $x = (x_1, \dots, x_n)$.
Тогда $\forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \varphi(x)$ – непр. в $\mathbb{R}^n$ и обращающаяся в нуль вне нек. шара, и $\|f - \varphi\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.

Th (о непр-ти в $\mathcal{L}_p$).
Пусть $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$.
Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $|h| < \delta \Rightarrow \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_p} < \varepsilon$

Д-во: Выбираем $\forall f \in \mathcal{L}_p$, $\forall \varepsilon > 0$.
Из пред. Th $\exists$ непр. в $\mathbb{R}^n$ $\varphi(x)$, обращ. в нуль вне нек. шара: $\|f - \varphi\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.

$$\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)} \le \|f(\cdot+h) - \varphi(\cdot+h)\| +$$

$$+ \|\varphi(\cdot+h) - \varphi(\cdot)\| + \|\varphi(\cdot) - f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_p} < 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot+h) - \varphi(\cdot)\|$$

$$\|\varphi(\cdot+h) - \varphi(\cdot)\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

$\varphi(x)$ непр. и огр. в нуле вне нек. шара $|x| \le R$.
Берем $|x| \le R$ – замкн. и огр. мн-во, φ непр. $\Rightarrow$ φ – равн. непр.

Для нашего ε $\exists \delta > 0$: $|h| < \delta \Rightarrow |\varphi(x+h) - \varphi(x)| < \left(\dfrac{\varepsilon}{\mu(B_R)}\right)^{1/p}$
где $\mu(B_R)$ – мера шара.
$\forall x, x+h \in B_R$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p\, dx < \frac{\varepsilon}{\mu(B_R)} \cdot \mu(B_R) = \varepsilon$$

■

23 Метр. пр-ва, пересеч. и объединен. откр. и замкн. мн-в, полные метр. пр-ва, непрер. отображения.

Def Неп. мн-во эл-тов M – <u>метр. пр-во</u>, если $\forall x,y \in M$: $d(x,y)$ – расстояние, вып:
1) $d(x,y) \geq 0$, $\ominus \Leftrightarrow x=y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

$B(x,r) = \{ y \in M,\ d(x,y) < r \}$

Def Мн-во G наз. <u>открытым</u>, если $\forall x \in G\ \exists B(x,r) \subset G$

Def т. $x \in M$ наз. <u>предельной</u> на мн-ве E, если $(B(x,r) \setminus x) \cap E \neq \emptyset$

Def мн-во E – <u>замкнуто</u>, если $E' \subset E$, где E' – мн-во всех пред. точек для E
$\bar{E} = E \cup E'$ – замыкание.

Утв. 1) Если G откр. $\Rightarrow C_M G$ замкн.
2) Если F замкн. $\Rightarrow C_M F$ откр.

Д-во: 1) (От противного) $\exists\ x \notin CG$
$x \in G$ – откр. $\Rightarrow \exists B(x,r) \subset G$, $B(x,r) \cap CG = \emptyset$
$(B(x,r) \setminus x) \cap CG = \emptyset \Rightarrow x$ не явл. пред. точкой для $CG \Rightarrow CG$ – замкнутое

2) (От противн.) $\exists\ CF$ не явл. откр.
$\Rightarrow \exists x \in CF$ и $B(x,r) \cap F \neq \emptyset\ \ \forall r > 0$
$x \notin F \Rightarrow (B(x,r) \setminus x) \cap F \neq \emptyset \quad \forall r > 0$
$\Rightarrow x \in F'$, т.е. пред. точка для $F \Rightarrow F' \subset F$
$\Rightarrow x \in F$, но $x \in CF \Rightarrow$ против. ∎

Утв. Если G_α откр. $\Rightarrow \bigcup\limits_\alpha G_\alpha,\ \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ откр

Д-во: 1) $G = \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$, $\forall x \in G = \bigcup\limits_\alpha G_\alpha \Rightarrow \exists G_\alpha \ni x \Rightarrow$
$\exists B(x,r) \subset G_\alpha \Rightarrow B(x,r) \subset \bigcup\limits_\alpha G_\alpha = G \Rightarrow G$ откр.

2) $G = \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k \Rightarrow x \in G_k \ \forall k=\overline{1,n} \Rightarrow \exists B(x, r_k) \subset G_k \ \forall k=\overline{1,n}$

$\exists r = \min\limits_{k=\overline{1,n}} (r_k) > 0 \Rightarrow B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset G_k \ \forall k=\overline{1,n}$

$\Rightarrow B(x,r) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k \Rightarrow G$ откр. ■

Утв. Если F_α - замкн., то $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ зам., $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ зам.

Д-во: $C \bigcap\limits_\alpha F_\alpha = \bigcup\limits_\alpha \underbrace{CF_\alpha}_{\text{откр}}$ - откр. $\Rightarrow C\left(\bigcup\limits_\alpha CF_\alpha\right) = \bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ - з-тое

Аналог., $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ ■

Def $x_n \to x$ в метр. пр-ве M, если $d(x_n, x) \to 0$

Def $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз. фунд. в M, если $d(x_n, x_m) \underset{m,n\to\infty}{\to} 0$

Def M наз. полным, если $\forall$ фунд. посл. явл. сх-ся.

$\exists f: X \to Y$, X, Y - метр. пр-ва,
метрика $d_X(x_1, x_2)$
$d_Y(y_1, y_2)$.

Def (Гейне) отобр-е $f: X \to Y$ наз. непр. в т. $x \in X$, если $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $x_n \in X$ $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

Def (Коши) $f: X \to Y$ - непр. в т. $x \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $d_X(x, \tilde{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$

24 Принцип сжимающих отображений, лок. форма принципа, примеры примен. к реш. инт. уравнений.

<u>Def</u> $f: M \to M$ наз. <u>сжимающим</u>, если $\exists\, \alpha \in (0,1) : d(f(x), f(y)) \le \alpha d(x,y) \quad \forall (x,y) \in M.$

<u>Th</u> (принцип сжим. отображ.)
<u>Если</u> M - метр. пр-во, $f: M \to M$ сжим.,
<u>то</u> $\exists!$ неподвижная т. $x \in M : f(x) = x$.

<u>Д-во:</u> ($\exists$) $\forall x_0 \in M \quad x_1 = f(x_0), \ldots, x_n = f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \le \alpha d(x_n, x_{n-1}) \le \ldots \le \alpha^n d(x_1, x_0)$$

$$d(x_{n+m}, x_n) \le d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \le \alpha^{n+m-1} d(x_1, x_0) + \alpha^{n+m-2} d(x_1, x_0) + \ldots + \alpha^n d(x_1, x_0) \le d(x_1, x_0)\,[\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots] = d(x_1, x_0) \frac{\alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon \quad (n > N, \forall m)$$

$\Rightarrow x_n$ фунд $\Rightarrow$ (M полн) $\exists\, x \in M : x_n \to x,\ x_{n+1} = f(x_n)$
$n \to \infty \Rightarrow x = f(x) \Rightarrow x$ неподвижн.

(!) Пусть $\exists$ 2 неподв. точки: x и $\tilde{x}$: $f(x) = x, f(\tilde{x}) = \tilde{x}$
$$d(x, \tilde{x}) = d(f(x), f(\tilde{x})) \le \alpha d(x, \tilde{x}),\ 0 < \alpha < 1$$
$$\Rightarrow d(x, \tilde{x}) = 0$$
■

<u>Th</u> (лок. форма принципа сж. отобр.)
<u>Пусть</u> M - полн. метр. пр-во, $f: \overline{B(x_0, r)} \to M$
f - сжимающее, α - пост. сжатия
$$d(x_0, f(x_0)) \le r(1-\alpha)$$
<u>Тогда</u> в $\overline{B(x_0, r)}$ $\exists!$ неподв. точка x: $f(x) = x$.

<u>Д-во:</u> $\forall x \in \overline{B(x_0, r)} \Rightarrow d(x_0, x) \le r$
$$d(x_0, f(x)) \le d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), f(x)) \le r(1-\alpha) + \alpha d(x, x_0) \le r(1-\alpha) + \alpha r = r$$

$\Rightarrow f(x) \in \overline{B(x_0, r)} \quad \forall x \in \overline{B(x_0, r)} \Rightarrow$ новое $\tilde{M} = \overline{B(x_0, r)}$

полное, в $\overline{M}$ $\exists!$ неподв. точка и $d(x_0, x) = \frac{\alpha^2 d(x_1,x_0)}{1-\alpha}$

<u>Примеры:</u> ∎

0) $M = C[a,b]$, $d(f,g) = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$ — полн. метр. пр-во.

1) $f(x) = y(t) + \lambda \int\limits_a^b k(t,s)\, x(s)\, ds$, $x, y \in C[a,b]$

$k(t,s) \in C[a,b]\times[a,b] \Rightarrow f: C[a,b] \to C[a,b]$.

$d(f(x), f(\tilde{x})) = |\lambda| \max\limits_{t\in[a,b]} \left| \int\limits_a^b k(t,s)(x(s) - \tilde{x}(s))\, ds \right| \leq$

$\leq \underbrace{|\lambda|\, k_0\, (b-a)}_{\alpha} \max\limits_{s\in[a,b]} \underbrace{|x(s) - \tilde{x}(s)|}_{d(x,\tilde{x})}$

если $\alpha = |\lambda|\, k_0 (b-a) < 1 \Rightarrow f$ сжим. (реш-е $\exists!$)

2) $f(x) = y(t) + \lambda \int\limits_a^b k(t,s,x(s))\, ds$

$k(t,s,z) \in C[a,b]\times[a,b]\times(-\infty,+\infty)$

$|k(t,s,z_1) - k(t,s,z_2)| \leq C\,|z_1 - z_2| \quad \forall t,s \in [a,b]$

$d(f(x), f(\tilde{x})) = |\lambda| \max\limits_{t\in[a,b]} \left| \int\limits_a^b k(t,s,x(s)) - k(t,s,\tilde{x}(s))\, ds \right| \leq$

$\leq |\lambda|\, C\, (b-a) \max\limits_{s\in[a,b]} |x(s) - \tilde{x}(s)|$

$\alpha = |\lambda|\, C\, (b-a) < 1$ f сжим.

3) в 1) f^m — сжимающее? $[a,b]$

$|f^2(x) - f^2(\tilde{x})| = |\lambda|^2 \int\limits_a^b k(t,s)(f(x) - f(\tilde{x}))\, ds| \leq$

$\leq |\lambda|^2 k_0^2 \int\limits_a^b (s-a)\, ds\, d(x,\tilde{x})| = |\lambda|^2 k_0^2 \frac{(b-a)^2}{2!} d(x,\tilde{x})$

$|f^n(x) - f^n(\tilde{x})| \leq |\lambda|^n k_0^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(x,\tilde{x})$

$n \geq N \quad \frac{|\lambda|^n k_0^n}{n!}(b-a)^n < 1 \Rightarrow$ сжимающее.

25. Th Хаусдорфа о пополнении метр. пр-ва.

Th Пусть M - произв. метр. пр-во.
Тогда $\exists !$ (с точностью до изометрии) полное метр. пр-во $\tilde{M}$:
1) M изометр. $M_0 \subset \tilde{M}$
2) $\overline{M_0} = \tilde{M}$

Д-во: $\rceil \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ фунд. в M
Фунд. пос-ти эквивалентны, если $d(x_n, y_n) \to 0$. при $n \to \infty$.

$\tilde{M}$ - мн-во классов экв. фунд. посл., $\tilde{M} \ni X, Y$.
$\rceil \tilde{d}(X, Y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, $\{x_n\} \in X$, $\{y_n\} \in Y$.

1) $\lim \exists$, если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ фунд. в M
$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, y_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$
$\Rightarrow |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \to 0 \quad n, m \to \infty$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$

2) $\lim$ не зав. от выбора x_n, y_n.
$\rceil \{x_n'\} \in X$, $\{y_n'\} \in Y$.
$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_n') + d(x_n', y_n') + d(y_n', y_n)$
$\Rightarrow |d(x_n', y_n') - d(x_n, y_n)| \to 0 \quad n \to \infty$.

$\Rightarrow \tilde{d}$ - метрика.

1) $M_0 \subset \tilde{M}$, M_0 - мн-во стац. эл-тов.
$\exists \{c, c, \dots\} \in X$, $c \in M$ - стац. фунд. посл.
$\Rightarrow X$ - стац. эл-т $\tilde{M}$.

2) $\rceil M_0$ - мн-во всех стац. эл-тов X.
$M_0 \sim M$ т.т.т.к. $\forall X \in M_0$ $\{c, c, \dots, c\} \in X$, $c \in M$
$\Rightarrow X \to c \in M \quad \forall c \in M$.

3) $\overline{M_0} = \tilde{M}$. Берем $\forall X \in \tilde{M} \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X_n$ - фунд.,
$X_n \in M_0$. $\{x_n, x_n, \dots, x_n\} \in X_n$ - стац.
$\tilde{d}(X, X_n) = \lim\limits_{m\to\infty} (x_m, x_n) < \varepsilon \Rightarrow$ фунд., $d(X_n, X) < \varepsilon$
$\forall n \geq N$

4) $\tilde{M}$ - полное пр-во.

$\forall$ фунд. посл. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\tilde{M} \overset{3)}{\Rightarrow} \exists y_n \in M_0$:

$\tilde{d}(x_n, y_n) \le \frac{1}{n}$, $\{y_n, \dots, y_n\} \in y_n$, $X = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$

Пок. фунд. $\{y_n\} \Rightarrow$ дост. д-ть фунд. y_n.

$\tilde{d}(y_n, y_m) = d(y_n, y_m)$.

$\tilde{d}(y_n, y_m) \le d(y_n, x_n) + d(x_n, x_m) + \tilde{d}(x_m, y_m) \le$
$\le \frac{1}{n} + \tilde{d}(x_n, x_m) + \frac{1}{m} \overset{?}{\to} 0 \quad n, m \to \infty.$

$d(X, x_n) \le \tilde{d}(X, y_n) + \tilde{d}(y_n, x_n) \le \frac{1}{n} + d(X, y_n) =$
$= \frac{1}{n} + \lim\limits_{m\to\infty} d(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{стац.}}}{y_m}, y_n) \le \varepsilon \quad n \ge N.$

5) $!\tilde{M}$ с точностью до изометрии.
(от противного).

$\exists\ \exists \tilde{M}$ и M^*: $M_0 \in \tilde{M}$, $\overline{M_0} = \tilde{M}$, $M_0 \sim M$
$M_0^* \in M^*$, $\overline{M_0^*} = \tilde{M}^*$, $M_0^* \sim M$.

$M_0 \sim M_0^*$, $\overline{M_0} = \tilde{M}$, $\overline{M_0^*} = M^* \Rightarrow M^* \sim \tilde{M}$. ∎

26. Плотное, нигде не плотн. мн-ва, принцип влож. шаров, понятие категории, Th Бэра-Хаусдорфа. Пример влож. шаров, имеющ. пустое пересечение.

Def E плотно в M, если $\overline{E}=M$.

Def Мн-во $E\subset M$ наз. нигде не плотным в M, если $\overline{E}$ не содержит ни одного шара.

Утв Если E нигде не пл. в M, то $\overline{C\overline{E}}=M$,
если $\overline{CF}=M$, где F — замкн., то F нигде не пл. в M.

Д-во: 1) E нигде не пл. в M. Пусть $\overline{C\overline{E}}\neq M \Rightarrow \exists B(x,R)\cap C\overline{E}=\emptyset$
$\Rightarrow B(x,R)\subset \overline{E} \Rightarrow B(x,R)\subset \overline{E}\subset \overline{E} \Rightarrow$ против. с определ. $\Rightarrow \overline{C\overline{E}}=M$.

2) F замкн., $\overline{CF}=M$. Пусть $\exists B(x,R)\subset F \Rightarrow$
$B(x,R)\cap CF=\emptyset \Rightarrow \overline{CF}\neq M \Rightarrow$ против. ■

Def Мн-во $E\subset M$ наз. мн-вом первой кат., если $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, где E_k нигде не пл. в M.

Def Ост. мн-ва — мн-ва 2й категории.

Th (Бэра) Полное метр. пр-во — мн-во 2й кат.

Д-во: (от противного) Пусть $M=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, E_k нигде не пл.

$\emptyset = CM = C\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{E_k}\right)=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}C\overline{E_k}$.

$C\overline{E_k}$ откр., E_k нигде не пл. $\Rightarrow$ утв. $C\overline{E_k}$ пл. в M

$G_k=C\overline{E_k}$, $\overline{G_k}=M \Rightarrow$ утв. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}C\overline{E_k}\neq\emptyset$
$\Rightarrow$ против. ■

Th (принцип вложенности шаров).
Если M — полн. метр. пр-во
$\overline{B(x_1,R_1)}\supset\overline{B(x_2,R_2)}\supset\ldots\supset\overline{B(x_n,R_n)}\supset\ldots$ — послед. замкн. вложенных шаров: $R_n\to 0$

Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, R_n)} \neq \emptyset$.

Д-во: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow d(x_n, x_{n+m}) \leq R_n \quad \forall m \geq 1, \forall n \geq 1.$

$(x_{n+m} \in \overline{B(x_n, R_n)})$.

$\Rightarrow x_n$ фундам. $\Rightarrow$ полн. M $\exists x \in M: \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

$d(x_n, x_{n+m}) \leq R_n \Rightarrow m \to \infty \quad d(x_n, x) \leq R_n \ \forall n \geq 1.$

$x \in \overline{B(x_n, R_n)} \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \forall x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, R_n)}$ ∎

Ex (если $R_n \not\to 0$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, R_n)} = \emptyset$)

$M = \{1, 2, 3, \dots\}$ $d(n,m) = \begin{cases} 0, & m = n \\ 1 + \frac{1}{\min(m,n)}, & n \neq m \end{cases}$

Проверим аксиомы метрики:

1) $d(m,n) \geq 0$, $(=) \Leftrightarrow n = m$
2) $d(m,n) = d(n,m)$
3) $d(n,m) \leq d(n,k) + d(k,m)$
   а) $m = n$ очевидно
   б) $n \neq m$, $k = n$ или $k = m$ очев.
   в) $n \neq m$, $k \neq n$, $k \neq m$
   $1 \leq d(n,m) \leq 2 \quad \forall n, m, m \neq n.$
   $d(n,m) \leq 2 = 1 + 1 \leq d(n,k) + d(k,m)$, $k \neq n, k \neq m$.

$\overline{B(n, 1 + \frac{1}{n})} = \{m : d(n,m) \leq 1 + \frac{1}{n}\}$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\min(m,n)} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \min(n,m) \geq n$

$\Rightarrow \{m \geq n\}$ $\overline{B(n, 1 + \frac{1}{n})} \supset \overline{B(n+1, 1 + \frac{1}{n+1})}$

$\Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B(n, \frac{1}{n} + 1)} = \emptyset$

 Необх. и дост. усл-е предкомпактности, предк. пр-ва при помощи предкомп. сети.

Def Метр. пр-во M наз. предкомпактным, если $\sup\limits_{\forall (x,y)\in M} d(x,y)<\infty$

Def Метр. пр-во $E\subset M$. Мн-во $S\subset M$ наз. ε-сетью для E, если $E\subset \bigcup\limits_{x\in S} B(x,\varepsilon)$.

Th Метр. пр-во M предкомп. ТТТК M вполне ограничено, т.е. $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ конечн. ε-сеть.

Д-во: ($\Rightarrow$) $\exists$ M предкомп. $\Rightarrow$

1) $\forall \varepsilon>0$ $\forall x_1\in M$ $M\subset B(x_1,\varepsilon)\Rightarrow$ док.

2) рассм. $\forall x_2\in M\setminus B(x_1,\varepsilon)$. Если $M\subset (B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon))$ $\Rightarrow$ конечн. ε-сеть $\Rightarrow$ док., иначе

3) $\forall x_3\in M\setminus (B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon))$. Если $M\in \bigcup\limits_{k=1}^{3} B(x_k,\varepsilon)$ $\Rightarrow$ док, иначе ...

Если процесс обрывается на к-л этапе $\Rightarrow$ док. Иначе получим посл. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $d(x_k,x_m)\geq\varepsilon$ $\Rightarrow$ нельзя выбр. фунд. подпосл $\Rightarrow$ против. с предкомп. M.

($\Leftarrow$) $\exists$ M вполне ограничено $\Rightarrow$

Рассм. $\forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k\in M$.

$\exists$ $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$. Построим конечн. ε-сеть $\forall \varepsilon_n$.

ε_1. $M\subset \bigcup\limits_{k=1}^{N_1} B(x_{1k},\varepsilon_{1k})\Rightarrow \exists B(x_{1k},\varepsilon_1)$, сод. беск. число эл-тов $\{x_k\}$ $\Rightarrow$ выбир. $x_{k_1}\in B(x_{1k},\varepsilon_1)$, оставляем эл-ты из x_k, конт. сод. в этом шаре $B(x_{1k},\varepsilon_1)$.

$B(x_{1k},\varepsilon_1)\supset M$-предк. $\Rightarrow$ можно накрыть.

$\exists$ $B(x_{2k},\varepsilon_2)$: $B(x_{1k},\varepsilon_1)\subset \bigcup\limits_{k=1}^{N_2} B(x_{2k},\varepsilon_2)$

$\exists$ шар $B(x_{2k},\varepsilon_2)$, сод. беск. число эл. $\{x_k\}$ $\Rightarrow$ $x_{k_2}\in B(x_{2k},\varepsilon_2)$ оставим эл-ты, сод. в шаре $B(x_{2k},\varepsilon_2)$

...

$\Rightarrow \{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $d(x_{k_n},x_{k_m})\leq 2\varepsilon_n$, если $k_m>k_n$ $\Rightarrow$ $\{x_{k_n}\}$ фунд

Следствие: $\exists E \subset M$ - метр. пр-во.
Тогда E предкомп., если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ предкомп. ε-сеть для E, т.е. $\exists S \subset M$: S предкомп. и $E \subset \bigcup_{x \in S} B(x, \varepsilon)$.

Д-во: 1) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists S \subset M$ и $E \subset \bigcup_{x \in S} B(x, \varepsilon)$.
S - предкомп $\Rightarrow$ по Th $\exists y_1, \dots, y_n \in S$: $S \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \varepsilon)$ - кон. ε-сеть для S $\Rightarrow$ $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, 2\varepsilon)$,
т.к. $\forall z \in E \Rightarrow \exists B(x, \varepsilon) \ni z$ $x \in S$
$\Rightarrow \exists B(y_k, \varepsilon) \ni x \Rightarrow z \in B(y_k, 2\varepsilon)$, т.к.
$d(z, y_k) \leq d(z, x) + d(x, y_k) < 2\varepsilon$
$\Rightarrow \{y_k\}$ - 2ε - сеть для E.

2) Пок., что $y_k \in E$.
Выбир. $x_k \in B(y_k, 2\varepsilon) \cap E \Rightarrow E \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, 4\varepsilon)$,
т.к. $\forall x \in E$ $\exists B(y_k, 2\varepsilon) \ni x \Rightarrow d(x_k, x) < 4\varepsilon$
т.к. $x_k \in B(y_k, 2\varepsilon) \Rightarrow x \in B(x, 4\varepsilon)$
$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, 4\varepsilon)$, $x_k \in E \Rightarrow$ Th E - предкомп.,
т.к. $\exists$ конечн. ε-сеть. ■

29. Эквивалентности двух определений комп.

Th Метр. пр-во M компактно $\Leftrightarrow$ $\forall$ покрытие $\bigcup_\alpha G_\alpha \supset M$ (G_α - откр.) $\exists$ G_{α_k}: $M \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$ (конечное подпокрытие).

Д-во: $\Leftarrow$ $\exists M \subset \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \exists G_{\alpha_k} : M \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$.

Выделим сх-ся подпосл. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M$

Рассм. $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, $\overline{X_n}$ - замыкание X_n.

1) Док., что $\bigcap^{\infty} \overline{X_n} \neq \emptyset$. От противн.

$M = C\emptyset = C\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{C\overline{X_n}}_{\text{откр}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ - откр.

$\Rightarrow \exists m : M = \bigcup_{n=1}^{m} G_n$

$\Rightarrow CM = \emptyset = C\bigcap_{n=1}^{m} G_n = C\bigcap_{n=1}^{m} C\overline{X_n} = \bigcap_{n=1}^{m} \overline{X_n}$.

но $x_m \in \bigcap_{n=1}^{m} X_n \Rightarrow$ противоречие. $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} = \emptyset$.

$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \Rightarrow x \in \overline{X_n}$ $\forall n = 1, 2, \dots$

2) $\exists\ \exists X_{n_k} : x \in X_{n_k}, k = \overline{1,\infty}$ $\Rightarrow$ в кач-ве сход. подпосл. берем $x, x, x, \dots$

3) $\exists\ \nexists X_{n_k} : x \in X_{n_k}, k = \overline{1,\infty}$, т.е. $\exists N : \forall n \geq N$ $x \notin X_n$, но $x \in \overline{X_n}$.

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon_m = \frac{1}{m}$ $(x \notin X_n,\ x \in \overline{X_n} \Rightarrow x \in X_n')$

$\Rightarrow$ $(B(x, \varepsilon_m) \setminus x) \cap X_n \neq \emptyset$ $\Rightarrow \exists x_{n_m} \in X_n : d(x, x_{n_m}) < \varepsilon_m$

$\Rightarrow$ подпосл. $x_{n_m} \to x$.

$\Rightarrow$ M - комп. метр-пр-во $\Rightarrow$ из $\forall$ беск. пос-ти можно выделить сх-ся.

$\bigcup_\alpha G_\alpha \supset M$, M комп. $\Rightarrow$ предкомп $\Rightarrow$ M вполне ограничено ($\exists$ ε-сеть).

$\exists\ \varepsilon_m = \frac{1}{2^m}$. От противного $\exists\ \exists$ откр. G_α : $\bigcup_\alpha G_\alpha \supset M$, но нельзя выбрать конечн. подпокрытие.

$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. $M \subset \bigcup_{k=1}^{n_1} B(x_{1k}, \varepsilon_1)$, т.к. $\exists$ кон. ε-сеть

$\exists B(x_{1k}, \varepsilon_1) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ – и из этого покр. нельзя выбрать конечн. подпокр.

$B(x_{1k}, \varepsilon_1)$ предкомп., т.к. $B(x_{1k}, \varepsilon_1) \subset M$.

$\exists\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2^2} \Rightarrow B(x_{1k}, \varepsilon_1) \subset \bigcup_{k=1}^{n_2} B(x_{2k}, \varepsilon_2) \Rightarrow$

$\exists B(x_{2k}, \varepsilon_2) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$, но нельзя выбр. кон. подпокр.

и. $\Rightarrow \exists\ y_1 = x_{1k},\ y_2 = x_{2k}, \dots, y_n = x_{nk}$

$d(y_n, y_{n+m}) \leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \dots + d(y_{n+m-1}, y_{n+m})$

$\leq 2\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1} + 2\varepsilon_{n+m-1} \leq 2\,[\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \dots] = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = \frac{1}{2^{n-2}}$

$\forall m \geq 1 \Rightarrow y_n$ – фунд. посл.. M комп. $\Rightarrow \exists\, y \in M : y_n \to y$

$y \in M \subset \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \exists\ G_\alpha$ откр: $y \in G_\alpha \Rightarrow \exists\ B(y, \varepsilon) \subset G_\alpha$

$y_n \to y \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \quad B(y_n, \varepsilon_n) \subset B(y, \varepsilon) \subset G_\alpha$

$\Rightarrow$ противо. с тем, что нельзя выбрать конечн. подпокрытие.

■

30. Критерий предкомпактности в C, L_p, l_p

1) l_p: $x=(x_1,x_2,\dots)$ $\|x\|_{l_p}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}$ $d(x,y)=\|x-y\|_{l_p}$
$p\geq 1$ (бесконечномерн.)

Th Мн-во $E\subset l_p$ предкомп. ~~ттк~~ $\exists$ Const $C>0$:
$\|x\|_{l_p}\leq c$ $\forall x\in l_p$ (равном. огранич-ть)
$\forall\varepsilon>0$ $\exists n(\varepsilon)$: $\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}<\varepsilon$ $\forall x\in E$

Д-во: ($\Rightarrow$) E предкомп. $\exists x=S_nx+R_nx$,
где $S_{n_0}x=(x_1,\dots,x_{n_0},0,\dots,0)$
$R_{n_0}x=(0,\dots,0,x_{n_0+1},x_{n_0+2},\dots)$
E предком. $\Rightarrow$ ограничено, т.е. $\|x\|_{l_p}\leq C$ $\forall x\in E$.
E предкомп. $\Rightarrow$ вполне огранич! $\forall\varepsilon>0$
$\exists x^k$ $k=\overline{1,n}$: $E\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(x^k,\varepsilon)$, $x^k\in E$

$x^k=S_nx^k+R_nx^k$, $k=\overline{1,n}$
$\forall\varepsilon>0$ $\forall k$ $\exists n_k$: $\|R_{n_k}x^k\|_{l_p}<\varepsilon$.
Пусть $n_0=\max(n_1,\dots,n_m)$ $\Rightarrow$ $\|R_{n_k}x^k\|_{l_p}<\varepsilon$ $\forall k=\overline{1,m}$

$\forall x\in E\subset\bigcup_{k=1}^{m}B(x^k,\varepsilon)\Rightarrow\exists B(x^k,\varepsilon)\ni x\Rightarrow\|x-x^k\|_{l_p}<\varepsilon$

$\Rightarrow\|R_{n_0}x-R_{n_0}x^k\|_{l_p}<\varepsilon$, $\varepsilon>\|R_{n_0}x-R_{n_0}x^k\|\geq$

$\geq\|R_{n_0}x\|-\|R_{n_0}x^k\|$ $\Rightarrow$ $\|R_{n_0}x\|\leq\varepsilon+\|R_{n_0}x^k\|<2\varepsilon$

($\Leftarrow$) $E\subset l_p$, E огр. в l_p и $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0$:
$\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}<\varepsilon$ $\forall x\in E$.

Дост. д-ть: $\exists$ предкомп. ε-сеть
Покажем, что $\{S_{n_0}x\}$, $x\in E$ – предк. ε-сеть E.

$\|x-S_{n_0}x\|_{l_p}=\|R_{n_0}x\|_{l_p}=\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}<\varepsilon$ $\forall x\in E$

Док., что предкомп.
$S_{n_0}x=(x_1,\dots,x_{n_0},0,\dots)\Leftrightarrow(x_1,\dots,x_{n_0})$ – конечномерн.

$\|S_{n_0}x\|_{l_p}\leq\|x\|_{l_p}\leq$ Const $\forall x\in E$ $\exists\{S_{n_0}x\}$, $x\in E$ – равн. огранич., $\sum_{k=1}^{n_0}|x|^p<$ Const $\forall$ $(x_1,\dots,x_{n_0})$
$\Rightarrow$ Th Больцано-Вейер. $\exists$ фунд. посл. $\Rightarrow$ $\{S_{n_0}x\}$ предкомп

Th (Арцела–Асколи) Мн-во $E \subset C(K)$ предкомп. в $C(K)$ ТТК E - равном. огранич. и равностеп. непрер.

Д-во: ($\Leftarrow$) Равном. огр., равност. непр. $\Rightarrow \exists$ равном. сх-ся подпосл.

($\Rightarrow$) E предкомп $\Rightarrow$ огр. в $C(K)$ $\{\exists\, d(f,g) \le C\}$ $\Rightarrow$ в лин. пр-ве $\exists C$: $d(0,f) \le C$ $\forall f \in E$. $f, g \in E$

$\max\limits_K |f| \le C$ $\forall f \in E \Rightarrow$ равном. огранич.

E предкомп. $\Rightarrow$ вполне ограничено.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists f_1, \dots, f_m$: $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B(f_k, \varepsilon)$.

$f_k \in C(K) \Rightarrow f_k$ равном. непр. ф-ции

$\Rightarrow \exists \delta_k > 0$: $|x' - x''| < \delta$, $x', x'' \in K \Rightarrow |f_k(x') - f_k(x'')| < \varepsilon$

Пусть $\delta = \min\limits_{k=\overline{1,m}} \delta_k \Rightarrow |f_k(x') - f_k(x'')| < \varepsilon$, $|x' - x''| < \delta$ $\forall k = \overline{1,m}$.

Берем $\forall f \in E$, т.к. $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B(f_k, \varepsilon) \Rightarrow \exists B(f_k, \varepsilon) \ni f$

$\Rightarrow \max\limits_{x \in K} |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \Rightarrow$

$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f_k(x')| + |f_k(x') - f_k(x'')| +$
$+ |f_k(x'') - f(x'')| < 3\varepsilon$ если $|x' - x''| < \delta$

$\Rightarrow E$ равностеп. непрерывна ■

Def Посл-ть ф-ций $f_n \in L_p(K)$ наз. равном. огранич, если $\exists C$: $\|f_n\|_{L_p} \le C$.

Def Посл-ть ф-ций $f_n \in L_p$ наз. равн. непрер. в L_p, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\|f(\cdot + \Delta) - f(\cdot)\|_{L_p} < \varepsilon$ $|\Delta| < \delta$ $\forall n \ge 1$.

Th (Рисса) Мн-во $E \subset L_p(K)$ предкомп. в L_p ТТК мн-во E огр. в L_p и равностеп. непр. в L_p

Д-во: ($\Rightarrow$) аналог. Th Арцела–Асколи
предкомп. $\Rightarrow$ равн. огр., равн. непр-ть
$|f| \to \|f\|_{L_p}$, $B(f, \varepsilon) \to$ шар в L_p

$\Leftarrow$ Построим $\forall \varepsilon > 0$ предкомп. ε-сеть для E

$$\omega(r) = \begin{cases} k(1-r), & 0 \le r \le 1 \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|)\,dx = \omega_n \int_0^1 r^{n+1}\omega(r)\,dr$$

площадь n-мерн. сферы рад. 1

$$1 = \omega_n k \int_0^1 r^{n-1}(1-r)\,dr \le \omega_n k\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow k = \frac{n(n+1)}{\omega_n}$$

Введем $\omega_\lambda(|x|) = \frac{1}{\lambda^n}\omega\left(\frac{|x|}{\lambda}\right), \lambda > 0.$

$\Rightarrow \omega_\lambda(|x|) = 0$ при $|x| \geq \lambda$

$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\lambda(|x|)dx = 1$, т.к. это $\int \omega_\lambda(|x|)\,dx = \int \frac{1}{\lambda^n}\omega\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)\frac{dx}{\lambda}$

$\cdot\ \omega(|x|)$ непр по x, т.к. $\omega(r)$ непр. $\Rightarrow \omega_\lambda(|x|)$ непр

Берем $f \in E \subset L_p(K)$: $f_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\lambda(|x-y|)f(y)\,dy$

$f_\lambda(x) = 0$ вне шара.

1) Покажем, что $\{f_\lambda(x)\}_{f\in E}$ — это ε-сеть для E.

$$f_\lambda(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\lambda(|x-y|)f(y)\,dy - f(x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\omega_\lambda(|x-y|)\,dy}_{1} =$$

$$= \int_{|x-y|<\lambda} \omega_\lambda(|x-y|)(f(y)-f(x))\,dy.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda(x) - f(x)|^p dx \le \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{|x-y|<\lambda} \omega_\lambda(|x-y|)|f(y)-f(x)|^p dy$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\omega_\lambda = \omega^{\frac{1}{q}}\cdot\omega^{\frac{1}{p}}$

$$\Rightarrow \int |f_\lambda(x) - f(x)|^p dx \le \int dx \left(\int \omega_\lambda(|x-y|)\,dy\right)^{\frac{p}{q}} \int \omega_\lambda(|x-y|)|f(y)-f(x)|^p dy$$

$$= \int dx \int_{|z|<\lambda} \omega_\lambda(|z|)|f(z+x) - f(x)|^p dz =$$

$$= \int \omega_\lambda(|z|)\,dz \int |f(z+x) - f(x)|^p dx$$

если $|\lambda| < \delta \Rightarrow |z| < \lambda < \delta \Rightarrow \|f(\cdot+z) - f(\cdot)\|_{L_p} < \varepsilon$
$\forall f \in E$ (равностеп. непр-ть).

$\Rightarrow \|f_\lambda - f\|^p_{L_p} \le \underbrace{\int \omega_\lambda(|z|)\,dz}_{\overset{\vee}{1}} \cdot \varepsilon^p$

т.е. если $\lambda \le \delta \Rightarrow \|f_\lambda - f\|_{L_p} \le \varepsilon$.

$\Rightarrow \{f_\lambda\}_{f\in E}$ – это ε-сеть в L_p для E.

2) Пусть λ – fix, $\lambda < \delta$. Покажем, что $\{f_\lambda\}_{f\in E}$ предкомп.

$|f_\lambda(x)| = \left|\int \omega_\lambda(|x-y|) f(y)\,dy\right| \le \underset{\hat{C}}{\|f\|_{L_p}} \cdot \int (\omega_\lambda(|x-y|))^q dy \le c(\lambda)\ \forall f\in E$

C, т.к. равном. огр.

$\Rightarrow$ Мн-во $\{f_\lambda(x)\}$ равном. огранич. в метрике C.

$|f_\lambda(x+\Delta) - f_\lambda(x)| \le \left|\int \omega_\lambda(z)|f(x+\Delta+z) - f(x+z)|\,dz\right| \le$

$\le \underbrace{\left(\int (\omega_\lambda(|z|))^q dz\right)^{1/q}}_{\overset{\wedge}{C(\lambda)}} \cdot \left(\int |f(x+\Delta+z) - f(x+z)|^p dy\right)^{1/p} \le$

$\le C(\lambda)\cdot\left(\int \underbrace{|f(y+z) - f(y)|}_{\overset{\wedge}{\varepsilon}}{}^p dy\right)^{1/p} < \varepsilon\cdot C(\lambda)$

$\Rightarrow \{f_\lambda\}$ – равностеп. непр.

$\Rightarrow \{f_\lambda\}_{f\in E}$ – равн. огр. и равностеп. непр. при fix λ $\Rightarrow$ из $\forall$ $g_n \in \{f_\lambda\}_{f\in E}$ можно выбрать равном. сх-ся в $C(K)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \ge N\ \forall m\ \exists g_{n_k}: \ |g_{n_k}(x) - g_{n_m}(x)| < \varepsilon$ $x\in K$

$\forall n_m, n_k \ge N$

$\int\limits_K |g_{n_k}(x) - g_{n_m}(x)|^p dx \le \varepsilon^p\cdot\mu(K) \Rightarrow g_{n_k}$ фундр. в $L_p(K)$ ∎

31 Банаховы пр-ва, эквивалентность огранич-ти и непр-ти лин. операторов, полнота пр-ва лин. огр. операторов.

Def Полное лин. нормир. пр-во наз. <u>банаховым</u>

Def Оператор $A: X \to Y$ наз. <u>линейным</u>, если $\forall x_1, x_2 \in X \quad A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$.

Def Опер. $A: X \to Y$ наз. <u>ограниченным</u>, если он $\forall$ огр. мн-во переводит в огранич.

Утв <u>Если</u> $A: X \to Y$ непр. в т. $\overline{x} \in X$, <u>то</u> A непр. $\forall x \in X$

Д-во: $\forall x \in X$, $\forall x_n \to x \Rightarrow x_n - x \to 0 \Rightarrow \overline{x} - x_n - x \to \overline{x}$
$A(\overline{x} - x_n - x) \to A\overline{x} \Rightarrow$ т.к. лин. $\Rightarrow$
$A\overline{x} - Ax_n - Ax \to A\overline{x} \Rightarrow Ax_n \to Ax$ ■

Утв. Если A огр. $\Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Д-во: $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\| \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} =$
$= \sup\limits_{\|z\|=1} \|Az\|$, где $z = \dfrac{x}{\|x\|}$
$\Rightarrow \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\| \Rightarrow \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$ ■

Th Лин. оп. $A: X \to Y$ непр. <u>ТТТК</u> A ограничен

Д-во: ($\Leftarrow$) A огр. $\Rightarrow x_n \to x \Rightarrow \|Ax_n - Ax\| =$
$= \|A(x_n - x)\| \leq \|A\| \|x_n - x\| \to 0$

($\Rightarrow$) (От противного) $\exists$ A непр., но не огр.
$\Rightarrow \exists x_n: \|x_n\| = 1$ и $\|Ax_n\| \to +\infty$
Рассм. послед. $z_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{\|Ax_n\|}} \Rightarrow \|z_n\| \to 0$

$\|Az_n\| = \dfrac{\|Ax_n\|}{\sqrt{\|Ax_n\|}} \to +\infty \Rightarrow$ противор. ■

Тh Пусть Y - полн. норм. пр-во, тогда пр-во лин. огр. оп. $\mathcal{L}(X \to Y)$ - полн. лин. нормир. пр-во.

Д-во: $A_n \in \mathcal{L}(X \to Y)$ $\forall x \in X$; $\exists$ $\|A_n - A_m\| \underset{m,n\to\infty}{\to} 0$

Тогда $\forall x \in X$ $\{A_n x\}$ - фунд. посл. в Y, т.к. $\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$.

В силу полноты Y $\exists y \in Y$: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y$

$A: X \to Y \Rightarrow y = Ax$.

$\tilde{x}$: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \tilde{x} = \tilde{y} = A\tilde{x} \Rightarrow \lim (A_n x + A_n \tilde{x}) =$

$$\left[\begin{aligned} &= \lim A_n (x + \tilde{x}) = A(x+\tilde{x}) \\ &= \lim A_n (x) + \lim A_n \tilde{x} = Ax + A\tilde{x} \end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow$ оп. A - линейный.

Док., что A - огр.. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$: $\|A_n - A_{n+m}\| < \varepsilon$ $n \geq N$ $\forall m \geq 1$

$\Rightarrow \varepsilon \|x\| \geq \|A_n x - A_{n+m} x\|$ при $n \geq N$, $\forall m \geq 1$

$m \to \infty \Rightarrow \varepsilon \|x\| \geq \|A_n x - Ax\|$ $\forall n \geq N$.

$\varepsilon \|x\| \geq \|A_n x - Ax\| \geq \|A_n x\| - \|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \varepsilon \|x\| +$
$+ \|A_n x\| \leq \|x\| (\varepsilon + \|A_n\|)$
$\uparrow \forall$ fix n.

Но с др. стороны $\|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$ $\forall n \geq N$

$\Rightarrow \|A_n - A\| \leq \varepsilon \Rightarrow A_n \to A$ в пр-ве $\mathcal{L}(X \to Y)$

$\Rightarrow A$ ограничен. ∎

32. Th Банаха – Штейнгауза.

Th Пусть $A_n \in \mathcal{L}(X \to Y)$ – лин., огр. оператор, X, Y – лин. норм. пр-ва.
$E = \{x \in X : \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n x\| < +\infty\}$ – мн-во второй категории.
Тогда $\exists M > 0 : \|A_n\| \le M \quad \forall n \ge 1$.

Д-во: $F_{m,n} = \{x \in X : \|A_n x\| \le m\}$ – замкн., т.к. A_n огранич.
$F_m = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_{m,n}$ – тоже замкн.

Док., что $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$.

1) $\forall x \in E \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n x\| < +\infty \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \|A_n x\| \le m$ $\forall n \ge 1 \Rightarrow x \in F_m = \{x \in X : \|A_n x\| \le m \ \forall n \ge 1\}$
$\Rightarrow E \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$.

2) $\exists x \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m \Rightarrow \exists F_m \ni x \Rightarrow \|A_n x\| \le m < \infty$
$\Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n x\| \le m < \infty$, $x \in E$

$\Rightarrow E \supset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m \Rightarrow E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$.

E – мн-во $2^й$ категории $\Rightarrow \exists F_m$, конч. нигде не плотное $\Rightarrow \exists B(x_0, r) \subset F_m$.

$\forall x \in X \quad x \ne 0 \quad \frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{r}{2} + x_0 \in B(x_0, r) \subset F_m$

$\Rightarrow \|A_n(\frac{x \cdot r}{\|x\| 2} + x_0)\| \le m \quad \forall n \ge 1$

$m \ge \|A_n(\frac{x \cdot r}{2\|x\|} + x_0)\| \ge \|A_n x\| \frac{r}{2\|x\|} - \underbrace{\|A_n x_0\|}_{\le m} \ge \|A_n x\| \frac{r}{2\|x\|} - m$ $\forall n \ge 1$

$\|A_n x\| \le \frac{4m}{r} \|x\| \quad \forall x \in X, \forall n$

$\Rightarrow \|A_n\| \le \underbrace{\frac{4m}{r}}_{M} \quad \forall n \ge 1$ ∎

Следствие: если X – полн. лин. нормир. пр-во и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n x\| < +\infty$,
то
$\exists M > 0 : \|A_n\| \le M \quad \forall n \ge 1$.

Д-во: $E = X$ - полное $\Rightarrow$ Тh Бэра X - мн-во 2^{ч} кат.
$\Rightarrow$ Тh Б-Ш.

33 Обратные операторы, правый, левый обр. опер.
Обратимые операторы, признак обратимости.

Пусть $A: X \to Y$ - лин. оператор

Def Оп. $B: Y \to X$ наз. левым [правым] обратн. к A, если $BA = E_X$ $[AB = E_Y]$. Обознач. $A_л^{-1}$ $[A_п^{-1}]$.

Def Оп. A^{-1} наз. обратным к A, если $A^{-1}A = E = AA^{-1}$

Утв Если $\exists A_л^{-1}$ и $A_п^{-1}$, то $\exists A^{-1} = A_п^{-1} = A_п^{-1}$

Д-во: $A_л^{-1}A = E$, $\underbrace{(A_л^{-1}A)}_{E}A_п^{-1} = A_п^{-1} \Rightarrow A_л^{-1} = A_п^{-1}$ ∎

Def Опр. A наз. обратимым, если $\exists A^{-1}$ - огр. оп.

Th Пусть A - лин. оп. $X \to Y$, X - банах. пр-во, Y - лин. норм., $R(A) = Y$, $\exists c > 0$ $\|Ax\| \geq c\|x\|$
Тогда оп. A обратим.

Д-во: $\|Ax\| \geq c\|x\| \Rightarrow \ker A = 0 \Rightarrow \exists A_л^{-1}$.
Надо д-ть, что ур-е разрешимо $\forall$ пр. части
$(\exists A_п^{-1})$, $\overline{R(A)} = Y \Rightarrow \exists y_n \in R(A): y_n \to y$
$\Rightarrow \exists x_n \in X: Ax_n = y_n \Rightarrow \|x_n\| \leq \frac{1}{c}\|Ax_n\| = \frac{1}{c}\|y_n\|$

$A(x_n - x_m) = y_n - y_m \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\|y_n - y_m\|$
$\Rightarrow y_n$ фундам.

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фунд., т.к. X - полн. (банах) пр-во
$\Rightarrow \exists x \in X: x_n \to x$.

Т.к. A огранич $\Rightarrow Ax_n \to Ax$, $y_n \to Ax$, $y_n \to y$
$\Rightarrow Ax = y \Rightarrow \exists Ax = y \Rightarrow \exists! A_п^{-1} \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$\underbrace{\|Ax\|}_{y} \geq c\underbrace{\|x\|}_{A^{-1}y} \Rightarrow \|y\| \geq c\|A^{-1}y\|$ $\forall y \in Y$

$\Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c} \Rightarrow A^{-1}$ огр $\Rightarrow A$ обратим

∎

__Лемма__ След-3 утв-ния эквивалентны:

1) $Ax=y$, если имеет, то единств. реш.

2) $\ker(A)=0$

3) $\exists A_\Lambda^{-1}$

__Д-во:__ (1→2) (от противного) $\exists \ker A \neq 0$
$\Rightarrow \exists \tilde{x} \in \ker(A): \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow Ax=y \Rightarrow$
$(x+\tilde{x})$-реш-е $A(x+\tilde{x})=y \Rightarrow$ реш-е не!

(2→3) $\ker(A)=0$
$R(A)\subset Y$, $\forall y \in R(A) \rightarrow \exists! x: Ax=y$
$\mathcal{D}(A_\Lambda^{-1})=R(A)$, $A_\Lambda^{-1}A=E$

(3→1) $\exists A_\Lambda^{-1}$. (от противн.) $\exists\ Ax_1=y, Ax_2=y$
$\Rightarrow A(x_1-x_2)=0$, $A_\Lambda^{-1}A(x_1-x_2)=x_1-x_2=0$
$\Rightarrow$ против.
$\Rightarrow$ реш-е $\exists!$ ∎

34. Обратимость оператора $(E-A)$. Открытость мн-ва обратим. операт., сх-ть обратим. операт. Спектральный радиус

Th Пусть A - лин. огр. опер. $X\to X$, X - банах. пр-во $\|A\|<1$.
Тогда $(E-A)$ обратим, т.е. $\exists (E-A)^{-1}$ и он ограничен.

Д-во: Построим послед. $A_n = E+A+A^2+\dots$ $A_n: X\to X$

$$\|A_{n+m}-A_n\| = \|A^{n+1}+\dots+A^{n+m}\| \leq \|A^{n+1}\|+\dots+\|A^{n+m}\| \leq$$
$$\leq \|A\|^{n+1}+\dots+\|A\|^{n+m} = \frac{\|A\|^{n+m-1}-\|A\|^{n+m}}{\|A\|-1} \leq$$
$$\leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1-\|A\|} \quad \forall m$$

A_n - фунд. пос-ть в $L(X\to X) \Rightarrow$ т.к. $X=Y$ - полное пр-во $\Rightarrow L(X\to X)$ - полн. $\Rightarrow A_n$ сход.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = B: X\to X$$

$$\|A_n\| \leq 1+\|A\|+\dots+\|A\|^n \leq \frac{1}{1-\|A\|} \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \|B\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Док., что B - левый и правый обр. к $(E-A)$

$$B(E-A) = A_n(E-A)+(B-A_n)(E-A) = E-A^{n+1}+(B-A_n)(E-A)$$

$$\|B(E-A)-E\| \leq \|A^{n+1}\|+\|B-A_n\|\,\|E-A\|$$

$$n\to\infty \Rightarrow B(E-A)=E$$

$$(E-A)A_n+(E-A)(B-A_n) = (E-A^{n+1})+(E-A)(B-A_n)$$

далее аналогично $\Rightarrow$ $(E-A)B=E$

$$\Rightarrow B=(E-A)^{-1} \Rightarrow \|B\| \leq \frac{1}{1-\|A\|} \text{ - огр.} \Rightarrow (E-A) \text{ обрат.}$$ ■

Th Пусть A - лин. огр. опер. $X\to X$.
Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$ и этот предел наз. <u>спектральным радиусом</u> оп. A.

Д-во: $(\|A^n\|)^{1/n} \le (\|A\|^n)^{1/n} = \|A\|$

$\Rightarrow 0 \le (\|A^n\|)^{1/n} \le \|A\| \Rightarrow$ из норм $(\|A^n\|)^{1/n}$ можно выделить сх-ся подпосл..

$\exists$ предел этой подпосл. равен r

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N}: \ r - \varepsilon \le \|A^m\|^{1/m} \le r + \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists k$ и $\ell \in \mathbb{N}: \ n = km + \ell, \ 0 \le \ell \le m-1$

$$\|A^n\|^{1/n} = \|A^{km+\ell}\|^{1/n} \le \left(\|A^m\|^k \|A\|^\ell\right)^{1/n} = \|A^m\|^{\frac{k}{n}} \|A\|^{\frac{\ell}{n}}$$

$$\|A^m\|^{\frac{k}{n}} = \left(\|A^m\|^{1/m}\right)^{\frac{mk}{mk+\ell}} \to \|A^m\|^{1/m}, \quad n \to \infty, \ \frac{\ell}{n} \to 0$$

$\Rightarrow \|A\|^{\frac{\ell}{n}} \to 1$

$\Rightarrow \exists N: \ \forall n > N \quad \|A^n\|^{1/n} \le r + 2\varepsilon$.

Пусть $\exists \tilde{r} \ne r \Rightarrow$ при $\tilde{r} > r$ противоре-е
при $\tilde{r} < r$ против., т.к. $\forall \varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \forall$ подпосл. сх. к $r \Rightarrow \|A^n\|^{1/n} \to r \quad n \to \infty$

■.

Th (об устойчивости) Пусть X, Y - банах. пр-ва
$A: X \to Y$ - лин. обратимый опер.
$B: X \to Y$ - лин. огран. оператор
$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ (B уклон. от обратимого A на дост. малое число).
Тогда B - обратимый.

Д-во: $B = A + (B-A) = A(E + A^{-1}(B-A))$
$(E + A^{-1}(B-A)): X \to X$
$\|A^{-1}(B-A)\| \le \|A^{-1}\| \, \|B-A\| < 1$

$\Rightarrow \exists$ огр. $(E + A^{-1}(B-A))^{-1} \Rightarrow B$ обратим
и $B^{-1} = (E + A^{-1}(B-A))^{-1} A^{-1}$

■

Следствие Мн-во обратимых операторов в простр-во $\mathcal{L}(X \to Y)$ открытое.

Th **Пусть** $A: X \to Y$, X, Y банаховы пр-ва, A - обр.
A_n - лин. огранич. оп. $: X \to Y$
$\|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.
Тогда A_n обратимый и $\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \to 0$ $n \to \infty$.

Д-во: Построим обратный оператор.

$$A_n = A + (A_n - A) = A(E + A^{-1}(A_n - A))$$

$$\|A^{-1}(A_n - A)\| \le \|A^{-1}\| \|A_n - A\| \to 0 \Rightarrow$$

при $n \geq N$ оп $[E + A^{-1}(A_n - A)]$ обрат.

$\Rightarrow A_n$ - обратимый оператор при

$$A_n^{-1} = (E + A^{-1}(A_n - A))^{-1} A^{-1}$$

$$A_n^{-1} - A^{-1} = [(E + A^{-1}(A_n - A))^{-1} - E] A^{-1}$$

$$\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \le \|(E + A^{-1}(A_n - A))^{-1} - E\| \|A^{-1}\| \le$$

$$\|(E - A^{-1}) - E\| \le \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}$$

$$\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}(A_n - A)\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|} \le \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A_n - A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A_n - A\|} \to 0$$

■

35 Th Банаха об обратном операторе. Замкн. оп., Th о замкн. графике.

Th (Банаха) $A - \mathcal{L}(X \to Y)$, где X, Y банах. пр-ва, $D(A) = X$, $R(A) = Y$ и A отобр. $X \to Y$ ВО.
A - лин. огранич. опер.
Тогда A^{-1} - лин. оператор. (огранич.)

Лемма Пусть B - лин. оп. (не обяз. огран.) опер. $X \to Y$, где X, Y - банах. пр-ва, $D(B) = X$.
$X_n = \{x \in X : \|Bx\| \le n \|x\|\}$
Тогда $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ и $\exists X_m : \overline{X_m} = X$.

Д-во (леммы)
1) $\forall x \in X = D(B) \Rightarrow \|Bx\| < \infty$ и $\exists x \ne 0$.
Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \Rightarrow x \in X_n \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$

$X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n \Rightarrow X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \Rightarrow X$ - банахово $\Rightarrow X$ полн.

$\Rightarrow$ Th Бэра-Хаусдорфа $\exists \overline{X_p} \supset B(x_0, r)$
$\Rightarrow \overline{X_p \cap B(x_0, r)} = B(x_0, r)$

$\Rightarrow \exists B(x_1, r_1) : x_1 \in X_p,\ \overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r)$
$\Rightarrow \forall x \in X \quad \|x\| = r_1$

Выберем эл-т $x_1 + x \in \overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r)$
$\Rightarrow \exists z_k \in X_p \cap \overline{B(x_1, r_1)}$ и $z_k \to x_1 + x$.
$\Rightarrow z_k - x_1 = \tilde{x}_k : \tilde{x}_k \to x$

$\|B\tilde{x}_k\| = \|Bz_k - Bx_1\| \le \|\underbrace{Bz_k}_{\tilde{x}_k}\| + \|\underbrace{Bx_1}_{x_1}\| \le p\|z_k\| +$
$+ p\|x_1\| = p\|\tilde{x}_k + x_1\| + p\|x_1\| \le p\|\tilde{x}_k\| + 2p\|x_1\| =$
$= p\|\tilde{x}_k\| + \frac{2p \cdot 2}{r_1}\|x_1\| \left(\frac{r_1}{2}\right)$.

$\tilde{x}_k \to x,\ \|x\| = r_1 \Rightarrow \|\tilde{x}_k\| \geq \frac{r_1}{2}$ при $k \geq N$

$\Rightarrow \|B\tilde{x}_k\| \le p\|x_k\| + \frac{4p}{r_1}\|x_1\|\|\tilde{x}_k\|$

Берем $m \in \mathbb{N}$, $m \geq p + \frac{4p}{r_1}\|x_1\|$

$\Rightarrow \|B\tilde{x}_k\| \le m\|\tilde{x}_k\|, \; k \ge N \Rightarrow \tilde{x}_k \in X_m \; \forall k \ge N, \; \tilde{x}_k \to x.$

Берем $\forall x, \; x \ne 0 \Rightarrow \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|} r_1 \Rightarrow \|\tilde{x}\| = r_1 \Rightarrow \exists \tilde{x}_k,$
$\tilde{x}_k \in X_m, \; k \ge N$ и $\tilde{x}_k \to \tilde{x}$.

$$x_k = \frac{\tilde{x}_k \|x\|}{r_1} \to x \Rightarrow x_k \in X_m, \; n \ge N$$

$$\|Bx_k\| = \|B\tilde{x}_k\| \cdot \frac{\|x\|}{r_1} \le m\|\tilde{x}_k\| \frac{\|x\|}{r_1} = m\|x_k\| \quad \blacksquare$$

Д-во (Th) Обозн. $B = A^{-1} \Rightarrow B: Y \to X$.
Введем $Y_n = \{y \in Y : \|By\| \le n\|y\|\}, \; D(B) = Y$.
Лемма $\Rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ и $\exists Y_m : \overline{Y_m} = Y$.

Берем $\forall y \in Y$ и $y \ne 0 \Rightarrow \|y\| = l > 0$.
Рассм. замкн. шар $\overline{B(0,l)} \cap Y_n$
$\Rightarrow$ лемма $\Rightarrow \exists y_1 \in Y_m \cap \overline{B(0,l)} : \|y_1\| \le l$ и $\|y - y_1\| \le \frac{l}{2}$
$\Rightarrow \overline{B(0,\frac{l}{2})} \cap Y_m, \; (y - y_1) \in \overline{B(0,\frac{l}{2})} \cap Y_m \Rightarrow$ лемма
$\exists y_2 \in Y_m, \; \|y_2\| \le \frac{l}{2}, \; y_2 \in Y_m$ и $\|(y - y_1) - y_2\| \le \frac{l}{2^2}$
и т.д.
$\Rightarrow \exists y_n \in Y_m : \|y - y_1 - \ldots - y_n\| \le \frac{l}{2^n},$
$y_1, \ldots, y_n \in Y_m$ и т.д. до бесконечности.
$\Rightarrow \{y_n\} \to y$ при $n \to \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y$.
$B = A^{-1}, \; By_k = x_k, \; \sum_{k=1}^{\infty} y_k \overset{?}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} x_k$

Покажем фундаментальность.

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right\| \le \sum_{k=n}^{n+p} \|x_k\| = \sum_{k=n}^{n+p} \|By_k\| \le m \sum_{k=n}^{n+p} \|y_k\|$$

$\|y_n\| \le \frac{l}{2^{n-1}}$ по построению.

$$\Rightarrow \left\|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right\| \le m \sum_{k=n}^{n+p} \|y_k\| \le m \sum_{k=n}^{n+p} \frac{l}{2^{k-1}} \le \frac{ml}{2^{n-2}}$$

при $n \ge N \; \forall p \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, т.к. всякая фунд. посл. сходится $\Rightarrow A$ огр.

$\Rightarrow Ax = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y \Rightarrow Ax = y.$

Оценим $\|A^{-1}\|$.

$\|x\| = \|A^{-1}y\| = \|By\|$

$\Rightarrow \|x\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{-1}y_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|By_k\| \le$

$\le m \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \le m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell}{2^{k-1}} = 2\ell m = 2m\|y\|$

$\Rightarrow \|By\| \le 2m\|y\| \quad \forall y \ne 0 \Rightarrow \|A^{-1}\| \le 2m$

$\Rightarrow A^{-1}$ огранич. ■

<u>Следств.</u> <u>Пусть</u> X - лин. полное норм. пр-во, задано 2 нормы $\|x\|_1$, $\|x\|_2$.
$\exists C: \|x\|_1 \le C\|x\|_2 \ \forall x \in X$.

<u>Тогда</u> $\exists C_1 > 0: \|x\|_2 \le C_1 \|x\|_1$, т.е. нормы эквивалентны.

<u>Д-во:</u> $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ - пр-ва.
Введем оператор $E: \underset{X}{X_2} \to \underset{Y}{X_1}$ - взаимнооднозн., огранич.

$\|x\|_1 \le C\|x\|_2$.

$\Rightarrow$ Th Банаха $\exists E^{-1}$ - огр $\Rightarrow \exists C_1 > 0:$
$\|x\|_2 \le C_1\|x\|_1 \Rightarrow$ обр. оператор ограничен ■

<u>Def</u> $A: X \to Y$, A-лин (не обяз. огранич.)
$D(A) \subset X$, $R(A) \subset Y$.
Оп. A наз. <u>замкнутым</u>, если $\forall$ посл. $x_n \in D(A): x_n \to x \in X$ и $Ax_n \to y \in Y$
$\Rightarrow x \in D(A)$ и $Ax = y$.

Рассм. пр-во $\{x, Ax\} \stackrel{def}{=} \Gamma(A)$, $x \in D(A)$ - график.

Оп. A замкнут, ~~когда~~ $\Leftrightarrow \Gamma(A)$ замкн. с мерой $\|x\| + \|Ax\|$.

<u>Th</u> (о замкнутом графике).
<u>Пусть</u> $A: X \to Y$, X, Y - банаховы пр-ва, A лин., $D(A) = X$, A - замкн. оп.
<u>Тогда</u> A - огранич. оператор.

Д-во: $\|x\|$, $x\in X$, $\|x\|_1=\|x\|+\|Ax\|$.

Рассм. 2 простр.: $(X,\|\cdot\|)$ - банах (полн., лин.)
$X_1=(X,\|\cdot\|+\|A\cdot\|)$ - банах.

$\Rightarrow \forall x_n\in X$ и x_n фунд. в $X_1 \Rightarrow x_n$ сход, $x_n\in D(A)$
$\Rightarrow x_n$ фунд. в $X \Rightarrow$ в силу полноты X
$\exists x\in X: x_n\to x$.

Ax_n тоже фунд. посл. в Y, Y банах $\Rightarrow \exists y\in Y$:
$Ax_n\to y \Rightarrow$ т.к. A замкн., $x_n\to x$, $x_n\in D(A)$
$\Rightarrow x\in D(A)=X$ и $Ax=y$.
$\Rightarrow x_n$ сход. в пр-ве X_1
$\Rightarrow$ пр-во X_1 полное лин. нормир. пр-во
$\Rightarrow$ следствие $\Rightarrow \exists C_1: \|x\|_1=\|x\|+\|Ax\|\le C_1\|x\|$
$\|Ax\|\le C_1\|x\| \;\forall x\in X$
$\Rightarrow A$ огранич. оператор. ■

36. Th Хана-Банаха и следствия из нее.

Пусть $A: X \to Y$, $Y \in \mathbb{R}$, A - функционал.

Ф-л $p(x): X \to \mathbb{R}$ наз. полонинл., если $p(x) \geq 0$ $\forall x \in X$

$p(\alpha x) = \alpha p(x)$ $\forall \alpha \geq 0$

$p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$.

Th (Хана-Банаха) Пусть X - лин. норм. пр-во, $L \subset X$ - лин. многообразие, $f_0(x)$ - лин. функционал, зад. на L,

$f_0(x) \leq p(x)$ $\forall x \in L$: $p(x) = c\|x\|$

Тогда $\exists$ лин. ф-л $f(x)$, зад. на X:

$f(x) = f_0(x)$ $\forall x \in L$ и $f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in X$.

Д-во: $x_0 \notin L$, $x \in X$; f_0 на $\{L, x_0\} = \{x' + \alpha x_0, x' \in L, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$f(x' + \alpha x_0) = f(x') + \alpha \underbrace{f(x_0)}_{c} = \underbrace{f_0(x') + \alpha c}_{\text{лин. продолж-е}}$ $\forall x' \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Нужно: $f_0(x') + \alpha c \leq p(x' + \alpha x_0)$ $\forall x' \in L$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Подбираем c:

1) $\alpha > 0 \Rightarrow f_0\left(\frac{x'}{\alpha}\right) + c \leq p\left(\frac{x'}{\alpha} + x_0\right)$

$\Rightarrow c \leq p(x_1 + x_0) - f_0(x_1)$, $x_1 = \frac{x'}{\alpha}$ $\forall x_1 \in L$

2) $\alpha < 0 \Rightarrow f_0\left(\frac{x'}{-\alpha}\right) - c \leq p\left(\frac{x'}{-\alpha} - x_0\right)$

$\Rightarrow c \geq f_0(x_2) - p(x_2 - x_0)$, $x_2 = -\frac{x'}{\alpha}$ $\forall x_2 \in L$

3) Если $c \; \exists \Rightarrow f_0(x_2) - p(x_2 - x_0) \leq p(x_1 + x_0) - f_0(x_1)$

$\underbrace{f_0(x_2)}_{L} + \underbrace{f_0(x_1)}_{L} \leq p(x_1 + x_0) + p(x_2 - x_0)$

$\Rightarrow f(x_2 + x_1) \leq \cancel{p(x_2 + x_1)} = p(x_1 + x_0 + x_2 - x_0) \leq p(x_1 + x_0) + p(x_2 - x_0)$

$\Rightarrow \exists c: f_0(x') + \alpha c \leq p(x' + \alpha x_0) \Rightarrow$ нашли продолжение с L на $\{L, x_0\} = L_0$

4) $\exists X$ - сепарабельное пр-во ($\exists$ счетное, всюду плотное в X мн-во $x_1, x_2, \dots$).

$L_0 \xrightarrow[\text{прод.}]{} \{L_0, x_1\} = L_1 \to \{L_1, x_2\} = L_2 \to \dots$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$, $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n} = X$

$f(x) \le p(x) = c\|x\|$ $\forall x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ продолжаем по непр-сти:

$\forall z \in X : \exists \tilde{x}_n \to z$ $\tilde{x}_n \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$

Тогда $f(\tilde{x}_n)$ фунд., $f(\tilde{x}_n) \to A$ - число, это и есть значение продолжения $A = f(z)$ ∎

Следствия

1) Пусть $f_0(x)$ - зад. на L огр. функционал. Тогда $\exists f(x)$ зад. на $X \supset L$: $\|f\| = \|f_0\|$ и $f(x) = f_0(x)$ $\forall x \in L$.

(Лин. огр. функционал можно продолжить с сохранением нормы).

Д-во: $\|f_0(x)\| \le \|f_0\|\|x\|$ $\forall x \in L \Rightarrow$ Th Хана-Банаха

$p(x) = \|f_0\|\|x\|$ $\exists f(x)$, зад. на X : $f(x) = f_0(x)$ $\forall x \in L$

$f(x) \le p(x) = \|f_0\|\|x\|$ $\forall x \in X$.

$\Rightarrow \|f(x)\| \le \|f_0\| \Rightarrow$ на нек. многообразии они совпадают $f(x) = f_0(x)$ $\forall x \in L$

$\Rightarrow \|f\| = \|f_0\|$. ∎

2) Пусть $x_0 \ne 0$. Тогда $\exists$ лин. огр. ф-л $f(x)$: $f(x_0) = \|x_0\|$, $\|f\| = 1$.

Д-во: $L = \alpha x_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Зададим ф-л $f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$.

лин. на L $\sup\limits_{\alpha} \dfrac{\|f_0(\alpha x_0)\|}{\|\alpha x_0\|} = \dfrac{|\alpha|\|x_0\|}{|\alpha|\|x_0\|} = 1$

$\Rightarrow \|f_0\| = 1$ на L, $f_0(x_0) = \|x_0\|$.

След. 1) $\Rightarrow \exists$ лин. огр. ф-л f, зад. на X : $\|f\| = 1$, $f(\alpha x_0) = f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\| \Rightarrow f(x_0) = \|x_0\|$ ∎

3) <u>Пусть</u> X - банах. пр-во и M - замкн. лин. подпр-во X, $x_0 \notin M$.
<u>Тогда</u> $\exists$ лин. огр. ф-л $f(x)$, зад. на X и $f(x')=0$ $\forall x' \in M$, $f(x_0) \neq 0$.

<u>Д-во:</u> $L = \{x' + \alpha x_0,\ x' \in M,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.
$f_0(x'+\alpha x_0) = \alpha$ - лин. $f_0(x')=0$ $\forall x' \in M$.

$$f_0(x_0)=1 \Rightarrow \|f_0\| = \sup_{\substack{x \in M \\ \alpha \in \mathbb{R}}} \frac{\|f_0(x'+\alpha x_0)\|}{\|x'+\alpha x_0\|} = \sup \frac{|\alpha|}{\|x'+\alpha x_0\|} =$$

$$= \sup \frac{1}{\|\frac{x'}{\alpha} + x_0\|} = \sup \frac{1}{\|x_1 - x_0\|} = \frac{1}{\inf\limits_{x_1 \in M} \|x_1 - x_0\|}, \quad x_1 = -\frac{x'}{\alpha}$$

Если $\inf\limits_{x_1 \in M} \|x_1 - x_0\| = 0 \Rightarrow \exists$ подпосл. $z_n \in M$: $\|z_n - x_0\| \to 0$ $z_n \to x_0$.

M замкн., т.е. сод. все пред. точки $\Rightarrow x_0 \in M$
$\Rightarrow f_0$ огр. $\Rightarrow$ след. 1) допускает продолж-е на X с сохр. нормы.

■

38. Второе сопряж. пр-во, рефлексивные пр-ва. Предст-е лин. огр. ф-ла в l_p.

Пусть X - лин. норм. пр-во, X^* сопряж. пр-во. Т.к. X^* тоже лин. норм. пр-во, то строим $X^{**} = (X^*)^*$.

Пусть $x^*(x) = \tau x(x^*)$

$|\tau x(x^*)| = |x^*(x)| \le \|x^*\| \|x\|$

τ - лин. огр. ф-л над X^* $\quad \|\tau x\| \le \|x\|$

$\Rightarrow \tau(x) \in (X^*)^* = X^{**}$.

$\forall x \in X \longrightarrow \tau(x) \in X^{**}$

X^{**} может сост. и из других ф-лов.

Def Если X^{**} сост. только из ф-лов $\tau(x) \in X^{**}$, т.е. $X = X^{**}$ пр-во X наз. рефлексивным.

Утв. $\forall$ лин. огр. ф-нала $f(x)$ в l_p $\exists y \in l_q$:

$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad \forall x \in l_p$.

Д-во: Пусть $e_k = (0 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1} \dots 0) \Rightarrow x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$

f - огр. $\Rightarrow f$ непр. $\Rightarrow f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \underbrace{f(e_k)}_{y_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$.

Док., что $(y_1, \dots) \in l_q$.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k \rightarrow \forall x \in l_p$.

Рассм. $x^n = (|y_1|^{q-1} \operatorname{sgn} y_1, \dots, |y_n|^{q-1} \operatorname{sgn} y_n, 0, \dots) \in l_p$

$f(x^n) = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q$

$|f(x^n)| \le \|f\| \|x^n\|_{l_p} \le \|f\| \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/p}$,

т.к. $\|x^n\|_{l_p} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}}$, т.к. $(q-1)p = q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow f(x^n) = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q \le \|f\| \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}$

$\Rightarrow \|f\| \ge \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1-\frac{1}{p}}$

$n \to \infty$: $y \in \ell_q$, $\|y\|_{\ell_q} \le \|f\|_{\ell_p}$.

С др. стороны $f(x^n) = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \Rightarrow \|f\|_{\ell_p} \le \|y\|_{\ell_q}$

$\Rightarrow \|f\|_{\ell_p} = \|y\|_{\ell_q}$

■

Ex 1) Рефлексивное $L_p[0,1]$

$L_p^{**}[0,1] = (L_p^*[0,1])^* = (L_q[0,1])^* = L_p[0,1]$.

2) Нерефлексивное $L_1 = X$.

X^* (пр-во лин. огр. ф-лов) содержит все огр. и измеримые функ.;

X^* не сепарабельное.

$(X^*)^* = X^{**}$, если сост. из τx, $x \in L_1$: $X^{**} = \tau X$.

$\|\tau x\| = \|x\|$

1) $\|\tau x\| \le \|x\|$, т.к. $\tau x(x^*) = x^*(x)$

2) $x \ne 0 \Rightarrow$ по след. из Th Хана Банаха $\exists$ лин. огр. ф-л x_0^* : $\|x_0^*\| = 1$, $x_0^*(x) = \|x\|$.

$\|\tau x\| \geq |\tau x(x_0^*)| = \{ \|\tau x\| = \sup\limits_{\|x^*\|=1} |\tau x(x^*)| \} =$

$= |x_0^*(x)| = \|x\| \Rightarrow \|\tau x\| \geq \|x\|$.

$\Rightarrow X^{**}$ - сепарабельное пр-во $\Rightarrow X^*$ сепар.

$\Rightarrow$ противоречие.

39 Слабая сх-ть, ограниченность слабо сх-ся последов., слабая полнота рефлексивного пр-ва, признак слабой компактности.

Def Посл. $x_n \in X$ – лин. нормир. пр-во наз. слабо сх-ся к $x_0 \in X$, если $\forall x^* \in X^*$ $x^*(x_n) \to x^*(x_0)$.

Утв. Если $\|x_n - x_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $x_n \xrightarrow{сл.} x_0$

Д-во: $\forall x^* \in X^*$ $|x^*(x_n) - x^*(x_0)| = \|x^*(x_n - x_0)\| \le$
$\le \|x^*\| \|x_n - x_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow x^*(x_n) \to x^*(x_0)$
$\Rightarrow x_n \xrightarrow{сл} x_0$. ■

Ex (из слаб. сх-ти $\not\Rightarrow$ сх-ть по норме).
$l_2 = X$

$\exists x_n = e_n = (0, \dots \underset{n}{1} \dots 0)$, $x_n \xrightarrow{сл} 0$, но $\|e_n\| = 1$

Берем произв. ф-л $x^* \in X^*$.
$x^*(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = y_n$ $(y_k \in l_2) \to 0$ $n \to \infty$,
т.к. сх-ся $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 = \|y_k\|^2 < \infty$ ■

Def Посл. $x_n \in X$ наз. слабо фундаментальной, если $\forall$ лин. огр. ф-ла $x^* \in X^*$ посл. $x^*(x_n)$ явл. фундам.

Def пр-во X наз. слабо полным, если $\forall$ слабо фунд. посл-ть явл. слабо сх-ся.

Th Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$ слабо фунд. посл., то $\exists$ $C > 0$: $\|x_n\| < C$ $\forall n$

Д-во: x_n – слабо фунд. $\Rightarrow \forall$ лин. огр. ф-ла $x^* \in X^*$
$x^*(x_n)$ фунд. (по опред.)
$x^*(x_n) \stackrel{?}{=} \underbrace{\tau x_n(x^*)}_{ф\text{-}ал}$ $\Rightarrow \exists \lim |\tau x_n(x^*)| < \infty$ $\forall x^* \in X^*$

Th. Банаха-Штейнгауза X^* полное $\Rightarrow$

X-мн-во огр нагл. $\Rightarrow \exists M>0: \|x^*\| = \|\tau x_n\| \leq M \ \forall n$ ■

Th Если пр-во X рефлексивно, то X - слабо полное пр-во.

Д-во: X рефлекс., берем $\forall x_n$ слабофунд.
Берем $\forall x^* \in X^*$. $x^*(x_n) \to f(x^*)$ - числ. посл-ть фундам. (сх-ся), $f(x^*)$ - лин. ф-ал. $\Rightarrow$ сл. фунд
$\exists C>0: \|x_n\| < C \ \forall n \Rightarrow \|x^*(x_n)\| \leq \|x^*\| \|x_n\| \leq C \|x^*\|$
$|f(x^*)| \leq C \|x^*\| \Rightarrow f$ лин. огр. ф-ал $\Rightarrow f \in X^{**}$
рефлексивность $\Rightarrow X^{**} = \tau X$, $\forall f \in X^{**} \ \exists x \in X:$
$f = \tau x \Rightarrow f(x^*) = \tau x(x^*) = x^*(x)$
$\lim x^*(x_n) = x^*(x) \Rightarrow x_n \xrightarrow{сл} x$ ■

Th (О слабой компактности).
Если $\|x_n\| \leq c \ \forall n$, $x_n \in X$ - рефлекс., сепараб., тогда из посл-ти x_n можно выбрать слабо сх-ся подпосл.

Д-во: X - рефлексивно $\Rightarrow \tau X = X^{**}$; X^{**} сост. только из лин. огр. ф-лов $\tau x(x^*) = x^*(x)$, $\|\tau x\| = \|x\|$.

X-сепар-но $\Rightarrow \exists$ счетн. всюду плотное мн-во
$\Rightarrow \exists$ посл-ть $z_k \in X: \forall x \in X \ \forall \varepsilon>0 \ \exists z_k \in X:$
$\|x - z_k\| < \varepsilon \Rightarrow \tau z_k$ счетн., всюду плотн. мн-во X^{**} (т.к. $\|z_k\| = \|\tau z_k\|$)

Для $\forall \tau x \in X^{**} \ \forall \varepsilon>0 \ \exists \tau z_k \in X^{**}: \|\tau x - \tau z_k\| =$
$= \|x - z_k\| < \varepsilon \Rightarrow X^{**}$ сепараб.

$X^{**} = (X^*)^* \Rightarrow X^*$ сепараб., т.е. $\exists \tilde{x}_n^*$ - счетн., всюду плотное в X^* мн-во.

Рассм. сферу $\|\tilde{x}^*\| = 1$ в X^*.

$x_n^* = \dfrac{\tilde{x}_n^*}{\|\tilde{x}_n^*\|}$ - счетн., всюду плотн. мн-во на единичн. сфере, $\|x^*\| = 1$, $\|x_n^*\| = 1$.

Берем $\forall x_n \in X$. $\exists \|x_n\| \leq c \ \forall n$.

1) Рассм. $|x_1^*(x_n)| \le \|x_1^*\| \|x_n\| \le C \|x_1^*\| = C$
$\Rightarrow$ числ. посл-ть $x_1^*(x_n)$ огр. $\Rightarrow$ можно выбрать сх-ся подпосл. $x_1^*(x_{1n})$.

2) $x_2^*(x_{1n})$, $\|x_2^*(x_{1n})\| \le \|x_2^*\| \|x_{1n}\| \le C$
$\Rightarrow \exists$ сх-ся числ. подпосл. $x_2^*(x_{2n})$:
$x_1^*(x_{2n})$, $x_2^*(x_{2n})$ сх-ся.

3) и т.д.

$\Rightarrow$ слабо сх-ся подпосл. $y_n = x_{nn}$.

$\forall x_k^*$ $x_k^*(y_n)$ сх-ся $n \to \infty$, т.к. $\forall$ fix x_k^*, начин. с нек. номера будет сх-ть

Итак, $x_k^*(y_n) = \underbrace{\tau y_n}_{A_n \text{ - опер.}}(x_k^*)$ сх-ся $\forall k$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x_k^*)$ $\forall x_k^*$, $\|x_k^*\| = 1$, x_k^* - плотн. мн-во на $\|x^*\| = 1$.

Док., что $\exists \lim$ $\forall x^*$.

$\|A_n\| = \|\tau y_n\| = \|y_n\| = \|x_{nn}\| \le C$ $\forall n$.

Th $\exists \lim A_n x$ $\forall x \in X$, X - банах. простр.
$\Leftrightarrow$ 1) $\|A_n\| \le C$
2) $\exists$ мн-во эл-тов M: $\overline{L(M)} = X$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ $\forall x \in M$.

$M = \{x_k^*\}$ $\overline{L(M)} = X^*$. x_k^* плотно на сфере $\Rightarrow$ плотно во всем пр-ве.

$\Rightarrow \exists \lim A_n x$ $\forall x \in X$ $\Rightarrow \exists \lim A_n(x^*)$ $\forall x^* \in X^*$

$A_n x^* = \tau y_n(x^*) = x^*(y_n)$

$\exists \lim x^*(y_n)$ $\forall x^* \in X^*$, y_n - слабо фунд., X рефл., сепар. $\Rightarrow y_n$ слабо сх-ся.