Список задач по функциональному анализу (2003 год).

1. Пусть X - линейное нормированное пространство. Доказать, что для любых элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство $\|x\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$.

2. Можно ли в пространстве $C^1[a,b]$ принять за норму элемента $x(t)$

A) $\max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$;

B) $\max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

C) $|x(b)-x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

D) $|x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

E) $\int\limits_a^b |x(t)|dt + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$?

3. Будет ли множество всех многочленов в пространстве $C[a,b]$

A) открытым; B) замкнутым?

4. Доказать, что всякое конечномерное линейное многообразие в линейной нормированном пространстве есть подпространство.

5. Пусть X - линейное нормированное пространство. $L \subset X$ - линейное многообразие, $L \neq X$. Доказать, что L не содержит никакого шара.

6. Образуют ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство следующие множества функций:

A) монотонные функции; B) четные функции; C) многочлены; D) непрерывные кусочно-линейные функции?

7. Образуют ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство следующие множества функций:

A) многочлены степени $\leq k$; B) непрерывно дифференцируемые функции; C) непрерывные функции с ограниченной вариацией; D) функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $x(0)=0$?

8. Пусть X - линейное нормированное пространство, множество $A \subset X$ - фиксировано. Доказать, что $f(x) = \rho(x, A)$ - непрерывное отображение X в R.

9. Доказать, что всякое конечномерное линейное нормированное пространство является банаховым.

10. Доказать, что подпространство банахова пространства является банаховым пространством.

11. Может ли в банаховом пространстве иметь пустое пересечение последовательность непустых замкнутых вложенных множеств?

12. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых элементов x, y, z имеет место тождество Аполлония: $\|z-x\|^2+\|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{x+y}{2}\|^2$.

13. Доказать, что для того чтобы элемент x гильбертового пространства H был ортогонален подпространству $L \subset H$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство $\|x\| \leq \|x-y\|$.

14. Доказать, что при фиксированном натуральном n множество $M = x \in l_2$, $x = (x_1, x_2, ...) : \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$ является подпространством пространства l_2.

Описать такое подпространство N, что $l_2 = M \bigoplus N$.

15. В пространстве l_2 рассмотрим последовательность $x_k = (1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{3k}}, ...), k \in N$. Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в пространстве l_2.

16. Доказать, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найти их нормы:
A) $A : C^1[a,b] \to C[a,b], Ax(t) = \frac{dx}{dt}$;
B) $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1], Ax(t) = t \int\limits_0^1 x(\tau)d\tau$.

17. Пусть X и Y - линейные нормированные пространства, $A : X \to Y$ - линейный оператор с областью изменения $R(A)$.
A) Доказать, что $R(A)$ - линейное многообразие в Y.
B) Всегда ли $R(A)$ - подпространство в Y?

18. Доказать, что в банаховом пространстве X для любого $A \in L(X \to X)$ определены операторы $sinA = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $cosA = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$.

19. Пусть X - банахово пространство, $A \in L(X \to X)$. Доказать, что $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$. Найти e^I, где I - тождественный оператор.

20. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + x(t)$ с областью определения $D(A)$ - линейным многообразием дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x'(0) = 0$. Найти A^{-1} и доказать, что он ограничен.

21. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^t e^{-|s-t|}x(s)ds$. Существует ли оператор A^{-1}?

22. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$. Пусть $N(A)$ - ядро оператора A.
A) Доказать, что $N(A) = \{0\}$, так что при любом $y \in C[0,1]$ уравнение $Ax = y$ не может иметь более одного решения.
B) Найти оператор A^{-1} и доказать, что он ограничен.

23. Доказать, что оператор $A : C[0,1] \to C[0,1], Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 e^{s+t}x(s)ds$ имеет ограниченный обратный и найти A^{-1}.

24. Пусть X - комплексное линейное пространство, f - определенный на X и не равный тождественно нулю линейный функционал. Доказать, что область значений f есть все C.

25. Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными непрерывными и найти их нормы:
A) $f(x) = \langle x, f\rangle = 2[x(1) - x(0)]$;
B) $f(x) = \langle x, f\rangle = \int\limits_{-1}^0 x(t)dt - \int\limits_0^1 x(t)dt$.

26. Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными непрерывными и найти их нормы:

A) $f(x)=\langle x,f\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x(t_k)$;

B) $f(x)=\langle x,f\rangle=\int\limits_{-1}^{1}x(t)dt-x(0)$,

где $\alpha_k\in R$, $t_k\in[-1,1]$.

27. Будут ли ограничены в пространстве $C[0,1]$ следующие линейные функционалы:

A) $\langle x,f\rangle=\int\limits_0^1 x(t^2)dt$; B) $\langle x,f\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x(t^n)dt$?

28. Доказать, что следующие функционалы являются линейными непрерывными и найти их нормы:

A) $\langle x,f\rangle=\int\limits_{-1}^{1}tx(t)dt$; $x\in C^1[-1,1]$; B) $\langle x,f\rangle=\int\limits_{-1}^{1}tx(t)dt$; $x\in L_1[-1,1]$.

29. Доказать, что функционал $\langle x,f\rangle=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}$; $x=(x_1,x_2,...)\in l_1$, является линейным непрерывным, и найти его норму.

30. Для $x(t)\in C[-1,1]$ положим $\langle x,f\rangle=\frac{x(-1)+x(1)}{2}+\int\limits_{-1}^{1}tx(t)dt$ Доказать, что f - ограниченный линейный функционал.

31. Найти сопряженный к оператору $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, если

A) $Ax(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$; B) $Ax(t)=\int\limits_0^1 tx(s)ds$.

32. Найти сопряженный к оператору $A:l_2\to l_2$, если

A) $Ax=(x_1,x_2,...,x_n,0,0,...)$;

B) $Ax=(0,x_1,x_2,...)$

при $x=(x_1,x_2,...)$.

33. Найти сопряженный к оператору $A:l_2\to l_2$, если

A) $Ax=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,...)$, $\lambda_n\in R$; $|\lambda_n|\le 1$;

B) $Ax=(x_2,x_3,...)$

при $x=(x_1,x_2,...)$.

34. Какие из следующих операторов $A:C[0,1]\to C[0,1]$ являются вполне непрерывными:

A) $Ax(t)=tx(t)$;

B) $Ax(t)=\int\limits_0^1 x(\tau)d\tau$;

C) $Ax(t)=x(0)+tx(1)$;

D) $Ax(t)=\int\limits_0^1 e^{ts}x(s)ds$;

E) $Ax(t)=x(t^2)$?

35. Будет ли вполне непрерывным оператор $A:C[-1,1]\to C[-1,1]$, $Ax(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$?

36. При каком условии на функцию $\varphi(t)\in C[0,1]$ оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\varphi(t)x(t)$ будет вполне непрерывным?

37. Будет ли вполне непрерывным оператор $Ax(t)=\frac{dx}{dt}$, если он рассматривается как действующий:

A) $A: C^1[0,1] \to C[0,1]$; B) $A: C^2[0,1] \to C^1[0,1]$; C) $A: C^2[0,1] \to C[0,1]$?

38. Сформулировать критерий компактности в l_p. Какие из следующих операторов $A: l_2 \to l_2$ вполне непрерывны (при $x = (x_1, x_2, ...)$):
A) $Ax = (0, x_1, x_2, ...)$; B) $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$; C) $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$?

39. Доказать, что оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...)$ для $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$, где $\lambda_k \in R$, $k \in N$, $\sup_k |\lambda_k| < \infty$, есть самосопряженный оператор. При каком условии на последовательность λ_k он будет неотрицательным?

40. Доказать, что оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = tx(t)$ есть неотрицательный самосопряженный оператор.

41. Доказать, что оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{s+t} x(s) ds$ является самосопряженным и неотрицательным.

42. Пусть $h \in R$, $h \neq 0$ фиксировано. Доказать, что разностный оператор $A: L_2(-\infty, \infty) \to L_2(-\infty, \infty)$, $Ax(t) = \frac{1}{h}[x(t + \frac{h}{2}) - x(t - \frac{h}{2})]$ удовлетворяет соотношению $A = -A^*$.

43. Пусть A - самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, причем $A \neq 0$. Доказать, что если существует ограниченный оператор A^{-1}, то обратный оператор тоже самосопряжен.

44. Пусть A - ограниченный самосопряженный оператор, $\lambda \in C$, $Im\lambda \neq 0$. Доказать, что оператор $(A - \lambda \cdot I)^{-1}$ существует.

45. Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (0, 0, x_3, x_4, ...)$ для $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2$. Доказать, что A самосопряжен в l_2 и $A \geq 0$. Найти оператор $\sqrt{A}$.

46. В вещественном линейном пространстве $C[-\pi, \pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора
A) $Ax(t) = x(-t)$; B) $Ax(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(x + t) x(s) ds$.

47. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = x(0) + tx(1)$. Найти $\sigma(A)$, $r_\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$.

48. Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...)$ для $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$, где $\lambda_n \in C$,$n \in N$, $\sup\limits_n |\lambda_n| < +\infty$. Найти $\sigma(A)$.

49. Доказать, что оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$ для $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ вполне непрерывен и найти его спектр.

50. Доказать, что оператор $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^2 t x(t) dt$ вполне непрерывен и найти его спектр.

51. Доказать, что оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^1 st(1 - st) x(t) dt$ вполне непрерывен и найти его спектр.