Список задач с решениями по функциональному анализу.

1) Пусть X – линейное нормированное пространство. Доказать, что для любых элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство $\|x\| \le \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$.

Решение:

$\forall x, y \in X$ из аксиом нормы:
$2\|x\| = \|2x\| = \|x+y+x-y\| \le \|x+y\| + \|x-y\|$, тогда:
$$\|x\| \le \frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} \le \max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$

2) Можно ли в пространстве $C^1[a,b]$ принять за норму элемента $x(t)$:

A) $max_{t\epsilon[a,b]}|x(t)|$;

B) $max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)|$;

C) $|x(b) - x(a)| + max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)|$;

D) $|x(a)| + max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)|$;

E) $\int_a^b |x(t)|dt + max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)|$;

Решение:

$\forall x(t), y(t) \in C^1[a,b]$

A) Можно, так как:

1. $\|x(t)\| = max_{t\epsilon[a,b]}|x(t)| \ge 0, \|x(t)\| = max_{t\epsilon[a,b]}|x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0 \ \forall t \in [a,b]$

2. $\|\lambda x(t)\| = max_{t\epsilon[a,b]}|\lambda x(t)| = max_{t\epsilon[a,b]}(|\lambda||x(t)|) = |\lambda| max_{t\epsilon[a,b]}|\lambda x(t)| = |\lambda|\|x(t)\|$

3. $\|x(t) + y(t)\| = max_{t\epsilon[a,b]}|x(t) + y(t)| \le max_{t\epsilon[a,b]}(|x(t)| + |y(t)|) \le max_{t\epsilon[a,b]}|x(t)| + max_{t\epsilon[a,b]}|y(t)| = \|x(t)\| + \|y(t)\|$

B) Нельзя, так как не выполняется первая аксиома нормы:
$\|x(t)\| = max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| = 0 \Rightarrow x(t) = c, c$ – произвольная константа.

C) Нельзя, так как не выполняется первая аксиома нормы. Возьмем $x(t) = c \ne 0$, но тогда $\|x(t)\| = |x(b) - x(a)| + max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| = 0$.

D) Можно, так как:

1. $|x(a)| + max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| \ge 0, |x(a)| + max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| = 0 \Rightarrow |x(a)| = 0$ и $max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| = 0$. Так как $max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| = 0$, $x(t) = c, c$ – константа, но $|x(a)| = 0$, следовательно, $x(t) = 0 \ \forall t \in [a,b]$. Обратное утверждение очевидно.

2. $\|\lambda x(t)\| = |\lambda x(a)| + max_{t\epsilon[a,b]}|(\lambda x(t))'| = |\lambda||x(a)| + |\lambda| max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| = |\lambda|\|x(t)\|$;

3.

$\|x(t) + y(t)\| = |x(a) + y(a)| + max_{t\epsilon[a,b]}|x(t) + y(t)| \le |x(a)| + |y(a)| + max_{t\epsilon[a,b]}(|x(t)| + |y(t)|) \le |x(a)| + max_{t\epsilon[a,b]}|x(t)| + |y(a)| + max_{t\epsilon[a,b]}|y(t)| = \|x(t)\| + \|y(t)\|$

Е) Можно, так как:

1. $\int_a^b |x(t)|dt + max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| \ge 0$, $\int_a^b |x(t)|dt + max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| = 0$

$\to \int_a^b |x(t)|dt = 0 \Rightarrow$ $x(t) = 0\ \forall t \in [a,b]$ из непрерывности $x(t)$. Обратное утверждение очевидно.

2.

$\|\lambda x(t)\| = \int_a^b |\lambda x(t)|dt + max_{t\epsilon[a,b]}\left|(\lambda x(t))'\right| = |\lambda| \int_a^b |x(t)|dt + |\lambda| max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| = |\lambda|\|x(t)\|$;

3.

$\|x(t) + y(t)\| = \int_a^b |x(t) + y(t)|dt + max_{t\epsilon[a,b]}\left|(x(t) + y(t))'\right| \le$

$\int_a^b (|x(t)| + |y(t))|dt + max_{t\epsilon[a,b]}\left|x'^{(t)} + y'^{(t)}\right| \le$

$$\le \int_a^b |x(t)|dt + max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)| + \int_a^b |y(t)|dt + max_{t\epsilon[a,b]}|y'(t)| = \|x(t)\| + \|y(t)\|;$$

3) Будет ли множество всех многочленов в пространстве $C[a,b]$

А) открытым;

В) замкнутым?

Решение:

А) Множество всех многочленов в пространстве $C[a,b]$ не является открытым, так как по теореме Фейера любую непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить средними Чезаро, которые не являются алгебраическими многочленами. Следовательно, окрестность любой точки множества содержит элемент, множеству не принадлежащий.

В) Множество всех многочленов в пространстве $C[a,b]$ не является замкнутым. Рассмотрим пример, функцию $\sin x$ можно приблизить частичными суммами ряда Тейлора, которые являются алгебраическими многочленами. Следовательно, множество всех многочленов в пространстве $C[a,b]$ не содержит всех предельных точек, значит оно не является замкнутым.

4) Доказать, что всякое конечномерное линейное многообразие в линейном нормированном пространстве есть подпространство.

Решение:

По определению линейным подпространством, принадлежащим линейному нормированному пространству, называется линейное многообразие, если оно замкнуто относительно сходимости по норме, следовательно, достаточно доказать, что в линейном нормированном пространстве X конечномерное линейное многообразие $L \subset X$ - замкнуто. Докажем от противного. Пусть $\exists \{x_n\} \in L: x_n \to x_0, x_0 \notin L$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \|x - x_0\|, x \in L$. Рассмотрим $\varphi(x) = \|x - x_0\|$, $x \in L$. Возьмем произвольный $x_1 \in L$ и рассмотрим замкнутый шар $\overline{S(\varphi(x_1), x_0)}$. Обозначим $F = L \cap S(\varphi(x_1), x_0)$. Тогда $inf_{x\in L}\varphi(x) = inf_{x\in F}\varphi(x)$. Множество F – конечномерное, замкнутое, ограниченное. Функция $\varphi(x) \in C(F)$, согласно неравенству треугольника $\exists x_* \in F\ \ \varphi(x_*) = inf_{x\in L}\varphi(x) = inf_{x\in F}\varphi(x)$. Следовательно, $\rho(x_0, L) = \|x_0 - x_*\| > 0$.Однако это противоречит предположению, что $x_n \to x_0, x_0 \notin L$. Следовательно L замкнуто и является подпространством X.

5) Пусть X – линейное нормированное пространство, $L \subset X$ – линейное многообразие, $L \neq X$. Доказать, что L не содержит никакого шара.

Решение:

Докажем от противного. Пусть $\exists x_0 \in L, \varepsilon > 0$: шар $S(x_0, \varepsilon) \subset L$. Рассмотрим $\forall x_1 \in X, x_1 \notin L$: $x_1 = (x_1 - x_0) + x_0$. Возьмем $x_1 - x_0 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{2\|x_1 - x_0\|}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}$, где $\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \in L$ так как принадлежит шару $S(x_0, \varepsilon) \subset L$. Следовательно, $x_1 - x_0 \in L$, а значит и $x_1 \in L$. Таким образом, пришли к противоречию.

6) Образуют ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство следующие множества функции:

A) монотонные функции

B) четные функции;

C) многочлены;

D) непрерывные кусочно-линейные функции?

Решение:

A) Не образуют, так как если рассмотреть $f(x) = e^x, g(x) = x$, то $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - x$ - не является монотонной.

B) Множество четных функций L образует линейное многообразие, так как $\forall f(x), g(x) \in L, \lambda f(x) = \lambda f(-x)$ и $f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)$. Докажем, что L – замкнуто от противного. Пусть $\exists \{x_n\} \in L: x_n \to x_0, x_0 \notin L$, тогда $\exists t_0 > 0: x(t_0) \neq x(-t_0)$, но $x_n(t_0) \to x(t_0)$ и $x_n(-t_0) \to x(t_0)$, следовательно, $x(t_0) = x(-t_0)$ – противоречие. Следовательно, множество четных функций образуют подпространство.

C) Не образуют подпространство, так как множество многочленов в пространстве $C[-1,1]$ не является замкнутым.

D) Не образуют, так как множество L непрерывных кусочно-линейных функций не является замкнутым в $C[-1,1]$. Рассмотрим $f(x) = \begin{cases} 0, x \epsilon [-1,0] \\ x^2, x \epsilon (0,1] \end{cases}$. Введем обозначения: $x_n^k = \frac{k}{2^n}, f_n^k = f(x_n^k), k = 0, \dots, 2^n$. Рассмотрим последовательность функций: $f_n(x) = \begin{cases} f_n^k + (x - x_n^k) \cdot \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{x_n^{k+1} - x_n^k}, x \epsilon [x_n^k, x_n^{k+1}] \\ 0, x \epsilon [-1,0] \end{cases}$. Покажем, что $f_n(x) \to f(x)$. Рассмотрим $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x)$, $\varphi_n(x) \in C^1[x_n^k, x_n^{k+1}], k = 0, \dots, 2^n - 1$. $\varphi_n'(x) = \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{x_n^{k+1} - x_n^k} - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{x_n^{k+1} - x_n^k} \Leftrightarrow x = \frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2}$. Следовательно, $\max_{x \epsilon [x_n^k, x_n^{k+1}]} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2}\right) = \frac{1}{2^{2(n+1)}}$. Таким образом, $\max_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{k=0,\dots,2^n-1} \frac{1}{2^{2(n+1)}} = \frac{1}{2^{2(n+1)}} \to 0, n \to \infty$. Таким образом, L не является замкнутым.

7) Образуют ли в пространстве C [-1, 1] подпространство следующие множества функций:

A) многочлены степени ≤k;
B) непрерывно дифференцируемые функции;
C) непрерывные функции с ограниченной вариацией;
D) функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $x(0)=0$?

Решение:

A) Да. Множество многочленов степени $\leq k$ представляет собой линейное многообразие, поскольку данное множество замкнуто относительно операций сложения и умножения на число, введенных как и в пространстве непрерывных функций, то есть является линейным пространством.
Также оно является конечномерным, поскольку базис состоит из $\mathrm{k}+1$ векторов.
Следовательно, множество многочленов степени $\leq k$ является конечномерным линейным многообразием в линейном нормированном пространстве $C[-1;1]$, а значит по задаче 4 (доказать, что всякое конечномерное линейное многообразие в линейном нормированном пространстве есть подпространство) является подпространством.
B) Нет. Докажем, что множество непрерывно дифференцируемых функций незамкнуто относительно нормы пространства $C[-1;1]$.

Рассмотрим

$$f_n(x)=\begin{cases} -x, x\in\left[-1,-\frac{1}{n}\right), \\ \frac{nx^2}{2}+\frac{1}{2n}, x\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right], \\ x, x\in\left(\frac{1}{n},1\right], \end{cases}$$

где $n=1,2,\ldots$.
Покажем, что она непрерывное дифференцируема:

$$f'\left(-\frac{1}{n}-0\right)=\lim_{h\to-0}\frac{f\left(-\frac{1}{n}+h\right)-f(-\frac{1}{n})}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\frac{1}{n}-h-\frac{1}{n}}{h}=-1$$

$$f'\left(-\frac{1}{n}+0\right)=\lim_{h\to+0}\frac{f\left(-\frac{1}{n}+h\right)-f(-\frac{1}{n})}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\frac{n(-\frac{1}{n}+h)^2}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{\frac{1}{2n}-h+\frac{nh^2}{2}-\frac{1}{2n}}{h}=-1$$

Поскольку пределы равны, то производная в данной точке существует и равен -1 .
Аналогично получаем, что $\lim_{h\to-0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1$.
Итого получаем непрерывную на отрезке $[-1,1]$ производную:

$$f_n'(x)=\begin{cases} -1, x\in\left[-1,-\frac{1}{n}\right), \\ nx, x\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right], \\ 1, x\in\left(\frac{1}{n},1\right]. \end{cases}$$

Покажем, что $f_n\to|x|, n\to\infty$

$$|f_n(x)-|x||=\begin{cases}0, x\in[-1,-\frac{1}{n})\cup(\frac{1}{n},1],\\ \frac{nx^2}{2}+\frac{1}{2n}-|x|, x\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right],\end{cases}$$

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-|x||=f_n(0)=\frac{1}{2n}\to 0, n\to\infty.$$

То есть получили, что $f_n\longrightarrow|x|, n\longrightarrow\infty$, но $|x|$ не является непрерывно дифференцируемой функцией. Значит, множество непрерывно дифференцируемых функций незамкнуто, следовательно, не является подпространством.

c) Нет.

Докажем, что множество непрерывных функций с ограниченной вариацией незамкнуто относительно нормы пространства $C[-1;1]$.

Рассмотрим

$$f(x)=\begin{cases}0, x\in[-1,0),\\ \frac{2^{n+1}}{n}x-\frac{2}{n}, x\in\left(\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^{n+1}}\right],\\ -\frac{2^{n+1}}{n}x+\frac{4}{n}, x\in\left(\frac{3}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n-1}}\right].\end{cases}$$

Покажем, что $f(x)$ непрерывна. При $x\neq 0$ очевидно.

При $x=0$ надо показать, что $f(x)\to 0$:

$$\sup_{x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]} f(x)=f\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{n},$$

$$|f(x)|\leq\frac{1}{n}, x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right], \forall n\in\mathbb{N}$$

Покажем, что вариация $f(x)$ на отрезке $[-1,1]$ $\omega(f(x))=+\infty$

При суммировании вариаций по полуинтервалам $\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ получаем

$$\omega(f(x))=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\dots=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

Рассмотрим теперь последовательность функций с ограниченной вариацией:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, x\in\left(0,\frac{1}{2^n}\right),\\ f(x),\quad x\in[-1,0]\cup\left[\frac{1}{2^n},1\right],\end{cases}$$

$$\omega(f_n(x))=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<+\infty$$

Покажем, что $f_n(x)\to f(x)$ по норме:

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in\left(0,\frac{1}{2^n}\right)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{k=n,n+1,\dots}\sup_{x\in\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right)}|f_n(x)-f(x)|$$
$$=\sup_{k=n,n+1,\dots}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\to 0, n\to\infty$$

То есть получили, что $f_n(x)\longrightarrow f(x), n\longrightarrow\infty$, но $f(x)$ не является функцией с ограниченной вариацией. Значит, множество непрерывных функций с ограниченной вариацией незамкнуто, следовательно, не является подпространством.

d) Да.

Множество функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0)=0$, представляет собой линейное многообразие, поскольку данное множество замкнуто относительно

операций сложения и умножения на число, введенных как и в пространстве непрерывных функций, то есть является линейным пространством.
Докажем замкнутость.
Рассмотрим $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L$.

$$f_n(x) \to f \text{ по норме } C[-1,1] \Leftrightarrow \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0, n \to \infty \Rightarrow |f_n(0) - f(0)| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \epsilon L$$

8) Пусть X – линейное нормированное пространство, множество $A \subset X$ – фиксировано. Доказать, что $f(x) = \rho(x, A)$ – непрерывное отображение X в $\mathbb{R}$.

Решение:

$$f(x) = \rho(x, A) = \inf_{a\in A} \rho(x, a) = \inf_{a\in A} \| x - a \|$$

Опр. Если отображение f непрерывно во всех точках пространства X, то говорят, что f непрерывно на X.

Опр. Каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие некоторый элемент $y = f(x)$ из Y. Это отображение называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ таких, что

$\rho(x, x_0) < \delta$

выполнено неравенство

$\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

(здесь ρ - расстояние в X, а ρ_1 - расстояние в Y).

Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$.

Докажем, что для произвольных x_1 и x_2 таких, что $\rho(x_1, x_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ будет выполнено $\rho_1(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Пусть $\{y_n^1(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ - минимизирующая последовательность для x_1, то есть $\lim_{n\to\infty} \|x_1 - y_n^1\| = \rho(x_1, A)$.

По неравенству треугольника:

$$\|x_2 - y_n^1\| \le \|x_1 - y_n^1\| + \|x_1 - x_2\| \le \|x_1 - y_n^1\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rho(x_2, A) = \inf_{a\in A} \| x_2 - a \| \le \lim_{n\to\infty} \| x_2 - y_n^1 \| \le \lim_{n\to\infty} \| x_1 - y_n^1 \| + \frac{\varepsilon}{2} = \rho(x_1, A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Аналогично

$$\|x_1 - y_n^1\| \le \|x_2 - y_n^1\| + \|x_1 - x_2\| \le \|x_2 - y_n^1\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rho(x_1, A) = \inf_{a\in A} \| x_1 - a \| \le \lim_{n\to\infty} \| x_1 - y_n^1 \| \le \lim_{n\to\infty} \| x_2 - y_n^1 \| + \delta = \rho(x_2, A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Следовательно,

$$|\rho(x_2, A) - \rho(x_1, A)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Следовательно, отображение $f(x)$ непрерывное по определению.

9) Доказать, что всякое конечномерное линейное нормированное пространство является банаховым.

Решение:

Обозначим E – конечномерное линейное нормированное пространство.
Возьмем фундаментальную последовательность элементов
$x^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(m)} x_k \in E \ (m = 1, 2, \dots)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – базис пространства E.

Т.к. для любого $x \in E$ все его его координаты λ_k удовлетворяют неравенству $|\lambda_k| \le H\|x\|$, где H – постоянная, зависящая только от выбора базиса в E (лемма 5.3.2 из Вулих Б.З «Введение в функциональный анализ»), то

$$\left|\lambda_k^{(m)} - \lambda_k^{(p)}\right| \le H\left\|x^{(m)} - x^{(p)}\right\| \xrightarrow[m,p\to\infty]{} 0$$

Следовательно, благодаря полноте множества вещественных чисел существуют конечные $\lambda_k = \lim_{m\to\infty} \lambda_k^{(m)}$.

Лемма 5.3.1 из Вулих Б.З «Введение в функциональный анализ»:
Сходимость по координатам влечет сходимость по норме. Именно, пусть $x^{(m)} \in E\,(m = 1, 2, \dots)$ и $x^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(m)} x_k$. Если $\lambda_k^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \lambda_k$ при каждом $k = 1, 2, \dots, n$, а $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, то $x^{(m)} \longrightarrow x$.

По этой лемме получаем $x^{(m)} \to x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.. Таким образом, полнота E доказана, т.е. оно банахово.

10) Доказать, что подпространство банахова пространства является банаховым пространством.

Решение:

Рассмотрим фундаментальную последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$ в подпространстве B_1 банахова пространства B (норма в B_1 берется такая же, как и в B). Эта последовательность является фундаментальной и в B, т.к. B_1 - подпространство. Поскольку B – банахово, то $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x, x \in B$. Так как B_1 – подпространство, то по определению подпространства оно замкнуто, следовательно, $x \in B_1$.

Получили, что произвольная фундаментальная последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$ в подпространстве B_1 сходится к x, причем $x \in B_1$. Следовательно, B_1 - банахово по определению.

11) Может ли в банаховом пространстве иметь пустое пересечение последовательность непустых замкнутых вложенных множеств?

Решение:

Да, может.

Пример: банахово пространство $\mathbb{R}$ (пространство вещественных чисел) и последовательность непустых замкнутых вложенных множеств в нем:

$X_i = [i, +\infty),\ i = 0, 1, 2, \dots$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} X_{i} = \emptyset$$

12) Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых элементов x, y, z имеет место тождество Аполлония: $\| z - x \|^2 + \| z - y \|^2 = \frac{1}{2} \| x - y \|^2 + 2 \| z - \frac{x+y}{2} \|^2$.

Решение:

Преобразуем левую часть тождества, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$\| z-x \|^2+\| z-y \|^2=(z-x,z-x)+(z-y,z-y)$
$$=(z,z)-2(x,z)+(x,x)+(z,z)-2(y,z)+(y,y)$$
$$=\ 2(z,z)-2(x,z)-2(y,z)+(x,x)+(y,y)$$

Преобразуем правую часть тождества, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$$\frac{1}{2}\| x-y \|^2+2\| z-\frac{x+y}{2} \|^2=\frac{1}{2}(x-y,x-y)+2\left(z-\frac{x+y}{2},z-\frac{x+y}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(x,x)-(x,y)+\frac{1}{2}(y,y)+2(z,z)-4\left(z,\frac{x+y}{2}\right)+2\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(x,x)-(x,y)+\frac{1}{2}(y,y)+2(z,z)-2(z,x)-2(z,y)+\frac{1}{2}(x,x)+(x,y)$$
$$+\frac{1}{2}(y,y)=2(z,z)-2(x,z)-2(y,z)+(x,x)+(y,y)$$

Таким образом, в пространстве со скалярным произведением для любых элементов x,y,z тождество Аполлония имеет место.

13) Доказать, что для того чтобы элемент x гильбертового пространства H был ортогонален подпространству $L\subset H$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y\in L$ имело место неравенство $\| x \|\leq\| x-y \|$.

Решение (необходимость)

$\forall x\perp L,\forall y\in L\ \| x-y \|^2=(y-x,y-x)=(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y)=\| x \|^2+\| y \|^2\geq\| x \|$.

Решение (достаточность)

Воспользуемся теоремой Леви (H - гильбертово, L - подпространоство в нем). Разложим x указанным в ней способом: $x=y+z,y\in L,z\perp L$. По условию $\| x \|\leq\| x-h \|,\forall h\in L$. Докажем, что $y=0$.

$\| y+z \|\leq\| y+z-h \|,\forall h\in L.$ Пусть $h=y\Rightarrow\| h+z \|\leq\| z \|\Leftrightarrow(h+z,h+z)\leq(z,z)\overset{z\perp h}{\Leftrightarrow}(h,h)+(z,z)\leq(z,z)\Rightarrow\Rightarrow(h,h)=0\Rightarrow h=0\Rightarrow y=0.$

14) Доказать, что при фиксированном натуральном n множество $M=x\in l_2,x=(x_1,x_2,):\sum_{k=1}^{n}x_k=0$ является подпространством пространства l_2. Описать такое подпространство N, что $l_2=M\oplus\ N$.

Решение

Покажем, что M является линейным многообразием $\forall\alpha,\beta\in R,\forall x,y\in M\qquad z=\alpha x+\beta y=(z_1,z_2,).\sum_{k=1}^{n}z_k=\alpha\sum_{k=1}^{n}x_k+\beta\sum_{k=1}^{n}y_k=0\quad\Rightarrow\quad z\in M$

Построим разложение $l_2=M\oplus\ N$. Пространство l_2 является гильбертовым, M является подпространством в нем $\Rightarrow l_2=M\oplus\ M^{\perp}$ (по следствию из теоремы Леви). Построим $M^{\perp}$.

1. Покажем, что $\forall x\in M^{\perp}\quad x^i=0,\forall i>n$

Действительно, $y=(\underbrace{0,,0}_{i-1},1,0,)\in M\Rightarrow(x,y)=0.(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}x^iy^i=x^i\Rightarrow x^i=0;$

2. Покажем, что $\forall x \in M^{\perp} \quad x^i = x^j, \forall i, j \leq n$

Действительно,
$y = (0,,0,\underbrace{1}_{i},0,,0,\underbrace{-1}_{j},0,) \in M \Rightarrow (x,y) = 0. (x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} x^i y^i = x^i - x^j \Rightarrow x^i = x^j;$

Итак, мы показали, что необходимым условием того, что $x \in M^{\perp}$ является представление x в виде $x = (\underbrace{a,a,a,,a}_{n},0,0,)$.

Очевидно, что это является и достаточным условием, так как

$$\forall y \in M \quad (x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k * y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k * a = a * \sum_{k=1}^{n} y_k = 0$$

Итак, искомое пространство L является линейной оболочкой вектора $e_n = (\underbrace{1,1,,1}_{n},0,)$.

15) В пространстве l_2 рассмотрим последовательность $x_k = \left(1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{3k}},\right), \quad k \in N$. Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в пространстве l_2.

Решение

$M = L(\{x_k\})$.

Докажем, что лишь нулевой элемент пространства l_2 ортогонален всем элементам множества M (от противного).
Пусть $\exists f = (f^1, f^2,) \neq 0 \in l_2, f \perp x_k \forall k \in N, \exists p \in N, p > 0 : f^1 = f^2 = f^{p-1} = 0, f^p \neq 0, f \in l_2 \Rightarrow$
$\exists C > 0: |f^n| \leq C \forall n \in N \Rightarrow \forall k \in N \left|\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{f^n}{(2^k)^n}\right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{C}{(2^k)^n} = C \frac{\frac{1}{2^{k(p+1)}}}{1 - \frac{1}{2^k}} \leq \{\forall k \in N\} \leq$
$\frac{2C}{2^{k(p+1)}} 0 = (f, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{2^{kn}} \Rightarrow \{f^1 = f^2 == f^{p-1} = 0\} \Rightarrow \frac{f^p}{2^{kp}} = -\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{f^n}{2^{nk}}$.
Получаем

$\left|\frac{f^p}{2^{kp}}\right| \leq \frac{2C}{2^{k(p+1)}} \quad \forall k \in N \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{2C}{2^{k(p+1)}}}{\left|\frac{f^p}{2^{kp}}\right|} \geq 1 \; \frac{\frac{2C}{2^{k(p+1)}}}{\left|\frac{f^p}{2^{kp}}\right|} = \frac{2C}{|f^p 2^k|} \to 0, k \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что изначальное утверждение было неверно. Итак, мы доказали, что $(\forall k \in N, f \perp x_k) \Rightarrow f = 0$. Так как l_2 является гильбертовым, то из доказанного выше утверждения следует, что M -- всюду плотное множество.

16) Доказать, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найти их нормы:

1. $A: C^1[a,b] \to C[a,b], Ax(t) = \frac{dx}{dt}$
2. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1], Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau) d\tau$

Решение для $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$

В силу свойств производной получаем

$$\forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y \in C^1[a,b] A(\alpha x + \beta y) = \frac{d}{dt}(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha \frac{dx(t)}{dt} + \beta \frac{dy(t)}{dt} = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Получаем, что оператор A линеен.

Докажем ограниченность оператора A. В силе линейности оператора достаточно доказать, что оператор переводит замкнутый единичный шар с центром в нуле в пространстве $C^1[a,b]$ в ограниченное множество в пространстве $C[a,b]$. $\forall x \in \overline{S_1(0)}\ \| x \|_{C^1} = \max_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max_{t\in[0,1]}|x'(t)| \le 1 \Rightarrow \| Ax \|_C = \max_{t\in[0,1]}|x'(t)| \le 1$.

Итак, мы получили, что A -- линейный и ограниченный. Найдем его норму. Ранее было полученно, что $\| A| \ \le 1$. Покажем, что $\| A \| = 1$. Рассмотрим последовательность функций $\left\{x_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n+1}\right\}$

$\| x_n \|_{C^1} = \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{\sin(nt)}{n+1}\right| + \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{n\cos(nt)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1.$ $\| Ax_n \|_C = \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{n\cos(nt)}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1, n \to \infty.$

Итак, мы получили максимизирующую последовательность элементов из $C^1[a,b]$, показывающую, что $\| A \| = 1$.

Решение для $Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)d\tau$

Докажем линейность оператора A. В силу линейности интеграла Лебега получаем. $\forall \alpha,\beta \in R, \forall x,y \in C^1[a,b] A(\alpha x + \beta y) = t\int_0^1 \big(\alpha x(\tau) + \beta y(t)\big)d\tau = \alpha t \int_0^1 x(\tau)d\tau + \beta t\int_0^1 y(\tau)d\tau = \alpha Ax + \beta Ay.$

Получаем, что оператор A линеен.

Докажем ограниченность оператора A. В силе линейности оператора достаточно доказать, что оператор переводит замкнутый единичный шар с центром в нуле в пространстве $L_2[0,1]$ в ограниченное множество в пространстве $L_2[0,1]$. $\forall x \in \overline{S_1(0)}\ \| Ax(t) \| = \left(\int_0^1 \left(t\int_0^1 x(\tau)d\tau\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 t^2 dt\left(\int_0^1 x(\tau)d\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\int_0^1 x(\tau)d\tau\right| \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int_0^1 x^2(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 1^2 d\tau\right)}_{\text{неравенство Коши–Буняковского}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$

Итак, мы получили, что A -- линейный и ограниченный. Найдем его норму. Ранее было полученно, что $\| A| \ \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. Покажем, что $\| A \| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Возьмем $x(t) = 1,\ \ t \in [0,1]$. Тогда получаем

$$\| x \| = 1, \quad \| Ax \| = \left(\int_0^1 1^2 d\tau\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Так как мы показали, что $\forall x \in \overline{S_1(0)} \quad \| Ax| \ \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\exists x \in \overline{S_1(0)}: \| x \| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \| A \| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

17) Пусть X и Y -- линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ -- линейный оператор с областью изменения $R(A)$.

1. Доказать, что $R(A)$ -- линейное многообразие в Y.
2. Всегда ли $R(A)$ -- подпространство в Y.

Решение (линейное многообразие)

$$R(A) = \{y \in Y : \exists x \in X : Ax = y\}$$

Для доказательства того, что $R(A)$ является линенйным многообразием необходимо доказать, что $\forall \alpha, \beta \in R, \forall y_1, y_2 \in R(A) \quad \alpha y_1 + \beta y_2 \in R(A). y_1 \in R(A) \Rightarrow \exists x_1 \in X : Ax_1 = y_1 y_2 \in R(A) \Rightarrow \exists x_2 \in X : Ax_2 = y_2 A\alpha x_1 = \alpha Ax_1, \quad A\beta x_2 = \beta Ax_2$ из линейности оператора $A. A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad \alpha x_1 + \beta x_2 \in X$ в силу линейности X.

Таким образом, получаем что $y = \alpha y_1 + \beta y_2 \in R(A) \Rightarrow R(A)$ является линенйным многообразием.

Решение (подпространство)

Докажем, что $R(A)$ не всегда является подпространством. Для этого построим линейный оператор A, такой, что $R(A)$ не является замкнутым множеством. $A: C^2[-1,1] \to C[-1,1], Af(t) = \frac{df}{dx}$ Рассмотрим последовательность непрерывно дифференцируемых функций

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ x & x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \quad g_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(t)dt \Rightarrow g_n(x) \in C^2[-1,1], Ag_n = f_n.$$

Покажем, $\div$ то $f_n(x) \to f(x) = |x|$ по норме. $\left|f_n(x) - |x|\right| = f_n(x) - |x|$

$$= \begin{cases} 0 & x \in \left[-1, \frac{-1}{n}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, 1\right] \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} - |x| & x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \end{cases} \quad \max_{x \in [-1,1]} \left|f_n(x) - |x|\right| = f_n(0) = \frac{1}{2n} \to 0, n$$

$$\to \infty \Rightarrow f_n(x) \to f(x) = |x| \text{по норме}. f(x) = |x| \notin C^1[-1,1].$$

Но $R(A) \in C^1[-1,1] \Rightarrow R(A) \neq \overline{R(A)}$. Таким образом, получаем что $R(A)$ не всегда есть подпространство.

18) Доказать, что в банаховом пространстве X для любого $A \in L(X \to X)$ определены операторы $\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}, \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$.

Решение

По теореме 3 § 7 пространство $L(X \to X$ линенйных непрерывных операторов в банаховом пространстве само является банаховым, то есть любая фундаментальная последовательность элементов из этого пространства сходится к элементу этого же пространства.

Рассмотрим операторную последовательность $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2K+1)!}$. Так как $A \in L(X \to X)$, то A является линейным непрерывным оператором. Докажем, что A_n так же является линенйным непрерывным оператором.

· A_n является непрерывным как композиция конечного числа непрерывных операторов.

.

$\forall\alpha,\beta\in R,\forall x,y\in X. A_n(\alpha x+\beta y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k A^{2k+1}(\alpha x+\beta y)}{(2k+1)!}=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k A^{2k+1}x}{(2k+1)!}+$
$\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k A^{2k+1}y}{(2k+1)!}=\alpha A_n x+\beta A_n y.$

Итак, A_n -- линейный непрерывный оператор для любого n. Докажем фундаментальность последовательности $\{A_n\}$.

$\| A_{n+p}-A_n \|=\left\|\sum_{k=n}^{n+p}\frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\|\le\{\| A+B \|\le\| A \|+\| B \|\ \forall A,B\in L(X\to X)\}\le$
$\sum_{k=n}^{n+p}\frac{(-1)^k\|A^{2k+1}\|}{(2k+1)!}\le\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\|A^k\|}{(k)!}\to 0, n\to\infty.$

Последняя сумма представляет собой хвост сходящегося ряда $e^{\|A\|}$.

Итак последовательность $\{A_n\}$ является фундаментальной. Следовательно она сходится к своему пределу, которые принадлежит этому же пространству. Следовательно в пространстве X определен оператор $\sin A$ являющийся пределом операторной последовательности $\{A_n\}$.

Для второго случае ($\cos$) все полностью аналогично.

19) Пусть X – банахово пространство, $A\in L(X\to X)$. Доказать, что $\left\|e^A\right\|\le e^{\|A\|}$. Найти e^I, где I – тождественный оператор.

Решение:

По определению, $e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!},\forall A\in L(X\to X)$. */*в пдф-ке в числителе была норма A*/*

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right\|\le\{\forall n\in N\}\le\left\|\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\right\|+\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right\|\le\sum_{k=0}^{n}\frac{\|A\|^k}{k!}+\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right\|\le\sum_{k=0}^{n}\frac{\|A\|^k}{k!},\text{ т. к. }\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right\|\longrightarrow 0,$$

что следует из сходимости ряда в смысле нормы в $L(X\to X)$.

Утверждение доказано.

Найдем e^I по определению:

$$(e^I)x=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I^k}{k!})x=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I}{k!})x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Ix}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x}{k!}=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=ex,\forall x\in X\Rightarrow e^I=eI.$$

20) Рассмотрим оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$. $Ax(t)=\frac{d^2x}{dt^2}-x(t)$ с областью определения $D(A)$ – линейное многообразие дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0)=x'(0)=0$. Найти A^{-1} и доказать, что он ограничен.

Решение:

Обозначим $x_1=dx/dt$, $x_2=dx_1/dt$. Тогда задача примет вид:

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2, \\ dx_2/dt = -x_1 + y(t), \\ x_1(0) = x_2(0) = 0; \end{cases}$$

Или $\dfrac{dX}{dt} = BX + Y$, где $X = (x_1, x_2)$, $Y = (0, y(t))$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

По теореме Каратеодори */*нафига тут говорить об этой теореме?*/*

(задача Коши

$$\begin{cases} dX/dt = BX(t) + Y(t), t \in [t_0, t_1], \\ X(0) = X_0; \end{cases}$$

где $Y(t)$ интегрируема по Лебегу, имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных функций и это решение дается формулой $X(t) = e^{(t-t_0)B}(X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-sB} Y(s) ds)$)

решение задачи выглядит так: $X(t) = e^{tB}(X_0 + \int\limits_0^t e^{-sB} Y(s) ds)$,

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \; e^{-sB} = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}.$$

Тогда $x(t) = x_1(t) = -(\cos(t)\int\limits_0^t y(s)\sin(s)ds + \sin(t)\int\limits_0^t y(s)\cos(s)ds)$.

Заметим, что

$$\|x(t)\| = \left\| -(\cos(t)\int\limits_0^t y(s)\sin(s)ds + \sin(t)\int\limits_0^t y(s)\cos(s)ds) \right\| \le$$

$$\le \|y(t)\| \left(\left| \cos(t)\int\limits_0^t \sin(s)ds \right| + \left| \sin(t)\int\limits_0^t \cos(s)ds \right| \right) \le 4\|y(t)\|$$

т. е. обратный оператор ограничен.

21) Рассмотрим оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{-|s-t|} x(s) ds$. Существует ли оператор A^{-1}?

Решение !!!неверное!!! опечтка в условии:

По определению $\exists A^{-1}$, если $\exists!$ решение задачи $Ax(t) = y(t)$.

Пусть $N(A) = \{x \in C[0,1] : Ax = 0\}$.

$$0 = \int_0^t e^{-|s-t|}x(s)ds = \{0 \le s \le t\} = \int_0^t e^{s-t}x(s)ds = e^{-t}\int_0^t e^s x(s)ds \Rightarrow$$

$$0 = \int_0^t e^s x(s)ds \Rightarrow$$

$0 = e^s x(s) \forall s \in [0,1] \Rightarrow$

$0 = x(s) \forall s \in [0,1] \Rightarrow$

$N(A) = \{\theta\}$.

Пусть $\exists x_1(t), x_2(t) \in C[0,1] : Ax_1(t) = Ax_2(t) = y(t)$.

Тогда $Ax_1(t) - Ax_2(t) = 0$,

$A(x_1(t) - x_2(t)) = 0$,

$x_1(t) - x_2(t) = 0$,

$x_1(t) = x_2(t)$.

22) Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$. Пусть $N(A)$ — ядро оператора A.

а) Доказать, что $N(A) = \{\theta\}$, так что при любом $y \in C[0,1]$ уравнение $Ax = y$ не может иметь более одного решения.

в) Найти оператор A^{-1} и доказать, что он ограничен.

Решение:

А) /*решил я сам, так что возможны баги*/

$N(A) = \{x \in C[0,1] : Ax = 0\}$

$$0 = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t) \Rightarrow x(t) = -\int_0^t x(\tau)d\tau \Rightarrow x'(t) = -x(t) \Rightarrow x(t) = ce^{-t}$$

$$ce^{-t} = \int_0^t ce^{-\tau}d\tau \Rightarrow \int_0^t ce^{-\tau}d\tau = c(-e^{-t}+1) \text{ и } ce^{-t} = c(-e^{-t}+1) \Rightarrow c(1-2e^{-t}) = 0$$

Следовательно, $x(t) = 0$ и $N(A) = \{\theta\}$.

Б) Пусть $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$.

Тогда $y(t) = u(t) + u'(t)$, где $u(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$.

Решаем дифференциальное уравнение при фиксированном $y(t)$:

$$u(t) = c(t)e^{-t},\ c'(t) = e^t y(t) \ \Rightarrow \ c(t) = \int\limits_0^t e^\tau y(\tau)d\tau \ .$$

$$A^{-1}y(t) = x(t) = u'(t) = (c(t)e^{-t})' = \left(e^{-t}\int\limits_0^t e^\tau y(\tau)d\tau \right)' = y(t) - e^{-t}\int\limits_0^t e^\tau y(\tau)d\tau \ .$$

$\left\|A^{-1}y(t)\right\| = \left\|y(t) - e^{-t}\int\limits_0^t e^\tau y(\tau)d\tau\right\| \le \|y\| + \left\|e^{-t}\int\limits_0^t e^\tau y(\tau)d\tau\right\| \le 2\|y\|$, т.е. обратный оператор ограничен.

23) Доказать, что оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 e^{s+t}x(s)ds$ имеет ограниченный обратный, и найти A^{-1}.

Решение:

Пусть $y(t) = \int\limits_0^1 e^{s+t}x(s)ds + x(t)$, или $x(t) = y(t) - e^t\int\limits_0^1 e^s x(s)ds$.

Обозначим $D[x] \equiv \int\limits_0^1 e^s x(s)ds$.

Тогда $x(t) = y(t) - e^t D[x]$

Нужно выразить функционал $D[x]$ через y . Умножим последнее уравнение на e^t и проинтегрируйте по t от 0 до 1.

Получим $D[x] = \int\limits_0^1 e^t y(t)dt - D[x]\int\limits_0^1 e^{2t}dt$.

Отсюда $D[x] = \dfrac{\int\limits_0^1 e^t y(t)dt}{1 + \int\limits_0^1 e^{2t}dt}$

Окончательно, $A^{-1}y(t) = x(t) = y(t) - \dfrac{e^t\int\limits_0^1 e^s y(s)ds}{1 + \int\limits_0^1 e^{2s}ds}$.

$$\left\|A^{-1}y(t)\right\| = \left\|y(t) - \frac{e^t\int\limits_0^1 e^s y(s)ds}{1+\int\limits_0^1 e^{2s}ds}\right\| \le \|y\| + \left\|\frac{e^t\int\limits_0^1 e^s y(s)ds}{1+\int\limits_0^1 e^{2s}ds}\right\| \le 2\|y\|$$, т.е. обратный оператор ограничен.

/*в случае если в условии верхний предел интегрирования: t, а не 1*/

Пусть $y(t) = \int\limits_0^t e^{s+t}x(s)ds + x(t)$.

Тогда $y(t)e^{-t} = u(t) + u'(t)e^{-2t}$, где $u(t) = \int\limits_0^t e^s x(s)ds$.

Решаем дифференциальное уравнение при фиксированном $y(t)$:

$u(t) = c(t)e^{-e^{-2t}}$, $c'(t) = e^{-e^{-2t}}y(t) \Rightarrow \quad c(t) = \int\limits_0^t e^{-e^{-2s}}y(s)ds$.

$$A^{-1}y(t) = x(t) = u'(t)e^{-t} = (c(t)e^{-e^{-2t}})' = \left(e^{-e^{-2t}}\int\limits_0^t e^{-e^{-2s}}y(s)ds\right)' = y(t) + 2e^{-2t}e^{-e^{-2t}}\int\limits_0^t e^{-e^{-2s}}y(s)ds \cdot$$

$$\left\|A^{-1}y(t)\right\| = \left\|y(t) + 2e^{-2t}e^{-e^{-2t}}\int\limits_0^t e^{-e^{-2s}}y(s)ds\right\| \le \|y\| + \|y\|*1 = 2\|y\|$$, т.е. обратный оператор ограничен.

24) Пусть X — комплексное линейное пространство, f — определенный на X и не равный тождественно нулю линейный функционал. Доказать, что область значений f есть все C.

Решение:

Нужно доказать, что $\forall c \in C\ \exists x \in X : f(x) = c$.

Известно, что $\dim C = 2$. Если доказать, что $R(f)$ — область изменения линейного функционала f — содержит 2 линейно-независимых вектора, то с учетом линейности функционала мы получим все C, так как $C = \{y = ae_1 + be_2, \forall a,b \in R; e_1,e_2 - \text{базис в } C\}$.

Пусть $z: f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = x + iy$. Так как X — комплексное линейное пространство, то $ix \in X \Rightarrow f(ix) = ix - y \in R(f)$. */*для чего тут вводилось z вообще?*/*

Докажем линейную независимость $f(x)$ и $f(ix)$:

$a(x+iy) + b(ix - y) = 0 \Leftrightarrow ax - by = ay + bx = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow f(x)$ и $f(ix)$ линейно независимы.

25) Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными непрерывными и найти их нормы:

А) $f(x) = \langle x,f \rangle = 2[x(1) - x(0)]$;

В) $f(x) = \langle x,f \rangle = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt$.

Решение:

А) Для доказательства линейности рассмотрим аксиомы:

$f(\alpha x) = 2[\alpha x(1) - \alpha x(0)] = 2\alpha[x(1) - x(0)] = \alpha f(x)$

$$f(x+y) = 2\big[\big(x(1)+y(1)\big) - \big(x(0) - y(0)\big)\big] = 2[x(1) - x(0)] + 2[y(1) - y(0)]$$
$$= f(x) + f(y)$$

Линейный оператор – непрерывный $\Leftrightarrow$ он – ограниченный (§7, Теорема 2).

Оператор A – ограниченный, если $\exists M: \forall x \ \|Ax\|_Y \le M\|x\|_X$.

Норма оператора A :

$$\|A\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Покажем, что оператор ограниченный:

$\|f(x)\| = 2|x(1) - x(0)| \le 2(|x(1)| + |x(0)|) \le 4\|x\|$

Значит, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \le 4 \Longrightarrow f$ - ограниченный и непрерывный.

Если найти функцию $x_0(t)$, на которой $\|f\| = 4$, то $\|f\|$ равна 4.

Рассмотрим $x_0(t) = \cos\big(\pi(t+1)\big)$. $x_0(0) = -1, x_0(1) = 1 \Rightarrow f(x_0) = 4$, а $\|x_0(t)\| = 1$.

Значит, $\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = 4$.

В) Докажем линейность:

$$f(\alpha x) = \int_{-1}^{0} \alpha x(t)dt - \int_{0}^{1} \alpha x(t)dt = \alpha \int_{-1}^{0} x(t)dt - \alpha \int_{0}^{1} x(t)dt = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \int_{-1}^{0} (x(t) + y(t))dt - \int_{0}^{1} (x(t) + y(t))dt$$
$$= \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt + \int_{-1}^{0} y(t)dt - \int_{0}^{1} y(t)dt = f(x) + f(y)$$

Покажем, что функционал – ограниченный:

$\|f(x)\| = \left|\int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt\right| \le \int_{-1}^{0} |x(t)|dt + \int_{0}^{1} |x(t)|dt \le \|x\| \left(\int_{-1}^{0} dt + \int_{0}^{1} dt\right) = 2\|x\|$

Значит, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \le 2 \Longrightarrow f$ - ограниченный и непрерывный.

f - непрерывный, значит если $x_n \xrightarrow{X} x_0$, то $Ax_n \xrightarrow{Y} Ax_0$. Если найти последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0 , на котором $\|f\|$ достигает 2, то $\|f\|$ равна 2.

Рассмотрим:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t < \dfrac{-1}{n} \\ -\sin\dfrac{\pi n t}{2}, & t \in \left[\dfrac{-1}{n}, \dfrac{1}{n}\right] \\ -1, & t > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Функция $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ будет равна:

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t > 0 \end{cases}$$

Значит, $\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = 2$

26) Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными непрерывными и найти их нормы:

А) $f(x) = \langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k)$;

В) $f(x) = \langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)dt - x(0)$;

где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $t_k \in [-1,1]$.

Решение:

А) Для доказательства линейности рассмотрим аксиомы:

$$f(\beta x) = \sum_{k=1}^{n} \beta\alpha_k x(t_k) = \beta \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k) = \beta \mathrm{a}(x)$$

$$f(x+y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\big(x(t_k) + y(t_k)\big) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y(t_k) = f(x) + f(y)$$

Линейный оператор – непрерывный $\Leftrightarrow$ он – ограниченный (§7, Теорема 2).

Оператор A – ограниченный, если $\exists M: \forall x\ \|Ax\|_Y \le M\|x\|_X$.

Норма оператора A:

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Покажем, что оператор ограниченный:

$$\|f(x)\| = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k)\right| \le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||x(t_k)| \le \|x(t)\| \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$$

Значит, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \le \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k| \Rightarrow f$ - ограниченный и непрерывный.

Если найти функцию $x_0(t)$, на которой $\|f\| = \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|$, то $\|f\|$ равна $\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|$.

Рассмотрим:

$$x_0(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}(\alpha_k), & t = t_k \\ \text{по непрерывности}, & t \neq t_k \end{cases}$$

Заметим, что $\|x_0(t)\| = 1$.

Значит, $\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|$

В) Докажем линейность функционала:

$$f(\alpha x) = \int_{-1}^{1} \alpha x(t)dt - \alpha x(0) = \alpha\left(\int_{-1}^{1} x(t)dt - x(0)\right) = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \int_{-1}^{1} \big(x(t) + y(t)\big)dt - \big(x(0) + y(0)\big) = \int_{-1}^{1} x(t)dt - x(0) + \int_{-1}^{1} y(t)dt - y(0)$$
$$= f(x) + f(y)$$

Покажем ограниченность функционала:

$$\|f(x)\| = \left|\int_{-1}^{1} x(t)dt - x(0)\right| \le \left|\int_{-1}^{1} x(t)dt\right| + |x(0)| \le \int_{-1}^{1} |x(t)|dt + |x(0)|$$
$$\le \|x(t)\|\left(\int_{-1}^{1} dt + 1\right) = 3\|x(t)\|$$

Значит, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \le 3 \Rightarrow f$ - ограниченный и непрерывный.

f - непрерывный, значит если $x_n \xrightarrow{X} x_0$, то $Ax_n \xrightarrow{Y} Ax_0$. Если найти последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0, на котором $\|f\|$ достигает 3, то $\|f\|$ равна 3.

Рассмотрим:

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & t<\frac{-1}{n}\\ -\cos\pi nt, & t\in\left[\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right]\\ 1, & t>\frac{1}{n}\end{cases}$$

Функция $x_0=\lim_{n\to\infty}x_n$ будет равна:

$$x_0(t)=\begin{cases}1, & t<0\\ -1, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

Заметим, что $\|x_n(t)\|=1$.

Значит, $\|f\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|}=3$

27) Будут ли ограниченными в пространстве $C[0,1]$ следующие линейные функционалы:

А) $\langle x,f\rangle=\int_0^1 x(t^2)dt$;

В) $\langle x,f\rangle=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t^n)dt$?

Решение:

А)

$\|\langle x,f\rangle\|=\left|\int_0^1 x(t^2)dt\right|=\int_0^1\frac{x(t^2)}{2t}d(t^2)=\{u=t^2\}=\int_0^1\frac{x(u)}{2\sqrt{u}}du\leq\|x(u)\|\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{u}}du=$ $\|x(u)\|\lim_{\delta\to0}\left(\int_\delta^1\frac{1}{2\sqrt{u}}du\right)=\|x(u)\|\lim_{\delta\to0}\left(\sqrt{u}\mid_\delta^1\right)=\|x(u)\|$

В)

$\|x,f\|=\left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t^n)\,dt\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x(t^n)}{nt^{n-1}}d(t^n)\right|=\{u=t^n\}=$ $\left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x(u)}{nu^{\frac{n-1}{n}}}du\right|\leq\|x(u)\|\left|\lim_{n\to\infty}\lim_{\delta\to0}\int_\delta^1\frac{1}{nu^{\frac{n-1}{n}}}du\right|=$ $\|x(u)\|\left|\lim_{n\to\infty}\lim_{\delta\to0}\left(u^{\frac{1}{n}}\mid_\delta^1\right)\right|=\|x(u)\|$

28) Доказать, что следующие функционалы являются линейными непрерывными и найти их нормы:

А) $\langle x,f\rangle=\int_{-1}^1 tx(t)dt$, $x\in C^1[-1,1]$;

В) $\langle x,f\rangle=\int_{-1}^1 tx(t)dt$, $x\in L[-1,1]$.

Решение:

А) Для доказательства линейности рассмотрим аксиомы:

$$f(\alpha x)=\int_{-1}^1 t\alpha x(t)dt=\alpha\int_{-1}^1 tx(t)dt=\alpha f(x)$$

$$f(x+y)=\int_{-1}^1 t\big(x(t)+y(t)\big)dt=\int_{-1}^1 tx(t)dt+\int_{-1}^1 ty(t)dt=f(x)+f(y)$$

Линейный оператор – непрерывный $\Leftrightarrow$ он – ограниченный (§7, Теорема 2).

Оператор A – ограниченный, если $\exists M:\forall x\ \|Ax\|_Y\leq M\|x\|_X$.

Норма оператора A :

$$\|A\|\overset{\text{def}}{=}\sup_{x\neq0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Покажем, что оператор ограниченный:

$$\|f(x)\|=\left|\int_{-1}^1 tx(t)dt\right|\leq\int_{-1}^1|t||x(t)|dt\leq\|x(t)\|\int_{-1}^1|t|dt=\|x(t)\|\left(\int_{-1}^0 -tdt+\int_0^1 tdt\right)$$
$$=\|x(t)\|$$

Значит, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\leq1\Rightarrow f$ - ограниченный и непрерывный.

f - непрерывный, значит если $x_n \xrightarrow{X} x_0$, то $Ax_n \xrightarrow{Y} Ax_0$. Если найти последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0, на котором $\|f\|$ достигает 1, то $\|f\|$ равна 1.

Рассмотрим:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t < \frac{-1}{n} \\ \sin\frac{\pi n t}{2}, t \in \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 1, & t > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Функция $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ будет равна:

$$x_0(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Заметим, что $\|x_n(t)\| = 1$.

Значит, $\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1$.

в) Докажем линейность функционала:

$$f(\alpha x) = \int_{-1}^{1} t\alpha x(t)dt = \alpha \int_{-1}^{1} tx(t)dt = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \int_{-1}^{1} t\big(x(t) + y(t)\big)dt = \int_{-1}^{1} tx(t)dt + \int_{-1}^{1} ty(t)dt = f(x) + f(y)$$

Покажем ограниченность функционала:

$$\|f(x)\| = \left|\int_{-1}^{1} tx(t)dt\right| \le \int_{-1}^{1} |t||x(t)|dt \le \left(\max_{t\in[-1,1]}|t|\right)\int_{-1}^{1} x(t)dt = \|x(t)\| \max_{t\in[-1,1]}|t| = \|x(t)\|$$

f - непрерывный, значит если $x_n \xrightarrow{X} x_0$, то $Ax_n \xrightarrow{Y} Ax_0$. Если найти последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0, на котором $\|f\|$ достигает 1, то $\|f\|$ равна 1.

Рассмотрим:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & x < 1 - \frac{1}{n} \\ n, & x \ge 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$f(x_n) = \int_{-1}^{1} tx_n(t)dt = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} tndt = \left(\frac{nt^2}{2}\right)\Big|_{1-\frac{1}{n}}^{1} = \frac{n}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Заметим, что $\|x_n\| = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} n\,dt = 1$.

Значит, $\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1$.

29) Доказать, что функционал $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$ является линейным непрерывным, и найти его норму.

Решение:

Для доказательства линейности рассмотрим аксиомы:

$$f(\alpha x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha x_k}{k} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} = \alpha f(x) f(x+y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_k + y_k)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} = f(x) + f(y)$$

Линейный оператор – непрерывный $\Leftrightarrow$ он – ограниченный (§7, Теорема 2).

Оператор A – ограниченный, если $\exists M: \forall x\ \|Ax\|_Y \le M\|x\|_X$.

Норма оператора A:

$$\|A\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Покажем, что оператор ограниченный:

$$\|f(x)\| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| = \|x\|$$

Значит, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow f$ - ограниченный и непрерывный.

Если найти последовательность x_0, на которой $\|f\| = 1$, то $\|f\|$ равна 1.

Рассмотрим $x_0 = (1, 0, 0, \dots)$. Заметим, что $\|x_0\| = 1$.

Значит, $\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1$.

30) Для $x(t) \in C[-1,1]$ положим $\langle x, f\rangle = \frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int_{-1}^{1} tx(t)dt$. Доказать, что f – ограниченный линейный функционал.

Решение:

Для доказательства линейности рассмотрим аксиомы:

$$f(\alpha x) = \frac{\alpha x(-1) + \alpha x(1)}{2} + \int_{-1}^{1} t\alpha x(t)dt = \alpha\left(\frac{x(-1)+x(1)}{2}\right) + \alpha\int_{-1}^{1} tx(t)dt = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \frac{x(-1)+y(-1)+x(1)+y(1)}{2} + \int_{-1}^{1} t(x(t)+y(t))dt$$

$$= \frac{x(-1)+x(1)}{2} + \frac{y(-1)+y(1)}{2} + \int_{-1}^{1} tx(t)dt + \int_{-1}^{1} ty(t)dt = f(x) + f(y)$$

Оператор A – ограниченный, если $\exists M: \forall x\ \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$.

Докажем ограниченность функционала:

$$\|f(x)\| = \left|\frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int_{-1}^{1} tx(t)dt\right| \leq \frac{|x(-1)|+|x(1)|}{2} + \int_{-1}^{1}|t||x(t)|dt$$

$$\leq \|x(t)\|\left(1 + \int_{-1}^{1}|t|dt\right) = \|x(t)\|\left(1 + \int_{-1}^{0} -tdt + \int_{0}^{1} tdt\right) = 2\|x(t)\|$$

31). Найти сопряженный к оператору $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если

А). $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

В). $Ax(t) = \int_0^1 sx(s)ds.$

Решение.

А). Положим $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt\ \forall x(t), y(t) \in L_2[0,1]$, тогда пространство $L_2[0,1]$ - гильбертово. В гильбертовом пространстве оператор A^* является сопряженным к оператору A, если $(Ax, y) = (x, A^*y)\ \ \forall x(t), y(t) \in L_2[0,1]$. Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), y(t)) = \int_0^1\left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right)y(t)dt = \int_0^1\int_0^t x(\tau)y(t)d\tau\, dt = \int_0^1 x(\tau)\left(\int_\tau^1 y(t)dt\right)d\tau =$$
$$\int_0^1 x(t)\left(\int_t^1 y(\tau)d\tau\right)dt = \left(x(t), A^*y(t)\right)$$

. Таким образом, $A^*y(t) = \int_t^1 y(\tau)d\tau$.

в). Рассмотрим скалярное произведение:
$(Ax(t), y(t)) = \int_0^1 \left(\int_0^1 sx(s)ds\right) y(t)dt = \int_0^1 \int_0^1 sx(s)y(t)dsdt = \int_0^1 x(t) \left(\int_0^1 sy(s)ds\right) dt = (x(t), A^* y(t))$

. Тогда сопряженный оператор имеет вид: $A^*y(t) = \int_0^1 sy(s)ds$.

32). Найти сопряженный к оператору $A: l_2 \to l_2$, если

а). $Ax = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$

в). $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$,

при $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Решение.

а). В гильбертовом пространстве оператор A^* является сопряженным к оператору A, если $(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \forall x(t), y(t) \in l_2[0,1]$. Комплексное пространство l_2 является гильбертовым, если положить $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$. Рассмотрим скалярное произведение: $(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{(A^*y)_i} = (x, A^*y)$. Таким образом, $A^*y = (y_1, y_2, \dots, y_n, 0, 0, \dots)$.

в).Рассмотрим скалярное произведение:
$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \overline{y_i} = \sum_{i=2}^{\infty} x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{(A^*y)_i} = (x, A^*y)$. Тогда $A^*y = (y_2, y_3, \dots)$.

33) Найти сопряженный к оператору $A : l_2 \to l_2$,если:

А) $Ax = (\lambda_1 x_1,\ \lambda_2 x_2,\ \dots),\ \lambda_n \in \mathbb{R} :\ |\lambda_n| \le 1$;

В) $Ax = (x_2,\ x_3, \dots)$, при $x = (x_1,\ x_2, \dots)$.

Решение.

А) В гильбертовом пространстве *H* теорема Рисса-Фреше (§10, Теорема 2) дает отождествление пространства со своим сопряженным, поэтому для оператора $A : H \to H$ равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$ определяет сопряженный оператор $A^* : H \to H$.

Комплексное пространство $H = l_2$ становится гильбертовым, если выбрать скалярное произведение как:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

Сходимость этого ряда следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right)$$

Рассмотрим:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{(\lambda_i y_i)} = (x, A^*y)$$

Таким образом, сопряженный оператор имеет вид:

$A^* = (\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \dots)$

в) Рассмотрим:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1} \overline{y_i} = \sum_{i=2}^{\infty} x_i \overline{y_{i-1}} = (x, A^* y)$$

Таким образом, сопряженный оператор имеет вид:

$A^* = (0, y_1, y_2, \dots)$

34) Какие из следующих операторов $A : C[0,1] \to C[0,1]$ являются вполне непрерывными:

A) $Ax(t) = tx(t)$;

B) $Ax(t) = \int_0^1 x(\tau) d\tau$;

C) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$;

D) $Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} x(s) ds$;

E) $Ax(t) = x(t^2)$?

Решение.

A) Ответ: Нет

Оператор является вполне непрерывным, если он любое ограниченное множество переводит в компактное.

Воспользуемся критерием компактности в $C(E)$ (§12, Теорема 2). Для того, чтобы множество непрерывных функций из $C(E)$ было компактным необходимо и достаточно:

1) $\|x(t)\|_C \leq M, \forall x(t) \in L$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall t', t'' \in E :\ |t' - t''| < \delta\ \forall x(t) \in L\ \|x(t') - x(t'')\| < \varepsilon$

Рассмотрим функцию:

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{t} \sin \frac{1}{t^2}, & t \in (0,1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

$x(t) \in C[0,1]$, т.к. $|x(t)| \leq \sqrt{t},\ t \in [0,1]$ и $\lim_{t \to +0} x(t) = 0 = x(0)$.

При этом функция:

$$Ax(t) = t^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{t^2}$$

не является равномерно непрерывной, т.к.

$$\frac{d}{dt}\big(Ax(t)\big) = \frac{3}{2}\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2} + t^{\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{t^2}\left(-\frac{2}{t^3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{t^2}, t \in (0,1]$$

не является ограниченной на $t \in (0,1]$.

Значит, оператор не является вполне непрерывным.

B) Ответ: Да

Воспользуемся доказательством критерия компактности в $C(E)$.

Если функция $K(t,s) \in C(\Pi),\ \Pi = [a,b] \times [a,b]$, то

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

является вполне непрерывным.

В данном случае $K(t,s) \equiv 1 \in C([0,1] \times [0,1])$.

Значит, оператор является вполне непрерывным.

C) Ответ: Да

$\forall x(t)\ Ax(t)$ - непрерывно дифференцируема на $t \in [0,1]$. Значит, равностепенная непрерывность $Ax(t)$ равносильна равномерной ограниченности ее производной.

$$\frac{d}{dt}\big(Ax(t)\big) = x(1) \le M$$

Заметим, что $Ax(t)$ - ограничена на $t \in [0,1]$ в силу непрерывности *x(t)*.

Значит, оператор является вполне непрерывным.

D) Ответ: Да

Воспользуемся доказательством критерия компактности в $C(E)$.

Если функция $K(t,s) \in C(\Pi),\ \Pi = [a,b] \times [a,b]$, то

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

является вполне непрерывным.

В данном случае $K(t,s) = e^{ts} \in C([0,1] \times [0,1])$.

Значит, оператор является вполне непрерывным.

E) Ответ: Нет

Рассмотрим функцию

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{t}\sin\frac{1}{t}, & t \in (0,1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

$x(t) \in C[0,1]$, но

$$Ax(t) = t\sin\frac{1}{t^2}$$

не является равностепенно непрерывной, т.к.

$$\frac{d}{dt}\left(Ax(t)\right) = \sin\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^2}\cos\frac{1}{t^2}$$

не является ограниченной на $t \in (0,1]$.

Значит, оператор не является вполне непрерывным.

35) Будет ли вполне непрерывным оператор $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$, $Ax(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$?

Решение:

Нет, не будет.

Пусть $x(t) \in C[-1,1]$ — четная функция. Тогда $Ax(t) \equiv x(t)$.

Возьмем $x(t) = |t|\sin\frac{1}{t^2}$. Тогда, как рассмотрено в задаче 34 пункт Е, $Ax(t)$ имеет неограниченную производную на множестве $[-1,0) \cup (0,1]$ $\Rightarrow$ оператор не является вполне непрерывным.

36) При каком условии на функцию $\varphi(t) \in C[0,1]$ оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ будет вполне непрерывным?

Решение:

Докажем, что искомым условием на функцию $\varphi(t)$ является условие $\varphi(t) \equiv 0, t \in [0,1]$.

Пусть это не так, т. е. $\exists t_0 \in [0,1] : \varphi(t_0) \neq 0$.

Тогда в силу свойств непрерывных функций $\exists \delta > 0 : \varphi(t) \neq 0, \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Не ограничивая общности, будем полагать, что $\varphi(t) \geq 0$ всюду в окрестности точки t_0 (случай $\varphi(t) < 0$ рассматривается аналогично). Рассмотрим функцию

$$x_\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_0 - \delta], \\ \dfrac{t - t_0 + \delta}{2\delta}, & t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \\ 1, & t \in [t_0 + \delta, 1]. \end{cases}$$

Легко заметить, что $\forall \delta \in (0, \delta_0)$ $x_\delta \in \overline{S_1(0)} \subset C[0,1]$.

Имеем $\left|Ax_\delta(t_0+\delta)-Ax_\delta(t_0-\delta)\right|=\varphi(t_0+\delta)\geq C>0$, где $C=const, \forall\delta\in[0,\delta_0)$, т. к. $\varphi(t)\in C(t_0)$.

Итак, $\forall\delta\in(0,\delta_0)\exists x_\delta(t)\in C[0,1]:\left|Ax(t_0+\delta)-Ax(t_0-\delta)\right|\geq C>0 \Rightarrow$ образ замкнутого единичного шара из пространства $C[0,1]$ при отображении *A* не есть равностепенно непрерывное множество функций $\Rightarrow$ *A* не является вполне непрерывным оператором.

Мы пришли к противоречию $\Rightarrow$ $\varphi(t)\equiv 0, t\in[0,1]$.

37) Будет ли вполне непрерывным оператор $Ax(t)=\dfrac{dx}{dt}$, если он рассматривается как действующий:

A) $A:C^1[0,1]\to C[0,1]$;

в) $A:C^2[0,1]\to C^1[0,1]$;

с) $A:C^2[0,1]\to C[0,1]$?

Решение:

A) Рассмотрим последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\subset S_1(0)\subset C^1[0,1]$, $x_n(t)=\dfrac{\sin(tn)}{2n}$.

Тогда $Ax_n(t)=\dfrac{\cos(tn)}{2}$ и $\dfrac{d}{dt}(Ax_n(t))=-\dfrac{n\sin(tn)}{2}$. Т.е. $\dfrac{d}{dt}(Ax_n(t))$ - неограниченная последовательность при $n\to\infty$. Следовательно, образ замкнутого единичного шара из пространства $C[0,1]$ при отображении A не является равностепенно непрерывным множеством функций $\to$ оператор A не вполне непрерывный.

в) Ответ: нет.

Рассмотрим последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\subset S_1(0)\subset C^2[0,1]$, $x_n(t)=\dfrac{\cos(nt)}{3n^2}$, $t\in[0,1]$. Тогда $Ax_n(t)=-\dfrac{\sin(nt)}{3n}$ и $\dfrac{d}{dt}(Ax_n(t))=-\dfrac{\cos(nt)}{3}$. Очевидно, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сильно сходится к 0, а значит и слабо при $n\to\infty$. Тогда докажем, что из $\{Ax_n(t)\}$ нельзя выделить фундаментальную последовательность в $C^1[0,1]$. Пусть это не так и $\exists$ фундаментальная последовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{Ax_n\}$. Тогда $\max\limits_{t\in[0,1]}\left|y_{n_k}(t)-y(t)\right|+\max\limits_{t\in[0,1]}\left|y_{n_k}'(t)-y'(t)\right|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. По признаку Коши имеем: $\max\limits_{t\in[0,1]}\left|y_{n_{k+p}}(t)-y_{n_k}(t)\right|+\max\limits_{t\in[0,1]}\left|y_{n_{k+p}}'(t)-y_{n_k}'(t)\right|\xrightarrow[k,p\to\infty]{}0$. Из сходимости первого слагаемого к 0 вытекает необходимость сходимости второго, т.е.

$$\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{\cos(n_{k+p}t)}{3}-\frac{\cos(n_k t)}{3}\right|\xrightarrow[k,p\to\infty]{}0 \Leftrightarrow \sin\frac{n_{k+p}t+n_k t}{2}\bullet\sin\frac{n_{k+p}t-n_k t}{2}\xrightarrow[k,p\to\infty]{}0$$

. А это не так. Значит, получили противоречие $\to$ оператор А не вполне непрерывный.

С) Ответ: да.

Рассмотрим образ F множества $\overline{S^1(0)}\subset C^2[0,.1]$ при отображении А. В пространстве $C^2[0,1]$

$$\overline{S^1(0)}=\{x(t)\in C^2[0,1]:\max_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max_{t\in[0,1]}|x'(t)|+\max_{t\in[0,1]}|x''(t)|\le 1\}.$$

Следовательно, если $x\in\overline{S^1(0)}\subset C^2[0,1]$, то

$\max_{t\in[0,1]}|Ax(t)|+\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{d}{dt}(Ax(t))\right|\le 1\Rightarrow$ F – равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно (в силу ограниченности множества производных) $\Rightarrow$ Согласно теореме Арцела, F компактно. А значит, оператор А – вполне непрерывный.

38) Сформулировать критерий компактности в l_p. Какие из следующих операторов $A:l_2\to l_2$ вполне непрерывны (при $x=(x_1,x_2,\ldots)$):

А) $Ax=(0,x_1,x_2,\ldots)$;

в) $Ax=(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots)$;

с) $Ax=(0,x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots)$?

Решение:

Критерий компактности в l_p: Для компактности замкнутого множества $K\subset l_p$ необходимо и достаточно, чтобы множество K было ограниченным и чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N:\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\varepsilon^p,\forall n\ge n_0,\forall x=\{\xi_1,\xi_2,\ldots)\in K.$$

А) Ответ: оператор не является вполне непрерывным.

Приведём пример, подтверждающий это. Фиксируем $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и рассмотрим последовательность $x_n=(x_n^1,x_n^2,\ldots):x_n^n=1,x_n^k=0,\forall k\ne n$.

Очевидно, что $\{x_n\}\in\overline{B^1(0)}$. Тогда $Ax_n=(0,x_n^1,x_n^2,\ldots):x_n^n=1,x_n^k=0,\forall k\ne n$. И поскольку

$$\forall n_0\in N\ \exists n\ge n_0\sum_{i=n+1}^{\infty}|Ax_k|^p=\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_{k-1}|^p=1\ge\frac{1}{4}=\varepsilon^2.$$

в) Ответ: оператор является вполне непрерывным.

Для доказательства этого покажем, что образ F замкнутого единичного шара из l_2 является компактным множеством, для чего воспользуемся критерием компактности в l_p. Ограниченность очевидна, поскольку $\forall\, y = Ax \in F$ имеем: $\|y^2\| = \sum_{n=1}^{\infty}(y_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x_n}{n})^2 \le 1$. Ограниченность F доказана. Чтобы доказать его замкнутость, докажем, что A – непрерывный оператор, тогда, в силу замкнутости шара, получим замкнутость F. Пусть $\{x_n\} \to x_0$. Тогда

$$\|Ax_n - Ax_0\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x_n^k - x_0^k)^2}{k^2} \le \sum_{k=0}^{\infty}(x_n^k - x_0^k)^2 = \|x_n - x_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

. Следовательно, оператор A непрерывный. Условие критерия компактности множества в l_p проверяется так:

$\sum_{k=n}^{\infty}(Ax_k)^2 = \sum_{k=n}^{\infty}(\frac{x_k}{k^2})^2 \le \{x_k \in \overline{B^1(0)}\} \le \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \in$ при любом наперёд заданном $\varepsilon > 0$ и любом $n \ge n_0(\varepsilon)$.

С) Ответ: оператор является вполне непрерывным.
Доказательство совершенно аналогично доказательству предыдущего пункта (со смещением индексов последовательности на 1).

39) Доказать, что оператор $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, где $\lambda_k \in R$, $k \in N$, $\sup_k|\lambda_k| < \infty$, есть самосопряжённый оператор. При каком условии на последовательность λ_k он будет неотрицательным?

Решение:

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax)_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty}x_i(\lambda_i y_i) = (x, Ay)$$

Значит, $A = A^*$ и оператор A является самосопряжённым. Найдём, при каких λ_i оператор A является неотрицательным:

$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax)_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i^2 \ge 0$. Отсюда вытекает, что $\lambda_i \ge 0, \forall\, i$.

40) Доказать, что оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = tx(t)$ есть неотрицательный самосопряжённый оператор.

Решение:

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t),y(t))=\int_0^1 (tx(t))y(t)dt=\int_0^1 x(t)(ty(t))dt=(x(t),Ay(t)).$$

Отсюда вытекает, что $A=A^*$. Далее:

$$(Ax(t),x(t))=\int_0^1 (tx(t))x(t)dt=\int_0^1 tx^2(t)dt\geq 0.$$

Следовательно, оператор А неотрицательный.

41) Доказать, что оператор $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=\int_0^1 e^{s+t}x(s)ds$ является самосопряжённым и неотрицательным.

Решение:

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t),y(t))=\int_0^1(\int_0^1 e^{s+t}x(s)ds)y(t)dt=\int_0^1(\int_0^1 e^{s+t}x(t)dt)y(s)ds=\int_0^1 x(t)(\int_0^1 e^{s+t}y(s)ds)dt=(x(t),Ay(t))$$

Следовательно, $A=A^*$. Далее:

$$(Ax(t),x(t))=\int_0^1(\int_0^1 e^{s+t}x(s)ds)x(t)dt=\int_0^1 e^s x(s)ds*\int_0^1 e^t x(t)dt=(\int_0^1 e^t x(t)dt)^2\geq 0$$

.

Следовательно, оператор А неотрицательный.

42) Пусть $h\in R$, $h\neq 0$ фиксировано. Доказать, что разностный оператор

$$A:L_2(-\infty,+\infty)\to L_2(-\infty,+\infty),\qquad Ax(t)=\frac{1}{h}\left[x(t+\frac{h}{2})-x(t-\frac{h}{2})\right]$$

удовлетворяет соотношению $A=-A^*$.

Решение:

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t),y(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{h}\left[x(t+\frac{h}{2})-x(t-\frac{h}{2})\right]y(t)dt=\frac{1}{h}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\frac{h}{2})y(t)dt-\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\frac{h}{2})y(t)dt\right]=$$

$$=\frac{1}{h}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(s)y(s-\frac{h}{2})ds-\int_{-\infty}^{+\infty}x(s)y(s+\frac{h}{2})ds\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\bullet(-\frac{1}{h}\left[y(t+\frac{h}{2})-y(t-\frac{h}{2})\right])dt=(x(t),-Ay(t))$$

Отсюда вытекает, что $A^*=-A$.

43) Пусть A – самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, причем $A\neq 0$. Доказать, что если существует ограниченный оператор A^{-1}, то обратный оператор тоже самосопряжен.

Решение:

Поскольку $\exists A^{-1}$ – ограниченный, то $\forall x,y\in H\ \exists v,w\in H: v=A^{-1}x, w=A^{-1}y$. Тогда $(A^{-1}x,\ y)=(v,\ Aw)=(Av,\ w)=(x,\ A^{-1}y)$.

44) Пусть A - ограниченный самосопряженный оператор, $\lambda \in \mathbb{C},\ Im\lambda \neq 0$. Доказать, что оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ существует.

Решение:

Предположим, что $\exists x_0: (A-\lambda I)x_0 = 0$. Тогда $Ax_0 = \lambda x_0$. Рассмотрим скалярное произведение (Ax, x) и воспользуемся самосопряженностью оператора A: $(Ax_0,\ x_0) = \lambda\|x_0\| = (x_0,\ Ax_0) = \bar{\lambda}\|x_0\|$. Следовательно, предположение верно только при $x_0 = 0$. Отсюда очевидно следует обратимость оператора $(A-\lambda I)$.

45) Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_2,\ Ax = (0, 0, x_3, x_4, \dots)$, для $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$. Доказать, что A самосопряжен в l_2 и $A \geq 0$. Найти оператор $\sqrt{A}$.

Решение:

В гильбертовом пространстве оператор A является самосопряженным, если $\forall x, y \in l_2$ выполнено $(Ax,\ y) = (x,\ Ay)$. Пространство l_2 становится гильбертовым, если для любых двух его элементов $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$ положить $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. Сходимость этого ряда для любых x и y из l_2 вытекает из неравенства Буняковского для рядов.

Рассмотрим скалярное произведение

$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax)_i y_i = \sum_{i=3}^{\infty} x_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i (Ay)_i = (x, Ay)$.

Таким образом, оператор A является самосопряженным.

Далее: $(Ax, x) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax)_i x_i = \sum_{i=3}^{\infty} x_i x_i = \sum_{i=3}^{\infty} x_i^2 \geq 0$.

Теперь рассмотрим оператор A^2. Очевидно, $A^2 x = A(Ax) = (0, 0, x_3, x_4, \dots) = Ax$.

Значит, $\sqrt{A} = A$.

46) В вещественном линейном пространстве $C[-\pi,\ \pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора: А) $Ax(t) = x(-t)$; В) $Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)ds$.

Решение $\boldsymbol{Ax(t) = x(-t)}$

$x(t) = x(-t), \lambda x(-t) = x(t) \Rightarrow \lambda^2 x(t) = x(t)$ следовательно, если $x \neq 0$, то собственными значениями оператора A являются:

1. $\lambda = 1 \quad \Rightarrow$ Собственные вектора - четные функции
2. $\lambda = -1 \quad \Rightarrow$ Собственные вектора - нечетные функции

Решение $\boldsymbol{Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)ds}$

$Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos(s)\cos(t)x(s) - \sin(s)\sin(t)x(s))ds = C_1(x)\cos(t) + C_2(x)\sin(t)$ Исходя из этого будет искать собственные вектора в виде $x(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$.
$A(a\cos(t) + b\sin(t)) = \pi a\cos(t) - \pi b\sin(t) = \lambda a\cos(t) + \lambda b\sin(t) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pi, b = 0, a = 1$
Таким образом получаем, что $x(t) = \cos(t)$ -- собственный вектор, отвечающих собственному значению $\lambda = \pi$.

47) В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = x(0) + tx(1)$. Найти $\sigma(A), r_\sigma(A), R_\lambda(A)$.

Решение:

$A^n x(t) = x(0) + t(x(1) + (n-1)x(0))$ $\| A^n x(t) \|_{C[0,1]} \leq |x(0) + t(x(1) + (n-1)x(0))| \leq |x(0)| + |t|(|x(1)| + (n-1)|x(0)|) \leq n+1. \Rightarrow$ $\| A^n \| = n+1 \Rightarrow \tau(A) = 1$ $(\lambda E - A)x(t) = \lambda x(t) - x(0) - tx(1) = y(t)$ $\Rightarrow$ $x(t) = \frac{y(t)-tx(1)-x(0)}{\lambda} = \tilde{x}(t)$

Видно, что при $\lambda = 0$ резольвента не существует, поэтому $0 \in \sigma(A)$. Пусть теперь $\lambda \neq 0$, тогда $x(0) = \tilde{x}(0)$, $x(1) = \tilde{x}(1)$ $\Rightarrow$ $x(0) = \frac{y(0)}{\lambda-1}$ $x(1) = \frac{x(0)+y(1)}{\lambda-1} = \frac{y(0)+y(1)(\lambda-1)}{(\lambda-1)^2}$ Таким образом, при $\lambda = 1$ резольвента не существует, поэтому $1 \in \sigma(A)$. Спектр оператора – $\sigma(A) = \{0,1\}$, при остальных значениях λ: $R_\lambda y(y) = \frac{y(t)+tx(1)+x(0)}{\lambda} = \frac{y(0)(t+\lambda-1)+ty(1)(\lambda-1)+y(t)(\lambda-1)^2}{\lambda(\lambda-1)^2}$.

48) Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$ для $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, где $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}, \sup_n |\lambda_n| < +\infty$. Найти $\sigma(A)$.

Решение:

(Домрина, Леонтьева, задача 10.6). Очевидно, $K = \{\lambda_n\} \in \sigma(A)$. Пусть $\lambda \notin K$. Тогда для любого $y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in l_2$ определен $R_\lambda(y) = \left(\frac{y_1}{\lambda_1 - \lambda}, \dots, \frac{y_n}{\lambda_n - \lambda}, \dots\right)$, причем $\|R_\lambda(y)\| \leq \|y\|/\rho(\lambda, K)$, что доказывает регулярность значения λ. Значит, $\sigma(A) = K$.

49) Доказать, что оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ для $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, вполне непрерывен и найти его спектр.

Решение:

Непрерывность:

A – непрерывен (проверяется по определению) действует в конечномерное пространство => он вполне непрерывен. (образ ограниченного множества компактен по т. Больцано – Вейерштрасса) . См. Теорема(Треногин, параграф 20.1, т.3 и следствие из неё)

Спектр:

$Ax = \lambda x$

$$\begin{cases} \lambda 0 = x_1 \\ \lambda x_1 = x_2 \\ \dfrac{\lambda x_2}{2} = x_3 \\ \dots \end{cases}$$

Решая систему, получим, что при любом $\lambda \neq 0$ её решение – только нулевой вектор.

$\lambda = 0$ – точка остаточного спектра, т.к. $\ker A = 0, R(A) \subseteq \{x \mid x_1 = 0\} \neq l_2$

50) Доказать, что оператор $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $Ax = \int_{-1}^{1} s^2 tx(t)dt$ вполне непрерывен и найти его спектр.

Решение:

Оператор вполне непрерывный, т.к. он интегральный (по доказанному на лекциях). Так как $Ax(t) = C(x)s^2$, где $C(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)\,dt \in R$, собственные векторы надо искать в виде $x(t) = Ct^2$. Но тогда $Ax(t) = Cs^2 \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$, и собственных векторов у оператора нет, и весь спектр состоит из точки $\lambda = 0$

51) Доказать, что оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax = \int_0^1 st(1-st)x(t)dt$ вполне непрерывен и найти его спектр.

Решение:

Оператор вполне непрерывный, т.к. он интегральный (по доказанному на лекциях).

$$Ax(t) = \int_0^1 s\,tx'(t)dt - \int_0^1 s^2 t^2 x(t)dt = C_1(x)s - C_2(x)s^2$$

Поэтому собственный элементы A нужно искать в виде $x(t) = \lambda(at^2 + bt)$

$$A(at^2+bt) = \left(-\frac{a}{5} - \frac{b}{4}\right)t^2 + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3}\right)t = \lambda(at^2 + bt)$$

Откуда $\lambda = \frac{1}{15} \pm \frac{\sqrt{31}}{60}$. Так как оператор вполне непрерывный, то в спектр также входит точка $\lambda = 0$, и других точек спектра нет.