Олег Георгиевич Смолянов

Лекции по функциональному анализу

2004г.

Литература

[1] А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, 1968.

[2] В.А.Садовничий. Теория операторов. Москва, 19

[3] Г.Е.Шилов. Математический анализ, специальный курс. Москва, 1961.

[4] А.А.Кириллов,А.А Гвишиани. Задачи и теоремы функционального анализа. Москва, 1988.

[5] Л.А.Люстерник. В.И.Соболев. Элементы функционального анализа. Москва,2000.

[6] В.М.Федоров. Теория функций и функциональный анализ.

[7] К.Иосида. Функциональный анализ. Москва, 19

[8] Р.Эдвардс. Функциональный анализ. Москва, 1967.

[9] У.Рудин. Функциональный анализ.

[10] А.В.Канторович. Г.П.Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.

[11] М.Рид. Б.Саймон. Функциональный анализ. Москва, 1974

[12] Н.Данфорд, Дж.Шварц. Линейные операторы, т1, 1962, т2, 1966, т3, 1974.

1. Метрические пространства

Определение 1. *Метрикой или расстоянием* на множестве E называется функция $\rho\colon\ E\times\ E\to\ \mathbb{R}^{+}$, обладающая следующими свойствами:

1. $\forall x,y,z\in E\quad \rho\left(x,z\right)\leqslant\rho\left(x,y\right)+\rho\left(y,z\right)$ - неравенство треугольника;
2. $\forall x,z\in E\quad \rho\left(x,z\right)=\rho\left(z,x\right)$ - симметрия;
3. $\forall x,z\in E\quad \rho\left(x,z\right)\geqslant 0;\qquad \rho\left(x,z\right)=0\Leftrightarrow x=z.$

Определение 2. *Метрическим пространством* называется множество, на котором определено расстояние. Более формально можно сказать, что *метрическое пространство* — это пара (E,ρ), где E - это множество, элементы которого называются *точками* (или элементами) метрического пространства, и ρ - расстояние на множестве E.

Далее вместо обозначения (E,ρ) мы будем часто использовать обозначение E; кроме того, если в одном и том же множестве E определены два различных расстояния, скажем, ρ и ρ_2, то могут использоваться и другие сокращенные обозначения; например, пространство (E,ρ_2) может обозначаться в этом случае символами E_{ρ_2} или E_2; такие обозначения обычно будут специально оговариваться (см. пример 2).

Примеры:

1. $E=\mathbb{R}^n=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):x_j\in\mathbb{R}^1\right\}$ – множество упорядоченных наборов из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho\left(x,z\right)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\rho\left(x_j-z_j\right)^2}\qquad x,z\in\mathbb{R}^n;$$

Такое метрическое пространство называется *n-мерным арифметическим евклидовым пространством* $\mathbb{R}^n$. В частности, вещественная прямая $\mathbb{R}$ с обычным расстоянием (определяемым равенством $\rho(x,z)=|x-z|$) является метрическим пространством.

2. Пусть $a,b\in\mathbb{R},a<b,C(a,b)$ — множество всех непрерывных вещественных функций на отрезке $[a,b]$ и ρ — расстояние на $C(a,b)$, определяемое равенством $\rho(f,g)=\max\{|f(t)-g(t)|\}$. Тогда $\big(C(a,b),\rho\big)$— метрическое пространство. Это расстояние ρ в пространстве $C(a,b)$ считается каноническим, и поэтому при использовании символа $C(a,b)$ обычно подразумевается, что он обозначает метрическое пространство $\big(C(a,b),\rho\big)$. Метрическое пространство $\big(C(a,b),\rho_2\big)$, где ρ_2— расстояние в том же множестве непрерывных функций на $[a,b]$, определяемое равенством

$$\rho_2(f,g)=\Big(\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

обозначается обычно символом $C_2(a,b)$.

3. (E,ρ) — метрическое пространство, пусть G— подмножество множества E и ρ_G— сужение функции ρ на $G\times G$. Тогда (G,ρ_G)— это метрическое пространство; оно называется *подпространством метрического пространства* E.

4. Пусть (E_1,ρ_1) и (E_2,ρ_2)— метрические пространства, $E=E_1\times E_2$ и ρ— расстояние в E, определяемое равенством

$$\rho\big((x_1,x_2),(z_1,z_2)\big)=\max|\rho(x_1,z_1)-\rho(x_2,z_2)|.$$

Тогда (E,ρ)— это метрическое пространство, называемое *произведением метрических пространств* (E_1,ρ_1) и (E_2,ρ_2). Расстояние ρ в E можно было бы также определить и по-другому, например, с помощью равенства

$$\rho\big((x_1,x_2),(z_1,z_2)\big)=\rho(x_1,z_1)+\rho(x_2,z_2)|$$

или с помощью равенства

$$\rho\big((x_1,x_2),(z_1,z_2)\big)=\Big(\big(\rho(x_1,z_1)\big)^2+\big(\rho(x_2,z_2)\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}};$$

в обоих случаях пространство (E,ρ) будет называться *произведением пространств* (E_1,ρ_1) и (E_2,ρ_2).

Таким образом, не существует канонического выбора растояния в произведении множеств элементов двух метрических пространств; однако, забегая вперед, заметим, что канонический выбор топологии в таком произведении существует, и расстояние в произведении двух метрических пространств всегда выбирается так, чтобы порождаемое им в этом произведении топология была произведением топологий перемножаемых метрических пространств; для только что определенных трех вариантов расстояния в произведении это действительно так. Далее, если не оговорено противное, будет предполагаться, что метрика в произведении метрических пространств определяется первой из приведенных формул.

Пусть (E,ρ)— метрическое пространство.
Открытым шаром радиуса $r>0$ с центром в точке $x\in E$ в метрическом пространстве E называется множество всех элементов этого пространства, расстояние которых до точки x строго меньше r; далее это множество будет обозначаться символом $S(r,x)$. *Замкнутым шаром радиуса* $r\geqslant 0$ с центром в точке $x\in E$ (в метрическом пространстве (E,ρ)) называется множество всех элементов этого пространства, расстояние которых до точки x не превышает r; далее это множество будет обозначаться символом $F(r,x)$ (стоит заметить, что по определению радиус открытого шара всегда положителен, тогда как радиус замкнутого шара может быть равным нулю; замкнутый шар нулевого радиуса содержит только одну точку — свой центр).

Подмножество V метрического пространства E называется *открытым* (в E), если оно является объединением некоторого множества открытых шаров. Таким образом, множество $V\subset E$ открыто в точности тогда, когда для каждого $x\in V$ найдется такое $r>0$, что $S(r,x)\subset V$. Подмножество G метрического пространства E называется *замкнутым*, если его дополнение в E открыто.

Предложение 1. Множество ν_E всех открытых подмножеств метрического пространства E обладает следующими свойствами:
(1) $\varnothing\in\nu$;
(2) $E\in\nu$;
(3) если $\{V_a a\in EuScriptA\}$— семейство открытых подмножеств метрического пространства E, то множество $\bigcup\limits_{a\in\mathcal{A}}V_a$ также является открытым;
(4) если $\{V_j\colon\ j=1,2,\dots,n\}$— конечное семейство открытых подмножеств метрического пространства E, то множество $\bigcap\limits_{j=1}^{n}V_j$ также является открытым.

Это предложение может быть сформулировано и так: объединение произвольного семейства открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств снова являются открытыми множествами (так как объединение пустого семейства каких угодно множеств пусто, а пересечение пустого семейства каких угодно подмножеств рассматриваемого пространства совпадает с этим пространством).

Доказательство:

□ Свойства (1) и (2) вытекают непосредственно из определения открытого множества. Выполнение свойства (3) следует из того, что объединение произвольного семейства множеств, каждое из которых является объединением какого-то множества открытых шаров, снова будет объединением какого-то множества открытых шаров. Докажем (4). Пусть

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} V_j;$$

тогда для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ найдется такое $r_j > 0$ и $x \in E$, что

$$S(r_j, x) \subset V_j;$$

если $r = \min(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, то

$$S(r, x) \subset \bigcap_{j=1}^{n} V_j;$$

это и означает, что множество $\bigcap\limits_{j=1}^{n} V_j$ открыто. ■

Предложение 2. Множество $\mathfrak{F}_E$ всех замкнутых подмножеств метричекого пространства E обладает слудующими свойствами:
(1) $\varnothing \in \mathfrak{F}$;
(2) $E \in \mathfrak{F}$;
(3) если $\{\mathfrak{F}_j\colon\ j = 1, 2, \ldots, n\}$— конечное семейство замкнутых подмножеств метрического пространства E, то множество $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{F}_j$ также является замкнутым.

Это предложение вытекает из предыдущего, формул двойственности для пересечений и объединений множеств, согласно которым дополнение пересечения семейства подмножеств произвольного множества — это объединение дополнений пересекаемых множеств, а дополнение объединения семейства подмножеств произвольного множества — это пересечение дополнений объединяемых множеств, и определения замкнутого множества как дополнение открытого.

Окрестностью точки $x \in E$ называется всякое подмножество пространства E, содержащее открытое подмножество, содержащее точку x. Точка $x \in E$ называется *точкой прикосновения* множества $A \subset E$, если всякая её окрестность содержит хотя бы одну точку этого множества. Точка $x \in E$ называется *предельной точкой множества* $A \in E$, если всякая её окрестность содежит бесконечное множество элементов этого множества.

Упражнение 1. Показать, что точка прикосновения подмножества A метрического пространства, не принадлежащая этому подмножеству, является его предельной точкой.

Предложение 3. Подмножество A метрического пространства E является замкнутым в точности тогда, когда оно совпадает с множеством своих точек прикосновения. Подмножество A метрического пространства E является замкнутым в точности тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Доказательство:

□ Если множество A замкнуто, то его дополнение $E \setminus A$ открыто; поэтому, если

$x \notin A$, то множество $E \setminus A$ является окрестностью точки x, не содержащей ни одного элемента множества A, так что точка x не является точкой прикосновения.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\colon\ n \in \mathbb{R}\}$ элементов пространства E называется *сходящейся* (в E) к точке $x \in E$, если для всякой окрестности W точки x найдется такое натуральное n_0, что, если $n > n_0$, то $x_n \in W$ (то есть, иначе говоря, если всякая окрестность точки x содержит все элементы этой последовательности, за исключением конечного числа).

Упражнение 2. Показать, что любой открытый шар является открытым множеством.

Упражнение 3. Показать, что множество $V \subset E$ метрического пространства (E, ρ) является открытым, если $\forall\, a \in V$, $\exists\, \varepsilon > 0 : F(a, \varepsilon) \subset V$.

Упражнение 4. Доказать, что замкнутый шар является замкнутым множеством.

Определение 4. *Топологией на множестве* E называется семейство τ подмножеств множества E, обладающее следующими свойствами:
(1) $\varnothing, E \in \tau$;
(2) если $\{V_\alpha\colon\ \alpha \in A\}$— некоторое семейство подмножеств множества E, элементы которого принадлежат τ, то $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \in \tau$;
(3) если для $j = 1, 2, \ldots, n$, $V_j \in \tau$, то $\bigcap\limits_{j=1}^{n} V_j \in \tau$. При этом множества из семейства τ называются *открытыми в* E, пара (E, τ) называется *топологическим пространством*, а само множество E— *множеством элементов или точек этого топологического пространства.*

Из предложения 1 вытекает, что, если (E, ρ)— метрическое пространство, то семейство его открытых подмножесв образует топологию τ_ρ на множестве E; говорят, что эта топология определяется метрикой ρ пространства E. Предполагается, что в каждом метрическом пространстве введена топология, определенная его метрикой; таким образом, если (E, ρ)— метрическое прстранство, то множество $V \subset E$ открыто в метрическом пространстве E в точности тогда, когда оно открыто в топологическом пространстве (E, τ_ρ).

Приведенные выше определения замкнутого подмножества, точки прикосновения сходящейся последовательности имеют смысл и для произвольных топологических пространств (топология которых может не порождаться какой-либо метрикой).

Далее мы будем рассматривать большей частью метрические пространства; однако, следует иметь ввиду, что все те утверждения о них, в формулировках которых используются только свойства топологий, порождаемых метрикой, будут также справедливы для произвольных топологических пространств.

Определение 5. Последовательность элементов (x_n) метрического пространства E называется *фундаментальной*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n(\varepsilon) : \forall\, r, k > \ n(\varepsilon) \qquad \rho(x_r, x_k) < \ \varepsilon.$$

Утверждение 1. Всякая сходящаяся последовательность элементов метрического пространства фундаментальна.

Доказательство: $\square$ Пусть $\{z_n\}$ — сходящаяся к $a \in E$ последовательность элементов из E; тогда всякая окрестноть $V(a)$ точки a содержит все z_n, кроме некоторого конечного числа. Значит, $\forall\, \delta > 0\, \exists\, n(\delta)$:

$n > n(\delta) \Rightarrow z_n \in S(a,\delta) \Rightarrow \rho(z_n, a) < \delta$, то есть любой открытый шар с центром с точке a содержит бесконечное число элементов последовательности $\{z_n\}$. Если $n_1 > n(\delta), n_2 > n(\delta)$, то $\rho(z_{n_1}, a) < \delta, \rho(z_{n_2}, a) < \delta$ и в силу неравенства треугольника

$$\rho(z_{n_1}, z_{n_2}) \leqslant \rho(z_{n_1}, a) + \rho(z_{n_2}, a) < 2\delta.$$

А это и означает, что последовательность фундаментальна. ■

Определение 6. Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его элементов сходится. Отметим, что в этом определении существенно используется метрика (а не только топология, так что оно не имеет смысла для произвольных топологических пространств).

Примеры:

1. Пусть $E = \mathbb{R}^1$ и $G = (a,b) \subset \mathbb{R}^1$ с метрикой $\rho(x,z) = |x - z|$, тогда G — неполное метрическое пространство.

2. Пусть $\mathcal{P}$— подпространство пространства $C[a,b]$, состоящее из всех многочленов; тогда $\mathcal{P}$ — неполно.

Упражнение 5. Показать, что $C[a,b]$ с метрикой

$$\rho(\phi, \psi) = \max_{t\in[a,b]} |\phi(t) - \psi(t)| \ -$$

— полное метрическое пространство.

Упражнение 6. Пусть E — метрическое пространство, $a \in E$, тогда $(\ x_j \to a\ ) \Leftrightarrow (\ \rho(x_j, a) \to 0\ )$ (см. замечание после упражнения 9).

Определение 7. Подмножество $K \subset E$ метрического пространства E называется *компактным*, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 8. Множество $K \subset E$ называется *счетно-компактным*, если любое его счетное подмножество имеет хотя бы 1 предельную точку, принадлежащую множеству E.

Упражнение 7. Доказать, что в определении 13 слово "счетное" можно заменить на "бесконечное".

Определение 9. Множество $K \subset E$ называется *секвенциально-компактным*, если любая бесконечная последовательность его элементов содержит сходящуюся к элементу из K подпоследовательность, то есть $\forall\,(x_n) \subset K\,\exists\,(x_{n_j}) : x_{n_j} \to a \in K$.

Определение 10. Множество $K \subset E$ - *предкомпактно*, если $\forall\,\varepsilon > 0$ для K существует конечная ε-сеть, то есть

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in E : K \subset \bigcup_{j=1}^{n} S(a_j, \varepsilon).$$

Теорема 1. Пусть E - метрическое пространство, $K \subset E$, тогда равносильны следующие свойства:

(1) K - компактно;
(2) K - счетно-компактно;
(3) K - секвенциально-компактно;
(4) K - предкомпактно и полно;

Доказательство: □

1. Импликации

$$\begin{array}{ccc} (1) & & (3) \\ & \searrow\!\!\searrow \quad \swarrow\!\!\swarrow & \\ & (2) & \end{array}$$

справедливы для любых топологических пространств.

2. (3) $\Rightarrow$ (2) K - секвенциально-компактно. Докажем, что, если $G \subset K$ счетно, то оно имеет предельную точку.

Если $G \subset K$ - счётно, то можно выбрать последовательность попарно различных элементов $x_1, x_2, \ldots$
$\Rightarrow \quad \forall j \quad x_j \in G$ и $\exists\,(x_{n_j})$ - подпоследовательность : $x_{n_j} \to a \in K \Rightarrow$ любая окрестность точки a содержит все элементы последовательности, за исключением конечного числа $\Rightarrow$ она содержит бесконечно много элементов $\Rightarrow$ точка a - предельная точка множества G, $a \in K \;\Rightarrow K$ — счетно-компактно.

3. (1) $\Rightarrow$ (2) K - компактно. Докажем счетную компактность K от противного.

Пусть K не является счетно-компактным $\Rightarrow \exists$ хотя бы одно бесконечное множество $G \subset K$, не имеющее ни одной предельной точки из $K \;\Rightarrow \forall\, a \in K$ - не предельная точка $\Rightarrow \exists$ открытая окрестность $V(a)$, которая содержит только конечное число точек множества G.

Рассмотрим объединение $\bigcup\limits_{a\in K} V(a)$ по всем точкам $a \in K$, таких окрестностей $V(a)$, которые содержат только конечное число точек множества G. $\bigcup\limits_{a\in K} V(a) \supset K$, — открытое покрытие $\Rightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие: $\bigcup\limits_{j=1}^{n} V(a_j) \supset K \supset G \;\Rightarrow G$ — конечно. Мы получили противоречие $\Rightarrow K$ — счетно-компактно.

4. (2) $\Rightarrow$ (3) Пусть K — счетно-компактно и (x_n)— счётная последовательность элементов из $K \subset E$; нам нужно найти такую подпоследовательность (x_{n_j}) , что $x_{n_j} \to a$, где $a \in K$. Возможны два варианта:

А. Пусть (x_n) содержит конечное число различных элементов $\Rightarrow \exists$ точка a, повторяющаяся бесконечное число раз и $x_{n_j} = a \Rightarrow x_{n_j} \to a$.

Б. Пусть последовательность (x_n) содержит бесконечное количество попарно различных элементов. Обозначим это множество через S. Так как K - счетно-компактно и S – бесконечно, то $\exists\, a \in K : a$ - предельная точка множества $S \Rightarrow \forall\, j \in \mathbb{N}\; \exists$ элемент $x_{n_j} \in S : \rho(x_{n_j}, a) < \frac{1}{j}$. Без ограничения общности, можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \Rightarrow (x_{n_j})$ образует подпоследовательность и $x_{n_j} \to a$. Это и есть искомая подпоследовательность.

5. (2) $\Rightarrow$ (4) Пусть K - счетно-компактно.

А. Докажем от противного, что K - предкомпактно.

Пусть K - не предкомпактно $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : K$ нельзя покрыть конечным числом шаров радиуса $r < \varepsilon$. Возьмем $x_1 : S(x_1, \varepsilon) \not\supset K \Rightarrow \exists\, x_2 : \rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$ и шары $S(x_1, \varepsilon), S(x_2, \varepsilon)$ не покрывают K

$$\Rightarrow \exists\, x_3 : \rho(x_1, x_3) \geqslant \varepsilon; \qquad \rho(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon \Rightarrow \ldots$$

Таким образом, мы получим последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots \in K$ такую, что попарные расстояния $\rho(x_j, x_i) \geqslant \varepsilon \Rightarrow$она не имеет ни одной предельной точки — противоречие с условием счётной компактности.

Б. Теперь докажем, что K - полно.

По условию нам дано, что K - секвенциально-компактно и $(x_n) \subset K$ — фундаментальная последовательность $\Rightarrow$ существует подпоследовательность $x_{n_j} : x_{n_j} \to a \in K$. Последовательность (x_n) фундаментальна, $\Rightarrow \exists\, n_1 : i, j > n_1 \Rightarrow \rho(x_i, x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так как
$$x_{n_j} \to a \in K \Rightarrow \exists\, j_0 : j \geqslant j_0 \Rightarrow \rho(x_{n_j}, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем n :

$$n > j_o, n > n_1 \Rightarrow \rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_n, x_{n_{j_0}}) + \rho(x_{n_{j_0}}, a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (x_n) \to a$$

$\Rightarrow K$ - полно.

Итак, мы доказали следующие импликации:

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{Полнота}} & \Longleftarrow & \boxed{\text{Секвенциальная компактность}} & & \\
 & & \Uparrow\Downarrow & & \\
 & & \boxed{\text{Счетная компактность}} & \Longleftarrow & \boxed{\text{Компактность}} \\
 & & \Downarrow & & \\
 & & \boxed{\text{Предкомпактность}} & &
\end{array}$$

6. (4) $\Rightarrow$ (1) Пусть K - полно и предкомпактно. Будем доказывать от противного.

Пусть K - некомпактно $\Rightarrow$ $\exists$ такое, что открытое покрытие $\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha \supset K$, для некоторого не существует никакого конечного подпокрытия: $\bigcup\limits_{\beta} V_\beta \supset K$.

Поскольку K - предкомпактно, то $\forall n: \ K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{j(n)} F(\frac{1}{n}, a_j) \ \Rightarrow \ \exists\, F(1, a_{j_1})$, которое не покрывается никаким конечным числом открытых множеств.

$$F(1, a_{j_1}) \subset \bigcup_{j=1}^{j(2)} (F(\frac{1}{2}, a_j) \cap F(1, a_{j_1})) \Rightarrow$$

$\exists\, F(\frac{1}{2}, a_{j_2}) \bigcap F(1, a_{j_1})$, которые не покрываются конечным числом открытых множеств V_α;

$F(\frac{1}{2}, a_{j_2}) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{j(4)} (F(\frac{1}{4}, a_{j_3}) \cap F(\frac{1}{2}, a_{j_2}) \cap F(1, a_{j_1}))$ — не покрывается $\ \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

Получаем последовательность

$F(1, a_1)$,

$F(\frac{1}{2}, a_{j_2}) \cap F(1, a_{j_1})$,

$F(\frac{1}{4}, a_{j_3}) \cap F(\frac{1}{2}, a_{j_2}) \cap F(1, a_{j_1})$,

$\ldots$

замкнутых множеств, вложенных друг в друга, диаметры которых стремятся к нулю. Ни одно из них не покрывается конечным числом открытых множеств.Поскольку K - полно, то пересечение b полученных множеств непусто (см. ниже лемму 1). Так как объединение (V_α)— покрывает все K, то $b \in V_\alpha$ для какого-то α, а поскольку V_α - открытое множество, то $b \in S(\varepsilon, b) \subset V_\alpha$. Так как диаметр полученных множеств $\to 0 \Rightarrow$ когда диаметр множества станет $< \varepsilon$, то множество, содержащее b, будет целиком внутри шара $\Rightarrow$ мы пришли к противоречию, поскольку выбирали множества, которые нельзя было бы покрыть конечным числом шаров $\Rightarrow K$ — компактно. ■

Лемма 1. Если E - полное метрическое пространство,

$$E \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots -$$

– последовательность вложенных друг в друга замкнутых множеств и $\operatorname{diam} F_j \to 0$, то $\bigcap F_j \neq \varnothing$ (для каждого подмножества A метрического пространства его диаметр $\operatorname{diam} A$ определяется равенством $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x_1, x_2 \in A} \rho(x_1, x_2)$).

Доказательство:

$\square$ Пусть $x_j \in F_j$, где x_j - центр шара F_j; так как $\operatorname{diam} F_j \to 0, \Rightarrow$ последовательность (x_j) фундаментальна. Далее, так как E - полно $\Rightarrow \exists\, a \in E : a = \lim(x_j)$.

Отсюда следует, что $\forall\, k$, при $j > k \Rightarrow x_j \in F_k \Rightarrow a \in F_k$, так как F_k замкнуто. $\blacksquare$

Упражнение 8. Привести пример полного метрического пространства E и в нем последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров

$$F(\varepsilon_1, a_1) \supset F(\varepsilon_2, a_2) \supset F(\varepsilon_3, a_3) \supset \ldots$$

таких, что $\varepsilon_j \not\to 0$ и $\bigcap F(\varepsilon_j, a_j) = \varnothing$.

Теорема 2. Пусть E - метрическое пространство.

E полно $\iff$ любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.

Доказательство: $\square$

$\boxed{\Rightarrow}$ Смотри Лемму 1.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть (x_j) - фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет предел. В силу фундаментальности мы можем выбрать такую точку x_{j_1} нашей последовательности, что $\rho(x_j, x_{j_1}) < \frac{1}{2}$ при всех $j \geqslant j_1$. Примем точку x_{j_1} за центр замкнутого шара F_1 радиуса 1. Выберем затем x_{j_2} из (x_j) так, чтобы было $j_2 > j_1$ и $\rho(x_j, x_{j_2}) < \left(\frac{1}{2}\right)^2$ при всех $j \geqslant j_2$. Примем точку x_{j_2} за центр шара радиуса $\frac{1}{2}$ и обозначим этот шар F_2. Если члены $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$ уже выбраны $(j_1 < j_2 < \ldots < j_k)$, то выберем член $x_{j_{k+1}}$ так, чтобы было $j_{k+1} > j_k$ и $\rho(x_j, x_{j_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ при всех $j \geqslant j_{k+1}$, и окружим его замкнутым шаром F_{k+1} радиуса $\frac{1}{2^k}$. Продолжая это построение, получим последовательность замкнутых шаров F_k, вложенных друг в друга, причем шар F_k имеет радиус $\frac{1}{2^{k-1}}$. Эта последовательность шаров имеет по предположению общую точку a. Ясно, что эта точка a служит пределом подпоследовательности x_{j_k}. Но если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся к a подпоследовательность, то она сама сходится к тому же пределу.

Таким образом, $a = \lim_{j\to\infty} x_j$ $\blacksquare$

Определение 11. Отображение $f\colon E \to G$ называется *непрерывным в точке* $x \in E$, если $\forall$ окрестность $\vee(f(x))\,\exists$ окрестность $\mathcal{U}(x)$:

$$f(\mathcal{U}(x)) \subset V(f(x)).$$

Предложение 1. Отображение $f\colon E \to G$ - непрерывно в каждой точке $\iff$ прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества $V \subset G$ - открыт в E.

Доказательство: $\square$

$\Rightarrow$ Пусть f - непрерывно в каждой точке $a \in f^{-1}(V)$. Надо доказать, что $\exists\,\varepsilon > 0 : \quad S(\varepsilon, a) \subset f^{-1}(V)$. f - непрерывна и в точке $a \Rightarrow \exists$ окрестность $W(a) : f(W(a)) \subset V$; $W(a)$— можно взять открытой $\Rightarrow$ внутри найдется шар $S(\varepsilon, a) \subset W(a) \Rightarrow f(S(\varepsilon, a)) \subset V \Rightarrow S(\varepsilon, a) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow$ мы нашли открытый шар $S(\varepsilon, a)$. Таким образом, f - непрерывно в каждой точке $\Rightarrow$ прообраз открытого пространства является открытым множеством.

$\Leftarrow$ Сделать как упражнение. $\blacksquare$

Упражнение 9. Отображение f - непрерывно в любой точке $\iff$ прообраз любого замкнутого множества $V \subset G$ является замкнутым в E.

Замечания:

1. E - метрическое пространство.

$$E \ni x_n \to x \in E \Longleftrightarrow \rho(x_n, x) \to 0.$$

Доказательство: $\Longrightarrow$ Если $x_n \to x \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 : \forall\, n > n_0$

$$\Rightarrow x_n \in S(\varepsilon, x) \Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

2. $F\colon E \to G$ - непрерывно в точке $x \Longleftrightarrow$ из того, что $x_n \to x$ следует, что $F(x_n) \to F(x)$, что эквивалентно:

$$\rho(x_n, x) \to 0 \Rightarrow \rho(F(x_n)F(x)) \to 0.$$

Доказательство: $\square$ Докажем замечание 2.

$\Rightarrow$ F - непрерывно в точке $x \Rightarrow \forall$ окрестность $F(x)$ $\exists$ окрестность $(W(x)$:

$$\forall\, z \in W(x) \Rightarrow F(z) \in \vee(F(x)).$$

Таким образом, если $x_n \to x$, то

$$\exists\, n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n \in W(x) \Rightarrow F(x_n) \in \vee(F(x)) \Rightarrow F(x_n) \to F(x).$$

$\Leftarrow$ Нам дано по условию, что $x_n \to x \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$. Докажем от противного. Пусть F - не непрерывно в точке $x \Rightarrow$

$$\exists \vee (F(x)) : \forall W(x)\, \exists\, z \in W(x) \Rightarrow F(z) \notin \vee(F(x)).$$

В качестве $W(x)$ будем брать шары $S(\frac{1}{n}, x)$; таким образом, $\exists \vee(F(x)) : \forall\, n \quad \exists\, z_n \in S(\frac{1}{n}, x)$ такую, что

$$F(z_n) \notin \vee(F(x)) \Rightarrow F(z_n) \not\to F(x).$$

Таким образом, $\rho(z_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, так что $z_n \to x$, но $F(z_n) \not\to F(x)$. $\blacksquare$

Теорема 3. Пусть K - компактное метрическое пространство, G - метрическое пространство. Отображение $f\colon K \to G$ - непрерывно $\Rightarrow f(K)$ - компактное подмножество.

Доказательство:

$\square$ Пусть V_α — открытые множества в G и $f(K) \subset \bigcup\limits_\alpha V_\alpha \Rightarrow \bigcup\limits_\alpha (f^{-1}V_\alpha) \supset K$ и из $\bigcup\limits_\alpha (f^{-1}V_\alpha)$ можно извлечь конечное подпокрытие.

Получим $\bigcup\limits_{j=1}^{n} (f^{-1}V_\alpha) \supset K \Rightarrow \bigcup\limits_j V_{\alpha_j} \supset f(K) \Rightarrow f(K)$ - компактно. $\blacksquare$

Определение 12. Если K — подмножество метрического пространства E и G — произвольное метрическое пространство, тогда отображение $F\colon E \to G$ - равномерно непрерывно, если:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : x_1, x_2 \in E, \rho_E(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho_G(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon.$$

Теорема 4. Если K — компактное метрическое пространство,
$F\colon K \to G$ — непрерывно, тогда F — равномерно непрерывно.

Доказательство: $\square$ Докажем от противного.

Предположим, что F — непрерывно, но не является равномерно непрерывным $\Rightarrow$

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\, \exists\, x, z \in K \quad \rho_K(x, z) < \delta, \text{но } \rho_G(F(x), F(z)) > \varepsilon.$$

Поэтому

$$\exists\,\varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n, z_n \in K \quad \rho_K(x_n, z_n) < \frac{1}{n},\ \text{но}\ \rho_G(F(x_n), F(z_n)) > \varepsilon.$$

Из компактности K следует, что из последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{n_i}: $x_{n_i} \to x; x \in K$. Тогда, так как $\rho(x_{n_i}, z_{n_i}) \to 0 \Rightarrow z_{n_i} \to x$. Из непрерывности F и того факта, что $x_{n_i} \to x \Rightarrow$

$$\rho(F(x_{n_i}), F(x)) \to 0;\ \text{аналогично},\ \rho(F(z_{n_i}), F(x)) \to 0, \quad \Rightarrow$$

По неравенству треугольника:

$$\rho(F(x_{n_i}), F(z_{n_i})) \leqslant \rho(F(x_{n_i}), F(x)) + \rho(F(z_{n_i}), F(x)) \to 0,\ \text{но}$$

$$\rho(F(x_{n_i})), F(z_{n_i}) > \varepsilon \Rightarrow\ \text{противоречие.} \quad \blacksquare$$

Определение 13. Пусть E - метрическое пространство,тогда множество $A \subset E$ - называется *редким* или *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит никакого непустого открытого шара.

Пример: Одноточечное множество метрического пространства, состоящее из конечного числа точек, не является редким.

Теорема 5: (Бэра). Никакое полное метрическое пространство E не является объединением не более чем счетного множества замкнутых редких множеств.

Доказательство:

$\square$ Докажем теорему от противного. Если теорема неверна, то E можно представить в виде: $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n - редкие замкнутые множества. Поскольку A_1 — редкое $\Rightarrow$ A_1 не содержит никакого открытого множества. Значит, $A_1 \neq E$, так как E — открыто $\Rightarrow \exists\, x_1 \notin A_1$, $x_1 \in E$. Так как A_1 — замкнуто, то $\exists r_1 > 0$: $S(r_1, x_1) \cap A_1 = \varnothing$, и $F(r_1, x_1) \cap A_1 = \varnothing$. ($S(r_1, x_1)$— открытый шар и $F(r_1, x_1)$— замкнутый шар радиуса r_1 с центром в точке x_1). Опираясь на тот факт, что A_2 — редкое множество, видим, что $A_2 \not\supset S(r_1, x_1) \Rightarrow$

$$\exists x_2 \notin A_2 \text{ и } x_2 \in S(r_1, x_1).$$

Так как A_2 — замкнуто, то $\exists r_2$: $S(r_2, x_2) \cap A_2 = \varnothing$, и $F(r_2, x_2) \cap A_2 = \varnothing$ и так далее. В итоге получим последовательность замкнутых шаров $F(r_n, x_n)$:

$F(r_n, x_n) \cap A_n = \varnothing$ для любого n, причем каждый из этих шаров будет содержаться в предыдущем шаре $F(r_1, x_1) \supset F(r_2, x_2) \supset \ldots$ Можем и будем считать, что $\forall n \quad r_n < \frac{1}{n} \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F(r_n, x_n) \neq \varnothing$ (в силу полноты).

Таким образом, мы имеем хотя бы один элемент x множества

$$E\colon\ \forall n \quad x \in F(r_n, x_n) \Rightarrow \forall n \quad x \notin A_n,$$

но это противоречит условию, что $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ $\blacksquare$

Упражнение 10. Привести примеры:
А. неполного метрического пространства, в котором теорема Бэра неверна;
Б. неполного метрического пространства, в котором теорема Бэра верна.

Определение 14. Отображение $F\colon E \to E$ называется *сжимающим*, если $\exists \alpha\, 0 \leqslant \alpha < 1 : \forall\, x, z \in E \quad \Longrightarrow$

$$\rho(F(x), F(z)) \leqslant \alpha\rho(x, z).$$

Отметим, что сжимающее отображение непрерывно.

Определение 15. Точка x называется *неподвижной точкой отображения* F, если $F(x) = x$.

Теорема 6: (Теорема Пикара — Принцип сжимающих отображений). Пусть E - полное метрическое пространство. Тогда всякое сжимающее отображение E в себя имеет ровно одну неподвижную точку.

Доказательство: $\square$

1. Пусть $F\colon E \to E$ – сжимающее отображение E в себя. Построим последовательность:

$$x_0 \in E, x_1 = F(x_0), x_2 = F(x_1), \ldots, x_n = F(x_{n-1}) \ldots$$

Пусть доказано, что последовательность $\{x_n\}$ - фундаментальна, тогда из полноты пространства E следует, что $\exists\, x : x_n \to x$. Докажем, что x - искомая неподвижная точка, то есть $F(x) = x$.

Условие того, что x – неподвижна, можно записать таким образом: $\rho(F(x), x) = 0$. По построению F и фундаментальной последовательности x_n запишем:

$$\begin{array}{ccccc} F(x_n) = x_{n+1} \to x & \Longrightarrow & \rho(F(x_n), x_n) & \longrightarrow & \rho(x, x) = 0 \\ & & \big\downarrow & & \\ & & \rho(F(x), x) & & \end{array}$$

$\rho(F(x_n), x_n) \;\to\; \rho(x, x) = 0$— так как ρ непрерывно, $\rho(F(x_n), x_n) \;\to\; \rho(F(x), x)$— так как F и ρ непрерывны. Таким образом, $\rho\,(F(x), x) = 0$, что доказывает, что x — искомая неподвижная точка.

2.Докажем единственность неподвижной точки x.

Пусть существует 2 неподвижные точки $x, z \Rightarrow F(x) = x, F(z) = z$. Рассмотрим расстояние между x и z:

$$\rho\,(x, z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{так как } x, z \text{ -} \\ \text{- неподвижны;}}}{=\!=\!=} \rho\,(F(x), F(z)) \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{так как } F \text{ -} \\ \text{- сжимающее отображение;}}}{\leqslant} \quad \alpha\rho\,(x, z).$$

$\rho\,(F(x), F(z)) \;\leqslant\; \alpha\, \rho\,(x, z)$ – это неравенство выполнено только, если

$$\rho\,(x, z) = 0 \Rightarrow x \equiv z.$$

3. Осталось доказать, что $\{x_n\}$ фундаментальна. По построению, $x_0 \in E$; $x_{n+1} = F(x_n)$, тогда

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(F(x_n), F(x_{n-1})) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n\rho(x_1, x_0);$$

$$\rho(x_{n+k}, x_n) \leqslant \rho(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \rho(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n)) -$$

— по неравенству треугольника;

Таким образом, мы получим:

$$\rho(x_{n+k}, x_n) \leqslant \alpha^{n+k-1}\rho(x_1, x_0) + \alpha^{n+k-2}\rho(x_1, x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha^n \rho(x_1, x_0) \leqslant \alpha^n \rho(x_1, x_0) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \rho(x_1, x_0)\tfrac{\alpha^n}{1-\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

Упражнение 11. Привести пример неполного метрического пространства, в котором любое сжимающее отображение имеет неподвижную точку и пример неполного пространства, в котором некоторые сжимающие отображения не имеют неподвижных точек.

Замечания:

1. Если $\alpha = 1$, то может случиться отображение $F\colon\ E \to E$, удовлетворяющее условию:

$$\rho(F(x), F(z)) < \rho(x, z),$$

но не имеет неподвижной точки.

2.Если пространство E компактно, и отображение $F\colon E \to E$ удовлетворяет условию:

$$\rho(F(x), F(z)) < \rho(x, z),$$

то оно имеет неподвижную точку.

2. Нормированные линейные пространства.

Определение 1. Пусть E - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Нормой на* E называется функция $\|x\|$, $E \ni x \to \|x\| \in \mathbb{R}^+$, обладающая свойствами:

А. $\forall\, x \Rightarrow \|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

Б. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

В. $\forall\, x_1, x_2 \Rightarrow \|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$.

Определение 2. *Нормированным линейным пространством* называется линейное пространство, на котором определена норма.

На всяком нормированном пространстве вводится метрика

$$\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ оно становится метрическим пространством.

Определение 3. Полное нормированное линейное пространство называется *банаховым пространством.*

Далее мы будем рассматривать, если не оговорено противное, линейные пространства на $\mathbb{R}$.

Упражнение 1. Привести пример неполного нормированного линейного пространства.

Примеры:

1. $(C[a, b],\ \|.\|) = C[a, b]$ - пространство вещественных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с нормой:

$$\|f\|_1 = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|;$$

2. $C_2[a, b]$, – то же пространство вещественных непрерывных функций, но с другой нормой:

$$\|f\|_2 = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

Упражнение 2: Доказать, что $\|f\|_1$ и $\|f\|_2$ — нормы на $C[a, b]$, причем пространство $C_1[a, b]$ — полно, а $C_2[a, b]$ — неполно.

3. Обобщение предыдущего примера. $C_p[a, b], \quad \|f\|_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$ (это пространство также неполно);

4. Пусть Ω — абстрактное множество, $B(\Omega)$ — множество всех ограниченных функций на Ω, $f \in B(\Omega)$, тогда нормой на этом множестве является:

$$\|f\| = \sup_{w \in \Omega} |f(x)|;$$

5. Рассмотрим в качестве Ω множество натуральных чисел $\Omega = \mathbb{N}$,

$B(\Omega) = l_\infty$ — множество всех ограниченных функций $\big($или что то же самое, множество всех ограниченных последовательностей $l_\infty \ni (x_n)\big)$, $\qquad \|x_n\| = \sup\limits_n |x_n|$;

6. $c_0 \subset l_\infty$, где c_0 — множество всех ограниченных последовательностей, которые стремятся к нулю, то есть

$$c_0 = \{(x_n) \in l_\infty \mid x_n \to 0\};$$

Нормой на этом множестве является сужение на c_0 нормы на l_∞;

7. l_p - множество всех тех последовательностей вещественных чисел, которые обладают таким свойством:

$$\sum_n |x_n|^p < \infty \quad (x_n) \in l_p \quad p \in [1, \infty),$$

$$\text{тогда нормой является} \quad \|(x_n)\|_{l_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Упражнение 3: Показать, что пространства из примеров 4-7 являются полными.

Определение 4. Пусть $(E, \|.\|)$ — нормированное линейное пространство, и $G \subset E$ — линейное подпространство пространства E. Тогда $(G, \|.\|)$ - нормированное пространство, которое называется *подпространством нормированного линейного пространства* E.

Определение 5. Пусть $(E_1, \|.\|_1), (E_2, \|.\|_2)$ — нормированные линейные пространства. *Их произведением* называется линейное нормированное пространство $(E_1 \times E_2,\ \|.\|_{12})$, где $\|(x_1, x_2)\|_{12} = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$ или $\|(x_1, x_2)\|_2 = \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)$. Обе эти нормы задают одну ту же топологию на произведении.

Определение 6. Пусть E, G — нормированные линейные пространства. Отображение $A\colon E \to G$ называется *ограниченным*, если образ каждого ограниченного подмножества из E является ограниченным подмножеством в G. Множество всех линейных ограниченных отображений из E в G обозначается символом $\mathcal{L}(E, G)$.

Множество $\mathcal{L}(E, G)$ является линейным пространством относительно операций, определяемых так:
(1) $(\alpha A)x = \alpha(Ax) \quad (\alpha \in \mathbb{R}^1,\ x \in E)$;
(2) $(A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x$.

Предложение 1. Функция

$$\mathcal{L}(E, G) \ni A \mapsto \|A\| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|Ax\|_G$$

представляет собой норму на $\mathcal{L}(E, G)$.

Доказательство: $\square$
1. Из ограниченности A вытекает, что $\|A\| < \infty$; далее, очевидно, что:
$\|A\| \geqslant 0; \qquad \|A\| = 0 \iff A = 0$;

2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, так как

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|\alpha Ax\|_G = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |\alpha|\|Ax\|_G = |\alpha| \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|Ax\|_G = |\alpha|\|A\|;$$

3. $\|A_1 + A_2\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|$, так как $\|A_1 + A_2\| = \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|(A_1 + A_2)x\|_G =$
$= \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|A_1x + A_2x\|_G \leqslant \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|A_1x\|_G + \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|A_2x\|_G = \|A_1\| + \|A_2\|$;

Таким образом, мы доказали, что $\|A\|$ – норма. $\blacksquare$

Определение 7. Далее всегда предполагается, что линейное пространство $\mathcal{L}(E, G)$ всех ограниченных отображений (операторов) из E в G наделено только что определенной нормой.

Утверждение 1. Отображение $A\colon E \to G$ одного нормированного линейного пространства в другое непрерывно в точности тогда, когда оно ограничено.

Доказательство: $\square$

1. $\Leftarrow$ Пусть отображение A ограничено, тогда

$$\Big(\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall\, x\in S(1,0),\ Ax\in S(\|A\|,0)\Big) \Longleftrightarrow$$

$$\Big(x\in S(\tfrac{\varepsilon}{\|A\|},0) \quad \Rightarrow Ax\in S(\varepsilon,0)\Big).$$

Отсюда следует, что A - непрерывно в нуле,
Теперь докажем, что любое отображение $A\colon E\to G$, непрерывное в нуле, непрерывно всюду. То, что A — непрерывно в нуле, означает, что:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\colon\ \|x\|<\delta\ \Rightarrow\ \|Ax\|<\varepsilon,\ \text{поэтому, если}\ \|x-x_0\|<\delta,\ \text{то}$$

$\|A(x-x_0)\| = \|Ax-Ax_0\|<\varepsilon\Rightarrow A$ — непрерывно всюду.

2. $\Rightarrow$ Пусть отображение A непрерывно всюду, тогда отображение A — непрерывно и в нуле, что означает, что

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\delta>0\ \text{такое, что}\quad \|x\|<\delta\Rightarrow\|Ax\|<\varepsilon.$$

Но

$$\sup_{\|x\|<\delta}\|Ax\|<\varepsilon\Rightarrow\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta}<\infty \quad \blacksquare$$

Упражнение 4. Доказать, что $(\mathcal{L}(E,G),\|.\|)$ — полно.

Теорема 1.(Теорема Банаха-Штейнхауза — Принцип равномерной ограниченности). Пусть E — банахово пространство, G - произвольное нормированное линейное пространство и $\mathcal{A}\subset\mathcal{L}(E,G)$, причем $\forall x\in E \quad \sup\limits_{A\in EuScriptA}\|Ax\|_G<\infty$:

$$\text{Тогда}\ \sup_{A\in EuScriptA}\|A\|<\infty$$

Иначе говоря,

$$\sup_{A\in EuScriptA}\ \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|<\infty$$

Этим и объясняется название — *принцип равномерной ограниченности.*

Короче это можно сформулировать так: если множество $\mathcal{A}\subset\mathcal{L}(E,G)$ поточечно ограничено, то оно ограничено по норме.

Доказательство:

$\square$ Пусть W — замкнутый единичный шар в G с центром в нуле:

$$W=\{z\in G,\|z\|_{_G}\leqslant 1\}.$$

Рассмотрим $\bigcap\limits_{A\in EuScriptA} A^{-1}(W)$.

Так как отображения $A\in EuScriptA$ непрерывны, то множества

$$A^{-1}(W)\ \text{— замкнуты,а значит,}\ \bigcap_{A\in EuScriptA}A^{-1}(W)\ \text{— тоже замкнуто.}$$

Из условия теоремы вытекает, что $\forall x\in E \quad \sup\limits_{A\in EuScriptA}\|Ax\|=C_x<\infty$, а, следовательно, $\forall x\in E\ \exists n\in\mathbb{N}: A\in EuScriptA\Rightarrow\|A_\alpha(\frac{x}{n})\|\leqslant 1$. Заметим, что

$$A(\frac{x}{n})\in W\Rightarrow\quad\frac{x}{n}\in A^{-1}(W),$$

а, значит, и $\frac{x}{n} \in \bigcap\limits_{A\in EuScriptA} A^{-1}(W) \Longleftrightarrow x \in n \bigcap\limits_{A\in EuScriptA} A^{-1}(W)$; следовательно,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} n\Big(\bigcap_{A\in EuScriptA} A^{-1}(W)\Big) = E.$$

Таким образом, по теореме Бэра $\exists\, n_0$ и $\exists V$ - открытое множество в E:

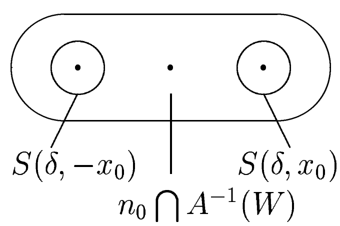
$$\Big(n_0 \bigcap_{A\in EuScriptA} A^{-1}(W)\Big) \supset V \supset \{x\colon \|x - x_0\| < \delta\} = S(\delta, x_0).$$

Теперь вспомним, что W - шар, то есть W — симметрично $\Rightarrow$ и его прообраз симметричен, а значит, $n_0 \bigcap\limits_{A\in EuScriptA} A^{-1}(W)$ — тоже симметрично, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad V \supset S(\delta, -x_0).$$

Определение 8. Множество D называется *выпуклым*, если $\forall\, x_1, x_2 \in D$ оно целиком содержит отрезок, из соединяющий

$$\{\tau x_1 + (1-\tau)x_2\colon \tau \in [0,1]\}.$$



Вернемся к доказательству теоремы. Множества $A^{-1}(W)$ выпуклы (так как W — шар) и, значит, $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A^{-1}(W)$ — тоже выпукло. Поэтому

$$\frac{1}{2}\big(S(\delta,-x_0) + S(\delta, x_0)\big) = S(\delta, 0) \ \subset n_0 \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{-1}(W).$$

$$\bigcap_{A^{-1}(W)} A^{-1}(W) \supset S(\frac{\delta}{n_0}, 0),$$

откуда вытекает, что

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad A(S(\frac{\delta}{n_0}, 0)) \subset W \Rightarrow \ \forall A \in \mathcal{A} \quad \sup_{\|x\|<\frac{\delta}{n_0}} \|Ax\| \leqslant 1 \quad \text{а, значит,}$$

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \frac{n_0}{\delta}, \qquad \text{то есть} \qquad \sup_{A\in\mathcal{A}} \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \frac{n_0}{\delta} < \infty$$

Что и доказывает ограниченность множества A по норме в $\mathcal{L}(E, G)$. ■

Упражнение 5.

1. В условии теоремы Банаха-Штейнхауза показать, что полнота E существенна;
2. Показать, что существует неполное E такое, что теорема Банаха-Штейнхауза будет для него справедлива.

Теорема 2. Если E — произвольное нормированное линейное пространство, а G — банахово пространство, то $\mathcal{L}(E,G)$ — банахово.

Доказательство:

$\square$ Пусть $A_n \in \mathcal{L}(E,G)$ — фундаментальная последовательность, то есть:

$$\|A_{n+k} - A_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ равномерно по } k \in \mathbb{N}.$$

$$\sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|A_{n+k}x - Ax\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ равномерно по } k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \quad \|A_{n+k}x - A_n x\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ равномерно по } k \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \forall x \quad \{A_n x\} \subset G$ — фундаментальна в G, поэтому $\exists$ элемент $Ax \in G$ такой, что $A_n x \to Ax$ при $n \to \infty$.

Теперь докажем непрерывность $A\colon\ x \mapsto Ax$.

1. Из линейности A_n следует линейность A. Доказательство этого факта оставляется в качестве упражнения.

2. Поскольку последовательность A_n — фундаментальна в $\mathcal{L}(E,G)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0\colon\ n > n_0\colon \quad \|A_{n+k} - A_n\| \leqslant \varepsilon \text{ сразу для всех } k.$$

Зафиксируем n, тогда справедливо неравенство:

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|A_{n+k}x - A_n x\| \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \forall x : \|x\| \leqslant 1, \quad \|A_{n+k}x - A_n x\| \leqslant \varepsilon.$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$:

$$\|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon \, \forall n > n_0, \, \forall x : \|x\| \leqslant 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax - A_n x\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A - A_n)x\| \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$\forall n > n_0 \quad \|A - A_n\| \leqslant \varepsilon \ \Rightarrow\ A - A_n$ — непрерывный оператор, а, следовательно, и $A = (A - A_n) + A_n$ — непрерывный линейный опреатор. $\blacksquare$

Определение 9. Пусть $G = \mathbb{R}^1$, тогда $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}^1) = E^*(= E')$ — банахово пространство, называемое *сопряженным* к нормированному линейному пространству E. Элементы этого пространства называются *линейными функционалами* на E.

Определение 10. Функционал p на линейном пространстве (без нормы) называется *выпуклым*, если он обладает слудующими свойствами:

А. $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall \alpha \leqslant 0 \quad \forall x \in E$;

Б. $\forall x_1, x_2 \in E \quad p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$.

Теорема 3.(Хана-Банаха) Пусть $E_1 \subset E$ — подпространство линейного пространства E, p — выпуклый функционал на E и f_0 — линейный функционал на E_1 такой, что $\forall x \in E_1 \quad f_0(x) \leqslant p(x)$. Тогда f_0 можно продолжить до линейного функционала f на E с сохранением линейности и выполнением последнего неравенства:

$$\exists f\colon E \to \mathbb{R}^1 \text{ такой, что } \forall x \in E \quad f(x) \leqslant p(x) \text{ и } \forall x \in E_1 \quad f(x) = f_0(x).$$

Доказательство: $\square$

1. Аналитическая часть.

Пусть $z \in E$, $z \notin E_1$. Рассмотрим пространство $\operatorname{span}(E_1, z) = E_2$, $E_2 \subset E$, то есть наименьшее линейное пространство, содержащее E_1 и z. Произвольный элемент t из E_2 имеет вид:

$$tz + x, \ t \in \mathbb{R}^1, \ x \in E_1;$$

При этом должно выполняться неравенство:

$$f(tz+x) \leqslant p(tz+x)$$

Но

$$f(tz+x) = f(tz) + f(x) = tf(z) + f_0(x).$$

Положим $f(z) = C$. Теперь надо определить число C так, чтобы при всех $z \in E_1$ и всех $t \in \mathbb{R}$ выполнялось неравенство

$$f_0(x) + tC \leqslant p\,(x+tz).$$

Рассмотрим два случая:
1. $t > 0 \Rightarrow C + f_0\left(\frac{x}{t}\right) \leqslant p\left(z + \frac{x}{t}\right)$;
2. $t < 0 \Rightarrow C + f_0\left(\frac{x}{t}\right) \geqslant -\left(-\frac{1}{t}p\,(tz+x)\right) = -p\left(-z - \frac{x}{t}\right)$.
Из 1. $\quad C \leqslant -f_0\left(\frac{x}{t}\right) + p\left(z + \frac{x}{t}\right)$;
Из 2. $\quad C \geqslant -f_0\left(\frac{x}{t}\right) - p\left(-z - \frac{x}{t}\right)$;
Таким образом, можно записать двойное неравенство (заменив $\frac{x}{t}$, соответственно на x_1 и на x_2):

$$-f_0(x_1) - p\,(-z - x_1) \;\leqslant\; C = f(z) \;\leqslant\; -f_0\,(x_2) + p\,(z + x_2);$$

Нам надо доказать, что $\forall x_1, x_2$:

$$(*) \qquad -p\,(-z - x_1) - f_0\,(x_1) \leqslant -f_0\,(x_2) + p\,(z + x_2).$$

В этом (и только в этом) случае существует C, удовлетворяющее предыдущим двум условиям. Если докажем это, то

$$\sup_{x_1 \in E_1} \left(-p\,(-z - x_1) - f_0\,(x_1)\right) \leqslant \inf_{x_2 \in E_1} \left(-f_0\,(x_2) + p\,(z + x_2)\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ между ними можно поместить число C.

Докажем теперь неравенство (*):

$$f_0(x_2) - f_0(x_1) = f_0(x_2 - x_1) \leqslant p(x_1 - x_2) = p\big((x_2 + z) + (-z - x_1)\big) \leqslant$$
$$\leqslant p\,(z + x_2) + p\,(-z - x_1).$$

Таким образом, мы доказали, что линейный функционал можно продолжить на пространство размерности на 1 больше.

2. Теоретико-множественное рассуждение.

Определение 11. Множество A называется *упорядоченным*, если для некоторых пар его элементов (такие элементы называются *сравнимыми*) определено отношение (порядка), которое мы будем обозначать символом $\leqslant$, обладающее следующими свойствами:

$$x \leqslant y \text{ и } y \leqslant z \quad \Rightarrow \quad x \leqslant z;$$

$$x \leqslant y \text{ и } y \leqslant x \iff x = y;$$

Также множество называется *линейно-упорядоченным*, если любые два его элемента сравнимы.

Определение 12. Если A — упорядоченное множество,$B \subset A$, то $a \in A$ называется *мажорантой множества* B, если $\forall x \in B \Rightarrow x \leqslant a$.

Определение 13. $m \in A$ является *максимальным*, если $\nexists x \neq m : m \leqslant x$.

Лемма 1. (Цорна-Куратовского) Пусть A — непустое упорядоченное множество. Предположим, что всякое его линейно-упорядоченное подмножество упорядоченного множества A обладает мажорантой. Тогда в A существует максимальные элементы.

Применим эту лемму, для доказательства теоремы Хана-Банаха. Определим множество A, как множество пар $A = \{(g, E_g)\}$, где E_g — линейное подпространство пространства E, содержащее E_1 и g — линейный функционал на E_g, являющийся продолжением f_0 и удовлетворяющий условию:

$$\forall x \in E \;\; g(x) \leqslant p(x);$$

и введем в этом множестве A порядок:

$$(g_1, E_{g_1}) \leqslant (g_2, E_{g_2}) \Longleftrightarrow E_{g_1} \subset E_{g_2} \text{ и } \forall x \in E_{g_1} \quad g_1(x) = g_2(x).$$

Проверим условие леммы Цорна-Куратовского.

Пусть $\{(g_\alpha, E_{g_\alpha})\}$ — линейно-упорядоченное подмножество из A. Докажем, что мажорантой в нашем случае является $(g, \bigcup\limits_\alpha E_{g_\alpha})$, где функционал g на $\cup E_{g_\alpha}$ определяется так:

если $x \in \bigcup\limits_\alpha E_{g_\alpha}$, то $\exists\, \beta : x \in E_{g_\beta} \quad \Rightarrow g(x) = g_\beta(x)$. То, что $\bigcup\limits_\alpha E_{g_\alpha}$ — линейное подпространство пространства E, а также корректность определения g вытекает из линейной упорядоченности множества $\{(g_\alpha, E_\alpha)\}$. Поэтому в силу леммы Куратовского-Цорна в множестве $\{(g_\alpha, E_\alpha)\}$ существует максимальный элемент:

$$(f_m, E_m), \text{ тогда } (f_0, E_1) \leqslant (f_m, E_m),$$

то есть f_m — продолжение f_0, и $\forall x \in E \;\; f_m(x) \leqslant p(x)$.

Осталось доказать, что $E_m = E$:

Пусть $E_m \neq E$, то есть $\exists z \in E, z \notin E_m$, а, значит, можно продолжить E_m на $\operatorname{span}(E_m, z)$. Значит,

$$\big(f_{m+1}, \operatorname{span}(E_m, z)\big) \in A \text{ и } (f_m, E_m) < (f_{m+1}, \operatorname{span}(E_m, z)) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ получаем противоречие.

Что и завершает доказательство теоремы Хана-Банаха. ■

Упражнение 6. Пусть $A \in \mathfrak{L}(E, G)$ Доказать, что выполняются следующие равенства:

1. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$;
2. $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Замечание: Из $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ следует, что $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\| \quad \forall x$.

Упражнение 7. Доказать, что

$$\|A\| = \inf\{M \geqslant 0 : \forall x \in E \quad \|Ax\| \leqslant M\|x\|\}.$$

Доказательство упражнения 7**:** Из предыдущего замечания следует, что

$$\|A\| \geqslant \inf\{M \geqslant 0 : \forall x \in E \quad \|Ax\| \leqslant M\|x\|\}.$$

Докажем, что $\|A\| \leqslant \inf\{M \geqslant 0 : \forall x \in E \quad \|Ax\| \leqslant M\|x\|\}$. Предположим противное.

$$\text{Пусть } \inf\{M \geqslant 0 : \forall x \in E \quad \|Ax\| \leqslant M\|x\|\} = \|A\| - \varepsilon.$$

Тогда $\exists x : \|Ax\| \leqslant (\|A\| - \varepsilon)\|x\| \Rightarrow \left\|\frac{Ax}{\|x\|}\right\| \leqslant \|A\| - \varepsilon$, но $\sup\left\|\frac{Ax}{\|x\|}\right\| = \|A\|$ — противоречие.

Следствие: Пусть E — нормированное линейное пространство, E_1 — произвольное линейное подпространство пространства E: $E_1 \subset E$, а $f \in E_1^*$, то есть f — линейный непрерывный функционал на E_1. Тогда f может быть продолжен на все E с сохранением непрерывности, линейности и без увеличения нормы.

Доказательство:

$\square$ $|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \quad \forall x \in E_1$. Определим $p(x)$: $p(x) = \|f\|\|x\|$, тогда

$$|f(x)| \leqslant p(x) \Rightarrow f(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E_1;$$

Таким образом, по теореме Хана-Банаха существует линейный функционал F на E_1 такой, что:

$$\forall x \in E_1 \quad f(x) = F(x) \text{ и } \forall x \in E \quad F(x) \leqslant \|f\|\|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x : \; -F(x) = F(-x) \leqslant \|f\|\|x\| \quad \Rightarrow |F(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \quad \Rightarrow \|F\| \leqslant \|f\|,$$

следовательно, мы получили продолжение функционала f без увеличения нормы. $\blacksquare$

Упражнение 8. Привести пример нормированного линейного пространства, его подпространства и функционала такого, чтобы он обладал:

А. одним продолжением без увеличения нормы;

Б. двумя продолжениями без увеличения нормы.

Предложение 2. Пусть E — нормированное пространство. x_0 — элемент E, причем $x_0 \neq 0$. Тогда существует линейный и непрерывный функционал f на E ($f \in E^*$) такой, что:

$$f(x_0) = \|x_0\|, \quad \|f\| = 1.$$

Доказательство:

$\square$ Рассмотрим подпространство $E \supset E_{x_o} = \{\lambda x_0 \colon \lambda \in \mathbb{R}^1\}$. Определим $f_0 \in E_{x_0}^*$ так:

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|,$$

тогда $f_0(x_0) = \|x_0\|$ и $\|f_0\| = 1$.

То, что $\|f_0\| = 1$ следует из того, что

$$\|f_0\| = \sup_{\left\|\lambda\|x_0\|\right\|=1} \left|f_0(\lambda\|x_0\|)\right| = \sup_{\left\|\lambda\|x_0\|\right\|=1} |\lambda|\|x_0\| = 1$$

так как $\left\|\lambda\|x_0\|\right\| = |\lambda|\|x_0\|$. Продолжим f_0 на всё E по теореме Хана-Банаха и получим искомый f. $\blacksquare$

Таким образом, *в пространстве E^* существуют ненулевые элементы.*

Определение 14. Пусть E, G — линейные нормированные пространства. Линейное отображение $F\colon E$ в G называется *изометрией*, если оно сохраняет норму, то есть:

$$\|F(x)\|_G = \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Определим теперь изометрическое вложение E в E^{**} :

$$E \to E^{**}, \quad x \mapsto F_x, \quad \text{где } x \in E \text{ и } F_x \in E^{**} \text{ определяется так:}.$$

$$F_x(g) = g(x), \text{ где } g \in E^*.$$

Проверим линейность функционала F_x:

$$F_x(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x) =$$

$$= \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) = \lambda_1 F_x(g_1) + \lambda_2 F_x(g_2).$$

Таким образом, F_x — действительно линейный функционал. Вычислим его норму:

$$|F_x(g)| = |g(x)| \leqslant \|g\|\|x\|.$$

Так как: $\|F_x\| = \inf\{M \geqslant 0 \colon \forall g \quad |F_x(g)| \leqslant M\|g\|\}$, то $|F_x\| \leqslant \|x\|$. С другой стороны,

$$\|F_x\| = \sup_{\|g\|=1} |F_x(g)|;$$

Пусть $f \in E^*,\ \|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$ (такой функцилонал существует по предложению 2). Если $g = f,$ то

$$|F_x(f)| = |f(x)| = \|x\| \quad \Rightarrow \sup_{\|g\|=1} |F_x(g)| = \|F_x\| \geqslant \|x\|.$$

Таким образом, $\|F_x\| = \|x\| \quad \forall x$.

Утверждение 2. $F_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} = \lambda_1 F_{x_1} + \lambda_2 F_{x_2}$ (то есть отображение $x \mapsto F_x,\ E \to E^{**}$ линейно).

Доказательство: □

$$F_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}(g) = g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) = \lambda_1 F_{x_1}(g) + \lambda_2 F_{x_2}(g). \quad \blacksquare$$

Определение 15. Банахово пространство E называется *рефлексивным*, если его образ при только что определенном вложении $E \to E^{**}$, называемом *каноническим*, совпадает с E^{**}.

Замечание 1: Если E — нерефлексивное банахово пространство, то его можно отождествить с собственным замкнутым подпространством $E \subset E^{**}$. Это вытекает из того, что всякое полное подпространство произвольного нормированного линейного пространства замкнуто в нем.

Пусть $B \subset Z$ – незамкнутое и полное подпространство нормированного линейного пространства Z. Тогда возьмем $z \notin B,\ z \in \overline{B} \quad \Rightarrow$ существует последовательность элементов из B, которая сходится к z в $E \quad \Rightarrow$ она является фундаментальной $\Rightarrow z \in B$— противоречие $\quad \Rightarrow B$ — замкнуто. Поэтому E замкнуто в E^{**} (если E неполно, то E не является замкнутым в E^{**}).

Отметим, что E — нерефлексивно $\iff$ E^* — нерефлексивно.

Определение 16. *Пополнением нормированного пространства* E называется — банахово пространство $\overline{E}$, которое содержит E в качестве полного,всюду плотного подпространства: $E \subset \overline{E}$.

Определение 17. *Изоморфизм* — линейное изометрическое отображение одного линейного пространства на другое.

Теорема 4. Любое нормированное линейное пространство имеет пополнение, причем оно единственно с точностью до изоморфизма, оставляющего неподвижными все элементы из E.

Доказательство: □

1. Докажем существование. В силу предыдущего E изометрически вкладывается в E^{**}, причем E^{**} полно.

$$E \subset E^{**},\ x \to F_x,\ \|F_x\| = \|x\|.$$

Тогда замыкание $\overline{E}$ пространства E — это замкнутое линейное подпространство банахова пространства E^{**}. Но замкнутое подмножество любого полного метрического пространства, полно, поэтому $\overline{E}$ — это банахово пространство (относительно нормы, заимствованной из E^{**}). Причем $E \subset \overline{E}\Big(\subset E^{**}\Big)$, и E — плотно в $\overline{E}$.

2. Докажем единственность. Пусть нормированное пространство имеет два пополнения, $\overline{E}, G$. Надо проверить, что существует $F\colon G \to \overline{E}$ – изоморфизм, при котором любой элемент из E остается непподвижным:

$$\forall x \in E, \quad F(x) = x,$$

кроме того

$$\forall z \in G, \quad \|F(z)\| = \|z\|, \quad F(G) = \overline{E}.$$

Итак, $E \subset \overline{E}$ и $E \subset G$.

Пусть $\forall x \in E, \quad F(x) = x$ — продолжим это отображение на всё G. Если

$$z \notin E,\ z \in G,\ \text{то} \quad \exists \text{ последовательность } (x_n) \subset E,\ x_n \to z \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ последовательность (x_n) является фундаментальной в G $\Rightarrow$ она фундаментальна и в E, значит, она фундаментальна в $\overline{E}$ (так как нормы одинаковы). Далее так как $\overline{E}$ – полно, то $\exists F(z) \in \overline{E}, \quad x_n \to F(z)$. Таким образом, отображение F определено на всем G.

Докажем, что F — изометрично:

$$\forall n \quad \|F(x_n)\| = \|x_n\|_G \to \|z\|,\ \text{но}\ \|F(x_n)\|_E \to \|x_n\|_{\overline{E}} \to \|F(z)\|_{\overline{E}} \quad \blacksquare$$

Упражнение 9. $F(G) = \overline{E}$.

Аналогичная теорема верна для произвольных метрических пространств.

Определение 18. *Пополнением метрического пространства* E называется — полное метрическое пространство $\overline{E}$, которое содержит E в качестве всюду плотного подпространства: $E \subset \overline{E}$.

Теорема 5. Любое метрическое пространство имеет пополнение, причем оно единственно с точностью до изоморфизма, оставляющего неподвижными все элементы из E.

Доказательство: $\square$

1. Пусть $B(E)$ — линейное пространство вещественных, ограниченных функций на E с нормой:

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

Можно доказать, что $B(E)$ полно.

2. Изометрически вложим E в $B(E)$. Изометрически — означает, сохраняя расстояния.

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

Сделаем это так. Пусть $x_0 \in E$ и определим вложение соотношениями:

$E \ni x \to \psi_x \qquad \psi_x(z) = \rho(z, x) - \rho(z, x_0).$

Проверим ограниченность ψ_x :

$$|\psi_x(z)| = |\rho(z,x) - \rho(z,x_0)| \leqslant \rho(x,x_0) \Rightarrow \psi_x x \text{ ограничено.}$$

Проверим, что вложение изометрично:

Пусть $x_1, x_2 \in E$. Мы должны доказать, что $\rho_{B(E)}(x_1,x_2) = \rho(x_1,x_2)$. Но с одной стороны,

$$\rho_{B(E)}(\psi_{x_1},\psi_{x_2}) = \|\psi_{x_1} - \psi_{x_2}\| = \sup_{z\in E}|\psi_{x_1}(z) - \psi_{x_2}(z)| =$$

$$= \sup_{z\in E}\Big|\rho(z,x_1) - \rho(z,x_0) - \rho(z,x_2) + \rho(z,x_0)\Big| =$$

$$= \sup_{z\in E}\Big|\rho(z,x_1) - \rho(z,x_2)\Big| \leqslant \rho(x_1,x_2).$$

Таким образом, $\rho_{B(E)}(\psi_{x_1},\psi_{x_2}) \leqslant \rho(x_1,x_2)$;

Пусть $z = x_1$, тогда, так как $|\psi_{x_1}(z) - \psi_{x_2}(z)| = \rho(x_1,x_2)$, здесь достигается равенство;

$$\text{Значит, } \rho_{B(E)}(\psi_{x_1},\psi_{x_2}) = \rho(x_1,x_2).$$

Таким образом, мы доказали, что наше вложение из E в $B(E)$ изометрично. Теперь, как и в предыдущей теореме, в качестве пополнения E возьмем его замыкание: $\overline{E}$ в $B(E)$.

Теорема доказана полностью. ■

Упражение 10. Метрическое пространство предкомпактно в точности тогда, когда его пополнение компактно.

Упражнение 11. Метрическое пространство предкомпактно тогда и только тогда, когда каждая последовательность его элементов содержит фундаментальную подпоследовательность.

Теорема 6. (Теорема Банаха о гомоморфизме). Пусть E, G — банаховы пространства, $F\colon E \to G$ — линейное непрерывное отображение, причем $F(E) = G$. Тогда F — открыто, то есть образом $F(V)$ любого открытого множества $V \subset E$ из E является открытое множество в G.

Доказательство: □

1. Пусть V — открытая окрестность нуля в E, тогда замыкание $\overline{F(V)}$ образа $F(V)$ содержит открытый шар, или что то же самое, $\overline{F(V)}$ — открытая окрестность нуля в G. Докажем это.

Пусть $V \supset S(\varepsilon,0)$ — открытый шар. Докажем, что $\overline{F(S(\varepsilon,0))}$ — окрестность нуля. Так как $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nS(\varepsilon,0) = E$ (здесь $n\cdot S(\varepsilon,0) = \{n\cdot x\colon\ x \in S(\varepsilon,0)\} = S(n\varepsilon,0)$),

$$\text{таким образом,}\qquad F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nS(\varepsilon,0)\right) = F(E) = G;$$

$$\text{с другой стороны,}\ \ F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nS(\varepsilon,0)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nF(S(\varepsilon,0)) = G.$$

Тем более $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n\overline{F(S(\varepsilon,0))} = G$.

Поэтому по теореме Бэра получаем, что $\exists n\colon\ n\overline{F(S(\varepsilon,0)}$ — не является нигде неплотным, то есть содержит открытый шар $n\overline{F(S(\varepsilon,0)} \supset S(\alpha,z)$, так как $\overline{F(S(\varepsilon,0))}$ — выпукло и симметрично относительно нуля, то

$$n\overline{F(S(\varepsilon,0))} \supset -S(\alpha,z).$$

$$\Rightarrow n\overline{F(S(\varepsilon,0))} \supset \left\{\frac{x_1+x_2}{2}\colon x_1\in S(\alpha,z), x_2\in -S(\alpha,z)\right\} =$$

$$= \left\{x-z\colon x\in \frac{S(\alpha,z)}{2}, z\in \frac{S(\alpha,z)}{2}\right\} = S(\alpha,0).$$

Таким образом,

$$\overline{F(V)} \supset \overline{F(S(\varepsilon,0))} \supset \frac{S(\alpha,0)}{n} = S(\frac{\alpha}{n},0).$$

2.Докажем, что $\forall\varepsilon\quad\exists\eta>0\colon F(S(\varepsilon,0))\supset S(\eta,0)$.

Пусть $\varepsilon_0>0$, и (ε_i) — последовательность чисел, причем $\forall i\in\mathbb{N},\quad \varepsilon_i>0$, и

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i<\varepsilon_0.$$

$\forall i=0,1,\ldots\quad\exists\eta_i\colon\qquad \eta_0>\eta_1>\eta_2>\ldots$

$$\overline{F(S(\varepsilon_i,0))}\supset S(\eta_i,0),\qquad \eta_i\to 0.$$

Докажем, что $F(S(2\varepsilon_0,0))\supset S(\eta_0,0)$. Пусть $z\in S(\eta_0,0)$, следовательно, существует

$$x_0\in S(\varepsilon_0,0)\colon\quad z-F(x_0)\in S(\eta_1,0),$$

$\Big($так как

$$\overline{F(S(\varepsilon_0,0))}\supset S(\eta_0,0),\quad z\in S(\eta_0,0),$$

следовательно,

$$\exists x_0\in S(\varepsilon_0,0)\colon\quad \|z-F(x_0)\|<\eta_1\Big).$$

Рассмотрим ε_1 вместо ε_0; тогда:

$$\overline{F(S(\varepsilon_1,0))}\supset S(\eta_1,0)\iff$$

$$\exists x_1\in S(\varepsilon_1,0)\colon\quad \|z-F(x_0)-F(x_1)\|<\eta_2\iff$$

$$\Big(z-F(x_0)-F(x_1)\Big)\in S(\eta_2,0)\text{ и так далее по индукции }.$$

Мы получили последовательность элементов: $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$

$$\forall n\colon\quad \|z-\sum_{i=0}^{n}F(x_i)\|<\eta_{n+1}.$$

Последовательность $\{\sum\limits_{i=0}^{n}x_i\colon\ n=1,2,\ldots\}$ — фундаментальна. Проверим это:

$$\Big\|\sum_{i=0}^{r+k}x_i-\sum_{i=0}^{r}x_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=r+1}^{r+k}x_i\Big\| \leqslant \sum_{i=r+1}^{r+k}\|x_i\|$$

Поскольку $x_i \in S(\varepsilon_i, 0)$, то:

$$\sum_{i=r+1}^{r+k} \|x_i\| < \sum_{i=r+1}^{r+k} \varepsilon_i \to 0 \quad \text{при } r \to \infty \quad \text{— равномерно по } k,$$

Следовательно, фундаментальность доказана, так что существует

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i, \quad \sum_{i=0}^{\infty} x_i = x.$$

Тогда

$$\Big\| z - F\big(\sum_{i=0}^{n} x_i\big) \Big\| < \eta_{n+1} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Так как F — непрерывна и последовательность (x_i) сходится, то

$$\left.\begin{array}{l} F\big(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\big) \to F(x) \\ F\big(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\big) \to z \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad F(x) = z.$$

Осталось проверить, что $x \in S(2\varepsilon_0, 0)$,

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leqslant \|x_0\| + \Big\|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_0\| + \sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\| < \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < 2\varepsilon_0$$

Таким образом, проверено, что x содержится в открытом шаре радиуса $2\varepsilon_0$ с центром в нуле.

3. Во втором пункте мы доказали, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0\colon \quad F(S(\varepsilon, 0)) \supset S(\eta, 0).$$

Из этого факта вытекает, что для любого открытого множества V его образ $F(V)$ — тоже открыт.

Нам надо доказать, что

$$\forall z \in F(V)\colon \quad \exists \eta > 0;\ \ F(V) \supset S(\eta, z) = z + S(\eta, 0).$$

Доказано, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0\colon \quad F(S(\varepsilon, 0)) \supset S(\eta, 0)$.

Отсюда вытекает, что

$$\begin{array}{l} F(S(\varepsilon, x)) \supset S(\eta, F(x)) \\ \quad \| \\ F(x+S(\varepsilon, 0)) = F(x) + F(S(\varepsilon, 0)) \supset F(x) + S(\eta, 0) = S(\eta, F(x)). \end{array}$$

Далее, так как $z \in F(V)$, то $\exists x \in V\colon \quad F(x) = z$. Поскольку V - открыто, то

$$\exists \varepsilon > 0\colon \quad S(\varepsilon, x) \subset V \ \Rightarrow\ F(S(\varepsilon, x)) \subset F(V).$$

С другой стороны, $F(S(\varepsilon, x)) \supset S(\eta, z) = S(\eta, F(x))$. Таким образом, теорема Банаха полностью доказана. ■

Теорема 7. Теорема Банаха об обратном операторе, как следствие предыдущей теоремы.

Пусть E, G — банаховы пространства, $F\colon E \to G$ — линейное, непрерывное, взаимно-однозначное отображение. Тогда F^{-1} — тоже непрерывное и линейное отображение.

Доказательство:

□ $\left(F^{-1}\right)^{-1}(W) = F(W)$ – открыто. ■

Теорема 8. Теорема Банаха о замкнутом графике.

Пусть E, G — банаховы пространства и $F\colon E \to G$ — линейное отображение, обладающее замкнутым (в $E \times G$) графиком $\mathit{\Gamma} F =$

$$\{(x, F(x)) \in E \times G\colon \quad x \in E\}.$$

Тогда F непрерывно.

Доказательство:

□ Если Z — замкнутое линейное подпространство банахова пространства X с нормой $\|.\|$, то

$$(Z, \|.\|) \text{ — банахово пространство.}$$

В нашем случае пусть $X = E \times G$, а $Z = \mathit{\Gamma} F$; поскольку $\mathit{\Gamma} F$ — замкнуто, то и $(\mathit{\Gamma} F, \|.\|_{E\times G})$ — замкнутое линейное банахово пространство.

Пусть отображение

$$pr_E\colon E \times G \to E,\ (x_1, x_2) \mapsto x_1;$$

pr_E называется *проектором* (или проектированием) на E; оно линейно и непрерывно. Линейность очевидна; для доказательства непрерывности достаточно доказать непрерывность в нуле, а это следует из определения нормы.

Пусть $\mathit{\Gamma} F \to E, \quad (x, F(x)) \mapsto x$ — сужение этого отображения на $\mathit{\Gamma} F$. Оно также линейно и непрерывно и, кроме того, взаимно-однозначно.

Таким образом, по теореме Банаха об обратном операторе отображение

$$E \to (\mathit{\Gamma} F, \|.\|_{E\times G}),\ x \mapsto (x, F(x)) \text{ — непрерывно;}$$

Представим F как композицию отображений:

$$\left.\begin{array}{ccccc} E & \to & \mathit{\Gamma} F & \to & pr_G \\ x & \overset{\text{непр.}}{\mapsto} & (x, F(x)) & \overset{\text{непр.}}{\mapsto} & F(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ композиция тоже непрерывна;}$$

таким образом, F — непрерывно. ■

Упражнение 12. Докажите, что если отображение F из линейного нормированного пространства V_1 в линейно нормированное пространство V_2 непрерывно, то оно имеет замкнутый график в пространстве $V_1 \times V_2$.

Предложение 4. Теорему Банаха об обратном операторе вытекает из теоремы Банаха о замкнутом графике.

Доказательство:

□ Пусть $F\colon E \to G$ — линейное, непрерывное, взаимно-однозначное отображение. Так как F — непрерывно, то его график

$$\mathit{\Gamma} F = \{(x, F(x))\colon x \in E\} \text{ — замкнут (упражнение 9) в } E \times G.$$

Рассмотрим график обратного отображения

$$\Gamma F^{-1} = \{(z, F^{-1}z)\colon z \in G\} \subset G \times E.$$

Отображение $\Phi\colon E \times G \to G \times E$ при $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$ — изоморфизм, даже изометрия, потому что

$$\|(x_1, x_2)\|_{E\times G} = \|x_1\|_E + \|x_2\|_G = \|(x_2, x_1)\|_{G\times E};$$

$\Phi(\Gamma F) = \Gamma F^{-1}$; так как график ΓF — замкнут, то график ΓF^{-1} — тоже замкнут, и, следовательно, обратное отображение F^{-1} — непрерывно, по теореме о замкнутом графике. ■

Определение 19. Пусть E — линейное пространство. *Полунормой* на E называется функция p на E, обладающая следующими свойствами:

1. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in E;$
2. $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2);$
3. Если $x = 0$, то $p(x) = 0$ (однако может быть $p(x) = 0$, даже если $x \neq 0$).

Определение 20. *Локально-выпуклым пространством* E называется линейное пространство, на котором задано семейство полунорм. Более формально можно сказать, что локально выпуклое пространство — это пара $(E, \mathcal{P})$, где E — линейное пространство, а $\mathcal{P}$ — множество полунорм на $\mathcal{P}$.

Пример: Пусть E — нормированное пространство $(E, \|.\|)$; E^* — пространство всех линейных, непрерывных функционалов на E. Тогда каждому $f \in E^*$ можно сопоставить полунорму p_f на E, определяемую так:

$$p_f(x) = |f(x)|.$$

Определение 21. Пусть $(E, \mathcal{P})$— локально-выпуклое пространство. Множество $V \subset E$ называется *открытым*, если

$$\forall x \in V \quad \exists n \in \mathbb{N},\ p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P},$$

$$\varepsilon > 0\colon \quad V \supset \{z \in E\colon p_i(z - x) < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots\} \equiv \bigcap_{i=1}^{n} \{z \in F\colon\ p_i(z - x) < \varepsilon\}.$$

Можно проверить, что так определенное множество открытых подмножеств определяет топологию на E.

Таким образом, можно также сказать, что локально выпуклое пространство — это линейное пространство с топологией, задаваемой (как только что описано) с помощью некоторого семейства полунорм. Топология, о которой идет речь, называется *локально выпуклой.*

Критерий сходимости: x_n сходится к x, если $\quad \forall p \in \mathcal{P}\colon\ p(x_n - x) \to 0.$

Упражнение 13. Проверить критерий сходимости.

Определение 22. Пусть $(E, \|.\|)$ — нормированное пространство. Тогда в E можно ввести структуру *локально выпуклого пространства*, определив семейство $\mathcal{P}$ полунорм на E так:

$$\mathcal{P} \ni p \quad \Longleftrightarrow \quad \exists f \in E^*\colon \quad p(x) \equiv p_f(x) = |f(x)| \quad \forall x \in E.$$

Топология в E, задаваемая этим семейством полунорм называется *слабой*; она обозначается символом $\sigma(E, E^*)$. Пространство E, наделенное такой топологией, обозначается символом: $(E, \sigma(E, E^*))$.

Предложение 4. Последовательность $(x_n) \subset E$ сходится в топологии $\sigma(E, E^*)$ к x или, как говорят, слабо сходится к $x \quad \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall f \in E^* \quad f(x_n) \to f(x).$$

(иногда это предложение принимают за определение слабой сходимости).

Пример: Доказать, что в l_1 слабая сходимость и сходимость по норме совпадают (сделать как **упражнение 11**).

Теорема 9. Элементы всякой слабо сходящейся последовательности (x_n) элементов нормированного пространство E ограничены по норме, то есть

$$E \ni x_n \overset{слабо}{\to} x \quad \Longrightarrow \quad \sup_n \|x_n\| < \infty.$$

Перед доказательством теоремы приведем ряд замечаний:

так как E^* — тоже нормированное пространство, то в нем можно ввести слабую топологию $\sigma(E^*, E^{**})$. Но так как $E \subset E^{**}$, то в E^* можно рассмотреть два семейства полунорм:

1. $\mathcal{P} \ni p \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in E^{**}\colon\ \forall f \in E^* \quad \Rightarrow \quad p(f) = |g(f)|$ –
— топология в E^*, определяемая этим семейством полунорм, — это слабая топология в E^*.

2. $\mathcal{P}_1 \ni p \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in E\colon\ \forall f \in E^* \quad \Rightarrow \quad p(f) = |f(x)| = |F_x(f)|$.
Локально выпуклая топология, определяемая этим семейством полунорм называется *$*$-слабой топологией.*

Замечание. *Сходимость в слабой топологии* пространства E определяется следующим образом:
$f_n \overset{слабо}{\to} f$ в E^*: (то есть $f_n \to f$ в $(E^*, \sigma(E^*, E^{**}))$ $\quad \Leftrightarrow \quad \forall g \in E^{**}\colon \quad g(f_n) \to g(f)$.
Сходимость в $*$-слабой топологии пространства E^* определяется следующим образом:

$$f_n \overset{*-слабо}{\to} f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E\colon f_n(x) \to f(x).$$

(оба эти утверждения часто принимают за определения).

Замечание. Если банахово пространствоне является сопряжённым ни к какому банахову пространству, то в нем $*$-слабую сходимость определить нельзя (таково, например, пространство $C[a, b]$).

Доказательство теоремы 9: $\square$ Заметим пржде всего, что:

если $\Big[\forall x \in E \quad f_n(x) \to f(x)\Big] \quad \Rightarrow \quad \Big[\forall x \in E \quad \sup_n |f_n(x)| = C_x < \infty\Big]$, то по теореме Банаха-Штейнхауза

$$\sup_n \|f_n\| < \infty.$$

Пусть теперь $E \ni x_n \overset{слабо}{\to} x$; и докажем, что

$$\sup_n \|x_n\| < \infty.$$

Воспользуемся тем, что $E \subset E^{**}$ (при этом вложении элемент x отображается в $F_x \in E^{**}$, причем $F_x(f) = f(x)$ при $f \in E^*$). Итак, $\forall f \in E^*$

$$\left.\begin{array}{ll} \forall f \in E^* & f(x_n) \to f(x) \text{ — слабая сходимость в } E; \\ & f(x_n) \Longleftrightarrow F_{x_n}(f); \\ & F_{x_n}(f) \to F_x(f) \text{ — } *\text{-слабая сходимость в } E^{**}; \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Поэтому
$$\sup_n \|x_n\|_E = \sup_n \|F_{x_n}\|_{E^{**}} < \infty. \quad \blacksquare$$

Определение 23. Пусть E — локально-выпуклое пространство, тогда $B \subset E$, называется *ограниченным*, если
$$\forall p \in \mathcal{P}: \quad \sup_{x \in B} p\,(x) < \infty.$$

Упражнение 14. Показать, что условия слабой ограниченности и ограниченности по норме пространства B эквивалентны. (доказательство приводится ниже).

Непрерывный линейный функционал f на $(E, \sigma\,(E, E^*))$ обладает следующим свойством:
$$\text{если } V \text{ – открыто в } \mathbb{R}^1, \text{ то}$$
$$f^{-1}(V) \text{ — открытое подмножество в } (E, \sigma\,(E, E^*)).$$

Теорема 10. Пусть f — линейный функционал на E. Если f — непрерывен относительно слабой топологии в E, то он непрерывен относительно исходной нормы в E^* (очевидно, обратное тоже верно).

Доказательство:

$\square$ Докажем сначала очевидное обратное утверждение, а именно:
$$E^* \subset (E, \sigma\,(E, E^*))^*.$$
(символ справа обозначает множество всех линейных непрерывных функционалов на $(E, \sigma\,(E, E^*))$).

Пусть $f \in E^*$. Нужно доказать, что f слабо непрерывно. В силу линейности f достаточно проверить его непрерывность в нуле (в топологии $\sigma\,(E, E^*)$), то есть, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V_0 \subset E \; V_0$ открыто в $\sigma\,(E, E^*)$, $V_0 \ni 0$; $|f(x)| < \varepsilon$, если $x \in V_0$. Положим:
$$V_0 = \{x \in E: \quad p_f(x) < \varepsilon\}, \text{ причем } p_f(x) = |f(x)|.$$
Тогда
$$p_f(x) < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |f(x)| < \varepsilon$$
Следовательно, линейный функционал f слабо непрерывен. Теперь докажем, что
$$E^* \supset \left(E, \sigma\left(E, E^*\right)\right)^*.$$
То есть, что всякий линейный функционал f на E, непрерывный в слабой топологии, непрерывен относительно нормы на E: Итак, пусть f непрерывен в слабой топологии, то есть
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}, \text{ и } \exists\, p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}, \quad \exists \delta > 0:$$
если $\forall i = 1, 2, \ldots, n$
$$p_i(x) < \delta, (p_i(x) = |f_i(x)| \; (f_i \in E^*)), \text{ то } |f(x)| < \varepsilon;$$
Отметим, что, если $\forall i \;\; f_i(x) = 0$, то $f(x) = 0$; действительно,

пусть $f(x_0) \neq 0$, но $\forall i \quad f_i(x_0) = 0$, тогда $f(x_0) = C \neq 0$, следовательно, $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \quad |\lambda C| > \varepsilon$. Значит, $f(\lambda x_0) = \lambda C > \varepsilon$, хотя $\forall i \quad |f_i(\lambda x_0)| = 0 < \delta$. Следовательно, если $\forall i \;\; f_i(x) = 0$, то $f(x) = 0$.

Итак,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \ \subset \ \operatorname{Ker} f \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i, , \ \text{а, значит, } f \in E^*.$$

Импликация $(*)$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. (о трех гомоморфизмах) Пусть E_1, E_2, E_3 — линейные пространства.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f_{12}"] \arrow[d, "f_{13}"'] & E_2 \arrow[dl, dotted, "f_{23}"] \\ E_3 & \end{tikzcd} \qquad \text{причем } \operatorname{Ker} f_{12} \ \subset \ \operatorname{Ker} f_{13}.$$

Тогда существует отображение $f_{23}\colon \ f_{23} \circ f_{12} = f_{13},$ то есть:

$$\forall x \in E_1 \quad f_{23}\big(f_{12}(x)\big) = f_{13}(x).$$

Доказательство:

□ Определим отображение f_{23} на $f_{12}\,(E_1)$, $z \in f_{12}\,(E_1)$, полагая

$$f_{23}(z) = f_{13}\left(f_{12}^{-1}(z)\right)$$

Это корректно, так как $\operatorname{Ker} f_{12} \ \subset \ \operatorname{Ker} f_{13}$. Так как $f_{12}\,(E_1)$ — это линейное подпространство пространства E_2, то E_2 можно представить в виде (алгебр.) прямой суммы:

$$E_2 = \overline{E_2} \oplus f_{12}\,(E_1), \ \text{где } \overline{E_2} -$$

— это некоторое линейное подпространство пространства E_2 на подпространстве $f_{12}\,(E_1)$ линейное отображение f_{23} уже определено, на $\overline{E}_2$ мы можем определить его произвольным образом и потом продолжить по линейности на все E_2. ■

Применяем лемму, чтобы завершить наше доказательство.

Пусть $E_1 = E, E_3 = \mathbb{R}^1, E_2 = \mathbb{R}^n, f_{13} = f$,

$$f_{12}(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \in \mathbb{R}^n;$$

тогда $\operatorname{Ker} f_{12} \subset \ker f_{13}$, так как

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \ \subset \ \operatorname{Ker} f.$$

Следовательно, по лемме:

$$\exists f_{23}\colon \quad f_{13} = f_{23} \circ f_{12}.$$

Но f_{23} определяется равенством:

$$f_{23}(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \qquad - \qquad \text{факт из линейной алгебры.}$$

По лемме: $\forall x \subset E_1$ выполняется

$$f_{13}(x) = f(x) =$$

$$= f_{23}\big(f_{12}(x)\big) = \big\{\text{по выше написанному}\big\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Big[f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\Big] \text{ причем } \ \forall i\colon \ f_i \in E^* \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad f \in E^*$ (так как E^* — линейное пространство).
Что и требовалось доказать. ■

Примеры:

c_0 — линейное пространство всех сходящихся к нулю последовательностей (x_n). Норма на c_0 определяется следующим образом:
если $x = (x_n) \in c_0$, то $\|x\| = \|(x_n)\|_{C_0} = \max |x_n|$;

Пространство l_1:

$$l_1 \ni (x_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i| < \infty;$$

Норма на l_1 определяется так:
если $x = (x_n) \in l_1$, то $\|x\| = \|(x_n)\|_{l_1} = \sum |x_i|$;

$$l_\infty \ni (x_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_n |x_n| < \infty;$$

Норма на l_∞ определяется так:
если $x = (x_n) \in l_\infty$, то $\|x\| = \|x_n\|_{l_\infty} = \sup_n |x_n|$; можно показать, что $c_0^* = l_1, l_1^* = l_\infty$. Эти равенства справедливы в следующем смысле:

(1.) если $z \equiv (z_n) \in l_1$, то равенство $F_z\big((x_n)\big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n x_n$ (где $(x_n) \in c_0$) определяет линейный непрерывный функционал на c_0, причем $\|F_z\| = \|z\|_{l_1}$;

(2.) Всякий линейный непрерывный функционал на C_0 имеет такой вид (других нет):

$$\text{если } f \in c_0^*, \text{ то } \exists!\, z \in c_0\colon \quad f = F_z;$$

Таким же образом определяется изометрия l_1^* на l_∞.

Рассмотрим слабую сходимость в c_0. Построим последовательность (x_n) следующим образом:

$$\left.\begin{array}{rl} x^1 = & (1, 0, \ldots) \\ x^2 = & (0, 1, 0, \ldots) \\ \ldots & \\ x^n = & (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{1 \text{ на } n\text{-м месте}}, 0, \ldots) \end{array}\right\} \quad - \quad \text{последовательность элементов } x^k = (x_n)^k \text{ из } c_0.$$

Последовательность $(x^n) \overset{\text{слабо}}{\to} 0$ в c_0. Это значит, что:

$$\forall f \in c_0^*\Big(= l_1\Big), \quad f(x^n) \to 0.$$

А это значит, что $\forall z = (z_n) \in l_1$:

$$f(x^k) = \sum_{i=1}^{\infty} z_n x_n^k \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

Но так и есть, поскольку:

$$f(x^k) = f((\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{1 \text{ на } k\text{-м месте}}, 0, \ldots)) = z_k \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

По норме последовательность (x^k) не сходится (так как нормы разностей любых двух её элементов равны единице, что означает, что она даже не фундаментальна а нормированном пространстве c_0).

Доказать, что в l_1 сходимость последовательностей по норме и слабая сходимость *одинаковы*, а топологии *различны.* Зато *-слабая сходимость в l_1 не совпадает со слабой сходимостью.

Пример:

Пусть последовательность $g_1, \ldots, g_n \ldots$ элементов из l_1 определяется так:

$$\begin{aligned} l_1 \ni g_1 = &\ (1, 0, \ldots) \\ &\ldots \\ l_1 \ni g_n = &\ (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{1 \text{ на } n\text{-м месте}}, 0, \ldots) \\ &\ldots \end{aligned}$$

Мы хотим проверить, что эта последовательность сходится *-слабо к нулю, то есть, что:

$$\forall x = (x_k) \in c_0 \quad g_n(x) \to 0.$$

Конечно, мы можем говорить о *-слабой сходимости в l_1, потому что оно является сопряженным к банахову пространству c_0.

$$\forall x = (x_i), \ \ (x_i) \in c_0 \quad g_n\big((x_i)\big) = x_n \to 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad (g_n)$ сходится *-слабо к нулю. А слабо эта последовательность ни к чему не сходится.

Определение 24. Подмножество A локально выпуклого пространства $(E, \mathcal{P})$ называется *ограниченным*, если

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad \sup_{x \in A} p(x) < \infty.$$

В частности, подмножество A нормированного пространства E называется *слабо ограниченным*, если

$$\forall f \in E^* \quad \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty.$$

Теорема 11. Пусть E — банахово пространство (полное нормированное линейное). Его подмножество $A \subset E$ слабо ограничено $\iff$ оно ограничено по норме.

Доказательство:

$\square$ Доказательство почти не отличается от доказательства теоремы 9.

$\boxed{\Rightarrow}$ $$\forall f \in E^* \quad \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in A} \|x\| < \infty \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{по теореме Банаха-Штейнхауза.}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ так как $|f(x)| \leqslant \|x\| \|f\|, \big(\forall f \in E^*, x \in E\big)$, то

$$c = \sup_{x \in A} \|x\| \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in A} |f(x)| \leqslant c\|f\| \quad \forall f \in E^*$$

Следовательно, A — слабо ограничено. ■

Теорема 12. Пусть E — банахово пространство, A — выпуклое подмножество в E. Тогда A — замкнуто $\iff$ A - слабо замкнуто.

Упражнение 14. Привести пример (невыпуклого) множества, замкнутого по норме в банаховом пространстве, но не замкнутого относительно слабой топологии.

Пример:

В пространстве c_0 множество элементов

$$(1,0,0,\ldots),\ (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,\ldots,1,0)$$

(каждый такой элемент — это сходящаяся к нулю последовательность вещественных чисел) замкнуто по норме, но не замкнуто в слабой топологии $\sigma(c_0, l_1)$ этого пространства.

Доказательство: □

$\boxed{\Leftarrow}$ Очевидно, так как в слабой топологии открытых множеств меньше (не больше), значит, и замкнутых множеств тоже меньше. В эту сторону формулировка теоремы верна всегда, независимо от того, выпукло рассматриваемое множество или нет.

$\boxed{\Rightarrow}$ Верно только для выпуклых множеств. И чтобы доказать эту импликацию воспользуемся теоремой Хана-Банаха.

Сначала введем функционал Минковского.

Определение 25. Пусть E — нормированное, линейное пространство, $V \subset E$. Предположим, что любое конечномерное подпространство E_n в E пересекается с V по открытому подпространству в E_n, также предположим, что $V \ni 0$ и V - выпукло. Тогда:

$$p_V(x) = \inf\{\lambda > 0\colon\ \frac{x}{\lambda} \in V\} - \textit{функционал Минковского} \text{ множества } V.$$

Если мы увеличим множество V, то $p_V(x)$ уменьшится.

Свойства функционала Минковского:

(1.) $p_V(x) \geqslant 0 \quad \forall x \ \ p_V(x) < \infty$, $\qquad p_V(0) = 0$ - из определения;

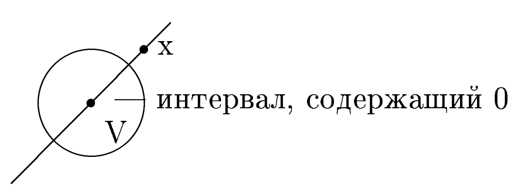
(2.) Если $\alpha > 0$, то $p_V(\alpha x) = \alpha p_V(x)$.

(по определению, нижняя грань пустого множества равна $+\infty$, но в нашем случае множество $\{\lambda > 0\colon\ \frac{x}{\lambda} \in V\}$ непусто).

Если $x = 0$, то этот факт очевиден, так как $V \ni 0$.

Если $x \neq 0$, тогда рассмотрим одномерное пространство

$$\{\gamma x\} = E^\gamma \quad \gamma \in \mathbb{R}^1$$

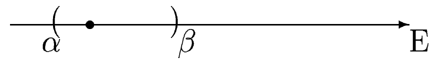


$E^\gamma \cap V$ - открыто.

Можно умножить x на нужное число (малое), чтобы x оказался в этом интервале. Так как γ — мало, то $\lambda = \frac{1}{\gamma}$ — большое.

(3.) $p_V(x_1 + x_2) \leqslant p_V(x_1) + p_V(x_2)$.

Замечание. Пусть $E=\mathbb{R}^1$, V — интервал, $V=(\alpha,\beta)$:



Если $\beta=\infty$, то есть $V=(\alpha,\infty)$, тогда для некоторых ненулевых x :

$$p_V(x)=0.$$

Замечание: $V=\{x:\ \ p_V(x)<1\}$ — доказать как упражнение.

Доказательство: (3.)

Заметим, что $\forall x\in E$: $\forall\varepsilon>0$ $\frac{x}{p_V(x)+\varepsilon}\in V$– - это верно в силу последнего замечания, так как:

$$p_V\Big(\frac{x}{p_V(x)+\varepsilon}\Big)=\frac{p_V(x)}{p_V(x)+\varepsilon}<1.$$

Образуем выпуклую комбинацию двух элементов $z_1,\ z_2\in E$:

$$z_1=\frac{x_1}{p_V(x_1)+\varepsilon};\qquad z_2=\frac{x_2}{p_V(x_2)+\varepsilon}\in V$$

$\Big($*Выпуклой комбинацией элементов* z_1,z_2 называется всякий элемент

$$\tau_1z_1+\tau_2z_2:\ \ \tau_1+\tau_2=1,\ \ \tau_1\geqslant 0,\ \tau_2\geqslant 0\ -$$

— все такие элементы образуют отрезок, соединяющий z_1 и $z_2\Big)$ с коэффициентами:

$$\tau_1=\frac{p_V(x_1)+\varepsilon}{p_V(x_1)+p_V(x_2)+2\varepsilon};\qquad \tau_2=\frac{p_V(x_2)+\varepsilon}{p_V(x_1)+p_V(x_2)+2\varepsilon}$$

$$\tau_1z_1+\tau_2z_2=\frac{x_1+x_2}{p_V(x_1)+p_V(x_2)+2\varepsilon}\in V.$$

Следовательно, по замечанию получаем, что:

$$p_V\left(\frac{x_1+x_2}{p_V(x_1)+p_V(x_2)+2\varepsilon}\right)<1\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad p_V(x_1+x_2)<p_V(x_1)+p_V(x_2)+2\varepsilon\qquad\forall\varepsilon>0$$

$\Rightarrow$ (3.) - верно. ■

Всякий функционал со свойствами (1.)–(3.) мы назвали *выпуклым*, так что p_V — выпуклый функционал.

Продолжим доказательство теоремы 12:

Пусть V — выпуклое подмножество в E, замкнутое по норме. Без ограничения общности, можно считать, что $V\ni 0$

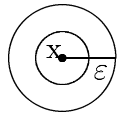
(если $0\neq V$, то с помощью сдвига — $E\ni x\mapsto x+a\in E$ можно сделать так, чтобы $V\ni 0$). Пусть $z\notin V$, так как V — замкнуто по норме, то:

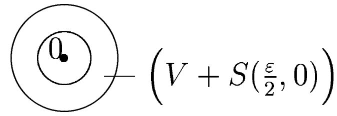
$$\forall\varepsilon>0 \text{ найдется шар } S(\varepsilon,x):\ \ S(\varepsilon,x)\cap V=\varnothing;$$

Рассмотрим два множества $S\big(\frac{\varepsilon}{2},z\big)$ и $V+S\big(\frac{\varepsilon}{2},0)\big)$; тогда

$$S\big(\frac{\varepsilon}{2},z\big)\cap\big(V+S\big(\frac{\varepsilon}{2},0)\big)=\varnothing,$$

так как $S(\varepsilon, z) \cap V = \varnothing$.





Действительно, положим, что:

$$W = V + S\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) = \{x = x_1 + x_2, \;\; x_1 \in V, \;\; \|x_2\| < \frac{\varepsilon}{2}\},$$

(Отметим, что $\|x_2\| < \frac{\varepsilon}{2} \implies x_2 \in S\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right)$);
и докажем, что

$$W \cap S\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) = \varnothing \qquad (*)$$

Если $W \cap S\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) \neq \varnothing$, то

$$\exists v \in V, \;\; x_1 \colon \|x_1\| < \frac{\varepsilon}{2}, \;\; x_2 \in S\,(\frac{\varepsilon}{2}, z) \colon \;\; v + x_1 = x_2;$$

$$\text{но} \quad x_2 \in S\,(\frac{\varepsilon}{2}, z) \quad \implies \quad x_2 = z + x_3;$$

$$\|x_3\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \implies \quad \|x_2 - z\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $v = x_3 + z - x_1$

$$\|z - v\| = \|z + x_1 - x_3 - z\| \leqslant \|x_3\| + \|x_1\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

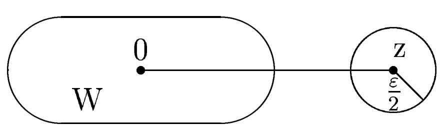
Следовательно, $v \in V$ и

$$v = x_3 + z - x_1 \in S(\varepsilon, z);$$

но это невозможно, так как V не пересекается с $S(\varepsilon, z)$, поэтому равенство $W \cap S\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) = \varnothing$ выполнено.

$$V + S\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) = W, \quad W \supset V, \quad W \supset S\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right);$$

$W-$ открыто, выпукло и содержит 0, то его функционал Минковского p_W — это выпуклый функционал:



Заметим, что $z - \frac{\varepsilon}{4}\frac{z}{\|z\|} \in S\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right)$; так как

$$\left\|z - \frac{\varepsilon}{4}\frac{z}{\|z\|} - z\right\| = \left\|\frac{\varepsilon}{4}\frac{z}{\|z\|}\right\| = \frac{\varepsilon}{4};$$

поэтому $z - \frac{\varepsilon}{4}\frac{z}{\|z\|} \notin W$, и, значит,

$$p_W\Big((z - \frac{\varepsilon z}{4\|z\|})\Big) \geqslant 1 \quad \Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{4\|z\|}\right)p_W(z)\geqslant 1.$$

Таким образом,

$$p_W(z)\geqslant\frac{1}{1-\dfrac{\varepsilon}{4\|z\|}}=1+\delta,\quad \delta>0.$$

Отметим, что

$$1-\frac{\varepsilon}{4\|z\|}>0,$$

так как $\varepsilon\leqslant\|z\|$, поскольку шар $S(z,\varepsilon)$ не может содержать 0, (потому что он не пересекается с V, а V содержит 0) Рассмотрим одномерное подпространство

$$E_1=\{\lambda z:\quad \lambda\in\mathbb{R}^1\}.$$

Определим $f\in E_1^*$

$$f(\lambda z)=\lambda f(z)=\lambda(1+\delta).$$

Тогда если $x\in E_1$, то $f(x)\leqslant p_W(x)$: $\Big($ Проверим это:

$$f(\lambda z)=\lambda f(z)=\lambda(1+\delta)=\lambda p_W(z)=p_W(\lambda z)=p_W(x)\Big).$$

Применим теорему Хана-Банаха и продолжим f на всё E с сохранением неравенства $f(x)\leqslant p_W(x)$. Пусть f — такое продолжение. Тогда

$$\overline{f}(x)\leqslant p_W(x),\quad \forall x\in E.$$

$\overline{f}$ - непрерывно, так как из того, что $W\supset S\big(\frac{\varepsilon}{2},0\big)$ следует, что если $\|x\|<\frac{\varepsilon}{2}$, то

$$p_W(x)<1 \text{ и } \left.\begin{matrix}\overline{f}(x)<1\\ f(-x)<1\end{matrix}\right\}\quad\Rightarrow$$

$$|\overline{f}(x)|<1\quad\Rightarrow\quad \overline{f}\ -\ \text{непрерывно в нуле и потому всюду.}$$

Рассмотрим множество $\{x:\quad \overline{f}(x)>1+\frac{\delta}{2}\}=S$; это множество открыто в слабой топологии и $z\in S$, $\overline{f}(z)=f(z)=1+\delta$. Если $x\in V$, то $x\in W$, а следовательно, $p_W(x)<1\quad\Rightarrow\quad\overline{f}(x)<1$.

Следовательно, $V\cap S=\varnothing\quad\Rightarrow$ любая точка z, не принадлежащая V, обладает окрестностью в слабой топологии (в нашем случае это множество S), которая не пересекает V, следовательно, V содержит все свои точки прикосновения в слабой топологии $\Rightarrow$ V- замкнуто в слабой топологии. ■

3. Гильбертовы пространства.

Определение 1. Пусть E — линейное пространство над $\mathbb{R}$. *Скалярным произведением на линейном пространстве* называется невырожденная симметрическая положительно определенная билинейная форма:

$$b\colon \quad E \times E \to \mathbb{R}^1;$$

иначе говоря, b обладает следующими свойствами:

1. $b(x,x) \geqslant 0, \quad b(x,x) = 0 \iff x = 0;$
2. $b(x_1,x_2) = b(x_2,x_1);$
3. $b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, z) = \lambda_1 b(x_1,z) + \lambda_2 b(x_2,z).$

Определение 2. *Евклидовым пространством* называется пара:

$$(E,b) \equiv (E, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_E), \text{ где}$$

E — линейное пространство над $\mathbb{R}$, а b — скалярное произведение на E. Норма определяется так: $\|x\|^2 = (x,x)$.

Упражнение 1. Показать, что все аксиомы нормы выполняются.
Неравенство Коши-Буняковского:

$$\forall x, z \in E \quad \Rightarrow \quad |(x,z)| \leqslant \|x\|\|z\|;$$

Доказательство упражнения 1:

$$\lambda \mapsto (\lambda x + z, \lambda x + z) = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x,z) + \|z\|^2 \geqslant 0.$$

Поэтому дискриминант трехчлена справа $\geqslant 0$; но это и занчит, что справедливо неравенство Коши-Буняковского.

Определение 3. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым.*

Пример.

$$l_2 = \{(x_n)\colon \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\};$$

$$x = (x_n), \quad z = (z_n) \quad \text{и} \quad (x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n.$$

Покажем, что это определение корректно, то есть что ряд справа сходится. Рассмотрим $l_2^0 \subset l_2$ определяется так:

$$l_2^0 = \{x = (x_n)\colon \ \exists k(x)\colon \ \ n > k(x) \quad \Rightarrow \quad x_n = 0\}.$$

Равенство $(x,z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n z_n$ определяет на l_2^0 скалярное произведение (так как при $x, z \in l_2^0$ последний ряд содержит только конечное число ненулевых членов).

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{N} |x_n z_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} |z_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

по неравенству Коши-Буняковского.

$$(x_n) \in l_2, \quad (z_n) \in l_2.$$

Пусть $N \to \infty$ справа, тогда ряд $(x_n z_n)$ — сходится абсолютно.

Проверим, что пространство l_2 - линейно, то есть надо проверить, что:

$$(x_n) \in l_2,\ (z_n) \in l_2 \quad \Rightarrow \quad (z_n + x_n) \in l_2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + z_n)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(2|x_n|^2 + 2|z_n|^2) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad l_2$ — линейно; так как скалярное произведение, как только что было показано, определено корректно, то l_2 — евклидово пространство.

Упражнение 2. Доказать, что l_2 является гильбертовым пространством.

Определение 4. Элементы $e_n,\ e_k$ называются *ортогональными*, если $(e_n, e_k) = 0$.

Определение 5. Топологическое пространство T называется *сепарабельным*, если оно содержит хотя бы одно не более чем счетное всюду плотное множество S (всякое такое множество называется *множеством сепарабельности*).

Таким образом, S - множество сепарабельности в T, если

$$\forall x \in T, \quad \forall V(x): \quad \exists z \in S \cap V(x).$$

Упражнение 3. Пусть E — сепарабельное метрическое пространство и пусть $E_1 \subset E$ — подпространство. Доказать, что E_1 — сепарабельно (это неверно для произвольных топологических пространств).

Доказательство: (указание)

□ Если для $n \in \mathbb{N}$ и $x \in S$. множество $S(\frac{1}{n}, x) \cap E_1$ — непусто, то пусть $z(n, x)$ — какой-нибудь его элемент. Положим

$$S_1 = \{z(n, x): \quad n \in N,\ x \in S\}.$$

Множество $z(n, x)$ не более чем счетно;

$$\text{из} \quad \forall z \in E_1 \quad \forall n \in N \quad \exists v \in S: \quad \rho(v, z) < \frac{1}{n}$$

вытекает, что S_1 непусто и всюду плотно в E_1. ■

Предложение 1. Пусть $(x_n) \subset E$ — не более чем счетное линейно независимое подмножество евклидова пространства E. Тогда

$$\exists (e_n) \subset E: \quad (e_k, e_j) = 0 \text{ при } k \neq j \text{ и } \|e_k\| = 1 \ \ \forall k,$$

со свойством:

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad e_1, \ldots, e_j \in \ \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_j\}$$

При этом автоматически получается, что:

$$\forall j \quad x_1, \ldots, x_j \in \ \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_j\}$$

Доказательство: □ Пусть

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{x_1}{\|x_1\|}; \\ e_2 &= \frac{x_2 - (x_2, e_1)e_1}{\|x_2 - (x_2, e_1)e_1\|}; \\ e_3 &= \frac{x_3 - (x_3, e_1)e_1 - (x_3, e_2)e_2}{\|x_3 - (x_3, e_1)e_1 - (x_3, e_2)e_2\|} \text{ и так далее;} \end{aligned}$$

Такое семейство $\{e_n\}$ обладает всеми перечисленными выше свойствами. ■

Определение 6. Пусть $\{e_n\colon \quad n = 1, 2, \ldots\}$ — множество элементов евклидова пространства E. Это множество называется *ортонормированной системой*, если

$$\forall i \quad \|e_i\| = 1 \text{ и } \forall i,\, j\colon \quad i \neq j, \quad (e_i,\, e_j) = 0.$$

Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированная система. Она называется *тотальной*, если множество конечных линейных комбинаций её элементов плотно в E, то есть $\overline{\operatorname{span}}\{e_n\} = E$, (её замкнутая линейная оболочка совпадает с E); отметим, что понятие тотальности применимо не только к ортонормированной системе элементов евклидова пространства, но и к произвольной системе элементов произвольного нормированного (и даже локально выпуклого) пространства.

(2). Система $\{e_n\}$ называется *замкнутой*, если $\forall x \in E$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2.$$

(3). Система $\{e_n\}$ называется *полной*, если $\forall x \in E$ из того, что $\forall n \quad (x, e_n) = 0$, вытекает что $x = 0$. Не существует вектора, ортогонального всем e_n, кроме нулевого.

(4). Говорят, что $\{e_n\}$ — это *ортонормированный базис* в E, если

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) e_n.$$

Теорема 1. Если пространство E евклидово, то

$$(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (4) \Longrightarrow (3).$$

В случае гильбертова пространства ... $(4) \Longleftrightarrow (3)$.

Утверждение 1.*Неравенство Бесселя*: $\quad \|x\|^2 \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$

Доказательство:

□ Докажем неравенство Бесселя. Пусть $\{e_n\} \subset E$ — ортонормированная система. Тогда

$$0 \ \leqslant\ \|x - \sum_{n=1}^{k}(x, e_n)\, e_n\|^2 \ =\ \Big(x - \sum_{n=1}^{k}(x, e_n)\, e_n, x - \sum_{n=1}^{k}(x, e_n)\, e_n\Big) \ =$$

$$=\ (x, x) - 2\sum_{n=1}^{k} |(x, e_n)|^2 + \sum_{n=1}^{k} |(x, e_n)|^2 \ =\ (x, x) - \sum n = 1^k |(x, e_n)|^2$$

Таким образом, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\|x\|^2 \ \geqslant\ \sum_{n=1}^{k} |(x, e_n)|^2 \quad \Rightarrow \ \text{неравенство Бесселя доказано.}$$

Предложение 2. Рассмотрим $\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2$. $\quad$ Тогда:

$$\inf_{\alpha_k} \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2 \ = \ \|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k) e_k\|^2$$

то есть наилучшая аппроксимация элементов суммой $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ достигается при

$$\alpha_k = (x, e_k).$$

Доказательство: $\square$

$$\Big(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\Big) \quad =$$

$$\|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 (e_k, e_k) \ \boxed{=}$$

Учитывая, что $(e_k, e_k) = 1$:

$$\boxed{=} \ \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \quad =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \underbrace{\| \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \|^2}_{= 0, \text{ если } \alpha_k = (x, e_k)}.$$

Следовательно,

$$\min \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\| = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \quad =$$

$$= \quad \|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k\|^2. \quad \blacksquare$$

Перейдем к доказательству теоремы 1.
(2) $\Longleftrightarrow$ (4), то есть:

$$\forall x \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

$$(4) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \quad \underbrace{\|x - \sum_{n=1}^{k} (x, e_n) e_n\|^2}_{\|} \to 0 \text{ при } k \to \infty;$$

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{k} |(x, e_n)|^2 \to 0 \text{ при } k \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad (2);$$

Таким образом, мы доказали эквивалентность (2) $\Longleftrightarrow$ (4).

Теперь докажем (1) $\Longleftrightarrow$ (4). Напомним, что в (1) система $\{e_n\}$ тотальна,а в (4) система $\{e_n\}$ является ортонормированным базисом. (4) $\Longrightarrow$ (1) Если $\{e_n\}$– базис, то

$$\forall x \quad x = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} (x, e_n)\, e_n;$$

Это значит, что множество конечных линейный комбинаций системы $\{e_n\}$ всюду плотно, то есть эта система тотальна. Таким образом, импликация (4) $\Longrightarrow$ (1) доказана.

(1) $\Longrightarrow$ (4)

$$(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists (\alpha_k)\colon \quad \|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k - x\|^2 < \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k\| < \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\{e_n\}$– базис (так как неравенство при большем n может только усилиться). (1) $\Longrightarrow$ (4) доказано.

Еще нам осталось доказать, что (4) $\Longrightarrow$ (3) (4) $\Longrightarrow$ (3)

$$\forall x \in E \;\; \forall n \quad (x, e_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

так как $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n = 0$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) верно лишь для гильбертовых пространств.

Теорема 2. (Рисса-Фишера) В гильбертовом пространстве E полная ортонормированная система векторов $\{e_n\}$ является ортонормированным базисом.

Доказательство:

$\square$ Пусть $\{e_n\}$ — полная ортонормированна система, то есть верна импликация

$$\Big[\forall n \in \mathbb{N} \quad (x, e_n) = 0\Big] \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

В силу неравенства Бесселя $\|x\|^2 \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$, так что ряд справа сходится, следовательно, последовательность частичных сумм $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k\right\}$ — фундаментальна относительно нормы в нашем гильбертовом пространстве, так как

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n+r} (x, e_k) e_k - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n+r} |(x, e_k)|^2 \overset{n\to\infty}{\to} 0 - \text{ равномерно по } r.$$

Поскольку пространство полно, то существует предел $z \in E$:

$$z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k.$$

Осталось доказать, что $z = x$. Мы знаем, что:

$$(z - x, e_r) = (z, e_r) - (x, e_r) \;=$$

$$= \Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k, e_r\Big) - (x, e_r) \;=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k, e_r\Big) - (x, e_r) \;=$$

$$= (x, e_r) - (x, e_r) = 0. \text{ Мы доказали } (3) \Longrightarrow (4). \quad \blacksquare$$

Упражнение 4. Доказать, что если евклидово пространство не является полным, то в нем существует полная ортонормированная система, которая не является базисом.

Предложение 3. Во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве E существует хотя бы один ортонормированный базис.

Доказательство:

□ Пусть $E \supset S$ — счетное и всюду плотное множество. $S = (a_1, a_2, \ldots)$. Выберем из этого семейства линейную независимую подсистему, которая порождает наше пространство.

Пусть a_{i_1} — первый ненулевой элемент последовательности S; a_{i_2} — первый среди тех элементов a_i той же последовательности, для которых система $\{a_{i_1}, a_i\}$ линейно независима; a_{i_3} — первый среди тех элементов a_i последовательности для которых система $\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_i\}$ линейно независима и т. д.

Пусть $C_j = a_{i_j} \quad (j = 1, 2, \ldots)$. Тогда $\overline{\mathrm{span}}\{C_j\} = E$ (то есть линейно подпространство, порожденное $\{C_j\}$), всюду плотно в E, иначе говоря, система C_j тотальна). Применим к этой системе предложение 1 и получим $(e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$. Линейное подпространство, порожденное $(e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$ всюду плотно в E, то есть, система $\{e_n\}$ тотальна и, следовательно, является базисом. ■

Понятие ортонормированного базиса можно распространить и на несепарабельные пространства; однако не во всяком несепарабельном евклидовом пространстве такой базис существует (но в гильбертовом пространстве он существует всегда).

Определение 7. Пусть H — гильбертово пространство, а E — его замкнутое подпространство. *Проекцией вектора* $x \in H$ *на подпространство* E называется такой вектор $x_E \in E$, что

$$x - x_E \perp E,$$

то есть

$$\forall z \in E \quad \Rightarrow \quad (x - x_E, z) = 0.$$

Обозначать проекцию вектора x на подпространство E мы будем так:

$$\mathrm{pr}_E\, x.$$

Теорема 3. Для любого замкнутого линейного подпространства E гильбертова пространства H и для любого вектора $x \in H$ существует его проекция $\mathrm{pr}_E\, x$ на E.

Доказательство:

□ Мы докажем теорему в предположении, что H сепарабельно, хотя она верна и без этого предположения. Из сепарабельности H вытекает, что E также сепарабельно. Пусть $\{e_n\} \subset E$ — ортонормированный базис в E (его существование вытекает из предложения 3). Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\, e_n$. Он сходится в E, так как в силу неравенства Бесселя сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 < \infty$ (см. доказательство теоремы Рисса-Фишера). Пусть $x_E \in E$ — его сумма. Мы утверждаем, что x_E является искомой ортогональной проекцией. Чтобы доказать это надо проверить, что $(x - x_E) \perp E$.

Но $\forall n \quad (x - x_E, e_n) = (x, e_n) - (x_E, e_n) = 0$; поэтому

$$(x - x_E, \sum_{k=1}^{n} (z, e_k) e_k) = 0.$$

Но $\forall z \in E, \;\; z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (z, e_n) e_n.$

Переходим к пределу, в силу непрерывности скалярного произведения получим, что

$$(x - x_E, z) = 0. \quad \blacksquare$$

Замечание. Использовался тот факт, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n e_n - \text{ сходится; это вытекает из доказательства}$$

теоремы Рисса-Фишера.

Теорема 4. (Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве) Пусть H - гильбертово пространство, $f \in H^*$. Тогда:

$$\exists! \;\; h_f \in H, \quad \forall x \in H \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x, h_f).$$

Доказательство:

$\square$ Пусть

$$H_1 = \operatorname{Ker} f = \{x \in H, \;\; f(x) = 0\}$$

тогда $H_1 -$ замкнутое линейное подпространство в H.

Если $H_1 = H$, то $h_f = 0$.

Пусть $H_1 \neq H$. Тогда $\exists a \in H \setminus H_1$.

Положим $h = a - \operatorname{pr}_{H_1} a$, так что h - ортогонально H_1 и $h \neq 0$ (так как $a \notin H_1$). Пусть $g(x) = (x, h)$, тогда $\quad |(x, h)| \leqslant \|h\| \|x\|$ (неравенство Коши-Буняковского). При этом $\;\forall x \in H_1: \;\; g(x) = 0$, так как $h \perp H_1$ и, значит,

$$\operatorname{Ker} g \supset H_1 = \operatorname{Ker} f.$$

По теореме о трех гомоморфизмах, примененной к диаграмме:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{R}^1 \arrow[dl, dotted] \\ \mathbb{R}^1 & \end{tikzcd}$$

существует такая линейная функция $\psi: \; \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, что

$$\psi\left(f(x)\right) = g(x) \quad \forall x \in H;$$

значит, $\exists\, \alpha_\psi \in \mathbb{R}^1: \quad g(x) = \alpha_\psi f(x) \quad \forall x \in H \quad \Longleftrightarrow \quad g = \alpha_\psi f$. ($\alpha_\psi \neq 0$, так как $h \neq 0$), следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_\psi} g(x) = \frac{1}{\alpha_\psi} (x, h) = \left(x, \frac{h}{\alpha_\psi}\right) = (x, h_f),$$

где $h_f = \frac{h}{\alpha_\psi}$ и мы доказали, что требуемый элемент h_f существует. Теперь докажем, что он единственнен.

Пусть их два: $\exists\, h_f$ и h_f^1 такие, что:

$$\forall x \quad (x, h_f) = (x, h_f^1) = f(x);$$

$$\forall x \quad (x, h_f - h_f^1) = 0;$$

Тогда мы можем в качестве x взять разность $x = h_f - h_f^1$, то есть:

$$(h_f - h_f^1, h_f - h_f^1) = 0 \quad \Rightarrow \quad h_f = h_f^1. \quad \blacksquare$$

Замечание. В условиях теоремы:

$$\|f\| = \|h_f\|.$$

Доказательство замечания:

$\square$ По определению: $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)|$. Таким образом,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(x, h_f)| \; leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|x\|\|h_f\| = \|h_f\| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \|f\| \leqslant \|h_f\|.$$

Докажем, что равенство достигается. Возьмем

$$x = \frac{h_f}{\|h_f\|}, \text{ тогда}$$

$$|f(x)| = f\Big(\frac{h_f}{\|h_f\|}\Big) = \Big(\frac{h_f}{\|h_f\|}, h_f\Big) = \|h_f\| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \|f\| \geqslant \|h_f\|. \quad \blacksquare$$

Упражнение 5. Пользуясь теоремой 3, доказать, что в условиях теоремы Хана-Банаха рассматриваемый линейный и непрерывный функционал на замкнутом подпространстве гильбертова пространства можно продолжить без увеличения нормы единственным образом.

Упражнение 6. Пользуясь теоремой 3, доказать, что гильбертово пространство рефлексивно.

Теорема 5. Всякие два бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространства H_1 и H_2 изоморфны, то есть существует линейное отображение

$$f\colon \quad H_1 \to H_2 \quad \forall x, z \in H_1;$$

$$\Big(f(x), f(z)\Big)_{H_2} = \Big(x, z\Big)_{H_1}$$

Доказательство:

$\square$ Пусть

$$(e_n^1) \subset H_1 - \text{ базис}$$
$$(e_n^2) \subset H_2 - \text{ базис}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, положим $f(e_n^1) = e_n^2$. Так как (e_n^i) базис, то

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n^1$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \qquad (*)$$

Из того, что ряд $(*)$ сходится, следует, что ряд $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n^2$ сходится в H_2. Положим

$$f(x) = f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n^1\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n^2.$$

Пусть $x_1, x_2 \in H_1$ и

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^1 e_n^1, \qquad x_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 e_n^1;$$

Тогда:

$$(x_1, x_2) = \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{k} \alpha_n^1 e_n^1, \sum_{n=1}^{k} \alpha_n^2 e_n^1\Big) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (\alpha_n^1, \alpha_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^1 \alpha_n^2.$$

Равенство

$$(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^1 \alpha_n^2,$$

которое мы только что доказали называется *равенством Парсеваля.*

Следовательно, наше отображение сохраняет скалярное произведение, то есть:

$$f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n^1\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n^2.$$

Теперь докажем, что это отображение является сюрьекцией, то есть отображением на:

Пусть $z \in H_2$, тогда

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n^2 \in H_2, \text{ причем}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 = \|z\|^2 \quad \Rightarrow \quad \exists x \in H_1 \colon \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n^1.$$

Тогда по определению $f(x) = z$. ■

Из приведенных рассуждений следует также, что, если

$$\dim H_1 = \dim H_2 < \infty,$$

то H_2 и H_2 изоморфны.

Определение 8. Пусть H — гильбертово пространство, $A\colon \; H \to H$ — непрерывное линейное отображение, $A \in \mathcal{L}(H)$. *Сопряженным оператором в гильбертовом пространстве к* A называется такой линейный непрерывный оператор H^* в H, что для любых $x, z \in H$ выполняется следующее равенство:

$$(Ax, z) = (x, A^* z), \text{ причем } A^* z = z^*.$$

Покажем, что $\forall a \in \mathcal{L}(H)$, A^* существует.

Пусть $z \in H_1$. Так как линейный функционал $H \ni x \mapsto (Ax, z)$ непрерывен (в силу непрерывности A), то по теореме Рисса $\exists z^* \in H$, такой, что

$$\forall x \in H \ \ (Ax, z) = (x, z^*);$$

положим $A^*z = z^*$. Докажем, что A^*- линейный оператор, то есть что выполняется следующее равенство:

$$A^*(z_1 + z_2) = A^*z_1 + A^*z_2.$$

Действительно,

$$(x, A^*(z_1 + z_2)) = (Ax, (z_1 + z_2)) \ = \ (Ax, z_1) + (Ax, z_2) = (x, A^*z_1) + (x, A^*z_2);$$

$$\forall x \in H \quad (x, A^*(z_1 + z_2)) = (x, A^*z_1, A^*z_2);$$

Следовательно

$$\Rightarrow \quad A^*(z_1 + z_2) = A^*z_1 + A^*z_2.$$

То, что A^* непрерывен вытекает из доказательства следующего предложения.

Предложение 4. В гильбертовом пространстве норма непрерывного линейного отображения совпадает с нормой сопряженного к нему отображения:

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Доказательство: $\square$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|.$$

Поскольку $\forall h \in H \quad \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |(h, x)| = \|h\|$, то

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{\|z\| \leqslant 1} |(Ax, z)| \ = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1, \\ \|z\| \leqslant 1}} |(x, A^*z)| =$$

$$= \sup_{\|z\| \leqslant 1} \|A^*z\| = \|A^*\|.$$

То, что $\sup\limits_{\|z\| \leqslant 1} \|A^*z\| = \|A^*\| < \infty$, означает, что оператор ограничен и, потому непрерывен. $\blacksquare$

Упражнение 7. Доказать, что

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\| \qquad (*)$$

Определение 9. Всякое банахово пространство с операцией умножения, которая обладает свойством $(*)$ называется *банаховой алгеброй.* Таким образом, $\mathcal{L}(H)$ — банахова алгебра.

Определение 10. $H_1^\perp = \{x \in H \mid \ \forall h \in H_1 \quad (x, h) = 0\}$. ($H_1^\perp$ — замкнутое подпространство, даже если H_1 замкнутым не является — см. ниже).

Лемма 1. Пусть $H_1 \subset H$ — замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства. Тогда

$$\left(H_1^\perp\right)^\perp = H_1.$$

Доказательство:

□ Очевидно, что $\left(H_1^{\perp}\right)^{\perp} \supset H_1$. (даже и в случае, когда H_1 не является замкнутым).

Теперь предположим, что

$$\left(H_1^{\perp}\right)^{\perp} \supset H, \text{ но } \left(H_1^{\perp}\right)^{\perp} \neq H_1.$$

Тогда

$$\exists x \in \left(H_1^{\perp}\right)^{\perp}, \quad x \notin H_1.$$

Так как H_1 замкнуто, то $\exists \operatorname{pr}_{H_1} x$, причем

$$(x - \operatorname{pr}_{H_1} x) \perp H_1;$$

$$\operatorname{pr}_{H_1} x \in H_1 \subset \left(H_1^{\perp}\right)^{\perp};$$

Таким образом, так как $x \in H_1^{\perp\perp}$ и $\operatorname{pr}_{H_1} x \in H_1^{\perp\perp}$ и $H_1^{\perp\perp}$ — линейное подпространство,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{то} & (x - \operatorname{pr}_{H_1} x) \in H_1^{\perp\perp}; \\ \text{кроме того,} & (x - \operatorname{pr}_{H_1} x) \in H_1^{\perp} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x - \operatorname{pr}_{H_1} x) \perp (x - \operatorname{pr}_{H_1} x) \Longrightarrow x = \operatorname{pr}_{H_1} x \in H_1,$$

следовательно, мы получили противоречие. ■

Теорема 6. Пусть $H_1 \subset H$. Тогда $\overline{H}_1 = H^{\perp\perp}$.

Утверждение 2. $H_1^{\perp} = (\overline{H}_1)^{\perp}$;

$$H_1^{\perp} = \left\{x \in H \mid \forall h \in H_1,\, (x, h) = 0\right\};$$

$$(\overline{H}_1)^{\perp} = \left\{x \in H \mid \forall h \in \overline{H}_1,\, (x, h) = 0\right\}.$$

Доказательство утверждения **:**

□ Пусть $z \in H_1^{\perp}$; тогда

$$\forall h \in H_1,\, (z, h) = 0;$$

$$x \in \overline{H}_1 \;\Rightarrow\; \exists\, h_n \in H_1,\, h_n \to x$$

$$\forall n \quad (z, h_n) = 0 \;\Rightarrow (z, x) = 0 \quad \forall x \in \overline{H}_1,$$

то есть $z \in (\overline{H}_1)^{\perp}$. Таким образом, доказано, что $H_1^{\perp} \subset (\overline{H}_1)^{\perp}$. А включение $H_1^{\perp} \supset (\overline{H}_1)^{\perp}$ очевидно, так как $H_1 \subset (\overline{H}_1)^{\perp}$. ■

Доказательство теоремы 6 **:** □

$$H_1^{\perp\perp} = \overline{H}_1^{\perp\perp} = \overline{H}_1 \quad ■$$

Теорема 7. Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$. Тогда

$$\operatorname{Ker} A = \left(\operatorname{Im} A^*\right)^{\perp} \quad \text{и} \quad \left(\operatorname{Ker} A\right)^{\perp} = \left(\overline{\operatorname{Im} A^*}\right).$$

Доказательство:

□ В силу предыдущего предложения достаточно доказать первое равенство. Напомним, что $\operatorname{Ker} A = \{x\colon\; Ax = 0\}$ и

$$(Ax, z) = (x, A^*z) \quad \forall x, z \in H.$$

Поскольку $\left(\operatorname{Im} A^*\right) = \{z = A^*x\colon\; x \in H\}$, то

$$x \in \left(\operatorname{Im} A^*\right)^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall z \in H \;\; (x, A^*z) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall z \in H \;\; (Ax, z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Ax = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \operatorname{Ker} A. \quad ■$$

4. Теория меры

Рассмотрим пространство $\mathcal{L}_1^R(0,a)$ — множество функций, интегрируемые по Риману на $(0,a)$, при этом

$$\|g\|_{\mathcal{L}_1^R} = \int\limits_0^a |g(x)|\,dx.$$

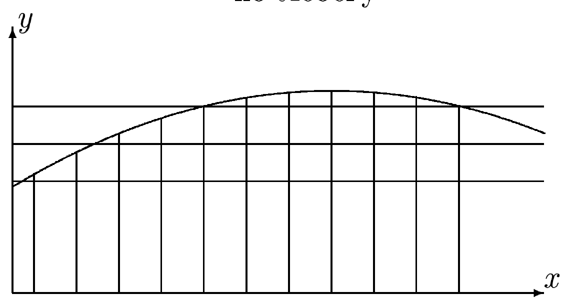
Упражнение 1. Показать, что это пространство $\mathcal{L}_1^R$ неполно. Элементы абстрактного пополнения $\mathcal{L}_1(0,a)$ этого пространства можно реализовать, как некоторые функции, которые называются *интегрируемые по Лебегу* на $(0,a)$.

Разница между определениями интегралов Римана и Лебега (для ограниченных функций на $(0,a)$) состоит в том, что в первом случае используются (неограниченно измельчающиеся) разбиения отрезка $(0,a)$, и во втором — (неограниченно измельчающиеся) разбиения множества

$$\Big[\inf_{x\in[0,a]} f(x),\ \sup_{x\in[0,a]} f(x)\Big].$$

$|$ - по Риману;

$-$ - по Лебегу



Пусть Ω — некоторое множество.

Определение 1. Кольцом S подмножеств множества Ω : непустое семейство S подмножеств множества Ω со свойствами:

(1). $A, B \in S \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in S$;

(2). $A, B \in S \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in S$.

$$\Big((2) \quad \Longrightarrow \quad \varnothing \in S; \quad A \in S \quad \Rightarrow \quad \varnothing = A \setminus A \in S\Big).$$

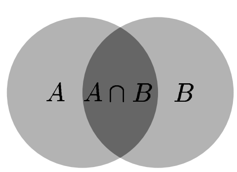
Утверждение 1. (1) и (2) $\quad\Longleftrightarrow\quad$ (1$'$) и (2), где

$$(1'):\quad A, B \in S \quad A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in S.$$

Доказательство:

□ Очевидно, что $\quad (1) \Longrightarrow (1')$.

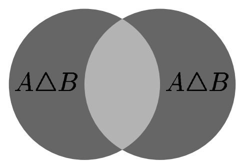
Выведем, что из $\quad (1')$ и $(2) \Longleftrightarrow (1)$ и (2).



$$A, B \in S \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} A \setminus B \in S\big(\text{ по } (2)\big) \\ B \setminus A \in S\big(\text{ по } (2)\big) \\ A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \in S \end{matrix}\right\} \quad \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \in S\big(\text{ по } (1')\big). \quad \blacksquare$$

(3). $A, B \in S \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in S$;
(4). $A, B \in S \quad \Rightarrow \quad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in S$.
Утверждение 2. (3) и (4) $\quad\Longleftrightarrow\quad$ (1) и (2).
Доказательство: $\square$

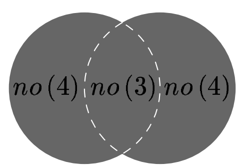


$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cup B \setminus (A \setminus (A \setminus B)),$$

так что докажем, что (3) и (4) $\quad\Longrightarrow\quad$ (1) и (2).
(1) и (2) $\quad\Longrightarrow\quad$ (3) и (4). Пусть (3) и (4) выполнено, тогда

$$A, B \in S \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in S;$$

Действительно,

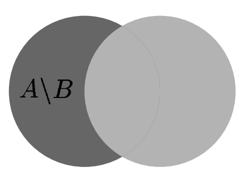


a). $\Big((3) \text{ и } (4)\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big[A, B \in S \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} A \cap B \in S \\ A \triangle B \in S \Big] \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad A \cup B = (A \cap B) \triangle (A \triangle B) \in S \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \Big((3) \text{ и } (4)\Big) \quad \Rightarrow \quad (1).$

b). Докажем, что $\Big((3) \text{ и } (4)\Big) \quad \Rightarrow \quad (2).$



$$\Big(C \supset D \quad \Rightarrow \quad C \triangle D = C \setminus D\Big).$$

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \triangle B. \quad \blacksquare$$

$$\text{Пусть } A + B = A \triangle B; \quad A \cdots B = A \cap B;$$

Тогда все аксиомы алгебраического кольца выполнены $(\varnothing = 0, A + A = 0, 1 = \Omega)$.

Определение 2. *Полукольцо* — семейство $\mathcal{P}$ подмножеств множества Ω со свойствами:

(1). $A, B \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{P}$;

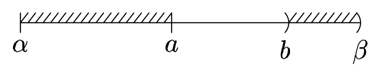
(2). $A, B \in \mathcal{P} \quad A \supset B \quad \Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}$,

$$\exists A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P},\ A \setminus B = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big);\ \ A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Примеры:

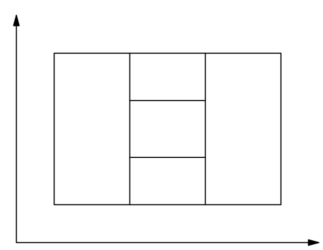
1. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^1$, тогда

$$\mathcal{P} = \big\{[\alpha, \beta),\ \alpha < \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1\big\} \text{ — полукольцо.}$$



2. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^2$, тогда

$$\mathcal{P} = \{[\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2)\} \text{ — тоже полукольцо.}$$



Предложение 1. Пусть $\forall \alpha \in A \quad S_\alpha$ — кольцо подмножеств Ω, тогда $\bigcap\limits_{\alpha} S_\alpha$ — снова кольцо.

Доказательство:

$\square \quad \bigcap\limits_{\alpha} S_\alpha \neq \varnothing$ так как $\forall \alpha\ \varnothing \in S_\alpha$. Далее, если $A,\ B \in \bigcap\limits_{\alpha} S_\alpha$, то $\forall \alpha\ A,\ B \in S_\alpha \Rightarrow \forall \alpha\ A \cap B,\ A \triangle B \in S_\alpha \quad \blacksquare$

Определение 3. *Кольцом подмножеств множества Ω*, порождённым системой $\mathcal{P}$ подмножеств Ω называют множество

$$S(\mathcal{P}) = \cap S \text{ по всем кольцам } S \supset \mathcal{P}$$

Из доказанного выше предложения следует, что $S(\mathcal{P})$ — действительно кольцо.

Упражнение 2. Приведите пример двух полуколец, пересечение которых не является полукольцом.

Определение 4. Семейство множеств называется *дизъюнктным*, если его элементы попарно не пересекаются. Объединение такого семейства обозначается символом $\sqcup$ (вместо $\cup$).

Предложение 2. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, тогда $S(\mathcal{P})$ есть множество всевозможных объединений всевозможных конечных дизъюнктных семейтв множеств, являющихся элементами $\mathcal{P}$.

Доказательство.

$\square$ Пусть

$$S_0 = \Big\{\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j,\ n \in \mathbb{N},\ A_j \in \mathcal{P}\Big\}$$

Пусть $S \supset \mathcal{P} \;\Rightarrow\; \forall A_j \in S \;\Rightarrow\; \cup A_j \in S \;\Rightarrow\; \sqcup A_j \in S \;\Rightarrow\; S_0 \subset S$.

Осталось доказать, что S_0- кольцо.

$(1')$ выполнено очевидно.

$$(2) \quad \left.\begin{aligned} &\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \in S_0; \\ &\Big(\bigsqcup_{k=1}^{r} B_k\Big) \in S_0; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \setminus \Big(\bigsqcup_{k=1}^{r} B_k\Big) \overset{?}{\in} S_0.$$

$$\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \setminus \Big(\bigsqcup_{k=1}^{r} B_k\Big) = \bigsqcup_{j=1}^{n}\Big(A_j \setminus \bigsqcup_{k=1}^{r} B_k\Big) \overset{?}{\in} S_0.$$

Проверим, что $A_j \setminus B_k \in S_0$.

$$A_j \setminus B_k = \sqcup A_{jk},$$

где все A_{jk} являются элементами $\mathcal{P}$. Учитывая, что $(A_j \setminus B_1) \in S_0$:

$$A_j \setminus \bigsqcup_{k=1}^{r} B_k = \Big(((A_j \setminus B_1) \setminus B_2) \setminus \ldots \setminus B_r\Big) \in S_0.$$

Следовательно, S_0- кольцо, порожденное полукольцом $\mathcal{P}$ и $S_0 = S(\mathcal{P})$. ■

Определение 5. *Алгебра (соответственно, полуалгебра) подмножеств* - это кольцо (полукольцо) подмножеств, содержащее Ω в качестве элемента.

Определение 6. *σ-кольцом подмножеств множества Ω* называется совокупность S_σ подмножеств множества Ω со свойством:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \in S_\sigma \;\;\Rightarrow\;\; \bigcup_n A_n \in S_\sigma.$$

σ-алгебра — это алгебра, являющаяся σ-кольцом.

Упражнение 3. Пусть S_σ — σ-кольцо. Доказать, что:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \in S_\sigma \quad \Rightarrow \quad \bigcap_n A_n \in S_\sigma.$$

Упражение 4. Привести пример σ-кольца, которое бы не являлось алгеброй.

$\Big($ Ответ: $\Omega = \mathbb{R}^1$, S_σ — множество подмножеств, элементами которого являются все не более чем счетные подмножества прямой $\Big)$.

Определение 7. *Мерой* называется числовая функция ν, определенная на некотором полукольце $\mathcal{P}$ подмножеств какого-то множества Ω и обладающая *свойством аддитивности*, если:

$$\forall A \in \mathcal{P}, \;\; A_j \in \mathcal{P} \;\; j = 1, \ldots, n, \text{ если}$$

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j, \text{ то } \nu A = \sum_{j=1}^{n} \nu A_j.$$

Определение 8. *Счетно аддитивная мера* — это мера со свойством:

$$\text{если} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \;\; A_j \in \mathcal{P}, \;\; A \in \mathcal{P}, \text{ причем } A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j, \text{ то}$$

$$\nu A = \sum_{j=1}^{\infty} \nu A_j.$$

Аналогично, определяются меры и счетно аддитивные векторные меры (они принимают значения в банаховых и даже локально выпуклых пространствах; такие меры используются в теории операторов и теории случайных процессов).

Теорема 1. Пусть ν — мера на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда существует и единственна мера $\overline{\nu}$ на $S(\mathcal{P}) \supset \mathcal{P}$, совпадающая с ν на $\mathcal{P}$.

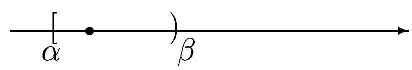
Доказательство:

$\square$ Если $A \in S(\mathcal{P}) \quad \Rightarrow \quad A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j, \ \ A_j \in \mathcal{P}$, то должно быть выполнено:

$$\overline{\nu} A = \sum_{j=1}^{n} \overline{\nu} A_j = \sum_{j=1}^{n} \nu A_j.$$

(таким образом, мера, о которой говорится в теореме, единственна). Доказать, как упражнение, что $\overline{\nu}$ — это продолжение меры ν. $\blacksquare$

Пример: Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо из предыдущего примера.



$$\nu\Big([\alpha, \beta)\Big) = \beta - \alpha \text{ — мера Лебега } (\alpha < \beta).$$

Упражнение 5. Доказать, что мера Лебега на отрезке счетно аддитивна.

Утверждение 3. Если исходная мера на полукольце счетно аддитивна, то продолженная мера на порожденном кольце тоже счетно аддитивна (в доказательстве мы предполагаем, что мера принимает неотрицательные значения).

Доказательство:

$\square$ Докажем счетную аддитивность. Напомним, что

$$\overline{\nu}\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \nu A_k, \quad (\forall k \ \ A_k \in \mathcal{P}).$$

Мы хотим доказать, что если $B_j \in S(\mathcal{P})$ и $B \in S(\mathcal{P}), B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, то

$$\overline{\nu} B = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\nu} B_j.$$

$$\exists D_i \in \mathcal{P}: \quad B = \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i; \quad \forall j \in \mathbb{N} \ \ B_j = \bigsqcup_{r=1}^{r_j} D_{rj}, \quad \text{при } D_{rj} \in \mathcal{P}, \text{ так что}$$

$$B = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \Big(\bigsqcup_{r=1}^{r_j} D_{rj}\Big);$$

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i = \bigsqcup_{i,j,r} \underbrace{D_i \cap D_{rj}}_{\in \mathcal{P}} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \underbrace{\Big(\bigsqcup_{j,r} \overbrace{D_i \cap D_{rj}}^{\in \mathcal{P}}\Big)}_{D_i}.$$

$\nu D_i = \sum\limits_{j,r} \nu\Big(D_i \cap D_{jr}\Big)$ (так как ν счетно аддитивна на $\mathcal{P}$)

$$\overline{\nu} B = \sum_{i=1}^{n} \overline{\nu} D_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,r} \nu\Big(D_i \cap D_{jr}\Big)$$

Так как мера неотрицательна, мы можем суммировать в любом порядке.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j,r} \nu\Big(D_i \cap D_{jr}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\overbrace{\sum_{i,r} \nu(\underbrace{D_i \cap D_{jr}}_{\in \mathcal{P}})}^{\nu B_j}\Big).$$

Но $\forall j \quad B_j = \bigsqcup\limits_{i,r} D_i \cap D_{jr}$ (конечное объединение), поэтому

$$\nu B_j = \sum_{i,r} \nu(D_i \cap D_{jr});$$

поэтому $\overline{\nu} B = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \overline{\nu} B_j \quad \blacksquare$

Примеры.

1). Пусть $\Omega = \mathbb{N}$, и пусть $S = \{$ конечные подмножества множества $\mathbb{N}$ и их дополнения$\}$ и $\forall k.\ \varepsilon_k > 0$, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = 1$.

Если $S \ni A = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$, то полагаем:

$$\nu A = \varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \ldots + \varepsilon_{n_r};$$

Пусть еще $\nu\Omega = 2$.
Если $B = \Omega \setminus A$, тогда полагаем, что $\nu B = \nu\Omega - \nu A = 2 - \nu A$. Эта мера не счётно аддитивна, но аддитивна, так как $\Omega = \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \quad \nu\{n\} = \varepsilon_n$. Эти множества попарно не пересекаются, причем

$$2 = \nu\Omega \neq \sum \nu\{n\} = \sum \varepsilon_n = 1.$$

2). Пусть $\Omega = \mathbb{R}^1$, и пусть $S = \{$ конечные подмножества множества $\mathbb{R}^1$ и их дополнения$\}$.

$$\nu\Omega = 0;$$

Учитывая, что A — конечное множество, то $\nu A =$ число элементов A; $\nu\Omega \setminus A = -($ число элементов $A)$.

Эта мера счётно аддитивна и знакопеременна на нашем кольце (и множество её значений не ограничено).

Теорема 2. Пусть S — кольцо подмножеств Ω и ν — неотрицательная мера на S. Тогда ν — счётно аддитивно тогда и только тогда, когда ν обладает таким свойством: пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ — последовательность $A_j \in S$, $\forall j$, причем $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \varnothing$, тогда $\nu A_j \to 0$ (если S всего лишь полукольцо, то это условие является необходимым, но не является достаточным, для счетной аддитивности меры).

Доказательство: $\square$

$\Longrightarrow$ Пусть S — кольцо, $A \in S$, $\forall n\ \ A_n \in S$, $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Нам надо доказать, что

$$\nu A = \sum_{k=1}^{\infty} \nu A_k.$$

$$B_k = \bigsqcup_{n=k}^{\infty} A_n \qquad B_1 \supset B_2 \supset B_3 \dots$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \varnothing, \quad \forall j \;\; B_j \in S - \text{ потому что}$$

$$B_j = A \setminus \Big(\bigsqcup_{i<j} A_i\Big), \text{ где } A_i \in S$$

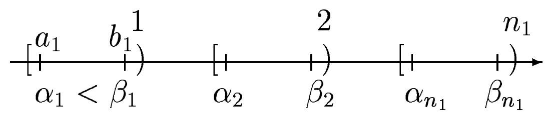
$$\nu A = \nu(A \setminus B_k) + \nu B_k = \nu\Big(\bigsqcup_{i<k} A_i\Big) + \nu B_k \quad \boxed{=}$$

$\Rightarrow \quad \nu B_k \to 0$ (в силу нашего утверждения).

$$\boxed{=} \quad \sum_{i=1}^{k-1} \nu A_i + \overbrace{\nu B_k}^{\to 0} \to \sum_{i=1}^{\infty} \nu A_i$$

Доказательство в обратную сторону сделать, как упражнение дома. ■

Рассмотрим



$$\nu\big([\alpha_i, \beta_i)\big) = \beta_i - \alpha_i;$$

$$\nu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i).$$

Доказательство счетной аддитивности меры Лебега. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^1$ и $\mathcal{P}$ — совокупность множеств вида $[a, c]$, (a, c), $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$.

Теорема 3. Мера Лебега на $\mathcal{P}$ счетно аддитивна.

Доказательство:

□ Достаточно доказать, что её продолжение на $S = S(\mathcal{P})$ счетно аддитивно. Пусть $\forall A_i \in S,\; A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$. Мы покажем, что тогда $\nu A_i \to 0$ (это будет означать, что мера Лебега на Sсчетно аддитивна).

Достаточно проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;\; \forall i \geqslant n, \; \nu A_i < \varepsilon$$

При этом $\forall k \;\; A_k = \bigsqcup_{i=1}^{k} [\alpha_i^k, \beta_i^k)$ (так как $A_k \in S = S(\mathcal{P})$).
ε — фиксировано, тогда существует элемент кольца $K_1 \subset A_1$ такой, что

$$K_1 = \bigsqcup_{i=1}^{n_1} [a_i^1, b_i^1], \text{ причем } [a_i, b_i] \subset [\alpha_i, \beta_i)$$

$$\nu(A_1 \setminus K_1) < \varepsilon.$$

$$K_1 \cap A_2 \in S$$

$\nu\big(A_2 \setminus (K_1 \cap A_2)\big) < \varepsilon$ (так как

$$A_2 \subset A_1, \ \Big(A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{n_1} [\alpha_i^1, \beta_i^1)\Big)$$

и $\nu(A_1 \setminus K_1) < \varepsilon$). Это значит, что $\nu(A_2 \cap K_1) > \nu A_2 - \varepsilon$. Поэтому существует $K_2 \subset A_2 \cap K_1$ такие, что

$$\nu K_2 > \nu A_2 - \varepsilon, \text{ причем } K_2 = \bigsqcup_{i=1}^{n_2} [a_i^2, b_i^2].$$

Действуя таким образом, получим последовательсть множеств $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$,

$$K_j = \bigsqcup_{i=1}^{n_j} [a_i^j, b_i^j], \text{ такую, что } K_j \subset A_j \text{ и}$$

$$\begin{gathered} \nu K_1 > \nu A_1 - \varepsilon \\ \nu K_2 > \nu A_2 - \varepsilon \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \nu K_n > \nu A_n - \varepsilon \\ \dots \end{gathered}$$

Так как $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, то $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} K_j = \varnothing$ (поскольку $K_j \subset A_j \ \ \forall j$) $\quad\Rightarrow\quad$ (так как множества K_j компактны)

$$\Rightarrow \quad \exists n\colon \quad K_n = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \forall j > n \ K_j = \varnothing \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \nu K_n = 0 \ \Rightarrow \ \nu A_n < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Далее, если не оговорено противное, предполагается, что мера неотрицательна.

Теорема 4. (Теорема Каратеодори.) Пусть μ — счетно аддитивная мера ν на алгебре S подмножеств множества Ω. Тогда существует и притом единственное продолжение её до счетно аддитивной меры $\overline{\mu}$ на σ-алгебре $A(S)$, порожденной S.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется ввести несколько определений.

Определение 9. Пусть ν — мера на алгебре S подмножеств множества Ω. *Внешней мерой* называется функция ν^*, определенная на σ-алгебре всевозможных подмножеств Ω следующим образом:

$$A \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad \nu^* A = \inf_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \supset A} \ \sum_{j=1}^{\infty} \nu A_j, \quad \forall i \ A_i \in S.$$

Эта функция ν^* определена на всех подмножествах множества Ω.

Внешняя мера ν^* обладает следующим свойством, называемым *счетной полуаддитивностью*:

Если $B \subset \Omega, \ \forall j \ \ B_j \subset \Omega$ и

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,$$

то

$$\nu^* B \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \nu^* B_j.$$

Доказательство:

□ Возьмем $\varepsilon > 0$. Из определения меры вытекает, что:

$$\forall j \ \ \exists A_{jk} \in S: \quad B_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{jk}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu A_{jk} < \nu^* B_j + \frac{\varepsilon}{2^j};$$

Но $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{jk}$; поэтому

$$\nu^* B \leqslant \sum_{k,j=1}^{\infty} \nu A_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \nu A_{jk} <$$

$$< \sum_{j=1}^{\infty} \nu^* B_j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \nu^* B_j + \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, то наше свойство доказано. ■

Напомним *аксиомы метрического пространства*:

1. $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1), \quad \rho(x_1, x_2) \geqslant 0$;
2. $\rho(x_1, x_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2$;
3. $\rho(x_1, x_2) \leqslant \rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_2)$.

Если заменить аксиому 2 более слабой аксиомой

$$(2') : x_1 = x_2 \ \Rightarrow \ \rho(x_1, x_2) = 0$$

(и потребовать выполнения остальных аксиом), то мы получим определение *полуметрики.*

Пусть $T(\Omega)$ — σ-алгебра всех подмножеств множества Ω. Введем на $T(\Omega)$ полуметрику следующим образом:

$$\forall A, B \in T(\Omega) \quad \rho(A, B) = \nu^*(A \triangle B).$$

Докажем, что введенное таким образом определение корректно (то есть что выполнены аксиомы $(1), (2'), (3)$).

Симметричность, неотрицательность и $(2')$ очевидны. Докажем неравенство треугольника.

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B) - \text{ проверьте это самостоятельно.}$$

Воспользуемся свойством внешней меры:

$$\nu^*(A \triangle B) \leqslant \nu^*(A \triangle C) + \nu^*(C \triangle B) -$$

- а это и есть неравенство треугольника.

Предложение 3. Если ν^*– внешняя мера, то выполнено неравенство:

$$\nu^*(B \triangle C) \geqslant |\nu^* B - \nu^* C|.$$

Доказательство:

$\square$ Это — следствие неравенства треугольника. Действительно, из этого неравенства следует, что

$$\rho(B,C) \geqslant |\rho(A,C) - \rho(B,A)|, \text{ то есть}$$

$$\nu^*(B \triangle C) \geqslant |\nu^*(A \triangle B) - \nu^*(A \triangle C)|, \qquad (*)$$

где A, B, C– множества.

Возьмем в качестве множества A пустое. Тогда

$$\nu^*(A \triangle B) = \nu^* B;$$

$$\nu^*(A \triangle C) = \nu^* C.$$

Таким, образом наше неравенство $(*)$ примет вид:

$$\nu^*(B \triangle C) \geqslant |\nu^* B - \nu^* C|,$$

что и требовалось. $\blacksquare$

Вернемся к **теореме Каратеодори**.

Схема доказательства:

У нас имеется $T(\Omega)$ и $S \subset T(\Omega)$. Мы хотим построить σ-алгебру $A(S)$, содержащую S и продолжить на неё нашу меру.

1. В качестве σ-алгебры $A(S)$ возьмем $\overline{S}$ — замыкание S и докажем, что $\overline{S}$ действительно является σ-алгеброй.

2. Докажем счетную аддитивность сужения ν^* на $A(S)$.

3. Докажем, что $\forall A \in S \quad \Rightarrow \quad \nu^* A = \nu A$ (то есть что на S внешняя мера ν^* совпадает с ν).

4. Докажем единственность продолжения.

А. Докажем, что если $A \in S$, то $\nu^* A = \nu A \quad$ (3.). Напомним, что $\nu^* A \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu B_j$ при условии, что $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ и $\forall j \;\; B_j \in S$. Для того, чтобы доказать равенство, нам потребуется доказать два неравенства:

1). $\nu^* A \leqslant \nu A$;

2). $\nu^* A \geqslant \nu A$.

Доказательство 2).

Пусть $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, $\forall j \;\; B_j \in S$. Положим

$$\begin{aligned}
&\tilde{B}_1 = B_1 \cap A,\\
&\tilde{B}_2 = B_2 \cap A \setminus \tilde{B}_1,\\
&\tilde{B}_3 = B_3 \cap A \setminus \left(\tilde{B}_1 \sqcup \tilde{B}_2\right),\\
&\dots\\
&\tilde{B}_n = B_n \cap A \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{n-1} \tilde{B}_k\right)
\end{aligned}$$

Тогда $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A \cap B_i) =$

$$= (A \cap B_1) \sqcup \Big((A \cap B_2) \setminus (A \cap B_1)\Big) \sqcup \Big((A \cap B_3) \setminus \bigcup_{j=1}^{2}(A \cap B_i)\Big) \sqcup \ldots = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i.$$

Итак, мы получили, что

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i.$$

Раз наша мера счетно аддитивна, то

$$\nu A = \sum_{i=1}^{\infty} \nu \tilde{B}_i.$$

Из построения $\forall i \;\; \tilde{B}_i \subset B_i$ и из того, что $\forall C_1 \subset C_2 \quad \Rightarrow \quad \nu C_1 \leqslant \nu C_2$, так как $\nu \geqslant 0$, получаем, что

$$\nu A = \sum_{i=1}^{\infty} \nu \tilde{B}_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \nu B_i.$$

А значит:

$$\nu A \leqslant \inf \sum_{i=1}^{\infty} \nu B_i = \nu^* A.$$

Теперь докажем неравенство 1).:

так как $A \subset A$, то $\nu^* A \leqslant \nu A$. Таким образом, мы доказали, что

$$\nu^* A = \nu A.$$

Упражнение 6. Доказать, что ν — счетно аддитивна тогда и только тогда, когда $\nu^* A = \nu A$ для каждого $A \in S$.

В. Докажем, что $\overline{S}$ есть σ-алгебра подмножеств (то есть пункт 1). $C \in \overline{S}$ означает, что C — точка прикосновения множества S, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A \in S\colon \quad \rho\,(A, C) < \varepsilon,$$

что эквивалентно тому, что

$$\nu^*(A \triangle C) < \varepsilon.$$

Элементы из $\overline{S}$ называются *ν-измеримыми множествами* (конечно, $\overline{S} \supset S$).

Для доказательства того, что $\overline{S}$ — σ-алгебра, надо доказать:

a. $S \in \Omega$

b. если $A, B \in \overline{S}$, то $A \setminus B \in \overline{S}$

c. если $A_i \in \overline{S} \;\; \forall i$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \overline{S}$

Пункт a. следует из того, что если $\Omega \in S$ и $S \subset \overline{S}$, то $\Omega \in \overline{S}$.

b. Справедливо включение:

$$(A \setminus B) \triangle (A_1 \setminus B_1) \subset (A \triangle A_1) \bigcup (B \triangle B_1)$$

— проверьте, что оно верно.

Из этого включения вытекает, что:

$$\nu^*\Big((A \setminus B)\triangle(A_1 \setminus B_1)\Big) \leqslant \nu^*(A\triangle A_1) + \nu^*(B\triangle B_1).$$

Если A, B — измеримы, то

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists A_1, B_1 \in S\colon$$

$$\nu^*(A\triangle A_1) < \varepsilon \text{ и } \nu^*(B\triangle B_1) < \varepsilon,$$

следовательно,

$$\nu^*\Big((A \setminus B)\triangle(A_1 \setminus B_1)\Big) < 2\varepsilon.$$

Откуда немедленно вытекает, что $A \setminus B \in \overline{S}$.

c. Теперь докажем, что если $\forall i \;\; A_i \in \overline{S}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \overline{S}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, тогда, так как $A_i \in \overline{S}$, то

$$\forall i \quad \exists B_i \in S\colon \;\; \nu^*\Big(A_i\triangle B_i\Big) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Рассмотрим такую симметрическую разность:

$$\Big((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\triangle(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\Big) \;\; \subset \;\; \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\triangle B_i)$$

Внешняя мера ν^* — счетно полуаддитивна, следовательно:

$$\nu^*\Big((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\triangle(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\Big) \;\; \leqslant \;\; \sum_{i=1}^{\infty}\nu^*\big(A_i\triangle B_i\big) \;\; \leqslant \;\; \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i} \;\; \leqslant \;\; \varepsilon.$$

Оценим внешнюю меру такой симметрической разности: $B_i \in S$,

$$\Big((\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\triangle(\bigcup_{i=1}^{N} B_i)\Big) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i \;\; \subset \;\; \bigcup_{i=N+1}^{\infty} B_i$$

Таким образом,

$$\nu^*\Big((\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\triangle(\bigcup_{i=1}^{N} B_i)\Big) \;\; \leqslant \;\; \nu^*\Big(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} B_i\Big) \;\; \leqslant \;\; \sum_{i=N+1}^{\infty}\nu^* B_i.$$

Но множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ может не принадлежать S, следовательно, нужно аппроксимировать это множество другим, которое принадлежит S. Заметим, что

$$\exists \tilde{B}_i \in S, \;\; \tilde{B}_i \;\cap\; \tilde{B}_j = 0 \text{ при } i \neq j, \text{ такие что}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i, \text{ достаточно}$$

положить $\quad \tilde{B}_1 = B_1, \;\; \tilde{B}_2 = B_2 \setminus B_1, \;\; \ldots \;\; \tilde{B}_n = B_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} B_i, \ldots$

Прежде чем продолжать доказательство теоремы докажем следующее предложение.

Предложение 4.
Пусть S — алгебра подмножеств множества Ω и μ — мера на S.
Пусть D, $D_i \in S$ $i = 1, 2, \ldots$, $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i \subset D$, тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu D_i \leqslant \mu D.$$

Доказательство:
$\square$ $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство:

$$D = \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} D_i\Big) \bigsqcup \Big(D \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i\Big) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mu D \;=\; \mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} D_i\Big) + \mu\Big(D \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i\Big) \;\geqslant\; \mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} D_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu D_i$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем:

1. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu D_i$ — сходится;
2. $\mu D \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu D_i$. $\blacksquare$

Определение 10. Неотрицательная функция μ на кольце R называется *счетно полуаддитивной*, если:

$$\forall i \;\; A_i \in S, \;\; A \in S, \;\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \Rightarrow \quad \mu A \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Следствие. Мера μ счетно-аддитивна тогда и только тогда, когда μ счетно полуаддитивна.

Доказательство:
$\square$ Пусть $D = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, $D_i \in S$, $D \in S$. Надо доказать, что в этом случае:

$$\mu D = \sum_{i=1}^{\infty} \mu D_i$$

Но в силу предыдущего предложения $\mu D \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu D_i$, а в силу счетной полуаддитивности $\mu D \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu D_i$, так что

$$\mu D = \sum_{i=1}^{\infty} \quad \blacksquare$$

Замечание. Очевидно, что из счетной аддитивности следует счетная полуаддитивность.

Мы хотим доказать, что $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, C \in S$

$$\nu^*\Big((\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\triangle C\Big) < \varepsilon$$

Из только что доказанного вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu\tilde{B}_i < \infty \quad\Rightarrow\quad \exists\, n \in \mathbb{N}\colon \quad \sum_{i=n+1}^{\infty} \nu\tilde{B}_i < \varepsilon$$

Утверждаем, что в качестве C можно взять множество $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{B}_i$. Если C таково, то

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big)\triangle C = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} \tilde{B}_i$$

так как

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big)\triangle C \;\;=\;\; \Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i\Big)\triangle\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} \tilde{B}_i\Big) \;\;=\;\; \Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i\Big) \setminus \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} \tilde{B}_i\Big) \;\;=\;\; \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} \tilde{B}_i$$

Воспользуемся условием счетной полуаддитивности нашей внешней меры:

$$\nu^*\Big((\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\triangle C\Big) \;\;=\;\; \nu^*\Big(\bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} \tilde{B}_i\Big) \;\;\leqslant\;\; \sum_{i=n+1}^{\infty} \nu^*\tilde{B}_i \;\boxed{=}$$

Так как $B_i \in S$, то на S выполняется: $\nu^* = \nu \quad\Rightarrow$

$$\boxed{=} \;\sum_{i=n+1}^{\infty} \nu\tilde{B}_i < \varepsilon$$

Также заметим, что $C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{B}_i \in S$ А следовательно, мы смогли с любой степени точности аппроксимировать множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ множеством из S.

Сейчас проверим, что

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists C \in S\colon \;\; \nu\Big((\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\triangle C\Big) < \varepsilon \qquad\qquad (*)$$

Мы хотели доказать, что если $\forall i \;\; A_i$ — измеримо, $A_i \in A(S)$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in A(S)$.

Мы доказали, что

$$\exists B_i \in S\colon \;\; \rho\,(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \;\;=\;\; \nu^*\Big((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\triangle(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\Big) \;\;<\;\; \varepsilon \qquad\qquad (**)$$

Теперь воспользуемся неравенством треугольника:

$$\rho\,(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, C) \;\;\leqslant\;\; \rho\,(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) + \rho\,(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, C)$$

Так как $\rho(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i) < \varepsilon$ по (**), а $\rho(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i, C) < \varepsilon$ по (*), то:

$$\rho(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) + \rho(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, C) \leqslant 2\varepsilon$$

То есть это означает, что

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(S)$$

Осталось доказать, что сужение $\nu^* \restriction A(S)$ меры ν на σ-алгебру измеримых множеств счетно аддитивно.

Ранее было проверено, что внешняя мера ν^* счетно полуаддитивна; следовательно, осталось проверить, что сужение $\nu^* \restriction A(S)$ — это мера на $A(S)$, то есть что

$$\forall A, B \in A(S), \quad A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \nu^*(A \sqcup B) = \nu^* A + \nu^* B$$

Замечание. Пусть μ — (числовая) функция на произвольной кольце S,

$$\mu: \quad S \to \mathbb{R}^1.$$

Тогда для того, чтобы μ была мерой (то есть удовлетворяли условию конечной аддитивности) необходимо и достаточно, чтобы $\forall C, D \in S$,

$$\mu(C \cup D) + \mu(C \cap D) = \mu C + \mu D.$$

Действительно, если μ — мера, то

$$\mu C + \mu D = \mu D + \mu(C \setminus D) + \mu(C \cap D) = \mu(D \cup C) + \mu(C \cap D)$$

Вернемся к доказательству того, что $\nu^* \restriction A(S)$ — мера.

□ Надо проверить, что для любых $C, D \in A(S)$:

$$\nu^*(C \cap D) + \nu^*(C \cap D) = \nu^* C + \nu^* D.$$

Пусть $C, D \in A(S)$; тогда $\forall \varepsilon \ \ \exists C_1, D_1 \in S$:

$$\nu^*(C \triangle C_1) < \varepsilon$$
$$\nu^*(D \triangle D_1) < \varepsilon$$

Это значит, что:

$$|\nu^* C_1 - \nu^* C| < \varepsilon$$
$$|\nu^* D_1 - \nu^* D| < \varepsilon$$

Выше уже отмечалось, что:

$$(C \cup D) \triangle (C_1 \cup D_1) \subset (C \triangle C_1) \cup (D \triangle D_1)$$

Из полуаддитивности внешней меры вытекает, что

$$\nu^*\Big((C \cup D) \triangle (C_1 \cup D_1)\Big) \leqslant \nu^*(C \triangle C_1) + \nu^*(D \triangle D_1) < 2\varepsilon$$

Аналогично,

$$\nu^*\Big((C\cap D)\triangle(C_1\cap D_1)\Big)\leqslant\nu^*(C\triangle C_1)+\nu^*(D\triangle D_1)<2\varepsilon$$

Следовательно:

$$|\nu^*(C\cup D)-\nu^*(C_1\cup D_1)|<\varepsilon;$$

$$|\nu^*(C\cap D)-\nu^*(C_1\cap D_1)|<\varepsilon;$$

и надо доказать, что $\nu^*(C\cup D)+\nu^*(C\cap D)=\nu^*C+\nu^*D$.
Так как на S: $\nu^*=\nu$, то:

$$\nu(C_1\cup D_1)+\nu(C_1\cap D_1)=\nu C_1+\nu D_1 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\nu^*(C_1\cup D_1)+\nu^*(C_1\cap D_1)=\nu^*C_1+\nu^*D_1$$

$$\nu^*(C_1\cup D_1)+\nu^*(C_1\cap D_1)=\nu^*(C\cup D)+\delta_1+\nu^*(C\cap D)+\delta_2=\nu^*C+\delta_3+\nu^*D+\delta_4,$$

где $|\delta_1|<2\varepsilon,\ |\delta_2|<2\varepsilon,\ |\delta_3|<\varepsilon,\ |\delta_4|<\varepsilon$, тогда

$$\nu^*(C\cup D)+\nu^*(C\cap D)=\nu^*C+\nu^*D+\delta \text{ и } |\delta|<6\varepsilon.$$

Так как это равенство верно для любого ε, то мы доказали наше равенство. ■
Для завершения теоремы Каратеодори нам осталось доказать единственность продолжения $\overline{\nu}$ на $A(S)$. Итак, пусть $\overline{\nu}$, постороенное только что, — продолжение меры ν на $A(S)$ с сохранением счетной аддитивности.
Пусть $\overline{\nu}_1\colon\ A(S)\to\mathbb{R}^+$ — еще одно продолжение ν на $A(S)$, сохраняющее счетную аддитивность. Докажем, что они совпадают. Пусть $A\in A(S)$. Надо доказать, что $\overline{\nu}A=\overline{\nu}_1A$. По определению измеримости

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A_1\in S\colon\ \nu^*(A\triangle A_1<\varepsilon)\quad\Longleftrightarrow\quad\overline{\nu}(A\triangle A_1)<\varepsilon,$$

Покажем, что тогда и $\nu_1(A\triangle A_1)<\varepsilon$. Заметим сначала, что

$$\forall C\in A(S)\ \ \nu^*C\geqslant\overline{\nu}_1C,$$

так как

$$C\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}V_i,\quad V_i\in S,\quad \nu^*C=\inf\sum_{i=1}^{\infty}\nu V_i,$$

а в силу счетной аддитивности счетно аддитивной меры $\overline{\nu}_1$:

$$\overline{\nu}_1C\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\overline{\nu}_1V_i=\sum_{i=1}^{\infty}\nu V_i.$$

И следовательно, $\overline{\nu}_1C\leqslant\inf\sum\limits_{i=1}^{\infty}\nu V_i=\nu^*C$ (при этом мы пользовались тем, что на S $\overline{\nu}_1=\overline{\nu}=\nu$) Из неравенства:

$$\left.\begin{aligned}|\nu^*A-\nu A_1|<\varepsilon\\|\overline{\nu}_1A-\nu A_1|<\varepsilon\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad|\overline{\nu}A-\overline{\nu}_1A|=|\nu A-\overline{\nu}_1A|<2\varepsilon\quad\Rightarrow\quad\overline{\nu}A=\overline{\nu}_1A$$

Таким образом, теорема Каратеодори доказана полностью. ■

Теорема 5. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^1$, пусть $\mathcal{P}_0$— полукольцо и

$$\mathcal{P}_0 = \{[a,b),\ a \in \mathbb{R}^1,\ b \in \mathbb{R}^1,\ a < b\} \cup \{\varnothing\}$$

$$\mathcal{P}_1 = \{[a,b),\ [a,b],\ (a,b],\ (a,b)\} \cup \{\varnothing\}$$

Если $A = [a,b)$ или $A = (a,b]$ или $A = (a,b)$ или $A = [a,b]$ полагаем, что

$$\nu_L A = b - a.$$

Отметим, что $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_0 \neq \mathcal{P}_1,\ S(\mathcal{P}_0) \subset S(\mathcal{P}_1),\ S(\mathcal{P}_0) \neq S(\mathcal{P}_1)$, но

$$A(S(\mathcal{P}_0)) = A(P_0) \supset S(\mathcal{P}_1) \supset \mathcal{P}_1$$

(и, конечно, по определению)

$$A(S(\mathcal{P}_0)) \supset S(\mathcal{P}_0) \supset \mathcal{P}_0.$$

Определение 11. *Мерой Лебега* называется продолжение меры ν_L на порожденное им кольцо, а оттуда на σ-алгебру.

Докажем, что мера Лебега ν_L— счетно аддитивна на полукольце $\mathcal{P}_1$, так как $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$, то это означает, что ν_L счтно аддитивна на $\mathcal{P}_0$. Доказательство счетной аддитивности меры Лебега уже было проведено выше; новое доказательство короче старогои использует другой метод.

Доказательство:

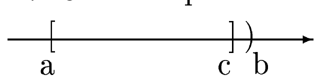
□ Достаточно доказать счетную полуаддитивность.
Пусть $A = [a,b)\,(\in \mathcal{P}),\ A_i \in \mathcal{P}$ и

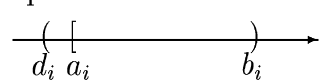
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i)$$

Надо доказать, что:

$$\nu([a,b)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \nu([a_i,b_i))$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем c и d_i следующим образом:





$$a < c < b\colon\quad \varepsilon + \nu\,[a,c] > \nu\,[a,b) \qquad\qquad d_i\colon\quad d_i < a_i < b_i$$

$$\text{и} \quad \left|\nu\big((d_i,b_i)\big) - \nu\big([a_i,b_i)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Мы получили:

$$[a,c] \subset [a,b) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i),$$

где $[a,c]$— компакт, (α_i,β_i)— открытые множества.
Из открытого покрытия компактного отрезка $[a,c]$ можно извлечь конечное подпокрытие

$$\Rightarrow \quad \exists n\colon \quad [a,c] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \nu\left([a,c]\right) \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{n} \nu(\alpha_i,\beta_i) \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{\infty} \nu(\alpha_i,\beta_i)$$

$$\left.\begin{array}{l} \nu\left([a,b]\right) - \nu\left([a,c]\right) \;<\; \varepsilon \\ \forall i \in \mathbb{N} \quad \nu\big((d_i,b_i)\big) - \nu\big([a_i,b_i)\big) \;<\; \dfrac{\varepsilon}{2^i} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \nu\big([a,b)\big) \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{\infty} \nu\big([a_i,b_i)\big) - 2\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \nu$— счетно аддитивна на прямой. $\blacksquare$