Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Общей Математики

Задачи по функциональному анализу

(V семестр)

лектор — доцент Н. Ю. Капустин
решения — студенты 318 группы
Е. А. Попов, А. Д. Поспелов, Д. В. Ховратович

Москва 2002

1. [$\sharp$2] Какова мощность всех непрерывных функций на $[a,b]$?

Решение. Обозначим $C = \{f(x)\,|\,f(x) \in C[a,b]\}$.

Покажем для начала, что мощность C не меньше континуум. Действительно, для каждого $c \in \mathbb{R}$ существует функция $f(x) = c \;\forall\, x \in [a,b]$, причем для разных c эти функции различны.

Покажем теперь, что мощность C не превосходит континуум (этим мы покажем, что мощность C в точности равна континуум). Действительно, зададимся некоторым фиксированным для дальнейших рассуждений $\varepsilon > 0$. Пусть $f(a) = \alpha,\;\; f(b) = \beta$. Тогда функции $f(x) \in C$ на $[a,b]$ поставим в соответствие ее непрерывное продолжение на отрезке $[a, b+\varepsilon]$ по следующему правилу:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b], \\ \frac{\alpha}{\varepsilon}x + \left(\beta - \frac{\alpha}{\varepsilon}b\right), & x \in (b, b+\varepsilon]\,. \end{cases}$$

Легко убедиться, что такое продолжение непрерывно. Заметим, что оно взаимно однозначно: действительно, каждой непрерывной функции, заданной на отрезке $[a, b+\varepsilon]$, можно поставить в соответствие однозначным образом непрерывную функцию, заданную на отрезке $[a,b]$ простым сужением области определения. Заметим, что значения $f'(x)$ на концах отрезка определения совпадают, следовательно, средние Чезаро тригонометрического ряда Фурье этой функции сходятся равномерно к $f'(x)$. Иными словами, существуют такие числовые последовательности вещественных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, что

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{b-a}x + \frac{a+b}{a-b}\pi\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{b-a}x + \frac{a+b}{a-b}\pi\right)\right).$$

Способов определить такую функцию не больше, чем способов выбора соответствующих последовательностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Мощность множества таких рядов равна континуум, так как она совпадает с мощностью множества способов выбрать счетное число вещественных коэффициентов.

Другим способом показать верхнюю оценку на мощность является утверждение, что любую непрерывную функцию достаточно задать на множестве рациональных чисел, которое всюду плотно на вещественной прямой. Конечно, не всякое такое задание определит непрерывную функцию, но, тем не менее, множество всех таких заданий содержит в качестве подмножества все непрерывные функции. Действительно, к любому числу на прямой сходится какая-то последовательность рациональных чисел, то есть значение в этой точке однозначно определено. Но мощность множества таких заданий равна в точности континуум, так как соответствует выбору счетного множества вещественных чисел. $\square$

2. [$\sharp$2] Доказать, что подмножество $M \subset C[0,1]$ такое, что

$$M = \{f(x) \mid A \leqslant f(x) \leqslant B\},$$

— замкнутое в $C[0,1]$.

Решение. Рассмотрим произвольную сильно сходящуюся функциональную последовательность

$$\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \subseteq M.$$

Известно, что для любого x_0, числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена сверху и снизу константами A и B соответственно, следовательно, по известной теореме о числовых последовательностях, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$, если он существует, также ограничен сверху и снизу константами A и B. Это верно для любых $x \in [0,1]$, следовательно, выполняется двойное неравенство

$$A \leqslant \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant B \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in M$ и $\{f_n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к непрерывной функции. Следовательно, по определению M — замкнуто. $\square$

3. [$\sharp$2] Является ли множество M непрерывных функций, удовлетворяющих условию $A < f(x) < B$ открытым в $C[0,1]$?

Решение. Покажем, что каждая функция из M входит в него вместе с некоторым множеством, для которого она является внутренней точкой. Действительно,

$$\forall\, f(x) \in C[0,1],\ A < f(x) < B \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : A + \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant B - \varepsilon.$$

Иными словами, для любого $-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ функции вида $f(x) + \delta$ входят в M, то есть достаточно взять множество $M' = \left\{f(x) \mid A + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < B - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, для которого $f(x)$ будет являться внутренней точкой, содержащееся в M. $\square$

4. [$\sharp$3] Доказать, что пространство m ограниченных последовательностей с метрикой $\rho(x,y) = \sup\limits_i |x_i - y_i|$ является полным пространством.

Решение. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность
$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}.$$
По определению фундаментальности
$$\rho(x_n, x_m) \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0 \iff \sup_i |(x_n)_i - (x_m)_i| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$
$$\implies \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N : \forall\, n, m > N,\ \forall\, i \Rightarrow |(x_n)_i - (x_m)_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Из этого следует фундаментальность, а, следовательно, и сходимость последовательности $\{(x_n)_i\}_{i=0}^{\infty}$ к некоторому $(x_0)_i$. В таком случае, устремив в последнем неравенстве m к бесконечности, получим, что
$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N : \forall\, n > N,\ \forall\, i \Rightarrow |(x_n)_i - (x_0)_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
Это означает, что $\sup\limits_i |(x_n)_i - (x_0)_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к $x_0 = ((x_0)_1,\, (x_0)_2,\, \ldots)$. Следовательно, пространство m — полное. $\square$

5. [♯2] Пусть A — отображение n-мерного пространства в себя, задаваемое системой линейных уравнений $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j + b_j)$ или $Ax = Y - b$. В пространстве введена метрика двумя способами:

   (a) $\rho(x, y) = \max\limits_i |x_i - y_i|$, и

   (b) $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$,

   где $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n),\ y = (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n)$. Доказать, что условие
$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1,\ j = 1,\, \ldots,\, n$$
   является необходимым и достаточным, чтобы отображение являлось сжатием.

Решение. Обозначим n-мерное пространство из условия через M. Нужно проверить условие
$$\exists\, \beta \in [0, 1) : \forall\, x, y \in M \Longrightarrow \rho(Ax, Ay) \leqslant \beta\rho(x, y).$$

(a) Легко привести контрпример: преобразование A задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оно удовлетворяет условию постановки, но для $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ условие сжимаемости не выполняется: $\rho(x, y) = 1 < \frac{3}{2} = \rho(Ax, Ay)$.

Представляется, что в постановке задачи допущена неточность: в данном случае необходимым и достаточным условие сжимаемости отображения является то, что все *строчные* суммы не превосходят некоторого наперед заданного $\alpha < 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \ i = 1, \ldots, n.$$

Расстояние между образами в данном случае равно

$$\rho(Ax, Ay) = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} x_j + b_j) - \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} y_j + b_j) \right| = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j - y_j) \right|.$$

Докажем необходимость. От противного: пусть A — сжатие и существует строка (с номером k), сумма модулей элементов которой больше единицы. Тогда в качестве y возьмем нулевой элемент, а в качестве x — вектор, равный сумме всех базисных векторов:

$$\rho(x, y) = 1 < \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x_j - y_j)| = \rho(Ax, Ay),$$

следовательно, отображение A не является сжатием, что противоречит посылке.

Теперь покажем достаточность. Пусть выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \ i = 1, \ldots, n.$$

Тогда для любых x, $y \in M$

$$\begin{aligned} \rho(Ax, Ay) = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j) \right| &\leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |x_j - y_j| \\ &\leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, \rho(x, y) = \rho(x, y) \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha \rho(x, y). \end{aligned}$$

Таким образом, отображение является сжатием с константой $\beta = \alpha$.

(b) Расстояние между образами в данном случае равно

$$\rho(Ax, Ay) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j + b_j) - \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}y_j + b_j) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j) \right|.$$

Докажем необходимость. От противного: пусть A — сжатие и существует столбец (с номером k), сумма модулей элементов которого больше единицы. Тогда в качестве y возьмем нулевой элемент, а в качестве x — вектор, у которого k-я координата равна единице, а остальные равны нулю. Но тогда

$$\rho(x, y) = 1 < \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j) \right| = \rho(Ax, Ay),$$

следовательно, отображение A не является сжатием, что противоречит посылке.

Теперь покажем достаточность. Пусть выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \ j = 1, \ldots, n.$$

Тогда для любых x, $y \in M$

$$\rho(Ax, Ay) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x_j - y_j)|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}(x_j - y_j)| = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| = \alpha\rho(x, y).$$

Таким образом, отображение является сжатием с константой $\beta = \alpha$.

□

6. [♯2] Доказать, что любое измеримое множество E на прямой с мерой $|E| = p > 0$ содержит измеримое подмножество меры q, $0 < q < p$.

Решение. Разобьем вещественную прямую на счетное число полуинтервалов вида $[n, n+1)$ для каждого целого n. Легко видеть, что они не пересекаются, каждый из них измерим, и все они в объединении образуют всю прямую. Так как пересечение измеримых множеств измеримо, все множества вида

$$A_n = [n, n+1) \cap E \subseteq E \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

измеримы. Также очевидно, что они не пересекаются и в объединении дают множество E. Если среди них найдутся хотя бы два A_m и A_ℓ, имеющие ненулевую меру, например, $|A_m| = r > 0$, $|A_\ell| = s > 0$, то множество A_m будет также измеримо и иметь меру $p \in [r, p-s]$, ненулевую, и строго меньшую p. В противном случае, если лишь одно из A_n имеет меру не ноль (все A_n не могут иметь меру ноль, так как объединение счетного числа множеств нулевой меры имеет нулевую меру), то перенесем действие на полуинтервал $[n, n+1) = B_0$. Разделим его пополам, при этом получим два множества B_1, B_2. Если они оба имеют пересечение ненулевой меры с E, то выбрасывая одно из них, получаем подмножество меньшей положительной меры. Если же лишь одно имеет ненулевую меру, то поделим его пополам и повторим рассуждения. Важно заметить, что в силу того, что E имеет положительную меру, непременно наступит момент, когда оба полуинтервала разбиения будут иметь непустое пересечение с E, так как в противном случае, по лемме о вложенных отрезках, оно сойдется к точке, то есть множеству меры нуль, что противоречит условию задачи. $\square$

7. [$\sharp$3] Пусть E — измеримое на сегменте $[0,1]$ и для любого интервала Δ имеет место неравенство $|E \cap \Delta| \leqslant \alpha|\Delta|$, $\alpha < 1$. Доказать, что $|E| = 0$.

Решение. По определению измеримого множества

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists A:\; |(E \cup A) \setminus (E \cap A)| < \varepsilon(1-\alpha), \quad A \text{ — элементарное множество.}$$

Мера разности с одной стороны равна $|E \cup A| - |E \cap A| \geqslant |A| - \alpha\,|A|$, откуда получаем, что $|A| < \varepsilon$. С другой стороны мера разности может быть оценена снизу как $|E| - \alpha\,|A| > |E| - \alpha\varepsilon$. Отсюда выражаем меру исходного множества: $|E| < \varepsilon(1-\alpha) + \alpha\varepsilon = \varepsilon$, что и означает, что $|E| = 0$. $\square$

8. [$\sharp$1] Пусть A_1 и A_2 — измеримые подмножества сегмента $[0,1]$ и $|A_1| + |A_2| > 1$. Доказать, что $|A_1 \cap A_2| > 0$.

Решение. Так как A_1 и A_2 измеримы, их объединение и пересечение также измеримы, но тогда

$$1 \geqslant |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| > 1 - |A_1 \cap A_2| \Longrightarrow |A_1 \cap A_2| > 0.$$

$\square$

9. [♯2] Может ли открытое неограниченное множество иметь конечную меру?

Решение. Возьмем вещественную прямую. Она является открытым неограниченным множеством. В качестве меры возьмем вероятностную, например, плотность нормального распределения с параметрами a и σ^2:

$$\mu(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_E e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Как известно, интеграл плотности по всей прямой равен единицы, так как соответствует вероятности осуществления любого элементарного исхода:

$$\mu(\mathbb{R}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

Таким, образом, открытое неограниченное множество может иметь конечную меру. □

10. [♯1] Пусть замкнутое множество имеет конечную меру. Может ли оно быть неограниченным?

Решение. Возьмем вещественную прямую. Она является замкнутым неограниченным множеством. В качестве меры возьмем вероятностную, например, плотность распределения Коши:

$$\mu(E) = \frac{1}{\pi} \int\limits_E \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Как известно, интеграл плотности по всей прямой равен единицы, так как соответствует вероятности осуществления любого элементарного исхода:

$$\mu(\mathbb{R}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 1.$$

Таким, образом, открытое неограниченное множество может иметь конечную меру. □

11. [♯2] Доказать, что непрерывные функции на $[0, 1]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они равны.

Решение. Очевидно, что если любые две функции (в том числе и непрерывные) равны, то они эквивалентны, так как они различаются на пустом множестве, а оно имеет меру нуль. Пусть $f(x), g(x) \in C[0,1]$ — эквивалентные, и пусть существует точка $x_0 : f(x_0) \neq g(x_0)$. Тогда в силу локального свойства непрерывных функций существует и окрестность (интервал), на котором эти две функции различаются. Но тогда $f(x)$ не может быть эквивалентной $g(x)$, так как их значения различны в этой окрестности, которая имеет положительную меру. $\square$

12. [♯2] Доказать, что непрерывные на измеримом множестве E функции являются измеримыми.

    Решение. По критерию измеримости функций необходимо и достаточно проверить измеримость замкнутых множеств вида $E_a = \{x \mid f(x) \geqslant a\}$. Представим E в виде объединения множества E_1 и E_2, где множество E_2 — типа F_δ (является объединением замкнутых множеств), при этом $|E_2| = |E| \Rightarrow |E_1| = 0$. Так как $f(x)$ непрерывна на E_2, она на нем измерима (во всякое замкнутое множество она отображает замкнутое, следовательно, прообразом E_a будет являться счетное объединение замкнутых множеств, очевидно, измеримое). Осталось заметить, что $f(x)$ измерима на всем множестве E, так как, как и любая функция, она измерима на множестве E_1 меры ноль. $\square$

13. [♯2] Доказать, что если $f(x)$ имеет производную на сегменте $[a,b]$, то производная $f'(x)$ измерима.

    Решение. Считая, что $f(x)$ продолжена вправо от точки $x = b$ дифференцируемым образом (например, $f(a+\alpha) = f(b) + \alpha f'(a)$), положим

    $$\varphi_n(x) = n\left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right|.$$

    Тогда $f'(x)$ является пределом сходящейся последовательности непрерывных и, следовательно, измеримых функций: $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, поэтому является измеримой. $\square$

14. [♯2] Привести пример ограниченной, измеримой функции, не эквивалентной никакой функции, интегрируемой по Риману.

Решение. Построим множество A на отрезке $[0,1]$ с наперед заданной положительной мерой $\alpha \geqslant 1$. Сначала удалим из $[0,1]$ все точки интервала

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\alpha\right)$$

длины $\frac{1}{2}\alpha$ с центром в точке $\frac{1}{2}$. Из двух оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha\right]$ и $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\alpha\right]$, каждый из которых имеет длину $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)$, удалим средние интервалы, длина каждого из которых равна $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\alpha\right)$, удалим средние интервалы, каждый из которых имеет длину $\frac{1}{32}\alpha$. Из восьми оставшихся отрезков, длина каждого из которых равна $\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{8}\alpha\right)$, удалим средние интервалы, каждый из которых имеет длину $\frac{1}{128}\alpha$. После n шагов мера удаленных интервалов будет равна $\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+2^{-n}\right)$, и, следовательно, мера совокупности удаленных интервалов после бесконечной последовательности удалений будет равна α. Мера оставшегося множества A будет равна $1-\alpha$. Оно является совершенным и нигде не плотным.

Рассмотрим характеристическую функцию множества A:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

Она ограничена и измерима (так как является характеристической функцией измеримого множества). Но так как множество ее точек разрыва есть A и мера множества A положительна, то $f(x)$ не интегрируема по Риману (в частичных суммах мера отрезков разбиений, содержащих точки разрыва, положительна, следовательно, можно добиться разных значений верхней и нижней сумм Дарбу). Если значения функции $f(x)$ изменить на некотором множестве меры ноль, то множество точек разрыва вновь полученной функции также будет иметь положительную меру, следовательно, она снова не будет интегрируема по Риману. Следовательно, никакая функция, эквивалентная $f(x)$, не интегрируема по Риману (однако интегрируема по Лебегу на A). $\square$

15. [$\sharp$2] Привести пример неизмеримой функции. Доказать, что множество и его характеристическая функция измеримы или не измеримы одновременно.

Решение. Определим на отрезке $[0,1]$ отношение эквивалентности: $x\sim y$, если $x-y\in\mathbb{Q}$. Пусть A является подмножеством $(0,1]$, содержащим по одному элементу из каждого класса эквивалентности. Для $r\in(0,1]$ определим множество $A_r\subset(0,1]$, получающееся из A сдвигом на r по модулю 1:

$$A_r\equiv([r+A]\cup[(r-1)+A])\cap(0,1].$$

Легко видеть, что интервал $(0,1]$ является объединением попарно непересекающихся множеств $\{A_r\}$, где $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$. Очевидно, что если A измеримо, то его мера совпадает с мерой A_r для любого r. Мера A не может быть равна нулю, так как интервал является объединением A_r, а оно имеет меру ноль. Мера A также не может быть положительной, так как в этом случае мера объединения A_r бесконечна. Следовательно, A неизмеримо.

Легко видеть, что характеристическая функция множества A неизмерима, так как ее образ содержит лишь две точки: 0 и 1. Достаточно, например, взять прообраз единицы (равный неизмеримому множеству A), чтобы убедиться в ее неизмеримости.

Утверждение о том, что множество измеримо или неизмеримо вместе со своей характеристической функцией, следует из того, что дополнение множества измеримо или неизмеримо одновременно с самим множеством, и того, что прообразами измеримых множеств характеристической функции являются само множество, его дополнение, а также пустое множество и универсум. $\square$

16. [♯1] Будет ли измерима функция $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ на $[0,1]$?

Решение. Достаточно проверить измеримость множеств $E\left[\frac{1}{x(x-1)} > \alpha\right]$ (в дальнейшем везде берется пересечение этих множеств с отрезком $[0,1]$). Возможны два случая:

(a) $\alpha \leqslant -4$. В этом случае $E\left[\frac{1}{x(x-1)} > \alpha\right] = \left\{x : x \in \left(\frac{1-\sqrt{1+\frac{4}{\alpha}}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{\alpha}}}{2}\right)\right\}$, очевидно, измеримо, и его мера равна просто $\sqrt{1+\frac{4}{\alpha}}$.

(b) $\alpha > -4$. В этом случае $E\left[\frac{1}{x(x-1)} > \alpha\right] = \varnothing$. Пустое множество измеримо.

Таким образом, прообразами указанных множеств являются измеримые множества, следовательно, по известному критерию, эта функция измерима. $\square$

17. [♯2] Будет ли измерима функция $f(x) = \begin{cases} n, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ (m,n) = 1, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}? \end{cases}$

Решение. Образом этой функции является множество всех натуральных чисел с нулем. Если в качестве подмножества образа взять какое-то множество натуральных чисел, то его прообразом будет являться какое-то подмножество рациональных чисел, имеющих меру ноль. В силу полноты меры Лебега любое такое подмножество имеет также нулевую меру. Если в качестве подмножества образа взять точку 0, то его прообразом будет являться все множество иррациональных чисел, которое измеримо. Если в качестве подмножества образа взять точку ноль, и вдобавок еще какое-то подмножество натуральных чисел, то прообраз будет измерим как объединение измеримого множества и множества меры ноль.

Таким образом, эта функция является измеримой. $\square$

18. [♯2] Пусть E — неизмеримое множество на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Будет ли функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \complement E, \\ \sin x, & x \in E \end{cases}$ измеримой?

Решение. Не будет в силу следующих рассуждений: множество $\complement E$ не является измеримым на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, так как если оно было бы измеримым, его дополнение E было бы также измеримым. Тогда в качестве подмножества образа достаточно взять точку ноль. Она составляет измеримое множество меры ноль. Ее прообразом является неизмеримое множество $\complement E$. $\square$

19. [♯2] Привести пример ограниченной функции, разрывной в каждой точке отрезка $[a, b]$ и интегрируемой по Лебегу. Будет ли эта функция интегрируема по Риману?

Решение. Это — функция, равная единице в каждой алгебраической точке отрезка $[a, b]$, и равная нулю в каждой трансцендентной точке этого же отрезка. Она не будет интегрируема по Риману, так как нижние суммы Дарбу будут равны нулю, а верхние — единице, но будет интегрируема по Лебегу, так как число алгебраических чисел счетно, следовательно, их мера равна нулю, и функция является ограниченной и измеримой. $\square$

20. [♯1] Привести пример функции, интегрируемой по Лебегу на $[0, 1]$, но неограниченной на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$.

Решение. Рассмотрим функцию Римана:

$$f(x) = \begin{cases} n, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ (m, n) = 1, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Она эквивалентна тождественному нулю, следовательно, она интегрируема по Лебегу, и интеграл от нее равен нулю. В то же время она неограничена, так как среди чисел любого отрезка $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$ существуют несократимые дроби со сколь угодно большим знаменателем. $\square$

21. [$\sharp$2] При каких α и β функция $f(x) = x^\alpha \sin(x^\beta)$ интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$?

Решение. Заметим для начала, что подынтегральная функция всюду неотрицательна. Сделаем замену переменной:

$$\int\limits_0^1 x^\alpha \sin(x^\beta) dx = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+2} \sin\left(\frac{1}{t}\right)^\beta dt$$

Отдельно рассмотрим два случая:

(a) $\beta \leqslant 0$. В этом случае интеграл Лебега от $f(x)$ на $[0, 1]$ существует при $\alpha > -1$, так как по признаку сравнения $\left|\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+2} \sin\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right| \leqslant \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+2}$ и

$$\int\limits_1^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+2} \sin\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right| dt$$

сходится (как несобственный интеграл Римана), а, как известно, из абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана вытекает существование соответствующего интеграла Лебега. Обратно, при $\alpha \leqslant -1$ интеграл абсолютно расходится, следовательно, в этом случае интеграл Лебега не существует.

(b) $\beta > 0$. В этом случае интеграл Лебега от $f(x)$ на $[0, 1]$ существует при $\alpha > -\beta - 1$ и не существует при $\alpha \leqslant -\beta - 1$, так как по признаку сравнения $\left(\frac{2}{\pi}\right)^\beta \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+\beta+2} \leqslant \left|\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+2} \sin\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right| \leqslant \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+\beta+2}$. Таким образом, при $\alpha > -\beta - 1$ несобственный интеграл Римана сходится абсолютно, что влечет за собой существование интеграла Лебега, а при $\alpha \leqslant -\beta - 1$ несобственный интеграл Римана абсолютно расходится, следовательно, интеграл Лебега не существует.

$\square$

22. [♯2] Доказать, что если $f(x) \geqslant 0$ на множестве E и $C > 0$, то функция удовлетворяет неравенству Чебышева: $|E[f(x) \geqslant C]| \leqslant \frac{1}{C} \int\limits_E f(x)dx$.

Решение. Действительно,

$$\int\limits_E f(x)\mu(dx) = \int\limits_{E[f(x)\geqslant C]} f(x)\mu(dx) + \int\limits_{E\setminus E[f(x)\geqslant C]} f(x)\mu(dx)$$
$$\geqslant \int\limits_{E[f(x)\geqslant C]} f(x)\mu(dx) \geqslant C\left|E[f(x) \geqslant C]\right|.$$

□

23. [♯1] Существует ли интеграл Лебега от $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ на $[0, 1]$?

Решение. Функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на всей своей области определения, следовательно, для существования интеграла Лебега необходимо и достаточно наличия сходимости соответствующего несобственного интеграла Римана:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int\limits_0^1 \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t\Big|_0^1 = \pi.$$

Таким образом, интеграл Лебега существует и равен π. □

24. [♯1] Будет ли функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на $[0, +\infty)$, если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}? \end{cases}$$

Решение. Если существует интеграл от $f(x)$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{x\in[0,+\infty)\cap\complement\mathbb{Q}} \frac{1}{x^\alpha}dx + \int\limits_{x\in[0,+\infty)\cap\mathbb{Q}} 0\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx,$$

так как добавление интеграла по множеству меры ноль не меняет факта его существования, а также его значения. Так как подынтегральная функция неотрицательна и непрерывна, для существования интеграла Лебега необходимо и достаточно наличия сходимости соответствующего несобственного интеграла Римана. Однако, известно, что интеграл Римана от этой функции расходится при любых значениях α, следовательно, интеграл Лебега не существует ни при каких α. $\square$

25. [$\sharp$2] При каких α и β существует интеграл Лебега на $[0, +\infty)$ от функции

$$f(x) = x^\alpha \ln^\beta x?$$

Решение. Так как подынтегральная функция непрерывна, интеграл Лебега существует тогда и только тогда, когда несобственный интеграл Римана сходится абсолютно:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|x^\alpha \ln^\beta x\right| dx = I < +\infty.$$

Пользуясь неотрицательностью первого сомножителя, а также, выполняя замену переменной $x = \frac{1}{t}$, имеем:

$$I = \int\limits_0^1 x^\alpha \left|\ln^\beta x\right| dx + \int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \ln^\beta x\, dx = \int\limits_1^{+\infty} t^{-\alpha-2} \left|\ln^\beta t\right| dt + \int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \ln^\beta x\, dx$$
$$= \int\limits_1^{+\infty} \ln^\beta x (x^\alpha + x^{-\alpha-2}) dx = \int\limits_1^{+\infty} \ln^\beta x \cdot x^\alpha dx + \int\limits_1^{+\infty} \ln^\beta x \cdot x^{-\alpha-2} dx = I_1 + I_2.$$

Так как все подынтегральные функции непрерывны и неотрицательны, для опровержения существования I достаточно показать расходимость одного из интегралов I_1, I_2, а для доказательства существования интеграла Лебега необходимо и достаточно установить сходимость обоих интегралов. Следует различать два случая:

(a) $\beta < 0$. В этом случае при $\alpha < -1$ расходится I_2, при $\alpha > -1$ расходится I_1. В случае же $\alpha = -1$ оба интеграла сходятся абсолютно тогда и только тогда, когда $\beta < -1$.

(b) $\beta \geqslant 0$. В этом случае при $\alpha < -1$ расходится I_2, при $\alpha > -1$ расходится I_1, а при $\alpha = -1$ расходятся оба эти интеграла.

Таким образом, интеграл Лебега существует при $\alpha = -1$, $\beta < -1$, в остальных же случаях интеграл Лебега не существует. $\square$

26. [♯1] Существует ли интеграл Лебега на $[2, +\infty)$ от функции $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$?

Решение. Так как функция положительна и непрерывна на всей области определения, для существования интеграла Лебега необходимо и достаточно сходимости соответствующего несобственного интеграла Римана:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int\limits_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty} = \ln 2,$$

следовательно, интеграл Лебега существует и равен $\ln 2$. $\square$

27. [♯1] Привести пример последовательности, сходящейся по мере на измеримом E, но не сходящейся ни в одной точке множества E?

Решение. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на полуинтервале $[0, 1)$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{n-2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}{1+\lfloor \log_2 n \rfloor}, \frac{1+n-2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}{1+\lfloor \log_2 n \rfloor}\right), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Она по мере сходится к нулю, так как мера множества, где $f_n(x)$ отлична от нуля $\frac{1}{1+\lfloor \log_2 n \rfloor}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. В то же время эта последовательность не сходится ни в одной точке, так как для любого x найдутся две подпоследовательности $f_{n_k}(x)$ и $f_{n_\ell}(x)$, одна из которых состоит из единиц, а вторая — из нулей. $\square$

28. [♯2] Показать, что из сходимости почти всюду не следует сходимости в среднем. Рассмотреть пример: $f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Решение. Сходимость почти всюду очевидна: последовательность множеств, на котором последовательность функций становится равной нулю монотонно возрастает и стремится ко всей прямой. Таким образом, множество точек, на котором функция стремится к нулю $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{n}, +\infty\right)$ монотонно заполняет всю прямую, за исключением множества меры ноль (одной точки). По определению это означает сходимость почти всюду.

В то же время сходимости в среднем нет:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (f(x) - f_n(x))^2 dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} f^2(x) dx = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n \to +\infty.$$

□

29. [♯2] Показать, что из сходимости в среднем не следует сходимости почти всюду. Пример: для любого $n = 2^k + m$, где $0 \leqslant m < 2^k$ определим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \frac{m}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{2^k}, \\ 0, & x \notin \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right]. \end{cases}$$

Решение. Очевидно, что здесь сходимость почти всюду не имеет места, так как $f_n(x)$ не сходится ни в одной точке отрезка $[0, 1]$, то есть на множестве положительной меры. Однако, последовательность сходится в среднем к нулю, так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n^2(x) dx = \int\limits_{\frac{m}{2^k}}^{\frac{m+1}{2^k}} 1\, dx = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{\lfloor \log_2 n \rfloor} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

30. [♯3] Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости почти всюду. Рассмотреть пример задачи 29.

Решение. Сходимость по мере к нулю следует из того, что

$$\forall\, 0 < \delta < 1 \Longrightarrow \mu\{x : |f_n(x) \geqslant \delta|\} = \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теперь определим последовательность $n_k = 2^k + \lfloor x_0 \cdot 2^k \rfloor$, где x_0 — произвольная точка на $[0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда легко проверить, что $\forall k \Rightarrow f_{n_k}(x_0) = 1$, а $f_{n_k+1}(x_0) = 0$. Так как n_k — бесконечная последовательность, а x_0 — произвольная точка на $[0, 1]$, получаем, что последовательность $f_n(x)$ не сходится ни в одной точке из $[0, 1]$, и, очевидно, не сходится почти всюду. □

31. [♯3] Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости в среднем. Пример: при $n = 2^k + m$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^k, & \frac{m}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{2^k}, \\ 0, & x \notin \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right]. \end{cases}$$

Решение. Сходимость по мере к нулю следует из того, что

$$\forall\, 0 < \delta < 1 \Longrightarrow \mu\{x : |f_n(x) \geqslant \delta|\} = \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тем не менее,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 = \int\limits_{\frac{m}{2^k}}^{\frac{m+1}{2^k}} 2^{2k}\, dx = \frac{1}{2^k} \cdot 2^{2k} = 2^k = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

то есть сходимости в среднем нет. □

32. [♯3] Показать, что если мера множества E бесконечна, то из сходимости почти всюду не следует сходимость по мере. Пример: $f_n(x) = \begin{cases} 1, & n \leqslant x \leqslant n+1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Решение. Очевидно, что

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N} : f_n(x_0) = 0,\ \forall n \geqslant N, \quad \text{то есть,} \quad \lim_{n\to\infty} |f_n(x_0)| = 0,$$

иными словами последовательность множеств, на которых последовательность функций остается нулем, монотонно возрастает и покрывает всю прямую. Тем не менее,

$$\forall\, 0 < \delta < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x)| \geqslant \delta\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{[n, n+1]\} = 1 \neq 0,$$

следовательно, сходимости по мере нет. □

33. [♯3] Показать, что из сходимости в $L_1[0,1]$ не следует сходимости в $L_2[0,1]$. Пример: $f(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{2}}, & x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right], \\ 0, & x \notin \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]. \end{cases}$

Решение. Сходимость в $L_1[0,1]$ к нулю по определению присутствует по причине существования интеграла Лебега

$$\int\limits_0^1 |f_n(x)|\,dx = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} n^{\frac{3}{2}} dx = n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Сходимости в $L_2[0,1]$ нет по причине того, что следующий интеграл Лебега бесконечен:

$$\int\limits_0^1 |f_n(x)|\,dx = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} n^3 dx = \frac{n^3}{n(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

□

34. [♯3] Доказать полноту пространства $C[0,1]$.

Решение. Метрика в пространстве $C[0,1]$ определяется как

$$\rho(x(t),y(t)) = \max_{t\in[0,1]} |x(t)-y(t)|\,.$$

Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$,

$$\rho(x_m,x_n) \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0.$$

Это означает, что

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,N\in\mathbb{N}:\forall\;m,n>N,\;\forall\;t_0\in[0,1]\Rightarrow|x_m(t_0)-x_n(t_0)|<\varepsilon.$$

Из этого следует фундаментальность, а, следовательно, и сходимость последовательности $x_n(t_0)$. Перейдя к пределу при $m\to\infty$, получим, что

$$\forall\,n>N\;\forall\,t_0\in[0,1]\Rightarrow|x_n(t_0)-x_0(t_0)|\leqslant\varepsilon,$$

где $x_0(t)$ — некоторая функция. Это означает, что

$$\rho(x_n,x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Докажем, что $x_0(t)$ — непрерывная функция. Возьмем произвольное t и такое δ, что $t+\delta \in [0,1]$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&|x_0(t+\delta) - x_0(t)| = |x_0(t+\delta) - x_n(t+\delta) + x_n(t+\delta) - x_n(t) + x_n(t) - x_0(t))| \\
&\leqslant |x_0(t+\delta) - x_n(t+\delta)| + |x_n(t+\delta) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_0(t)| \\
&\quad \text{берем такое } n, \text{ что } \rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \left| \frac{2\varepsilon}{3} + |x_n(t+\delta) - x_n(t)| \right| \\
&\quad \text{берем } \delta : |x_n(t+\delta) - x_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ — оно существует из непрерывности } x_n(t) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Таким образом, получено, что

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta : |x_0(t) - x_0(t+\delta)| < \varepsilon,$$

следовательно, $x_0(t)$ непрерывна.

Показано, что любая фундаментальная последовательность из $C[0,1]$ сходится также к непрерывной функции. Следовательно, $C[0,1]$ — полное пространство. $\square$

35. [♯2] Будет ли полным пространство многочленов на сегменте $[0,1]$, если метрика вводится по формуле $\rho(x,y) = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t) - y(t)|$.

Решение. Докажем, что оно неполно. Возьмем фундаментальную последовательность $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : u_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Известно, что данный ряд сходится равномерно на отрезке $[0,1]$, следовательно, по критерию Коши сходимости функциональной последовательности, последовательность его частичных сумм фундаментальна. u_n сходится к e^x, которая не представима многочленом $P(x)$. Действительно, пусть

$$e^x = P(x) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k x^k \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = 0 \Longrightarrow \forall\, m > \ell \quad \frac{1}{m!} = 0,$$

что неверно. Таким образом, фундаментальная последовательность может сходиться к элементу не из этого пространства, что свидетельствует о его неполноте. $\square$

36. [$\sharp$2] Доказать, что пространство ℓ_2 сепарабельно.

Решение. Построим в ℓ_2 всюду плотное счетное множество, тем самым по определению докажем его сепарабельность.

Пусть L — множество всех последовательностей, в каждой из которых все члены рациональны, и лишь конечное (свое для каждой последовательности) число членов отлично от нуля. Оно счетное, так как представляет собой счетное число множеств последовательностей, у которых не более, чем конечное число первых членов — рациональные числа, а все остальные — нули. Эти множества — просто n-я (декартова) степень множества рациональных чисел, которое счетно, а следовательно, и таких множеств счетное число. Поскольку объединение счетного множества счетных множеств счетно, L — счетное. Докажем, что L — всюду плотное. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ и зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty \Longrightarrow \exists\, N \in \mathbb{N} : \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Так как множество рациональных чисел всюду плотно на вещественной оси, для каждого x_k, $k = \overline{1, N}$ найдется свое рациональное число q_k такое, что

$$|x_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим последовательность $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \in L$, члены которой при $n \geqslant N + 1$ равны нулю. Тогда расстояние между x и q равно

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - q_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k - q_k|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}\right)^2 \cdot N + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

Таким образом, замыкание L совпадает со всем ℓ_2, то есть по определению, L — всюду плотное и ℓ_2 — сепарабельное. $\square$

37. [$\sharp$3] Пусть A — компактное множество в банаховом пространстве X. Доказать, что для любого $x \in X$ найдется точка $y \in A$ такая, что $\rho(x, A) = \|x - y\|$.

Решение. Определим функционал $f(y) = \|x - y\|$. Из неравенства треугольника можно показать, что он непрерывен. Очевидно, $f(y) \geqslant 0$. Тогда у него есть точная нижняя грань, равная m. Тогда, из определения точной нижней грани, существует убывающая последовательность $f(x_k) \to m$, $x_k \in A$. Так как A — компакт, то существует подпоследовательность $x_{k_n} \to y \in A$. Из непрерывности функционала следует, что $f(x_{k_n}) \to f(y)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_k)$, то $f(y) = M$. Таким образом,

$$\exists\, y : \|x - y\| = \inf_{z\in A} \|x - z\| = \rho(x, A)$$

$\square$

38. [♯3] Если на метрическом компакте $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ для любых x, y, принадлежащих компакту, то оператор A имеет единственную неподвижную точку. Существенно ли условие компактности?

Решение. Условие существенно. Приведем пример: интервал $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ — очевидно, не компакт. Оператор A определим так: $Ax = \frac{x}{2}$. Очевидно, он сжимающий и имеет единственную неподвижную точку $x_0 = 0$, но вне интервала $(0, 1)$. $\square$

39. [♯3] Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[0,\ 1]$ функций $x(t)$ таких, что $|x(0)| \leqslant K_1$; $\int\limits_0^1 |x'(t)|^2 dt \leqslant K_2$, где K_1, $K_2 > 0$ — постоянные, компактно в пространстве $C[0, 1]$.

Решение. По теореме Арцела необходимым и достаточным условием его компактности является равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность. Первое показать достаточно просто:

$$|x(t)| = \left| x(0) + \int\limits_0^t x'(t)dt \right| \leqslant |x(0)| + \int\limits_0^1 |x'(t)|\, dt$$

$$\leqslant K_1 + \int\limits_0^1 \frac{x'(t)^2}{2} dt + \int\limits_0^1 \frac{1}{2} dt \leqslant K_1 + \frac{K_2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Равностепенную непрерывность легко установить при помощи интегрального неравенства Гельдера:

$$|x(t_1)-x(t_2)| = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} x'(t)dt\right| \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} |x'(t)|\,dt \leqslant \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} |x'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{0}^{1} |x'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{|t_2-t_1|}\sqrt{K_2}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta < \frac{\varepsilon^2}{K_2}$, чтобы для *любой* функции из данного множества и для любых t_1, t_2 отстоящих друг от друга на расстоянии, меньшем чем δ, расстояние между образами t_1 и t_2 будет меньше, чем ε. □

40. [♯3] Будет ли компактом множество всех степеней x^n, $n = 1, 2, \ldots$ в пространстве $C[0,1]$?

Решение. Не будет в силу следующих рассуждений: возьмем произвольную последовательность $\{x^{m_k}\}_{m=1}^{\infty}$ из этого множества. Если это компакт, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x^{m_{k_\ell}} \xrightarrow{P} x^{n_0}$, то есть

$$\sup_{x\in[0,1]} |x^{m_{k_\ell}} - x^{n_0}| \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0,$$

однако

$$\sup_{x\in[0,1]} |x^{m_{k_\ell}} - x^{n_0}| \geqslant \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{m_{k_\ell}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}\right| \xrightarrow[\ell\to\infty]{} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \neq 0.$$

□

41. [♯3] Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве вполне ограничено.

Решение. Рассмотрим пространство ℓ_2 с метрикой $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2}$. Тогда единичная сфера S, а именно, все последовательности вида

$$e_1 = (1,\,0,\,\ldots,\,0,\,\ldots),\ e_2 = (0,\,1,\,\ldots,\,0,\,\ldots),\ \ldots$$

представляют собой ограниченное, но не вполне ограниченное множество. Это следует из того, что $\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2}\ \forall\ n \neq m$. Следовательно, при $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$ его нельзя покрыть конечной ε-сетью (так как каждый ее элемент будет "близок" только к одному элементу из S. $\square$

42. [$\sharp 3$] Доказать, что в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество относительно компактно.

Решение. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество. Рассмотрим произвольную последовательность в $[M]$. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса (верной для конечномерных пространств) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Эта подпоследовательность сходится к элементу из $[M]$, так как $[M]$ замкнуто. Следовательно, $[M]$ — компакт, а M — относительно компактно. $\square$

43. [$\sharp 3, \sharp 2$] Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными и непрерывными и найти их нормы:

(a) $f(x) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(1)]$;

(b) $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt$;

(c) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$.

Решение. Очевидно, что все функционалы линейны. Это следует из линейности интегралы и суммы. Согласно критерию непрерывности линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда его значения на единичной сфере ограничены в совокупности. Так как $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$, будем искать эту точную верхнюю грань — из ее существования будет следовать непрерывность.

(a) $|f(x)| = \frac{1}{3}\,|x(-1) + x(1)| \leqslant \frac{1}{3}\,|x(-1)| + \frac{1}{3}\,|x(1)| \leqslant \frac{2}{3},\ \forall\, x \in S$. Кроме того, при $x(t) = |t|$ эта верхняя грань достигается, следовательно, $\|f\| = \frac{2}{3}$.

(b) $|f(x)| \leqslant \int\limits_{-1}^{0} |x(t)|\, dt + \int\limits_{0}^{1} |x(t)|\, dt \leqslant 2,\ \forall\, x \in S$. Кроме того, при $x(t) = -\operatorname{sgn} t$ эта верхняя грань достигается, следовательно, $\|f\| = 2$.

(c) $|f(x)| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |t|\,|x(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |t|\,dt = 1,\ \forall\, x \in S$. Кроме того, при $x(t) = 1$ эта верхняя грань достигается, следовательно, $\|f\| = 1$.

$\square$

44. [$\sharp$3] Пусть X — множество функций $f(x)$, определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая $\|f\| = \max\limits_{x} |f(x)|$. Будет ли пространство банаховым?

Решение. Рассмотрим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенную по следующему правилу:

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in [0, n], \\ 0, & x \notin [0, n]. \end{cases}$$

Тогда $\|f_m - f_n\| = \max\limits_{x} |f_m(x) - f_n(x)| = \max\limits_{m,n}(e^{-m}, e^{-n}) \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$. Очевидно в то же время, что

$$f_n \to f = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \notin X.$$

Таким образом, пространство X неполно, а, следовательно, и не банахово. $\square$

45. [$\sharp$3] Является ли пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций гильбертовым пространством, если скалярное произведение задается следующим образом: $(f, g) = \int\limits_{0}^{1} f(x) \cdot g(x) dx$?

Решение. Пространство, очевидно, линейное. Для гильбертовости необходимо проверить аксиомы скалярного произведения:

(a) $(f, g) = \overline{(g, f)}$ — очевидно;

(b) линейность вытекает из линейности интеграла Римана;

(c) $(f, f) \geqslant 0$ вытекает из свойства интеграла Римана, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.

(d) $(f, f) = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow f^2(x) \equiv 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$, так как $f(x) \in C[0, 1]$.

$\square$

46. [♯3] Показать, что если в гильбертовом пространстве H последовательность x_n слабо сходится к x и $\|x_n\| \to \|x\|$ $(x \to \infty)$, то последовательность x_n сходится сильно.

Решение.

$$\begin{aligned}
&\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = (x_n, x_n - x) - (x, x_n - x) \\
&= \overline{(x_n - x, x_n) - (x_n - x, x)} = \overline{(x_n, x_n) - (x, x_n) - (x_n, x) + (x, x)} \\
&= (x_n, x_n) - (x_n, x) - (x, x_n) + (x, x).
\end{aligned}$$

Возьмем $f_1(y) = (x, y)$, $f_2(y) = (y, x)$. Они, очевидно, линейны и непрерывны. Тогда из слабой сходимости x_n к x следует, что $f_1(x_n) \to f_1(x)$, $f_2(x_n) \to f_2(x)$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \|x_n\| & \to & \|x\|, \\ f_1(x_n) & \to & f_1(x), \\ f_2(x_n) & \to & f_2(x) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} (x_n, x_n) & \to & (x, x), \\ (x, x_n) & \to & (x, x), \\ (x_n, x) & \to & (x, x) \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow \|x_n - x\|^2 = (x_n, x_n) - (x_n, x) - (x, x_n) + (x, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

что и означает сходимость по норме, то есть сильную сходимость. □

47. [♯3] Доказать, что любой линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H достигает нормы на замкнутом единичном шаре.

Решение. Пусть $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = M$. Тогда, по определению точной верхней грани, существует такая последовательность $\{x_k\}$, что $f(x_k) \nearrow M$. Так как единичный шар — компакт, существует сходящаяся подпоследовательность x_{k_m}, которая стремится к точке x_0 единичного шара. Очевидно, $|f(x_0)| \geqslant |f(x_{k_m})|$, а так как функционал непрерывен, то

$$|f(x_0)| = \lim_{m\to\infty} |f(x_{k_m})| = \lim_{k\to\infty} |f(x_k)| = M.$$

Следовательно, $|f(x_0)| = \|f\|$. □

48. [♯3, ♯2, ♯1, ♯4] Найти норму оператора A, действующего в пространстве $C[0,1]$ (или в пространстве $L_2[0,1]$): $Ax = t \cdot x(t)$.

Решение. Случай $L_2[0,1]$. Используя неравенство $\|x\| \leqslant 1$ имеем

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \left(\int_0^1 t^2 x^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 x^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \leqslant 1.$$

Легко проверить, что для $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}}, & 1-\frac{1}{\delta} \leqslant t \leqslant 1, \quad 0<\delta<1, \\ 0, & 0 \leqslant t < 1-\frac{1}{\delta} \end{cases}$ норма $\|x\| = \sqrt{\int\limits_{1-\delta}^{1} \frac{1}{\delta}dt} = \frac{1}{\delta}\cdot\delta = 1$, а норма $\|Ax\| = \sqrt{\int\limits_{1-\delta}^{1} \frac{t^2}{\delta}dt} = \sqrt{\frac{1}{\delta}\frac{t^3}{3}\Big|_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}} = \sqrt{1-\delta+\frac{\delta^2}{3}}$ выбором достаточно малого δ может быть сделана как угодно близкой к 1. Таким образом, $\|A\| = 1$.

Случай $C[0,1]$.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{t\in[0,1]} |t\cdot x(t)| \leqslant 1.$$

Легко проверить, что для $x(t) \equiv 1$ норма $\|Ax\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |t| = 1$, следовательно, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = 1$. □

49. [♯3] Определить оператор A^{-1} и нормы операторов A и A^{-1}, если $A : \ell_2 \to \ell_2$, где $A(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$.

Решение. Очевидно, уравнение $Ax = y$, где $y = (0, y_2, y_3, \ldots)$ имеет единственное решение $x = (y_2, y_3, \ldots)$, следовательно оператор A обратим и фактически уже определен выше.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n-1}|^2} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|x\| = 1,$$

$$\left\|A^{-1}\right\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} \left\|A^{-1}y\right\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} |(A^{-1}y)_n|^2} = \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|y\| = 1.$$

□

50. [♯3] Определить спектр оператора A, действующего в пространстве ℓ_2:

$$A(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots \right).$$

Решение. Ищем такие λ, что уравнение

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

имеет ненулевые решения. В таком случае имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 &= \lambda x_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{x_n}{n} &= \lambda x_n, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Очевидно, подходят только λ вида $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, для которых решением (1) будет, например, последовательность $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, где единица стоит на k-ом месте, а все остальные — нули. Следовательно, *спектром* оператора будут числа вида $\lambda_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. □

51. [♯3] В пространстве $C[0, 1]$ задан оператор A:

    (a) $Ax(t) = t \cdot x(t)$;

    (b) $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau) d\tau$;

    (c) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$.

    Будет ли оператор A компактным?

    Решение. Критерием компактности оператора является тот факт, что любое ограниченное множество он переводит в равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное. В дальнейшем все действия с функциями происходят на отрезке $[0, 1]$.

    (a) Множество $M = \{x(t) : |x(t) \leqslant 1|\}$ ограничено. Очевидно, множество M содержит функции вида t^n. Они содержатся в $A(M)$, а так как, согласно задаче 40, образуют не равностепенно непрерывное множество, $A(M)$ не является компактным.

    (b) Возьмем произвольное ограниченное множество $M \subset C[0, 1]$. Существует $m : \forall x \in M \Rightarrow |x(t)| \leqslant m$. Но тогда

    $$|Ax(t)| \leqslant \int\limits_0^t |x(t)|\, dt \leqslant mt \leqslant 1,$$

следовательно, $\{Ax\}$ при $x \in M$ — равномерно ограниченное множество. Докажем его равностепенную непрерывность: зафиксируем для этого произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда при $t, t+\Delta \in [0,1]$

$$|Ax(t) - Ax(t+\Delta)| = \left| \int\limits_t^{t+\Delta} x(\tau) d\tau \right| \leqslant \int\limits_t^{t+\Delta} |x(\tau)|\, d\tau \leqslant m\Delta.$$

Взяв $\Delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{m}$, получим равностепенную непрерывность образа. Следовательно, A переводит любое ограниченное множество в предкомпактное, и он компактен.

(c) Возьмем произвольное ограниченное множество $M \subset C[0,1]$. Существует $m : \forall x \in M \Rightarrow |x(t)| \leqslant m$. Но тогда

$$|Ax(t)| \leqslant |x(0)| + t\,|x(1)| \leqslant mt + m \leqslant 2m,$$

то есть AM — равномерно ограниченное. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\forall\, x \in M$, $\forall\, \delta : t, t+\delta \in [0,1]$

$$|Ax(t+\delta) - Ax(t)| = |(t+\delta)x(1) - tx(1)| = |x(1)|\,\delta \leqslant m\delta.$$

Взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$, получим определение равностепенной непрерывности для всех $x \in M$. Из этого следует, что любое ограниченное множество переводится оператором A в предкомпактное, следовательно, A — компактен.

$\square$

52. [♯3] В пространстве ℓ_2 задан оператор A:

$$A(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots) = \left(c,\, \frac{x_1}{1},\, \frac{x_2}{2},\, \ldots,\, \frac{x_n}{n},\, \ldots\right).$$

Доказать, что оператор A компактен и найти его спектр.

Решение. Рассмотрим произвольное ограниченное множество в ℓ_2. Оно содержится в некотором шаре радиуса a, который переводится этим оператором в параллелепипед $A : x_1 = c,\ |x_2| \leqslant a,\ |x_3| \leqslant \frac{a}{2},\ \ldots,\ |x_n| \leqslant a\frac{n-1}{m} \ldots$ для любой последовательности $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ из шара. Известно, что полученное множество вполне ограниченно, а, следовательно, и предкомпактно. Следовательно, A компактен.

Найдем спектр A. Система (1) в данном случае примет вид

$$\begin{cases} x_1 &= \lambda c, \\ x_2 &= \lambda x_1, \\ x_3 &= \dfrac{\lambda x_2}{2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \dfrac{\lambda x_{n-1}}{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Возможны два случая:

(a) $c = 0$. Тогда получаем, что $x_1 = \lambda \cdot 0 = 0,\ x_2 = \lambda \cdot x_1 = 0,\ \dots$, то есть решением будет лишь последовательность нулей.

(b) $c \neq 0$. Тогда $\forall \lambda \neq 0$ существуют ненулевые решения уравнения (1):

$$\left(\lambda c, \lambda^2 c, \frac{\lambda^3}{2} c, \frac{\lambda^4}{3} c, \dots, \frac{\lambda^n}{n-1} c, \dots\right).$$

Легко проверить, что это решения.

Таким образом, при $c = 0$ спектр — $\varnothing$, а при $c \neq 0$ спектр — $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

53. [$\sharp$3] Привести примеры линейных, но не непрерывных функционалов.

Решение. Рассмотрим пространство $L_2[0,1]$. Определим функционал $f(x(t)) = x(1)$. Очевидно, он линейный. Тем не менее, он не является непрерывным, так как единичному шару в $L_2[0,1]$ принадлежит последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & t \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно,

$$\int_0^1 x_n^2(t)dt \leqslant 1 \quad \forall n,$$

а функционал $f(x_n) = \sqrt{n}$ не ограничен на единичном шаре, следовательно, он не непрерывен. $\square$